Master project M1 2022-2022: European and Asian option pricing.

Merci d'envoyer votre travail sous la forme d'un fichier Pdf unique: emmanuel.lepinette@ceremade.dauphine.fr

Attention: malgré que les sujets soient individualisés, tout réponse identique dans la forme à une question pourra être interprétée comme de la fraude et donc sévèrement sanctionné.

Soit une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. La maturité est $T > 0$. Le marché financier considéré est composé de deux actifs. Le premier est un bond S^0 dont la dynamique est $dS_t^0 = r_t S_t^0 dt$ de valeur initiale $S_0^0 = 1$ et r_t est le taux d'intérêt sans risque du marché obligataire dont la dynamique est donnée plus loin. L'actif risqué S a pour dynamique actualisée:

$$d\tilde{S}_t = \sigma_t \tilde{S}_t dW_t, \quad \tilde{S}_0 = 20,$$

où $t \mapsto \sigma_t$ est une volatilité stochastique dont la dynamique est donnée ci-dessous. Enfin, W est un mouvement Brownien standard.

<u>Partie 1</u>

On suppose que la volatilité stochastique vérifie $\sigma_t = 0.05 + \max(X_t, 0.15)$ où X_t vérifie la dynamique

$$dX_t = 0.1 X_t dB_t, \quad X_0 = 0.01,$$

avec B un mouvement Brownien standard indépendant de W.

1) Donner un schéma d'Euler afin de discrétiser le processus X. Donner tous les détails techniques.

2) En déduire le calcul de la volatilité stochastique σ aux dates discrètes.

3) Fournir le code en Python du calcul de σ ainsi que des représentations graphiques. On commentera le code afin de l'expliquer.

<u>Partie 2</u>

On suppose que le taux sans risque vérifie la dynamique

$$dr_t = 0.1(0.03 - r_t)dt + 0.05 dB_t$$

où B est le mouvement Brownien standard de la partie 1. Sa valeur initiale est $r_0 = 0.01$.

1) Donner un schéma d'Euler afin de discrétiser le processus r. Donner tous les détails techniques.

2) En déduire le schéma d'Euler de l'actif sans risque S^0. On commentera le code afin de l'expliquer.

3) Fournir le code Python des deux questions précédentes puis fournir des représentations graphiques des trajectoires de S^0.

Partie 3

1) Donner un schéma d'Euler afin de discrétiser le processus $\tilde{S}$. Donner tous les détails techniques.

2) En déduire le calcul des trajectoires de S aux dates discrètes.

3) Fournir le code en Python des deux questions précédentes ainsi que des représentations graphiques de S. On commentera le code afin de l'expliquer.

Partie 4

On considère les options de maturité T et de payoffs terminaux respectifs:

$$\xi_T^1 = (S_T - K_1)^+, \quad \xi_T^2 = \left(K_2 - \frac{1}{T}\int_0^T S_u du\right)^+, \quad K_1 = 10,\ K_2 = 40.$$

1) Expliquer le principe de pricing sous probabilité de risque neutre et en marché complet.

2) Par quel principe mathématique peut-on approximer un prix selon la question précédente ?

3) Fournir le code Python pour évaluer les prix des options considérées.