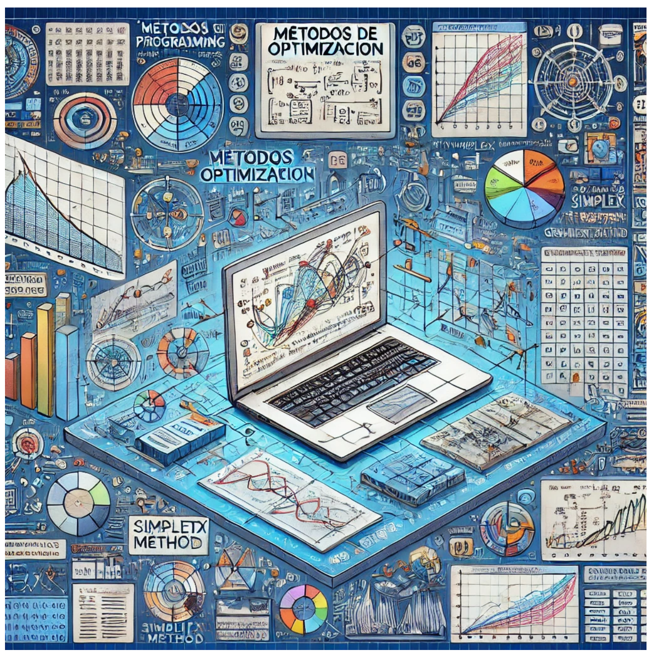
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Actividad N° 9

Resuelve los ejercicios propuestos

[h] 

Andree Alessandro Chili Lima
[229071]
https://github.com/antartida15l
https://trabajo—9-obvjyefhjbv6oiebwdmcf7.streamlit.app/

1. Verifica si los siguientes puntos son minimizadores globales o locales para $f(x) = x^2 - 4x + 5$:

Paso 1: Reescribir la función en forma estándar

La función es:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

Reescribimos completando el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 4x) + 5$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 + 5$$

$$f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Paso 2: Identificar el vértice

La forma $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ muestra que el vértice está en $x = 2$ y el valor mínimo de la función es:

$$f(2) = 1$$

Paso 3: Analizar cada punto

- **Para $x = 2$:**

  $$f(2) = (2 - 2)^2 + 1 = 1$$

  Verificamos que $f(x) > 1$ para cualquier otro x, lo que confirma que $x = 2$ es un **minimizador global**.

- **Para $x = 0$:**

  $$f(0) = (0 - 2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

  En este caso, $f(0) > 1$, por lo que $x = 0$ no es ni un minimizador global ni local.

2. Dibuja la función $f(x) = |x|$ y determina si tiene un mínimo global o local en $x = 0$:

Paso 1: Describir $f(x) = |x|$

La función se define como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Paso 2: Identificar los puntos críticos

La función alcanza su menor valor en $x = 0$, donde:

$$f(0) = 0$$

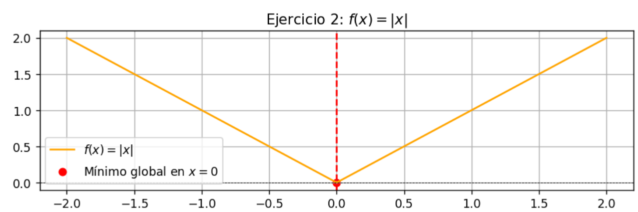
Paso 3: Verificar mínimos locales y globales

- **Mínimo local:** $f(x) = |x|$ es continua y alcanza su menor valor en un vecindario alrededor de $x = 0$.
- **Mínimo global:** En todo su dominio ($\mathbb{R}$), $f(0) = 0$ es el menor valor.

Paso 4: Dibujo

La gráfica de $f(x) = |x|$ consiste en:

- Una línea recta con pendiente positiva para $x \geq 0$.
- Una línea recta con pendiente negativa para $x < 0$.



3. Utilizando el Teorema de Weierstrass, explica por qué $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$ tiene un mínimo global:

Paso 1: Confirmar las condiciones del Teorema de Weierstrass

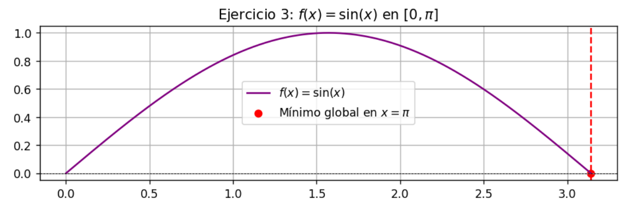
La función $f(x) = \sin(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0, \pi]$. Según el Teorema de Weierstrass, $f(x)$ tiene un mínimo global en este intervalo.

Paso 2: Encontrar el valor mínimo

- $\sin(x)$ es decreciente en $[0, \pi]$.
- En $x = \pi$, $\sin(\pi) = 0$, que es el valor mínimo de $f(x)$ en el intervalo.

Paso 3: Conclusión

El mínimo global ocurre en $x = \pi$, con $f(\pi) = 0$.



4. Considera $f(x, y) = x^2 + y^2$ con $x^2 + y^2 \leq 1$. ¿Dónde se encuentra el mínimo global?

Paso 1: Interpretar la función

La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ representa la distancia al origen al cuadrado.

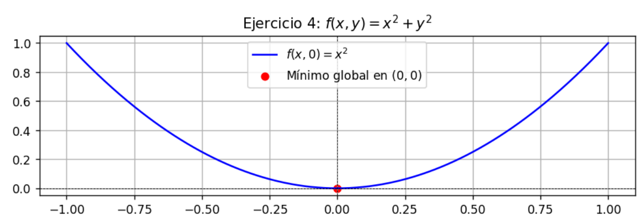
Paso 2: Buscar el valor mínimo

El valor más pequeño ocurre cuando $x = 0$ y $y = 0$:

$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$$

Paso 3: Conclusión

El mínimo global ocurre en el origen $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$.



5. Diseña un ejemplo donde un mínimo global no sea único:

Paso 1: Diseñar una función

Sea:

$$f(x) = \max(|x-1|, |x+1|)$$

Paso 2: Analizar la función

Para $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 1$, ya que el máximo entre $|x-1|$ y $|x+1|$ es siempre 1. Para $x \notin [-1, 1]$, $f(x) > 1$.

Paso 3: Verificar los mínimos globales

Los puntos $x \in [-1, 1]$ son mínimos globales, ya que $f(x) = 1$ es el menor valor posible.

Paso 4: Conclusión

La función tiene un mínimo global no único en todos los puntos $x \in [-1, 1]$.