Problem upotpunjenja grafa do Hamiltonovog

Ante Grbić, Hermina Petric Maretić

Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odjel
Seminar za teorijsko računarstvo

15. veljače, 2013.

Sadržaj

Opis problema

Neka je zadan neusmjeren, bestežinski graf $G = (V,E)$. Potrebno je dodati minimalan broj bridova $d \in \mathbb{N}$ grafu G tako da graf postane Hamiltonov, odnosno da sadrži Hamiltonov ciklus. Ovaj problem je NP-težak.

Povijest problema i dosadašnji rezultati

- Problem su neovisno predstavili Boesch, Chen i McCugh te Goodman i Hedetniemi 1970. godine.
- Objavili su algoritme koji u polinomijalnom vremenu konstruiraju optimalan pokrivač jednostavnim putevima za stablo.
- Kundu je 1976. njihove rezultate poboljšao pokazavši da se isti algoritam može izvesti u linearnom vremenu.

Povijest problema i dosadašnji rezultati

2012. godine David Gamarnik i Maxim Sviridenko računaju asimptotsko rješenje problema za rijetke grafove $G = (V, \frac{c}{n})$, gdje je $c < 1$, a $\frac{c}{n}$ označava vjerojatnost s kojom se svaki brid može pojaviti u grafu G.

Primjena problema

- Dodijeljivanje frekvencija
- Optimizacija programskog koda
- Distribuirani procesi (dodijeljivanje procesa distribuiranim procesorima)

Algoritmi

- Genetski algoritam - krizanje poretkom
- Genetski algoritam - pohlepno križanje
- Imunološki algoritam
- Mravlji algoritam
- Mravlji algoritam "Blizanac"

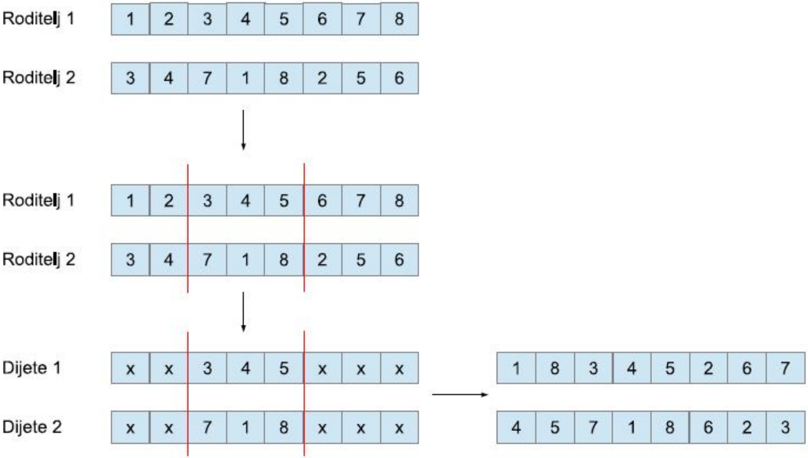
Genetski algoritam

Reprezentacija rješenja: permutacije čvorova bez čvora broj 1.

Algoritam (počinje se sa slučajno generiranom populacijom veličine *brJed*):

1. Ocijeni jedinke
2. Odaberi dvije najbolje i sačuvaj ih u *novaPop*. Roulette wheel selekcijom odaberi $brJed - 2$ jedinki i spremi ih u *novaPop*.
3. Metodom križanja poretka križaj odabrane jedinke.
4. Mutacijom koja je implementirana kao implementacija inverzije mutiraj jedinke u *novaPop*.
5. Vjerojatnost mutacije se s vremenom smanjuje.
6. Početna populaciju zamijeni sa *novaPop*. Nastavi algoritam dok nije zadovoljen uvjet prekida.

Križanje poretkom



(preuzeto iz (5))

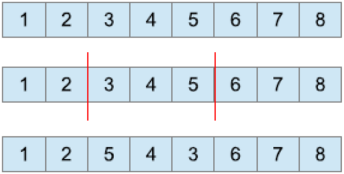
Moguće poboljšanje genetskog algoritma

Moguće poboljšanje pohlepnim operatorom križanja, koji se kao ideja pojavljuje u problemu trgovačkog putnika.
Princip je taj da svi bridovi koji su zajednički roditeljima(ciklusima) postanu osnova njihove djece. Ostatak bridova se generira slučajno.

Imunološki algoritam

1. Stvorimo inicijalnu populaciju antitijela veličine d
2. Svako antitijelo kloniramo k puta (sada imamo (k+1)*d antitijela)
3. Svaki klon prolazi proces hipermutacije
4. Računamo afinitete starih antitijela i hipermutiranih klonova te gradimo novu populaciju od d najboljih

Hipermutacija



(preuzeto iz (5))

Mravlji algoritam

1. Napravimo kopiju matrice prijelaza koju će mravi mijenjati.
2. Svi mravi kreću iz istog vrha i odabiru bridove s vjerojatnošću $\frac{c_n}{\sum c_n}$ ako postoje slobodni bridovi, odnosno nasumično dodaju novi brid ako ne postoji nastavak puta.
3. Mravi evaluiraju svoja rješenja i uspoređuju ih s dosad najboljim putevima.
4. Najbolji mrav ostavlja feromone na svim već postojećim bridovima(i samo njima).
5. Trag na cijelom grafu slabi.

Mravlji algoritam - "blizanac"

- Pohlepna modifikacija mravljeg algoritma
- Mravi kreću iz vrha s najmanje susjeda
- Kad dođu do kraja puta, javlja se blizanac koji se nalazi na početku puta i nastavlja put iz početne točke
- Kad blizanac dođe do kraja puta, dodaje brid prema onom vrhu koji ima najmanje susjeda i postupak se nastavlja.

Blizanac opravdava pohlepnost algoritma!

Dokaz

Neka je $x = x_1, x_2, ..., x_\mathrm{n}$ jedan optimalan ciklus i $x_\mathrm{k} = a_1$ element s minimalnim brojem susjeda. Mrav može kopirati put $x_\mathrm{k}, ..., x_\mathrm{k+l}$ sve dok su ti bridovi postojeći u grafu. Neka je $a_1 ... a_{\mathrm{l}+1} = x_k ... x_{k+l}$. Ako $a_{\mathrm{l}+1}$ više nema susjeda, dolazi blizanac, a ako ima, mrav bira susjeda i opet kopira sve postojeće bridove iz x u jednom smjeru. Dalje induktivno.

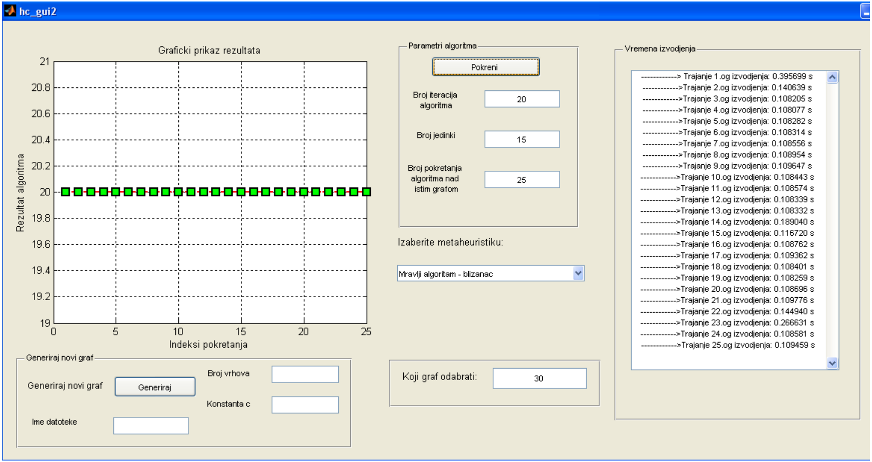
Primijetimo da ovim postupkom nismo poremetili optimalnost ciklusa(nismo dodali nijedan brid, a razdvojenih dijelova ima manje ili jednako kao i prije).

Sada dolazi blizanac. On može kopirati sve postojeće i neposjećene bridove prije x_{k}, neka su to $x_{\text{k-1}}, \ldots, x_{\text{k-s}}$. Nakon toga ponavljamo već opisani postupak dok blizanac ne dođe do vrha bez susjeda.
Mrav skače na neiskorišten vrh s najmanjim brojem susjeda i ponavljamo gornje argumente.
Poanta je u tome da ako mrav krene od "krivog" vrha ili skoči na njega, blizanac lako ispravi problem.

Moguće poboljšanje genetskog i imunološkog algoritma

- Početnu populaciju ne generiramo nasumično, već na neki educirani način
- Koristimo mrave kako bismo generirali početne jedinke
- Drastično poboljšanje, pogotovo za genetski algoritam

Korisničko sučelje



Napomena

Promatramo samo grafove oblika $G = (V, \frac{c}{n})$, gdje $\frac{c}{n}$ označava vjerojatnost s kojom se svaki brid može pojaviti u grafu G.

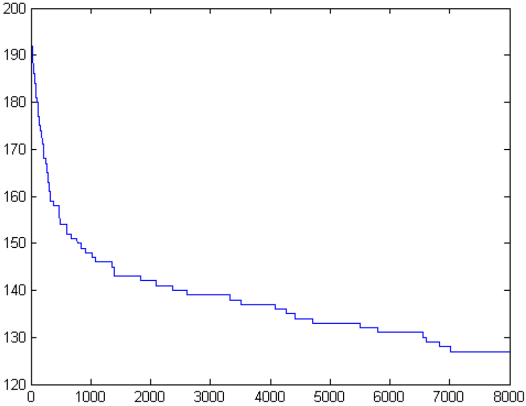
Implementacija

- Svi algoritmi su implementirani u MATLABU
- Grafovi su spremljeni pomoću matrica incidencije
- Matrice su čuvane u kompresiranom sparse formatu
- Funkcije za I/O operacije sa sparse matricama su preuzete iz (6)

Opis testiranja

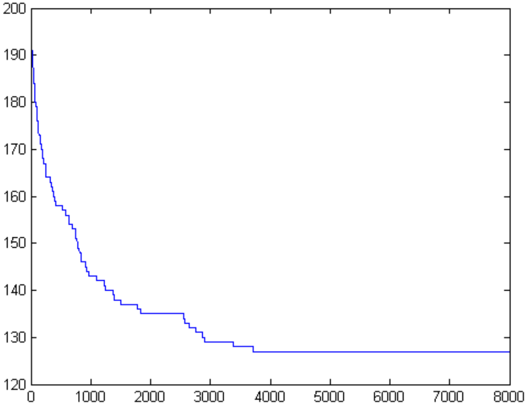
- Testiranja svih algoritama su provedena na 30 nasumično generiranih grafova od 200 vrhova i 2 nasumično generirana grafa od 1000 vrhova.
- Sva testiranja su provedena tri puta nad istim grafovima s jednakim parametrima te rezultati prikazuju usrednjenje.
- Bridovi na svim grafovima su generirani s vjerojatnošću 1/n.
- Posebno su provedena testiranja za Mravlji algoritam "Blizanac" na nasumično generiranim grafovima od 5000 i 10000 vrhova.

200 vrhova



Elitizam: 2
Trajanje izvođenja: 135.1697 sekunde
Najbolji rezultat: 127

200 vrhova

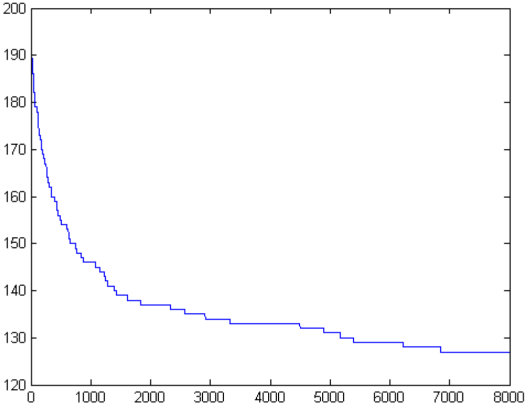


Elitizam: 4

Trajanje izvođenja: 126.5709 sekunde

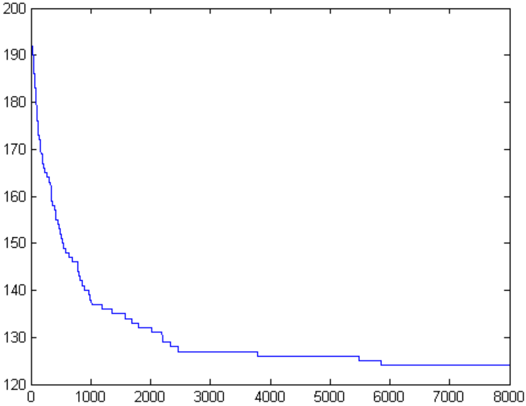
Najbolji rezultat: 127

200 vrhova



Elitizam: 6
Trajanje izvođenja: 122.0285 sekunde
Najbolji rezultat: 127

200 vrhova

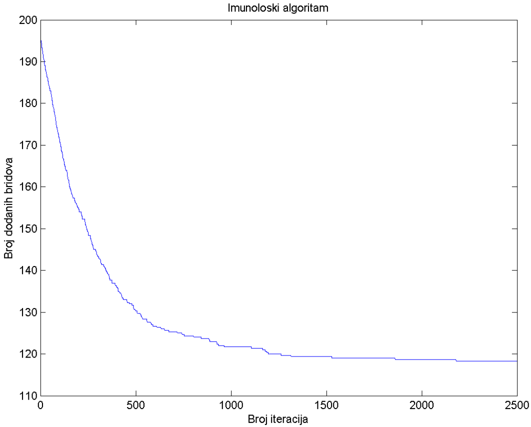


Elitizam: 8

Trajanje izvođenja: 108.6318 sekunde

Najbolji rezultat: 124

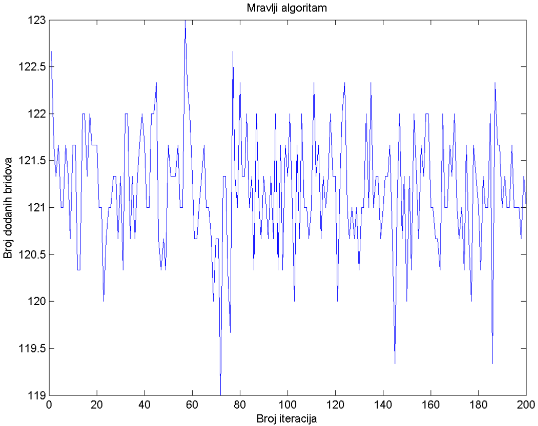
200 vrhova



Trajanje izvođenja: 100.11 sekundi

Najbolji rezultat: 118.33

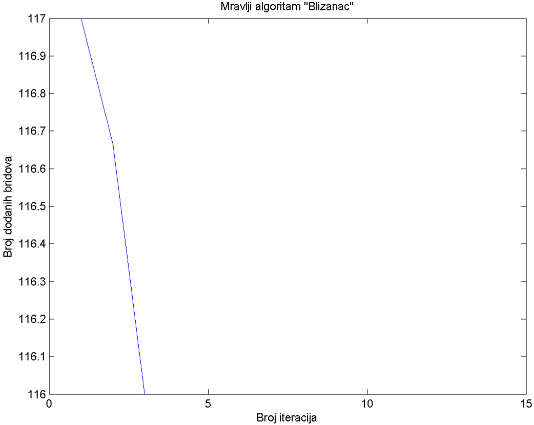
200 vrhova



Trajanje izvođenja: 24.41 sekunde

Najbolji rezultat: 118

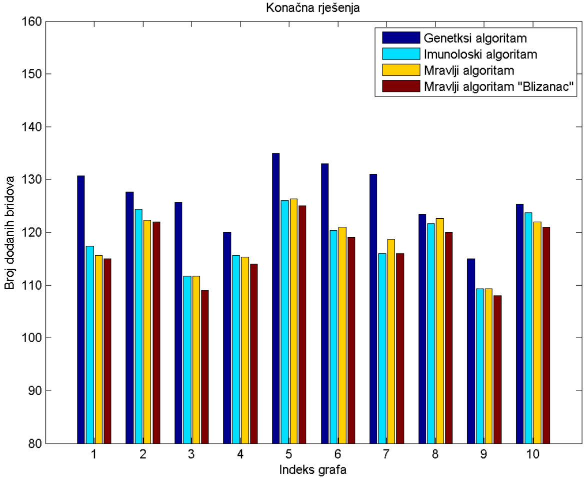
200 vrhova



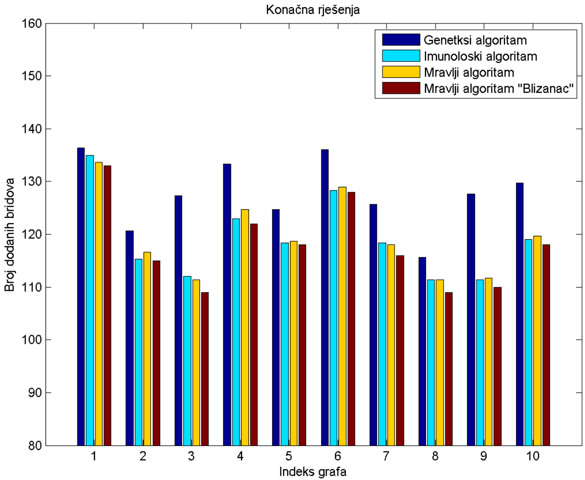
Trajanje izvođenja: 1.17 sekundi

Najbolji rezultat: 116

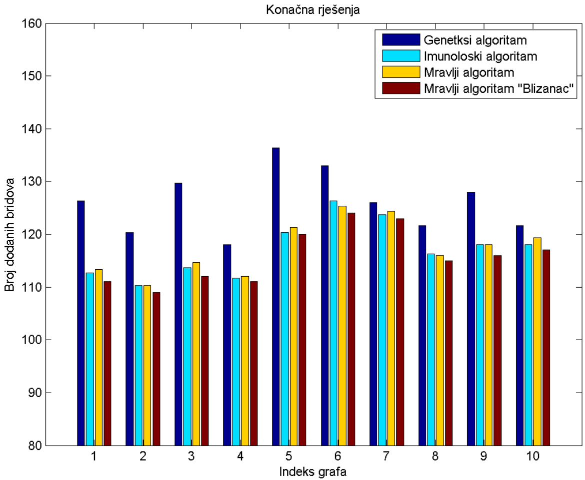
200 vrhova - usporedba rezultata



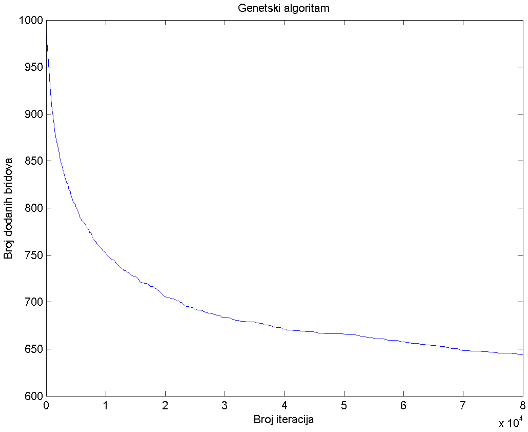
200 vrhova - usporedba rezultata



200 vrhova - usporedba rezultata



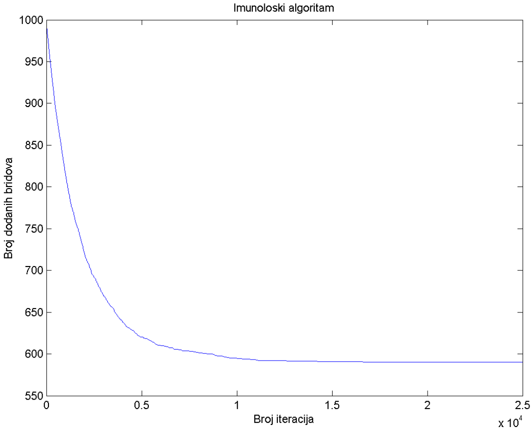
1000 vrhova



Trajanje izvođenja: 5136.6 sekundi

Najbolji rezultat: 644

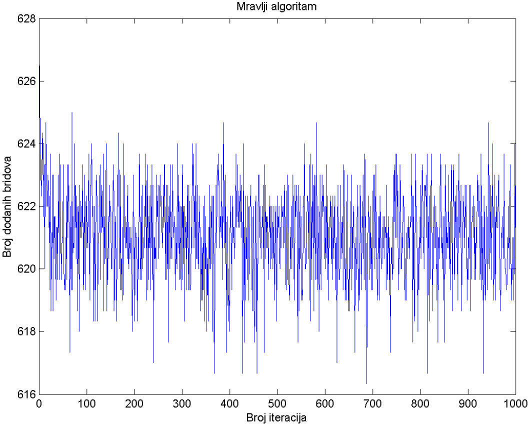
1000 vrhova



Trajanje izvođenja: 3045.6 sekundi

Najbolji rezultat: 590

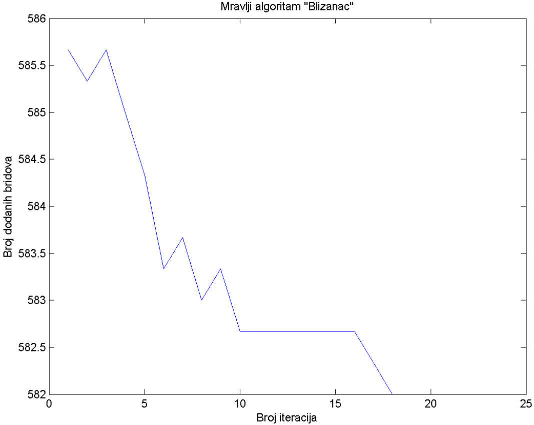
1000 vrhova



Trajanje izvođenja: 2399.5 sekunde

Najbolji rezultat: 611

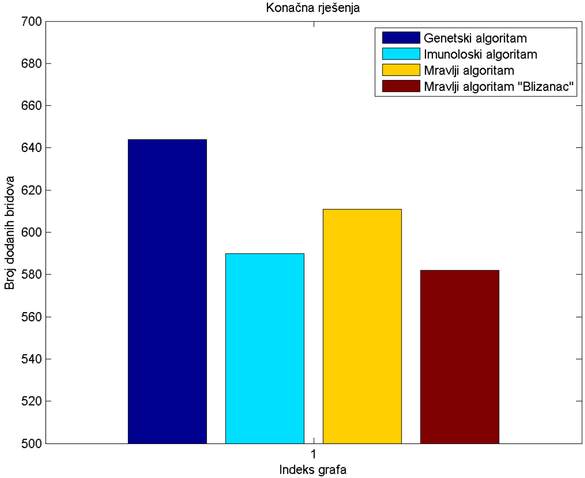
1000 vrhova



Trajanje izvođenja: 24.51 sekundi

Najbolji rezultat: 582

1000 vrhova - usporedba rezultata



Literatura

1. Darrell Whitley, Nam-Wook Yoo: Modeling Simple Genetic Algorithms for Permutation Problems, C.Sc. Department, Colorado State University
2. David Gamarnik, Maxim Sviridenko: Hamiltonian Completions of Sparse Random Graphs, MIT, 2012.
3. D. S. Franzblau, A.Raychaudhuri: Optimal Hamiltonian completions and path covers for trees, and a reduction to maximum flow; Department of Mathematics, CUNY, College of Staten Island, USA, 1999.
4. `http://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_completion`
5. Marko Čupić: Prirodom inspirirani optimizacijski algoritmi. Metaheuristike; FER, Sveučilište u Zagrebu
6. `http://math.nist.gov/MatrixMarket/mmio/matlab/mmiomatlab.html`