均匀分布

1. 离散

取值	1	2	3	4	5	6
概率	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6

特点：① $w_1 + \cdots + w_6 = 1$

所有情况可能性加起来为1

② $E[X] = 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + \cdots + 6 \cdot w_6$

③ $E[X^2] = 1^2 \cdot w_1 + 2^2 \cdot w_2 + \cdots + 6^2 \cdot w_6$

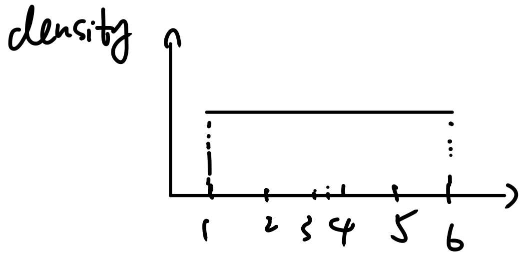
④ $E[X^k] = 1^k w_1 + 2^k w_2 + \cdots + 6^k w_6$

均匀分布只是特殊情况，即 $w_1 = w_2 = \cdots = w_6$

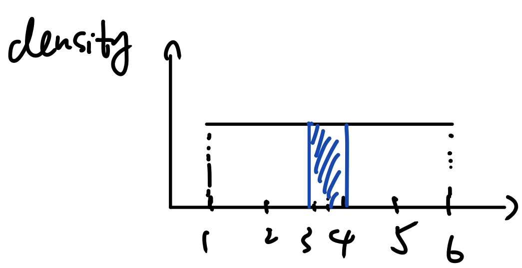
2. 连续

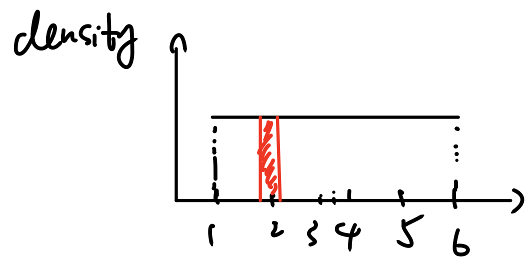
概率不足以表示所有的可能性，用密度

例：$U[1, 6]$



取值 3~4 的概率是面积





特点:

① 总面积为 1

这里长度是 6-1=5, 所有高度是 $\frac{1}{5}$.

* 注意: 离散时每个值对应 $\frac{1}{6}$

所以与连续时不同

对于每一小段 dx,

对应的概率是面积 = 高度 · dx

所以 $\int f(x)dx = 1$

② E[X] 理解成积分

从离散的情况类比,

E[X] 等于每个 X 的取值乘以其概率

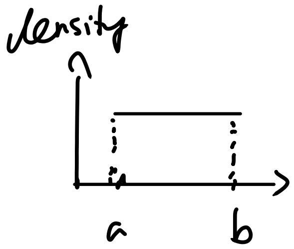
= 高度 · dx

$$E[X] = \int X \cdot \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{密度方程}} \cdot dx}_{\text{概率}}$$

③ $E[X^2] = \int X^2 \cdot f(x)\, dx$

3 一般的 均匀分布 $U(a, b)$

① 利用总面积为1 求密度.



$$\int h\,dx = 1$$

$$hx\Big]_a^b = 1$$

$$h(b-a) = 1$$

$$h = \frac{1}{b-a}$$

即 $f(x) = \frac{1}{b-a}$

② $E[X]$

$$\int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\frac{1}{b-a}\Big]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

(3) $E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$

$= \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a}$

$= \frac{b^3 - a^3}{b-a} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{(b-a)(a^2+b^2+ab)}{b-a} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{a^2+b^2+ab}{3}$

$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$

$= \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

$= \frac{a^2+b^2 -2ab}{12}$

$= \frac{(a-b)^2}{12}$