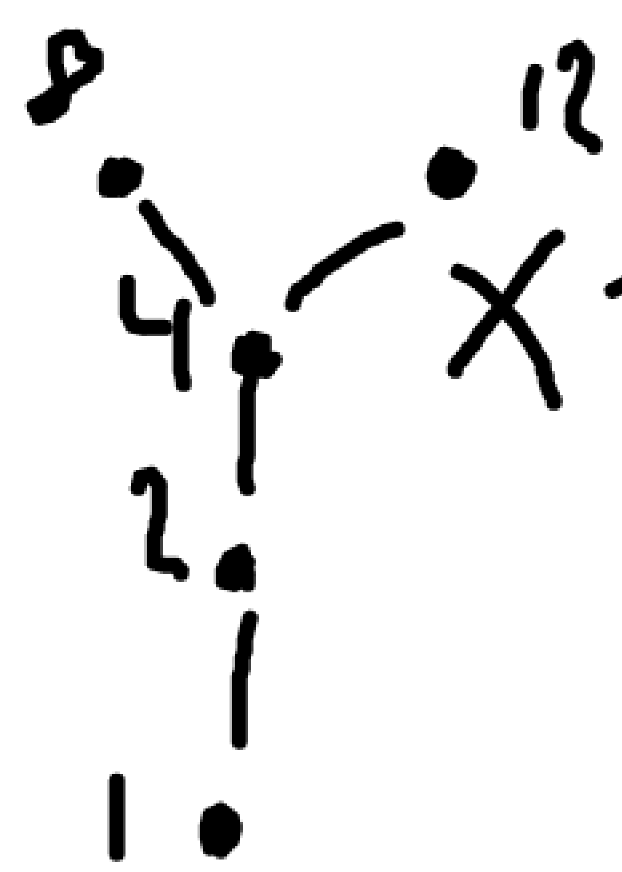
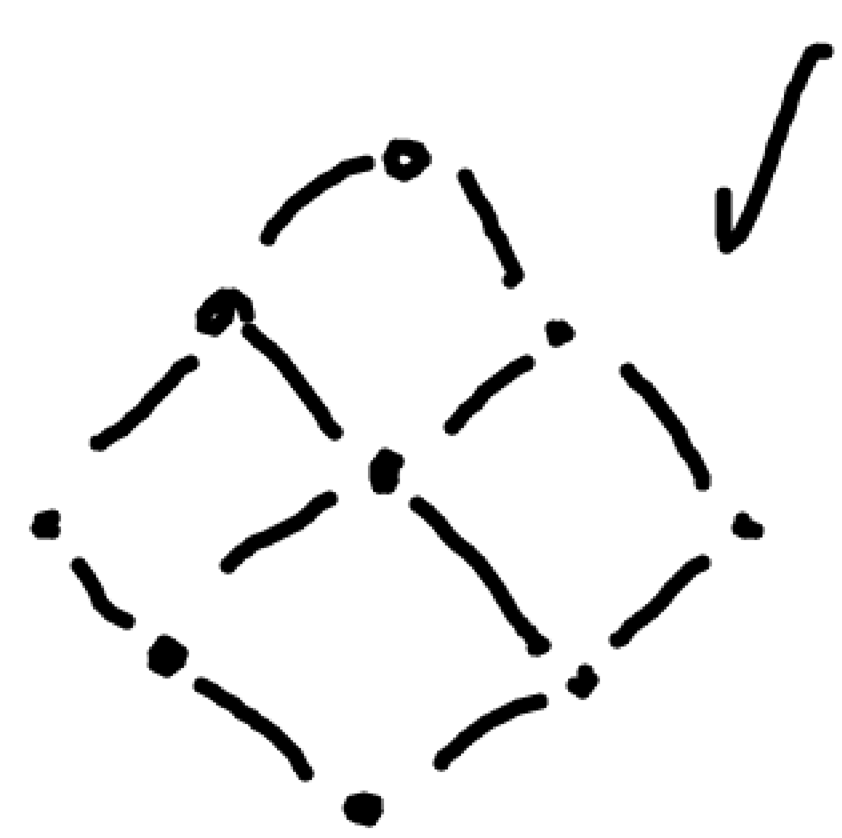
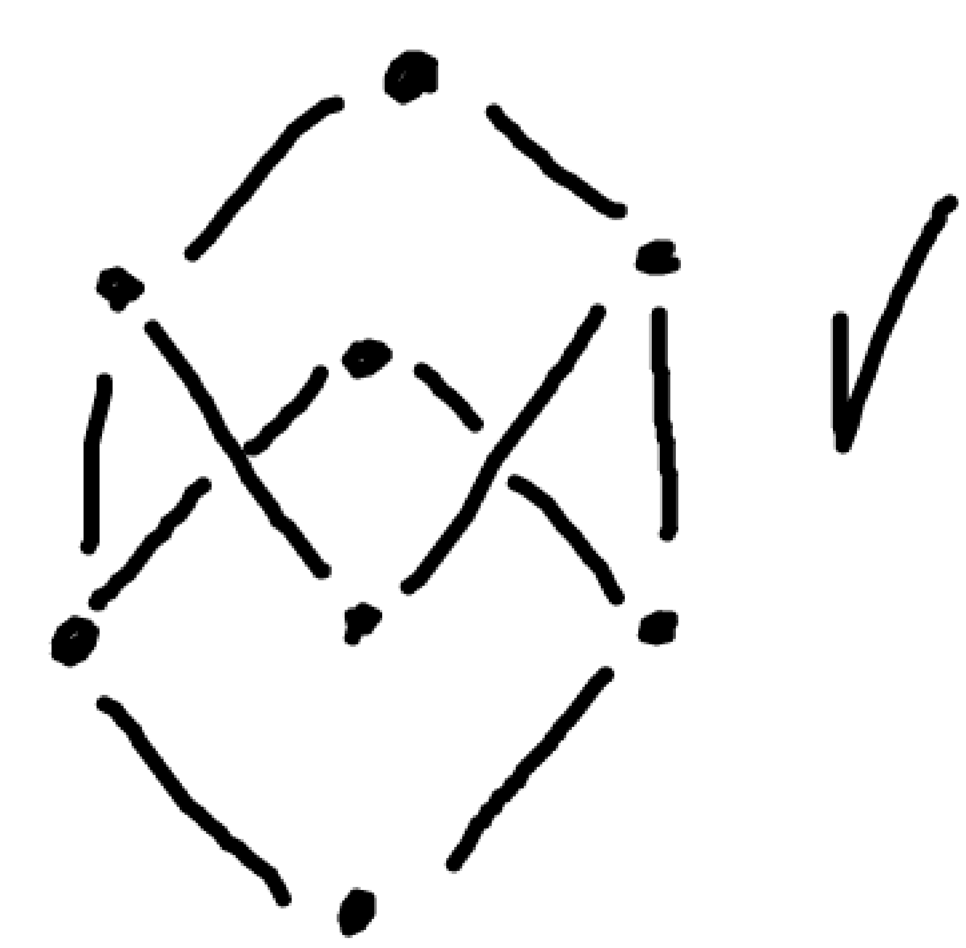
Retículos

Es un conjunto ordenado en el que cualquier subconjunto formado por 2 elementos tiene supremo e ínfimo.



$\{8,12\}$ no tienen supremo, no es un retículo





$\forall a,b\in A \ \exists \sup_A(\{a,b\}) = a+b$

$\forall a,b\in A \ \exists \inf_A(\{a,b\}) = a\cdot b$

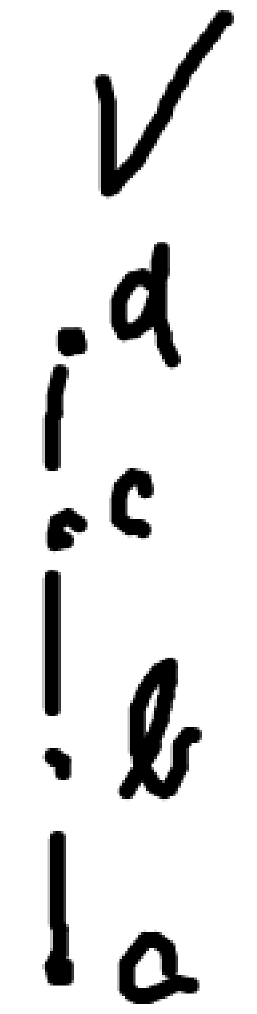
$a\cdot b = a \longleftrightarrow a\preceq b$

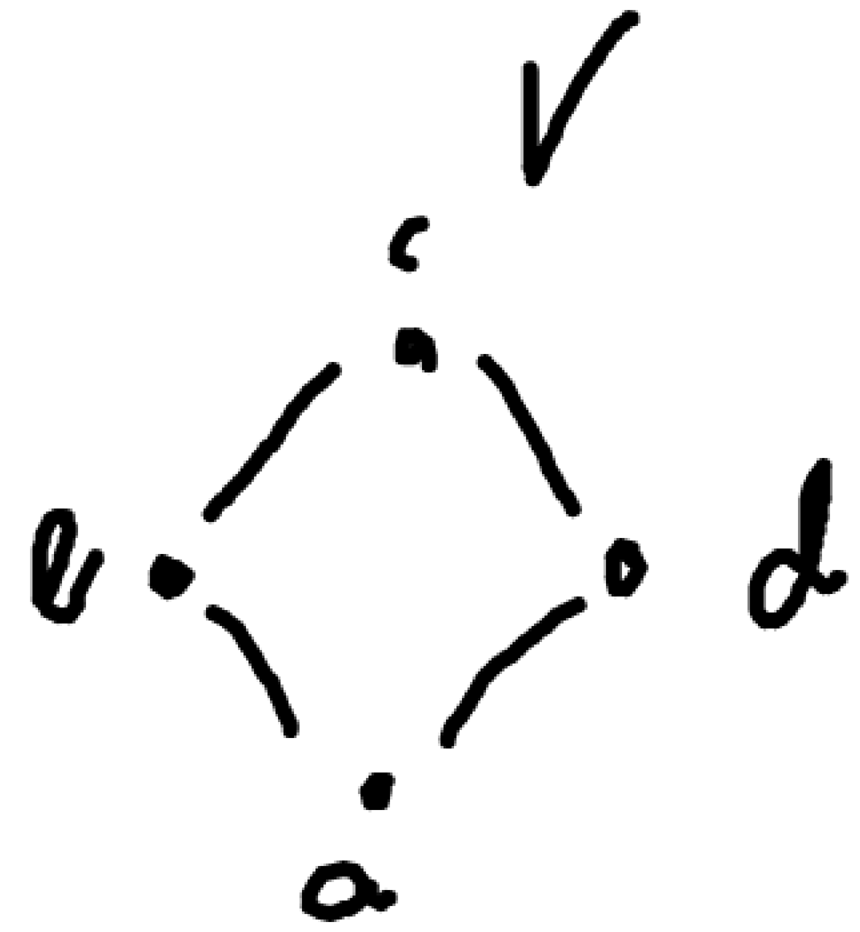
$a+b = a \longleftrightarrow a\succeq b$ (como si fuese 1 y 0)

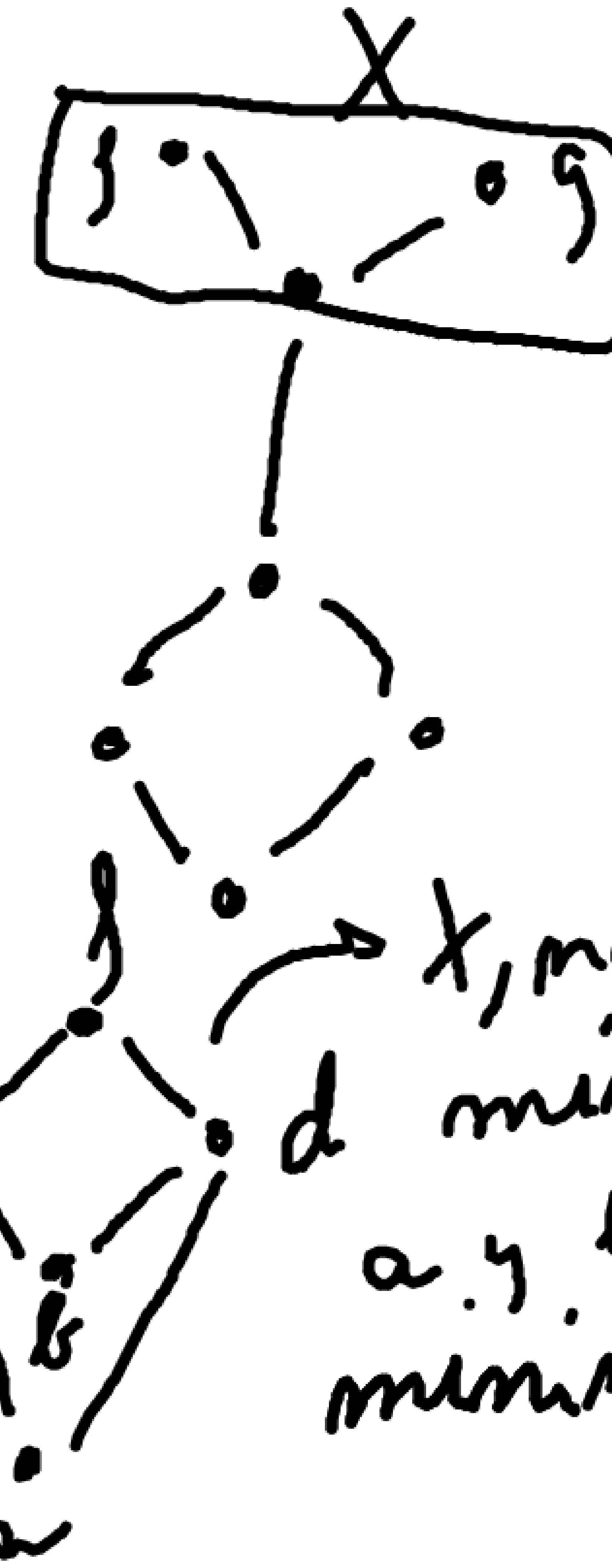
$a\cdot b = a \longleftrightarrow a+b = b$

$a\cdot a = a \wedge a+a = a$

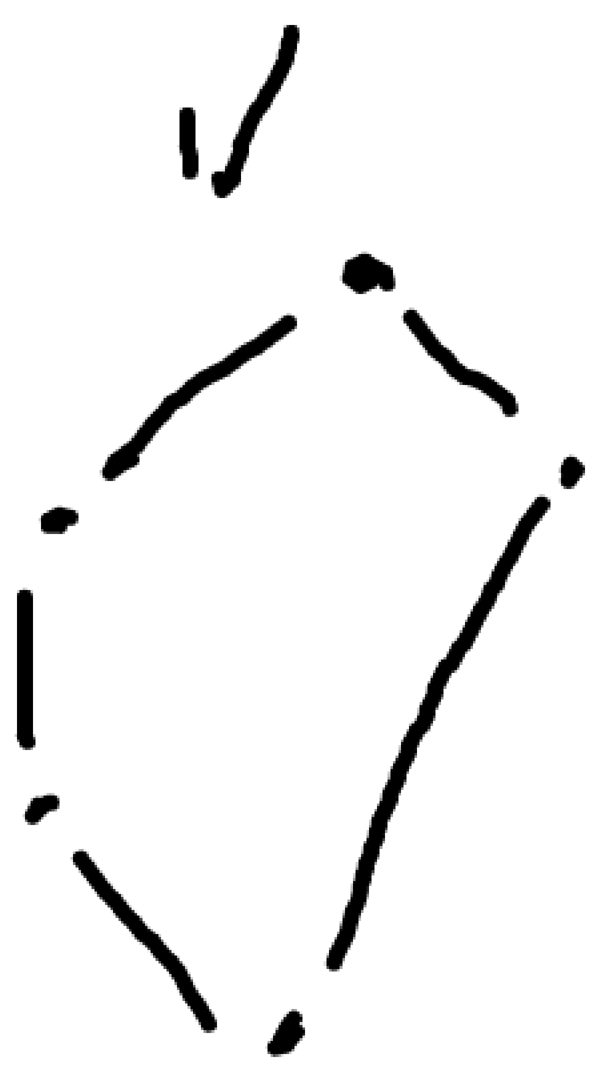
Ej.:

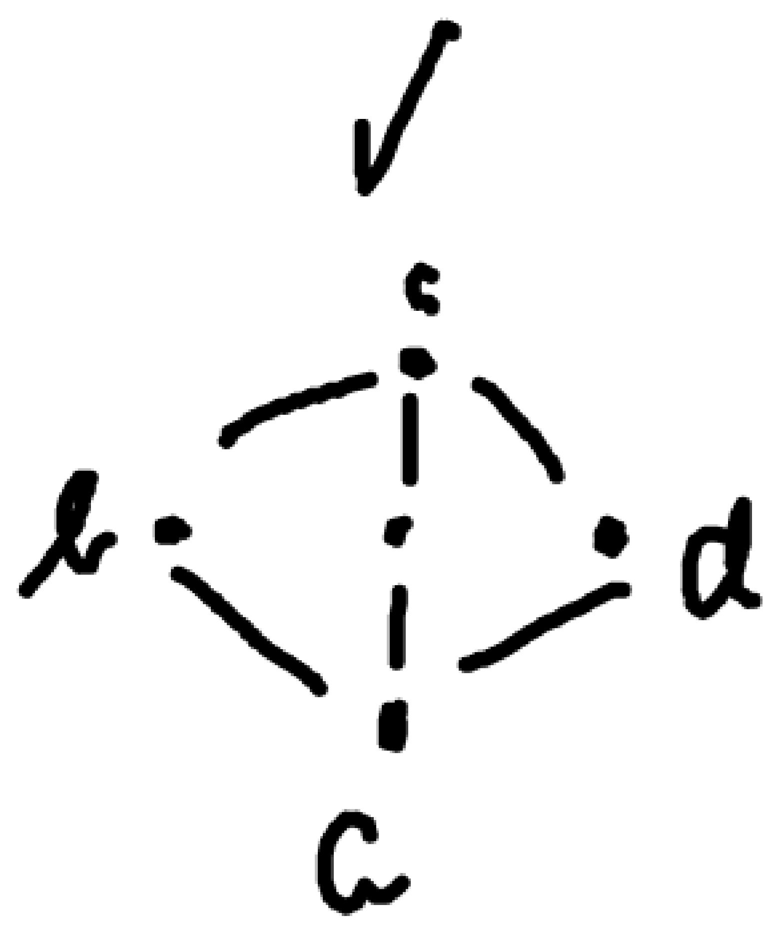


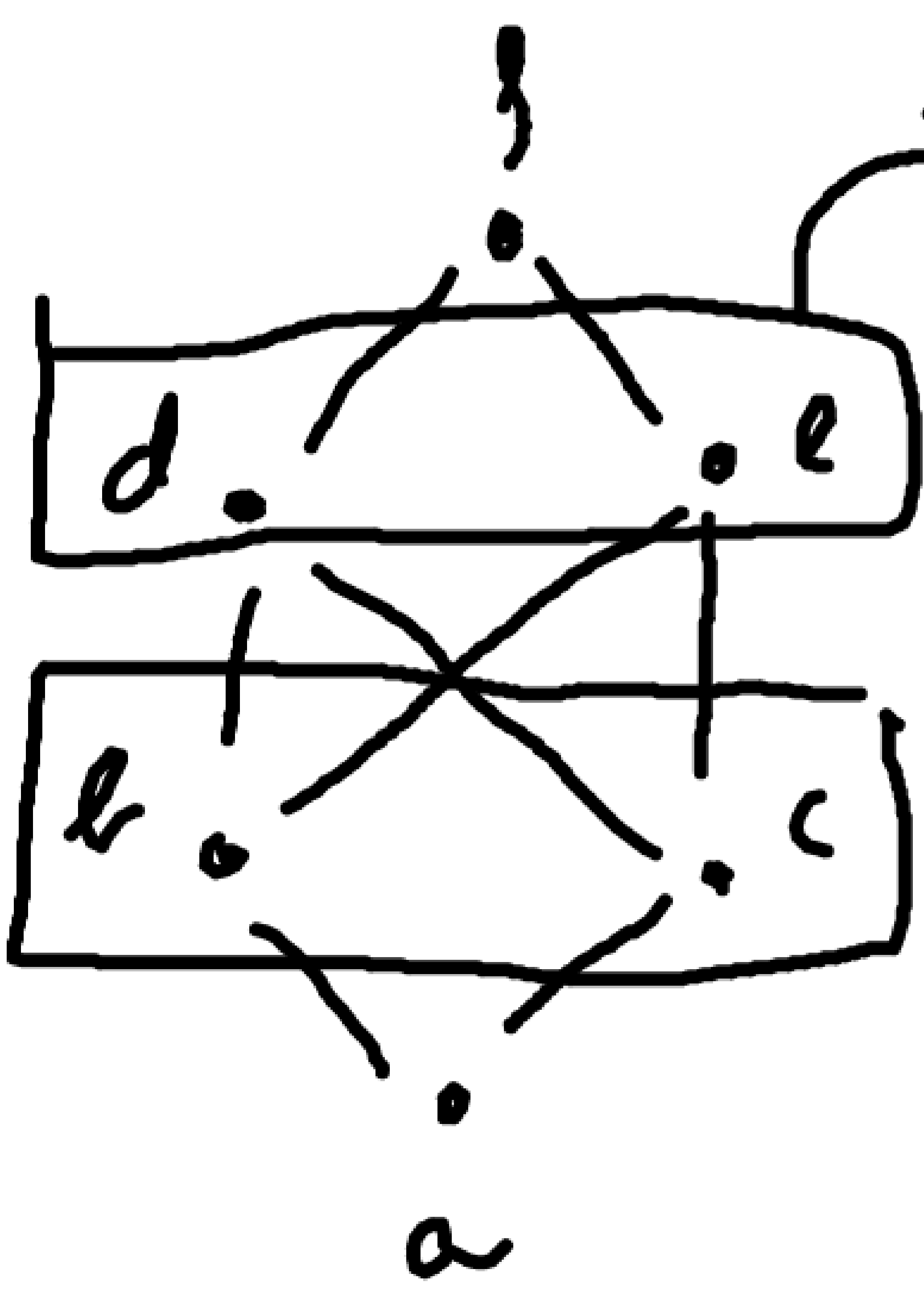




X, no tiene mínimo, a y b son minimales







Cotas inferiores: a, b, c
$a \leq b \wedge a \leq c$, no es ínfimo.
b y c no se pueden comparar, no hay ínfimo.

Cotas superiores: d, e, f
$f \geq d \wedge f \geq e$, no es supremo
e y d no se pueden comparar, no hay supremo. No es retículo

Tipos de retículos

- Distributivo: cumple la propiedad distributiva.

$$\forall a,b,c \in A \quad \begin{cases} a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c) \\ a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c) \end{cases}$$

- Acotado: tiene un máximo y un mínimo

  $m \in A$ es máximo si $\forall a \in A \ m \geq a$

  $m \in A$ es mínimo si $\forall a \in A \ m \leq a$

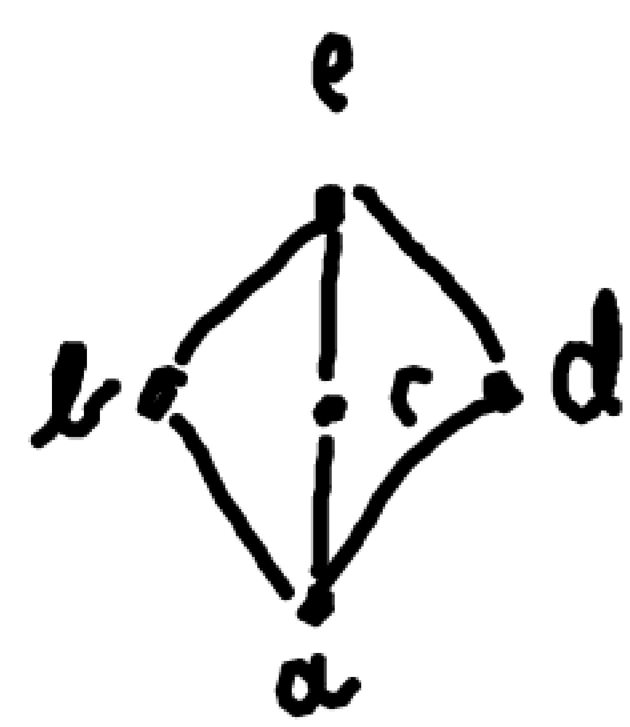
- Complementado: Si tiene de máximo I y de mínimo O y si además para todo $a \in A$ existe un $\neg a \in A$ de modo que $a + \neg a = I$ y $a \cdot \neg a = O$.

Los retículos son álgebras de Boole si cumplen las tres propiedades.

!! Comprobar la propiedad distributiva:

!! 1.- Comprobar elementos que no tengan relación

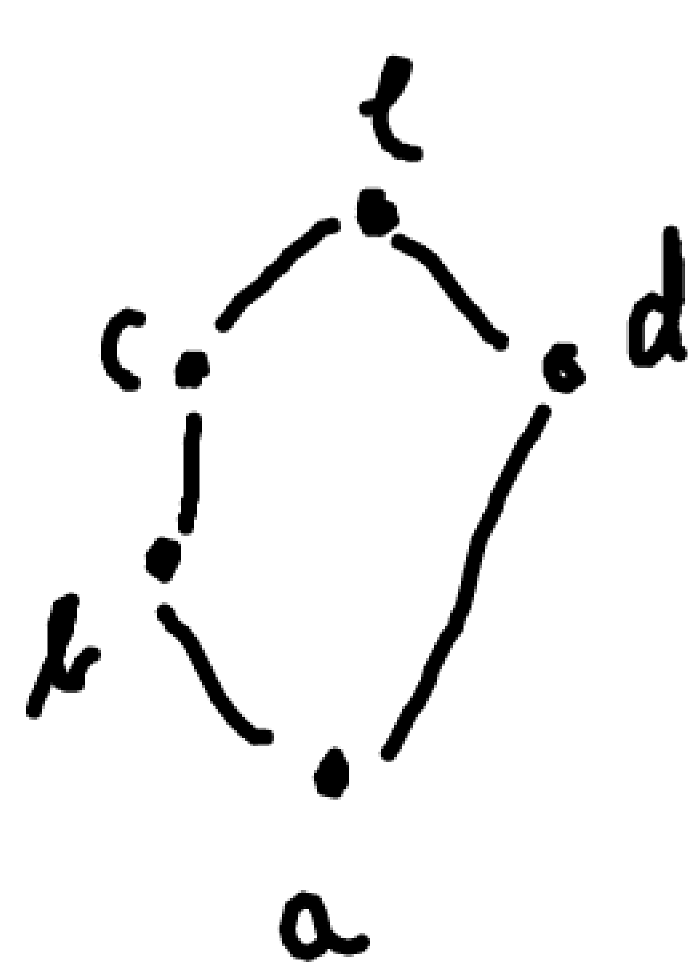
2.- Evitar usar mínimos y máximos



$X = b + (c \cdot d) = b + a = b$

$Y = (b + c) \cdot (b + d) = e \cdot e = e$

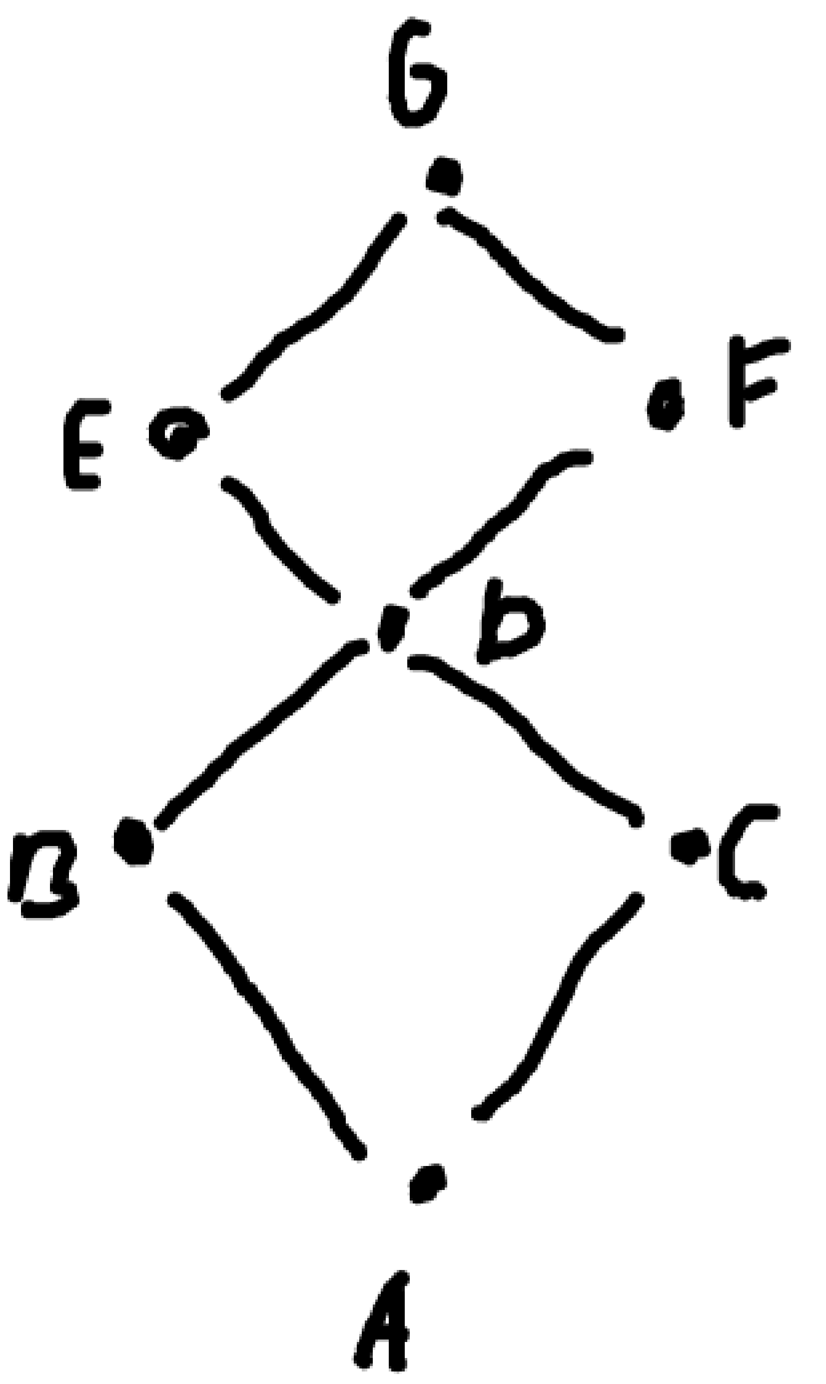
$X \neq Y \rightarrow$ No es distributiva



$X = b + (c \cdot d) = b + a = b$

$Y = (b + c) \cdot (b + d) = c \cdot e = c$

$X \neq Y \rightarrow$ No es distributiva

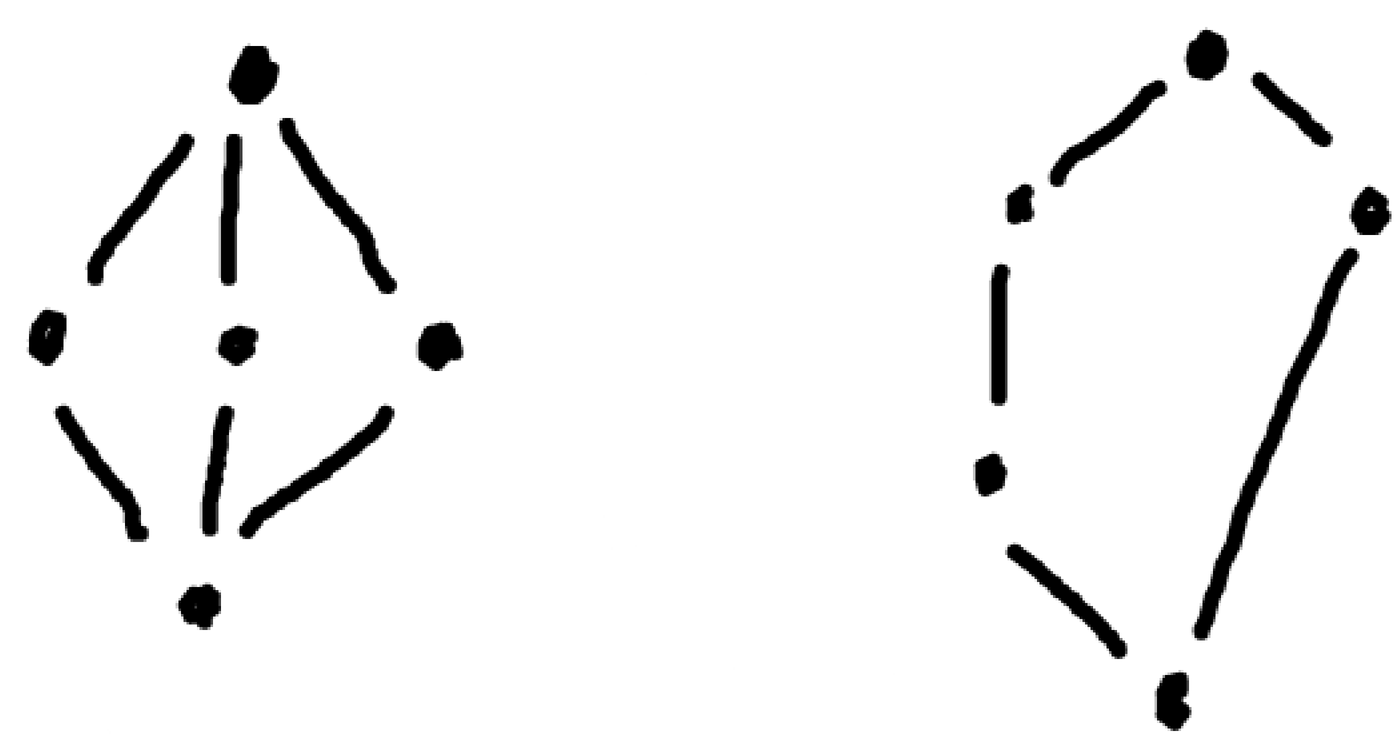


$X = b + (c \cdot e) = b + c = d$

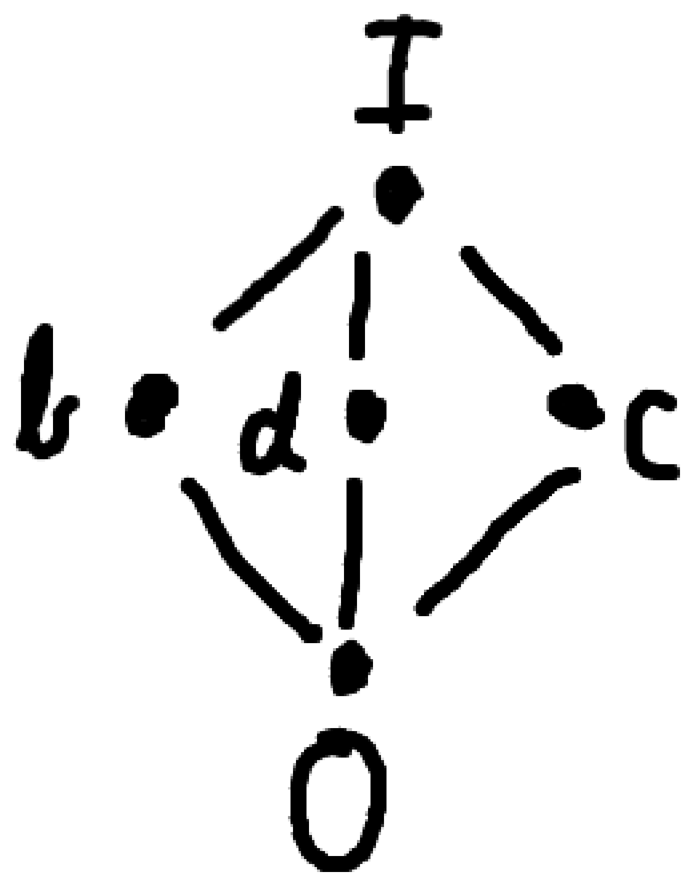
$Y = (b + c) \cdot (b + e) = d \cdot e = d$

$X = Y \rightsquigarrow$ De momento, lo es, pero no sabemos si lo es hasta agotar todas las opciones, al menos no de esta forma.

Un retículo cumple con la propiedad distributiva si y sólo si no hay ningún subconjunto de éste que sea isomórfico con los siguientes retículos no distributivos.



‼ Comprobar complemento

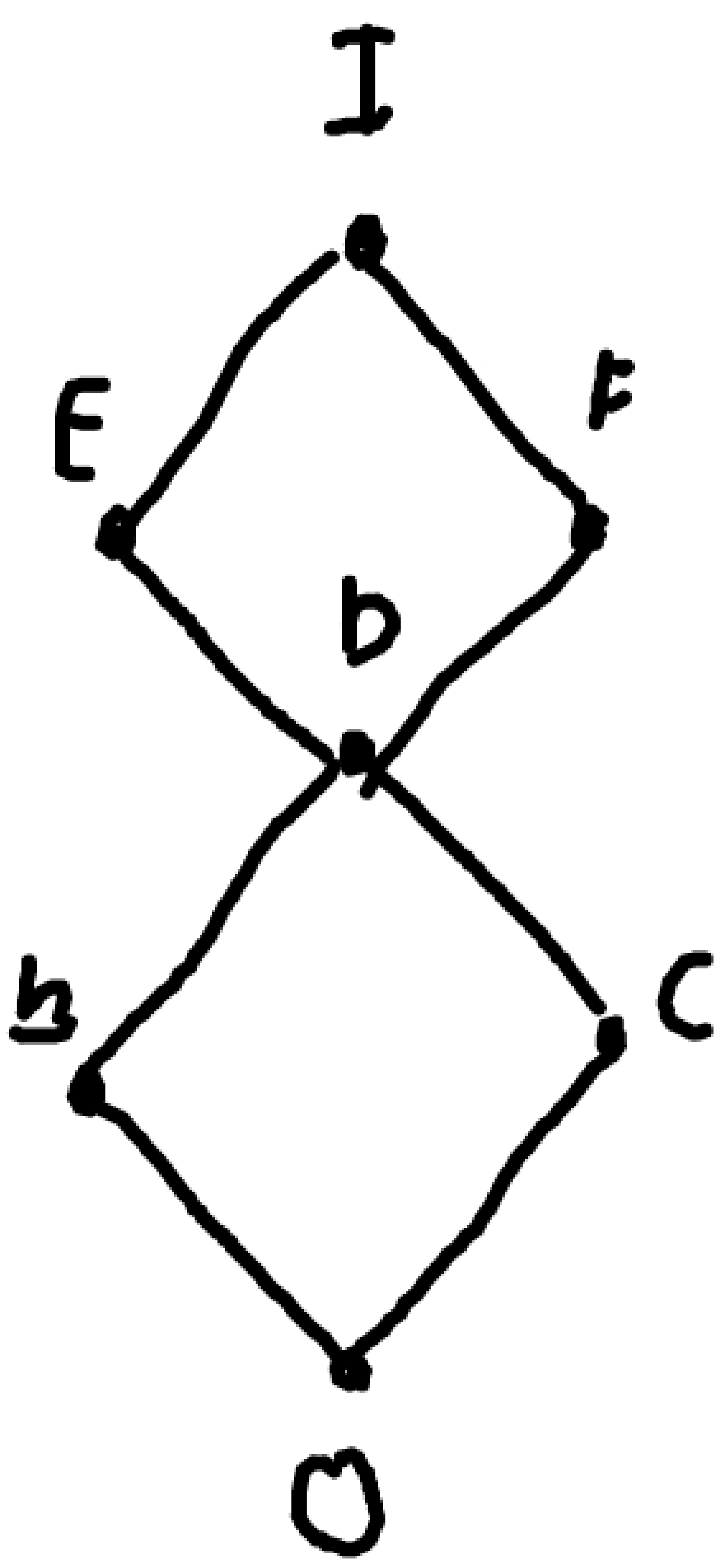


x es complemento de a si

$a \cdot x = 0$ y $a + x = 1$

Elemento	complemento
b	c, d
c, d	b
O	I
1	O

Todos tienen complemento. ✓

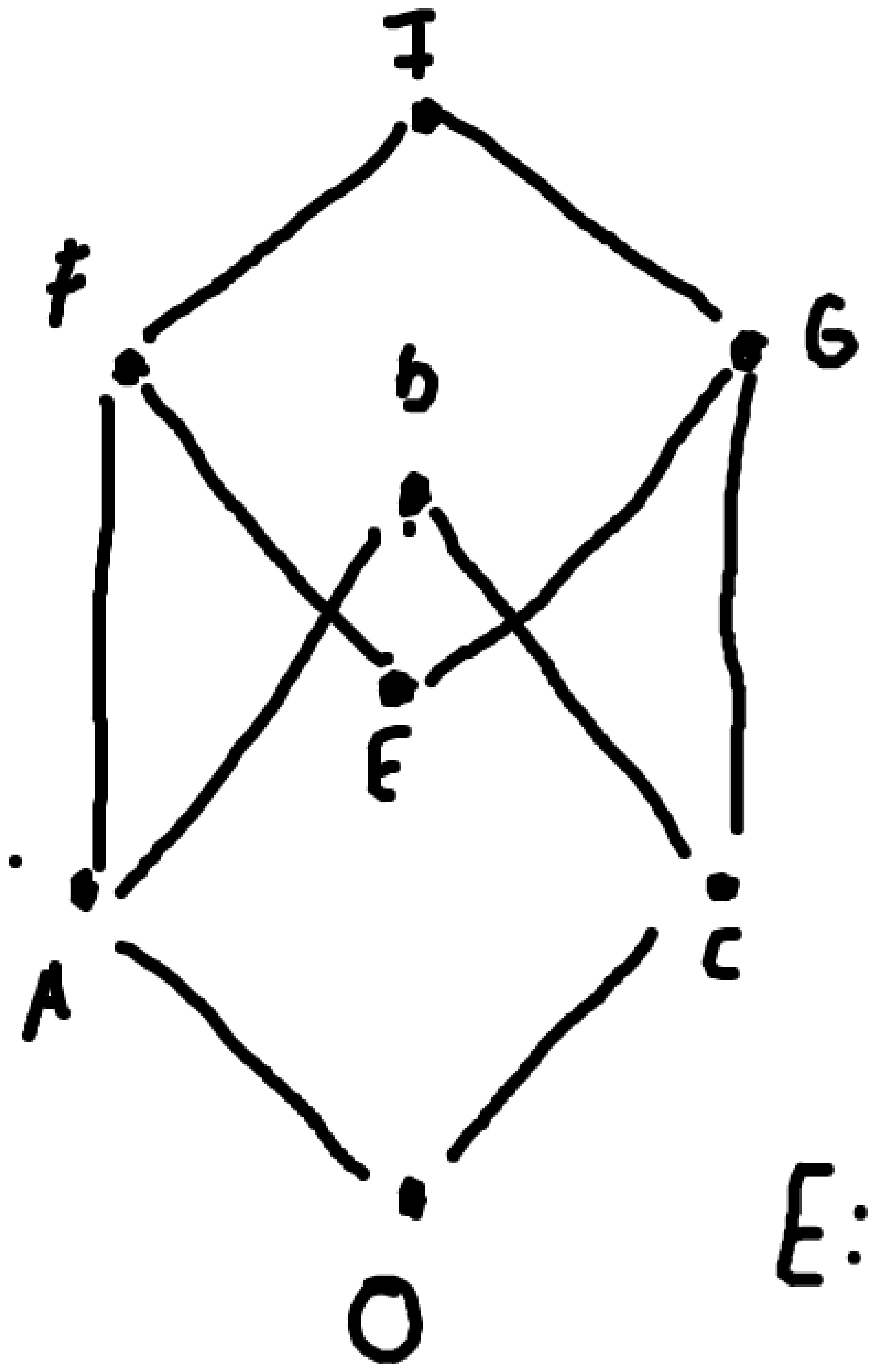


x sólo puede ser complemento de a si no se pueden comparar, excepto I y O, que se pueden comparar con cualquiera

Elemento	Posibles comp.	Complementos
E	F	/
B	C	/
I	/	O
O	/	I

$E \cdot F = D \neq O$ ✗

Con que haya un elemento sin complemento, ya se considera no complementado.



Elem.	Posibles c.	Complementos
F	G, C, D	G, C
A	G, C, E	G, C
D	~~F~~, G, E	E
E	/	D
G, C	/	F, A

$E: E \cdot D = A \neq 0 \quad E \cdot G = 0 ; E + G = 1$

$E \cdot C = 0 ; E + G = 1$

$D: D \cdot G = C \neq 0 \quad D \cdot E = 0$

$D + E = I$

Es complementado

Además, no es isomórfico con los retículos no distributivos, así que también es distributivo.

Por tanto, es un álgebra booleana

!! Cualquier retículo isomorfo a éste también será un álgebra booleana.

Otros ejemplos de álgebras de Boole son:

- El conjunto $\{0,1\}$, con la relación ser menor o igual que.
- El conjunto cociente de las formas preposicionales. Las operaciones son $\wedge$ y $\vee$.

- Dado un conjunto E, $\mathcal{P}(E)$ es un álgebra de Boole con la relación de orden "inclusión de conjuntos". Las operaciones son $\cap$ y $\cup$.

Funciones booleanas

Si A es un álgebra de boole, una función booleana de orden n es:

$$f: A^n \longrightarrow A$$

De modo que la n-tupla $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se obtiene aplicando operaciones booleanas a los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Ej.: $f(x,y,z) = x + x \cdot y + \bar{y} \cdot z$

↳ Es de orden 3 $\rightsquigarrow f: A^3 \to A$.

Términos minimales y maximales

Un minitérmino de orden n es una función booleana de la forma...

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_n$$

... donde todo $l_i = x_i$ ó $l_i = \overline{x_i}$, $1 \leq i \leq n$

Un maxitérmino es lo mismo, pero con sumas en vez de productos.

Si m es un término minimal de orden n, existe sólo una tupla de 1s y 0s que da como resultado 1.

$$m(x, y, z) = x \cdot \bar{y} \cdot z \longleftrightarrow m(1, 0, 1) = 1 \cdot \bar{0} \cdot 1 = 1$$

A esta tupla se la denota m_{101}, ó m_5 (en decimal)

Con los maximales pasa lo mismo, pero al revés:

$$M(x, y, z) = \bar{x} + y + \bar{z} \longleftrightarrow M(1, 0, 1) = \bar{1} + 0 + \bar{1} = 0$$

$\hookrightarrow M_{101}$ ó M_5

Forma canónica disyuntiva y conjuntiva

$f(x,y) = x \cdot y + \bar{x}$

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Disyuntiva

$f(x,y) = m_{00} + m_{01} + m_{11}$

$\downarrow$

Sólo los que dan 1

$\downarrow$

Σ de productos que dan 1

$\downarrow$

$(\bar{x} \cdot \bar{x}) + (\bar{x} \cdot y) + (x \cdot y)$

Conjuntiva

$f(x,y) = M_{10}$

$\downarrow$

Sólo los que dan 0

$\downarrow$

Π de sumas que dan 0.

$\downarrow$

$x + \bar{y}$