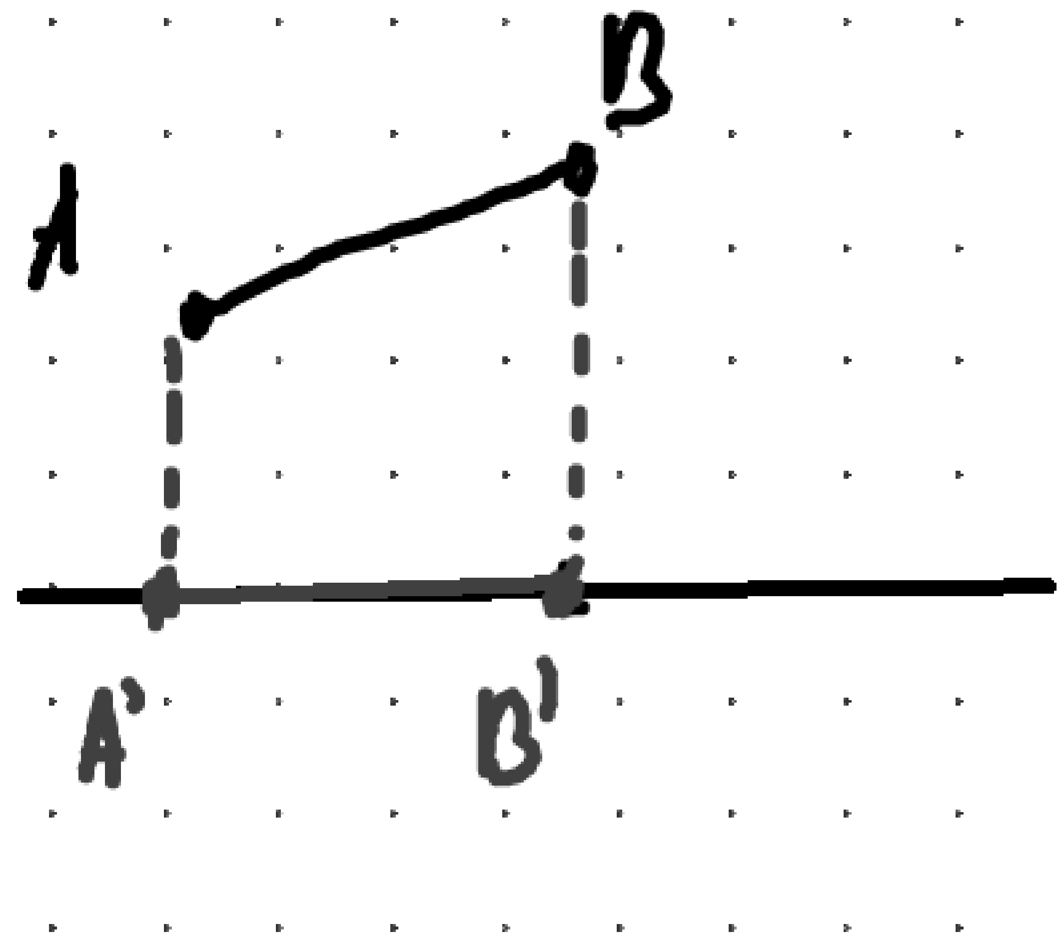
Producto escalar (dot product)

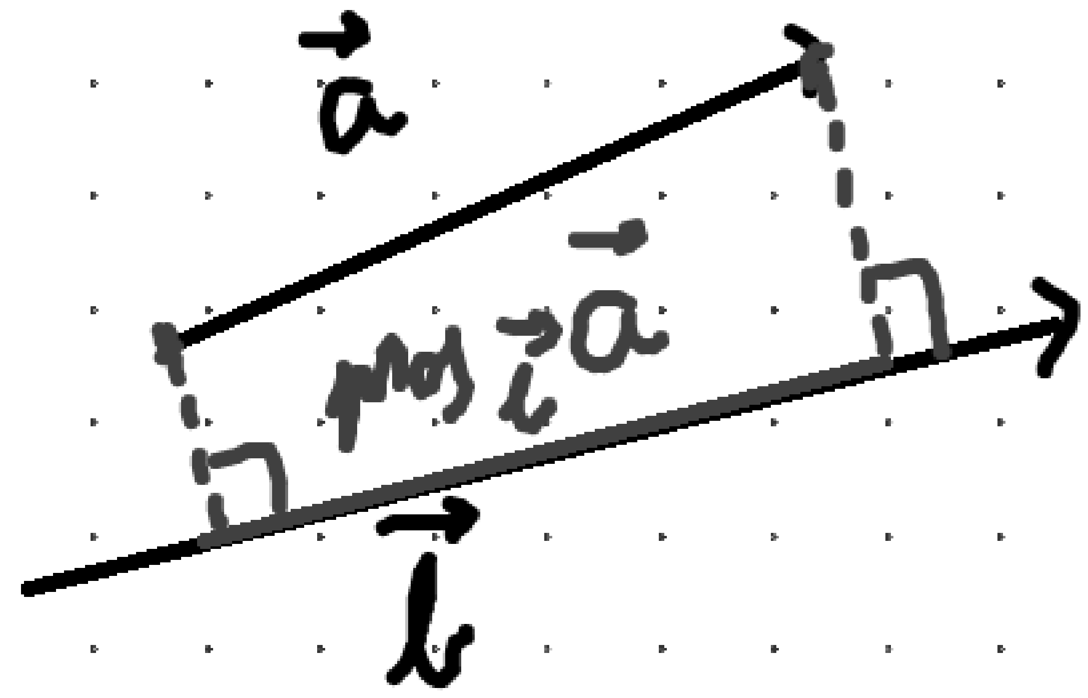
Si P es un punto en el espacio, P' es su proyección ortogonal, es decir,

P' es un punto proyectado desde P de modo que la proyección forma un ángulo recto con la línea.

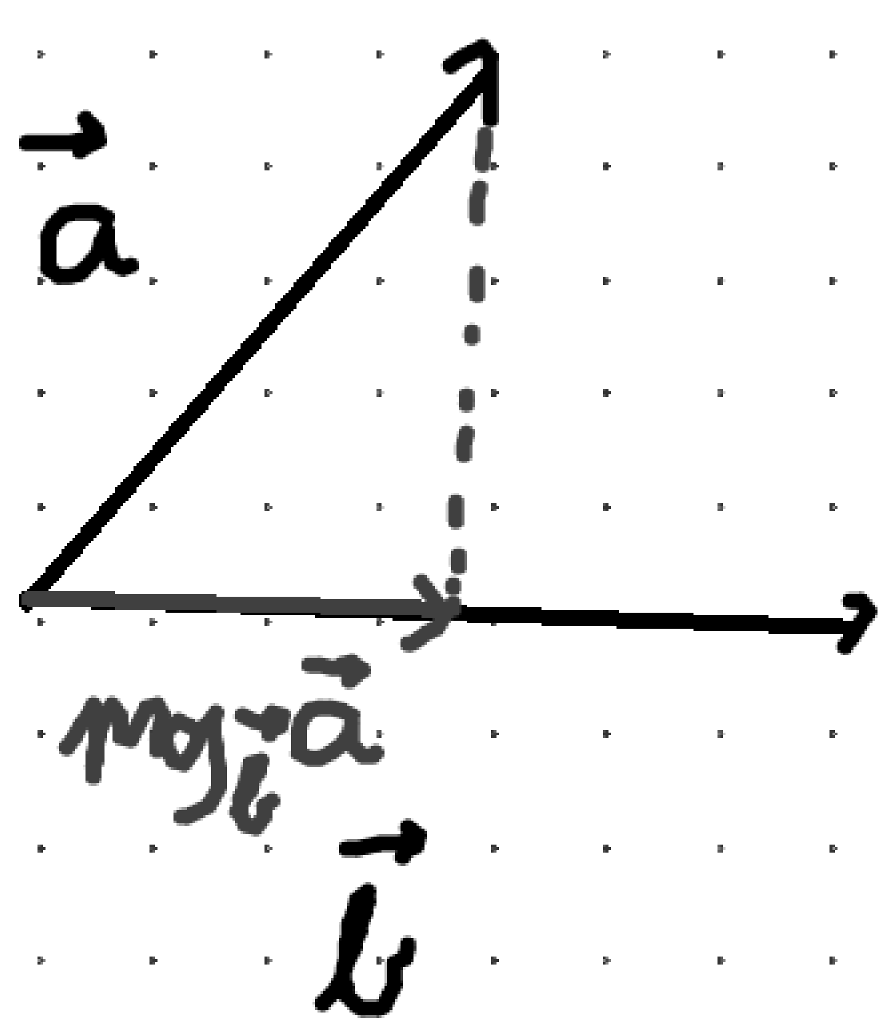


$\vec{A'B'}$ es la proyección ortogonal del vector $\vec{AB}$.

Si el vector $\vec{AB}$ fuese perpendicular al eje X, su proyección sería un punto y no una línea.



También se puede sacar la proyección ortogonal de un vector sobre otro.
Se denota $proy_{\vec{b}}\vec{a}$, donde $\vec{a}$ es el vector siendo proyectado sobre $\vec{b}$



El producto escalar es el producto de las magnitudes de $\vec{b}$ y la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |proy_{\vec{b}}\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

!! El orden no importa.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = |proy_{\vec{a}}\vec{b}| \cdot |\vec{a}| = |proy_{\vec{b}}\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

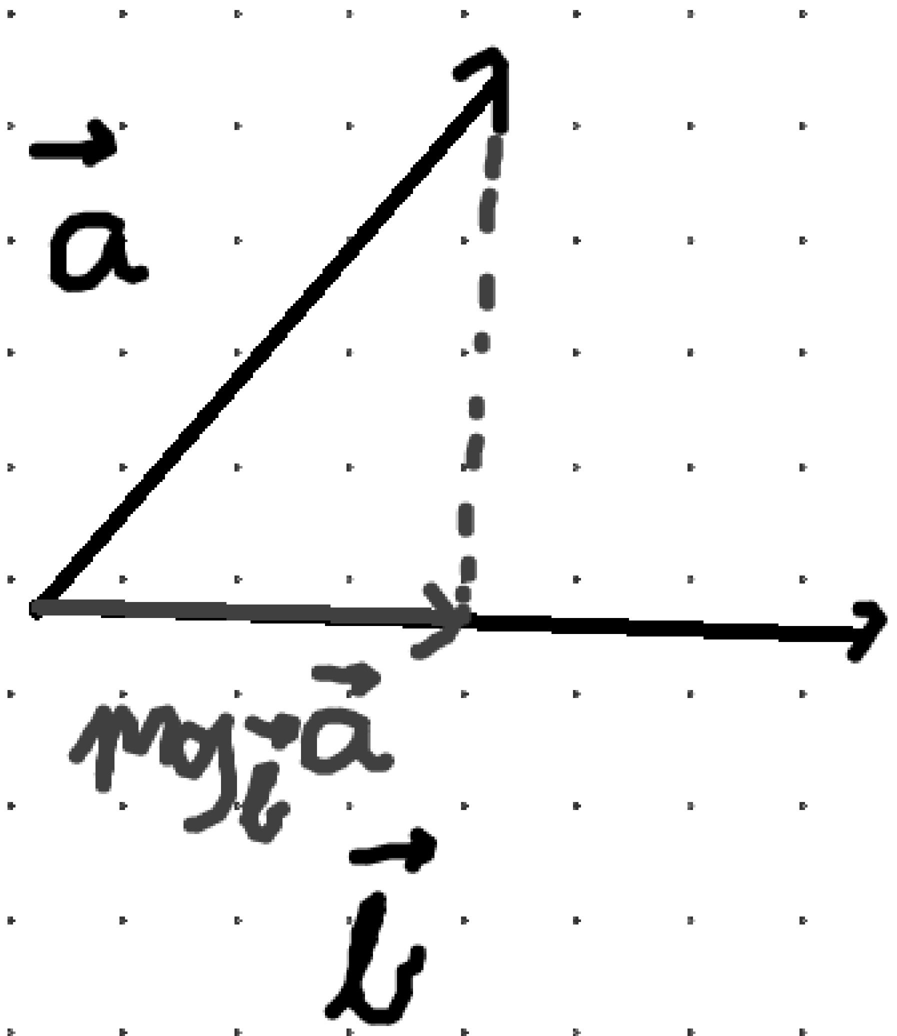
Cálculo del producto escalar

$\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\underbrace{a_1b_1+a_2b_2}$ (suma de productos)

No es un vector, es un escalar (número)

Dada la definición del producto escalar, se deduce que también se puede calcular utilizando trigonometría:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\underbrace{|\vec{a}|\cos(\theta)}_{|proy_{\vec{a}}\vec{b}|}$$

Por lo que también se puede calcular el coseno y ángulo:

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\longleftrightarrow\theta=\arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

Ej.: $\vec{a}=(4,6)$, $\vec{c}=(5,0)$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=20+0=20$

Ej.: $\vec{a}=(4,6)$, $\vec{b}=(5,0)$, $\vec{c}=\left(\frac{1}{2},3\right)$, $\vec{d}=(2,3\sqrt{2})$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d}=20+1+9\sqrt{2}=21+9\sqrt{2}$$

Ej.: $\vec{b}=(-3,\sqrt{2})$, $\vec{e}=(2,3\sqrt{2})$, $\vec{d}=\left(\frac{1}{2},3\right)$, $\vec{f}=\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

$$(\vec{b}\cdot\vec{e})\cdot(\vec{d}\cdot\vec{f})=(-6+6)\cdot\left(-\frac{1}{2},-1\right)=0$$

P. escalar $\neq$ Multiplicación

1) $\vec{a}=(4,6), \vec{b}=(-3,\sqrt{2}), \vec{c}=(5,0), \vec{d}=(\frac{1}{2},3)$

$\vec{e}=(7,3\sqrt{2}), \vec{f}=(-1,-\frac{1}{3}), \vec{g}=(-8,6)$

a) $\vec{a}\cdot\vec{a}=16+36=52$

b) $\vec{b}\cdot\vec{f}=3+\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{9+\sqrt{2}}{3}$

c) $5+(\vec{c}\cdot\vec{f})=0$

d) $=3(\vec{g}\cdot\vec{a})=3(-32-2)=-90$

e) $=(\vec{a}\cdot\vec{d})\cdot(\vec{g}\cdot\vec{b})=(2+18)\cdot(+24+6\sqrt{2})=480+120\sqrt{2}$

f) $\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{f}\cdot\vec{e}-\vec{g}\cdot\vec{d}=-12+6\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+4-18=5\sqrt{2}-4$

g) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\vec{f}\cdot\vec{g}}=\dfrac{20}{8-2}=\dfrac{20}{6}=\dfrac{10}{3}$

h) $\vec{c}\cdot\vec{b}=-15$

i) $\vec{g}\cdot5(\vec{b}+\vec{d})=\vec{g}\cdot5(-\frac{5}{2},3+\sqrt{2})=\vec{g}\cdot(-\frac{25}{2},15+5\sqrt{2})=$

$100+90+30\sqrt{2}=190+30\sqrt{2}$

Vectores ortogonales

Dos vectores son ortogonales si son perpendiculares entre ellos.

Si son ortogonales, $proy_{\vec{b}}\vec{a}$ o $proy_{\vec{a}}\vec{b}$ serán igual a 0 (ya que no sería una línea si no un punto), por lo que el producto escalar da 0.

Relación 'ser ortogonal'

$$\vec{a}\perp\vec{b} \wedge \vec{a}\neq\vec{0} \wedge \vec{b}\neq\vec{0} \leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

Ej.: $\vec{p}=(-8,-6)$ $\vec{q}=(-9,12)$ ¿$\vec{p}\perp\vec{q}$?

$\vec{p}\cdot\vec{q}=+72-72=0 \leftrightarrow \vec{p}\perp\vec{q}$

$\vec{a}=(5,-7), \vec{b}=(6,4)$ ¿$\vec{a}\perp\vec{b}$?

$\vec{a}\cdot\vec{b}=30-28=2 \leftrightarrow \vec{a}\not\perp\vec{b}$

1)

$\vec{a} = (\sqrt{2}, -4)$, $\vec{b} = (\sqrt{8}, -1)$, $\vec{c} = (\frac{1}{3}, \sqrt{2})$, $\vec{d} = (-8, -6)$

$\vec{e} = (-9, 12)$, $\vec{f} = (0, 2)$, $\vec{g} = (5, -3)$, $\vec{h} = (6, 10)$

a) ¿$\vec{a} \perp \vec{c}$? $\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{2} \neq 0 \leftrightarrow \vec{a} \not\perp \vec{c}$

b) ¿$\vec{c} \perp \vec{b}$? $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 4 \neq 0 \leftrightarrow \vec{a} \not\perp \vec{b}$

c) ¿$\vec{f} \perp \vec{d}$? $\vec{f} \cdot \vec{d} = 0 + -12 \neq 0 \leftrightarrow \vec{f} \not\perp \vec{g}$

d) ¿$\vec{a} \perp \vec{e}$? $\vec{a} \cdot \vec{e} = -9\sqrt{2} - 48 \neq 0 \leftrightarrow \vec{a} \not\perp \vec{e}$

e) ¿$\vec{g} \perp \vec{h}$? $\vec{g} \cdot \vec{h} = 30 - 30 = 0 \leftrightarrow \vec{g} \perp \vec{h}$

f) ¿$\vec{d} \perp \vec{f}$? $\vec{f} \not\perp \vec{d} \leftrightarrow \vec{d} \not\perp \vec{f}$

g) ¿$5\vec{a} \perp 6\vec{e}$? $5\vec{a} \cdot 6\vec{e} = (5\sqrt{2}, -20) \cdot (-54, 72) \neq 0 \leftrightarrow 5\vec{a} \not\perp 6\vec{e}$

h) ¿$\vec{d} \perp \vec{a}$? $\vec{d} \cdot \vec{a} = -8\sqrt{2} + 24 \neq 0 \leftrightarrow \vec{a} \not\perp \vec{d}$

i) ¿$6\vec{d} \perp 8\vec{a}$? $6\vec{d} \cdot 8\vec{a} \neq 0$ (pa $\sqrt{2}$) $\leftrightarrow 5d \perp 8\vec{a}$

Ejemplos más complejos

1) $\vec{a}=(4,6),\ \vec{b}=(-3,\sqrt{2}),\ \vec{e}=(2,3\sqrt{2}),\ \vec{f}=(-1,-1/3),\ g=(-8,6)$

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+(3\vec{f})\cdot\vec{e}}{|\vec{g}|}=\frac{-12+6\sqrt{2}+(-3,-1)\cdot(2,3\sqrt{2})}{|\vec{g}|}=$$

$$=\frac{-12+6\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}}{|\vec{g}|}=\frac{-18+3\sqrt{2}}{|\vec{g}|}=\frac{-18+3\sqrt{2}}{\sqrt{64+36}}=\frac{-18+3\sqrt{2}}{10}$$

2) $\vec{a}=(4,6),\ \vec{b}=(-3,\sqrt{2}),\ \vec{c}=(5,0),\ \vec{e}=(2,3\sqrt{2})$

$\sqrt{33}>0 \to |\sqrt{33}|=\sqrt{33}$

$$\vec{c}\cdot(-\vec{a})+\sqrt{33}\cdot|\vec{b}+\vec{e}|=-20+\sqrt{33}\cdot|(-1,4\sqrt{2})|=$$

$$=-20+\sqrt{33}\cdot\sqrt{1+32}=-20+33=13$$

3) $\vec{b}=(-3,\sqrt{2}),\ \vec{c}=(5,0),\ \vec{e}=(2,3\sqrt{2}),\ \vec{g}=(-8,6)$

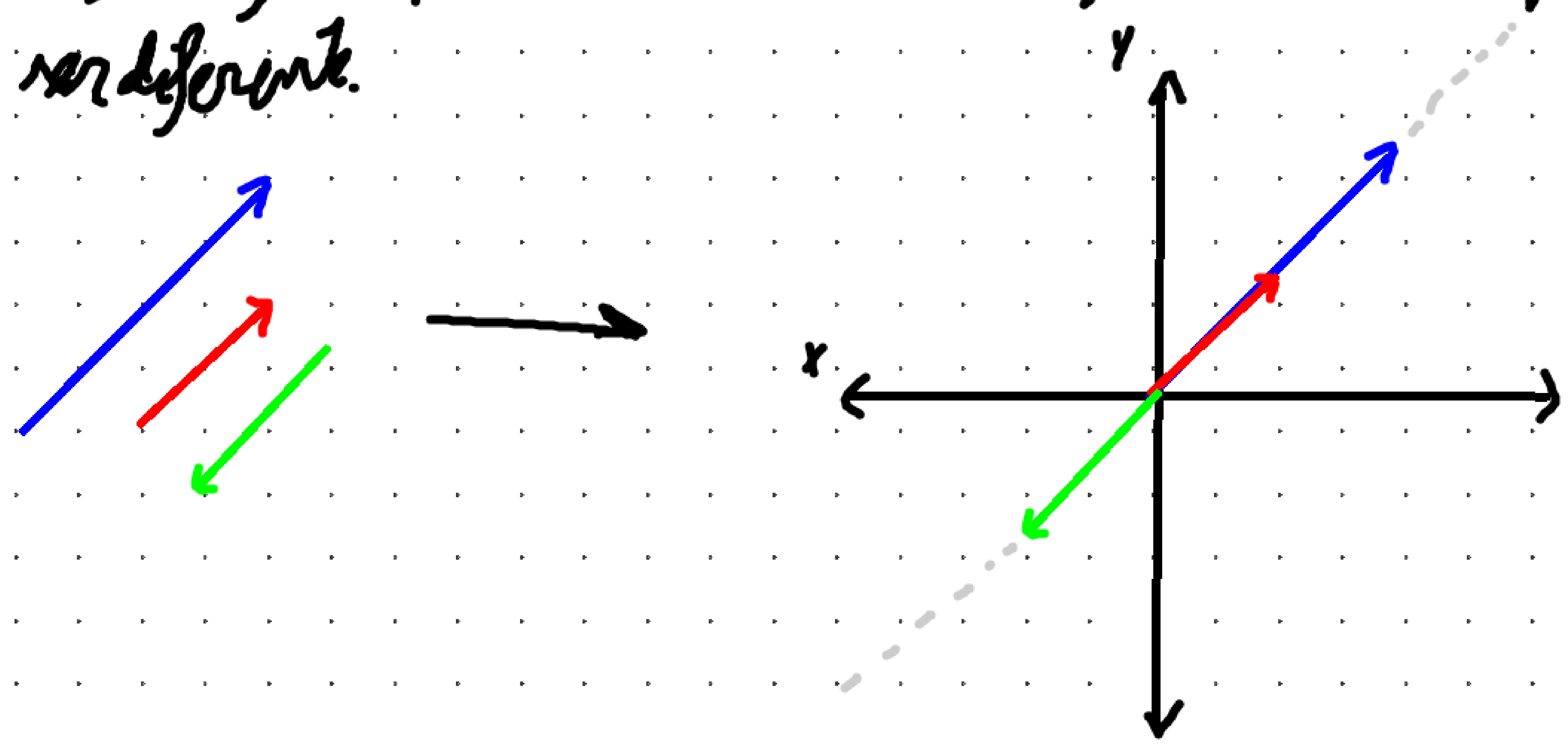
$$\left|\frac{|\vec{c}|\cdot\vec{b}+|\vec{g}|\cdot\vec{e}}{5}\right| \quad \left\{\begin{array}{l}|\vec{c}|\cdot\vec{b}=5\cdot\vec{b}\\ |\vec{g}|\cdot\vec{e}=10\cdot\vec{e}\end{array}\right\} \quad |\vec{b}+2\vec{e}|$$

$$|\vec{b}+2\vec{e}|=|(-3,\sqrt{2})+(4,6\sqrt{2})|=|(1,7\sqrt{2})|=\sqrt{1+49\cdot 2}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$$

Dependencia linear

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son lineales si $\vec{a} = K \cdot \vec{b}$ o $\vec{b} = K \cdot \vec{a}$, $K \in \mathbb{R}$
Es decir, son lineales si se puede sacar uno multiplicando el otro por un escalar.

Estos vectores forman una línea al desplazarlos al origen, y son paralelos cuando no (pero el sentido puede ser diferente.



También se puede decir que hay dependencia linear si tienen la misma pendiente:
$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \longleftrightarrow \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ son dependientes lineares.}$$

Ej.:

$\vec{m}=(6,12)$, $\vec{n}=(-10,-20)$

$\frac{12}{6}=2$, $\frac{-20}{-10}=2$ → Son dependientes lineares

$\vec{m}=K\vec{n} \leftrightarrow K=\frac{m_1}{n_1} \wedge K=\frac{m_2}{n_2}$

$\frac{m_1}{n_1}=\frac{6}{-10}=-\frac{3}{5}$ $\quad \frac{m_2}{n_1}=\frac{12}{-20}=-\frac{3}{5} \rightsquigarrow K=-\frac{3}{5}$

$-\frac{3}{5}\vec{n}=(6,12)$ ✓ (Si sabemos que son dependientes, sólo hace falta comprobar una de las divisiones)

Ej.: $\vec{t}=(6,18)$, $\vec{u}=(2,-6)$

$\frac{18}{6}=3$, $\frac{-6}{2}=-3$ → No son dependientes lineares.

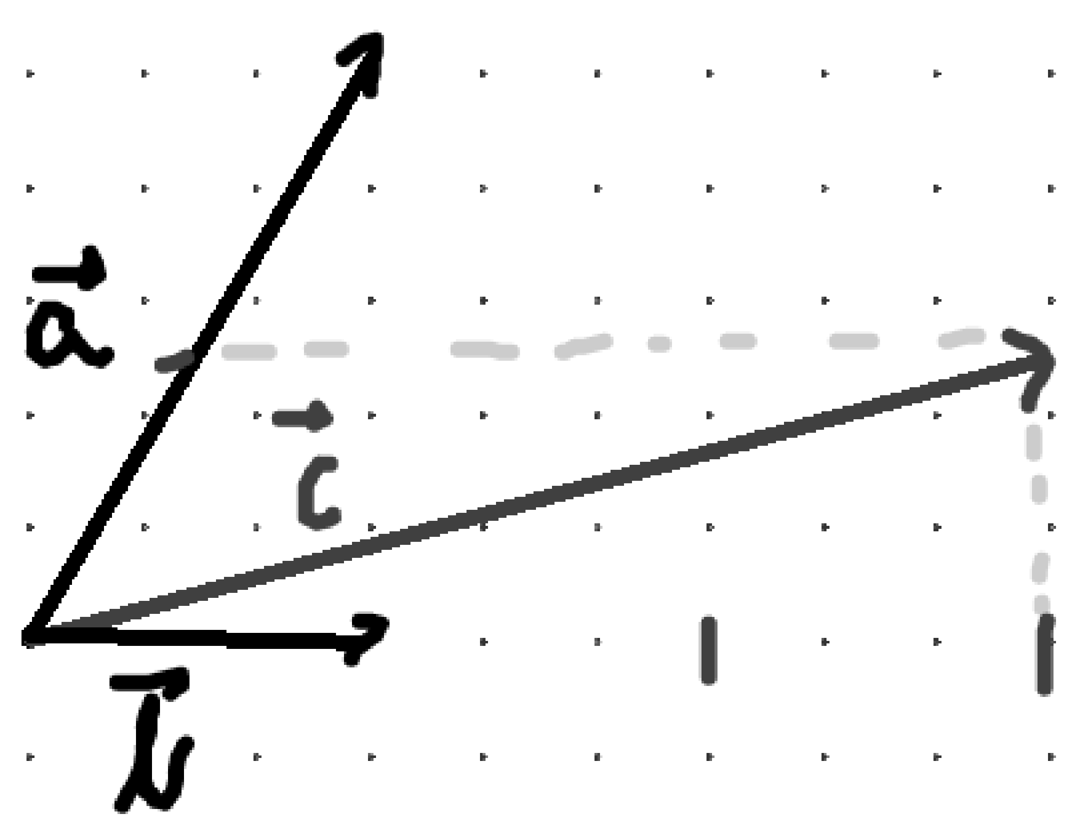
Ej.: $\vec{m}=(5,\sqrt{2})$, $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{15}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\quad \frac{2}{15}\div\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{25}=\frac{\sqrt{2}}{5} \rightarrow$ ✓

$K=\frac{\sqrt{2}}{2/15}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

Combinación lineal

La combinación lineal consiste en multiplicar dos vectores por escalares para sumarlos y encontrar así un tercer vector.



$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$

$\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \phi\vec{c} + \ldots \leftrightarrow \vec{m}$ es una combinación lineal.

Ej.: $\vec{m} = (-11, 15)$, $\vec{a} = (2,5)$, $\vec{b} = (3,-1)$

$(-11,15) = \alpha(2,5) + \beta(3,-1) \leftrightarrow (-11,15) = (2\alpha, 5\alpha) + (3\beta, -1\beta) =$

$= (-11, 15) = (2\alpha + 3\beta, 5\alpha - \beta)$ $\begin{cases} -11 = 2\alpha + 3\beta \\ 15 = 5\alpha - \beta \end{cases}$

$\beta = 5\alpha - 15$

$-11 = 2\alpha + 15\alpha - 45 \leftrightarrow \alpha = \frac{34}{17} = \underline{2} \rightarrow \beta = \underline{-5}$

Ej.: $\vec{c} = (6,2)$, $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (4,-1)$

¿$\vec{c}$ es c. lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

$$(6,2) = (2\alpha, 3\alpha) + (4\beta, -\beta)$$

$$(6,2) = (2\alpha + 4\beta, 3\alpha - \beta) \quad \begin{cases} 6 = 2\alpha + 4\beta \longleftrightarrow 3 = \alpha + 2\beta & (1) \\ 2 = 3\alpha - \beta & (2) \end{cases}$$

$(1) \rightarrow \alpha = 3 - 2\beta \quad (3)$

$(2),(3) \rightarrow 2 = 9 - 6\beta - \beta \longleftrightarrow -7 = -7\beta \longleftrightarrow \underline{\beta = 1} \quad (4)$

$(3),(4) \rightarrow \alpha = \underline{1}$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \longrightarrow$ es c. lineal

Ej.: $\vec{t}=(5,0)$, $\vec{n}=(\sqrt{2},\sqrt{3})$, $\vec{s}=(\sqrt{3},-\sqrt{2})$

¿$\vec{t}=\alpha\vec{n}+\beta\vec{s}$?

$\vec{t}=(\alpha\sqrt{2},\alpha\sqrt{3})+(\beta\sqrt{3},-\beta\sqrt{2})$

$(5,0)=(\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3},\alpha\sqrt{3}-\beta\sqrt{2})$

$5=\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3} \rightarrow 5\sqrt{2}=2\alpha+\cancel{\beta\sqrt{6}}$

$0=\alpha\sqrt{3}-\beta\sqrt{2} \rightarrow +0=3\alpha-\cancel{\beta\sqrt{6}}$

$5\sqrt{2}=5\alpha \leftrightarrow \alpha=\sqrt{2}$

$0=\sqrt{6}-\beta\sqrt{2}$

$\beta=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

$\vec{t}=\sqrt{2}\vec{n}+\sqrt{3}\vec{s}$

$\vec{p} = (-2,1)$, $\vec{m} = (4,2)$, $\vec{n} = (-6,-3)$

¿$\vec{p} = a\vec{m} + b\vec{n}$?

$(-2,1) = (4a - 6b, 2a - 3b)$

$$\begin{cases} -2 = 4a - 6b \\ 1 = 2a - 3b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -1 = 2a - 3b \\ 1 = 2a - 3b \\ \hline 0 = 4a - 6b \\ -2 = 4a - 6b \end{array} \Bigg\} \text{ sin } \underline{\text{sol}}$$

$\vec{p}$ no es c. lineal de $\vec{m}$ y $\vec{n}$

1) ¿C. lineales?

a) $\vec{a}=(2,3), \vec{b}=(4,-1), \vec{c}=(6,2)$

$(2,3)=(4\alpha+6\beta, -1\alpha-2\beta)$

$\hookrightarrow 2=4\alpha+6\beta \leftrightarrow 1=2\alpha+3\beta$

$3=-1\alpha-2\beta \Rightarrow 6=-2\alpha-4\beta$

$$\begin{array}{r} 1=2\alpha+3\beta \\ +\ 6=-2\alpha-4\beta \\ \hline 7=-\beta \end{array} \leftrightarrow \beta=-7$$

$1=2\alpha-21 \leftrightarrow 22=2\alpha \rightarrow \alpha=11$

$\vec{a}=11\vec{b}-7\vec{c}$

b) $\vec{a}=(3,2), \vec{b}=(2,1), \vec{c}=(7,5)$

$(3,2)=(2\alpha+7\beta, 1\alpha+5\beta)$ $\begin{cases} 3=2\alpha+7\beta \\ 2=\alpha+5\beta \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} 3=2\alpha+7\beta \\ -4=-2\alpha-10\beta \\ \hline -1=-3\beta \end{array} \leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}$

$2=\alpha+\frac{5}{3}$

$\alpha=\frac{1}{3}$ $\quad \vec{a}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

c) $\vec{a} = (3,4)$, $\vec{b} = (-2,5)$, $\vec{c} = (5,22)$

$(3,4) = (-2\alpha + 5\beta, 5\alpha + 22\beta)$

$3 = -2\alpha + 5\beta \rightarrow 15 = -10\alpha + 25\beta$
$4 = 5\alpha + 22\beta \quad + \; 8 = 10\alpha + 44\beta$

$23 = 69\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{3}$

$3 = -2\alpha + \frac{5}{3}$

$2\alpha = -\frac{9}{3} + \frac{5}{3} \leftrightarrow 2\alpha = -\frac{4}{3} \leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$

$\vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

d) $\vec{a} = (-1,7)$, $\vec{b} = (5,-2)$, $\vec{c} = (17,13)$

$(-1,7) = (5\alpha + 17\beta, -2\alpha + 13\beta)$

$-1 = 5\alpha + 17\beta \rightarrow -2 = 10\alpha + 34\beta$
$7 = -2\alpha + 13\beta \quad 35 = -10\alpha + 65\beta$

$33 = 99\beta \leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$

$-1 = 5\alpha + \frac{17}{3} \leftrightarrow 5\alpha = -\frac{20}{3}$

$\alpha = -\frac{4}{3}$ $\quad \vec{a} = -\frac{4}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

e) $\vec{a} = (1,5), \vec{b} = (2,1), \vec{c} = (3,15)$

$(1,5) = (2A+3B, 1A+15B)$

$$\begin{aligned} 1 &= 2A+3B \\ 5 &= 1A+15B \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 1 &= 2A+3B \\ -10 &= -2A-30B \end{aligned}$$

$-9 = -27B \leftrightarrow B = \frac{1}{3}$

$5 = A+5 \leftrightarrow A = 0 \qquad \vec{a} = 0\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

f) $\vec{a} = (1,0), \vec{b} = (5,2), \vec{c} = (3,2)$

$(1,0) = (5A+3B, 2A+2B) \begin{cases} 1 = 5A+3B \\ 0 = 2A+2B \leftrightarrow A = B \end{cases}$

$1 = 5A+3A \leftrightarrow A = \frac{1}{8} = B$

$\vec{a} = \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$

g) $\vec{a} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}), \vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{2}), \vec{c} = (5, 0)$

$(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3}A + 5B, -\sqrt{2}A + 0)$ $\begin{cases} \sqrt{3} = -\sqrt{2}A \leftrightarrow A = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{6} = \sqrt{3}A + 5B \end{cases}$

$\sqrt{2} = \sqrt{3}\frac{\sqrt{6}}{2} + 5B \leftrightarrow 5B = \sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \leftrightarrow 5B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ $\vec{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{b} - \frac{\sqrt{7}}{2}\vec{c}$

h) $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \vec{b} = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), \vec{c} = (\frac{1}{4}, \frac{5}{6})$

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = (\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B, \frac{5}{6}B - \frac{1}{2}A)$

$\hookrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B \rightarrow 2 = A + B$

$\frac{1}{3} = \frac{5}{6}B - \frac{1}{2}A \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{5}{3}B - \cancel{A}$

$\frac{8}{3} = \frac{8}{3}B \leftrightarrow B = 1$

$2 = A + 1 \leftrightarrow B = 1$ $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

i) $\vec{a} = (3,-4), \vec{b} = (2,5), \vec{c} = (23,0)$

$(3,-4) = (2A + 23B, 5A)$ $\begin{cases} -4 = 5A \rightarrow A = -\frac{4}{5} \\ 3 = 2A + 23B \end{cases}$

$3 = -\frac{8}{5} + 23B \leftrightarrow \frac{23}{5} = 23B \leftrightarrow B = \frac{1}{5}$

$\vec{a} = -\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$

j) $\vec{a} = (4,2), \vec{b} = (-6,-3), \vec{c} = (-2,1)$

$(4,2) = (-6A - 2B, -3A + B)$

$4 = -6A - 2B \rightarrow 2 = -3A - B$

$2 = -3A + B \rightarrow \underline{2 = -3A + B}$

$4 = -6A \rightarrow 2 = -3A \leftrightarrow B = 0$

$\vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{b} + 0\vec{c}$

$\vec{a} = (20,16),\ \vec{b} = (4,3),\ \vec{c} = (8,7)$

$(20,16) = (4A + 8B,\ 3A + 7B)$

$$\begin{aligned} 20 &= 4A + 8B \\ 16 &= 3A + 7B \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} 5 &= A + 2B \\ 16 &= 3A + 7B \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} -15 &= -3A - 6B \\ 16 &= 3A + 7B \\ \hline 1 &= B \end{aligned}$$

$5 = A + 2 \leftrightarrow A = 3$

$\vec{a} = 3\vec{b} + \vec{c}$

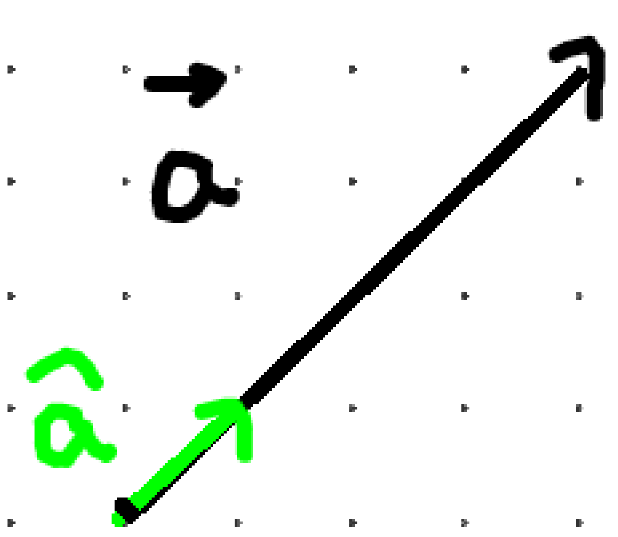
$\vec{a} = (10,-15),\ \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ \vec{c} = (-3,5)$

$(10,-15) = \left(\frac{1}{2}A - 3B,\ 5B\right)$

$$\left.\begin{aligned} 10 &= \tfrac{1}{2}A - 3B \\ -15 &= 5B \leftrightarrow \underline{B = -3} \end{aligned}\right\} 20 = A + 18 \leftrightarrow \underline{A = 2}$$

Vectores unitarios

Son vectores con longitud 1.



$\hat{a}$ es el v. unitario de $\vec{a}$.
Comparten dirección y sentido.

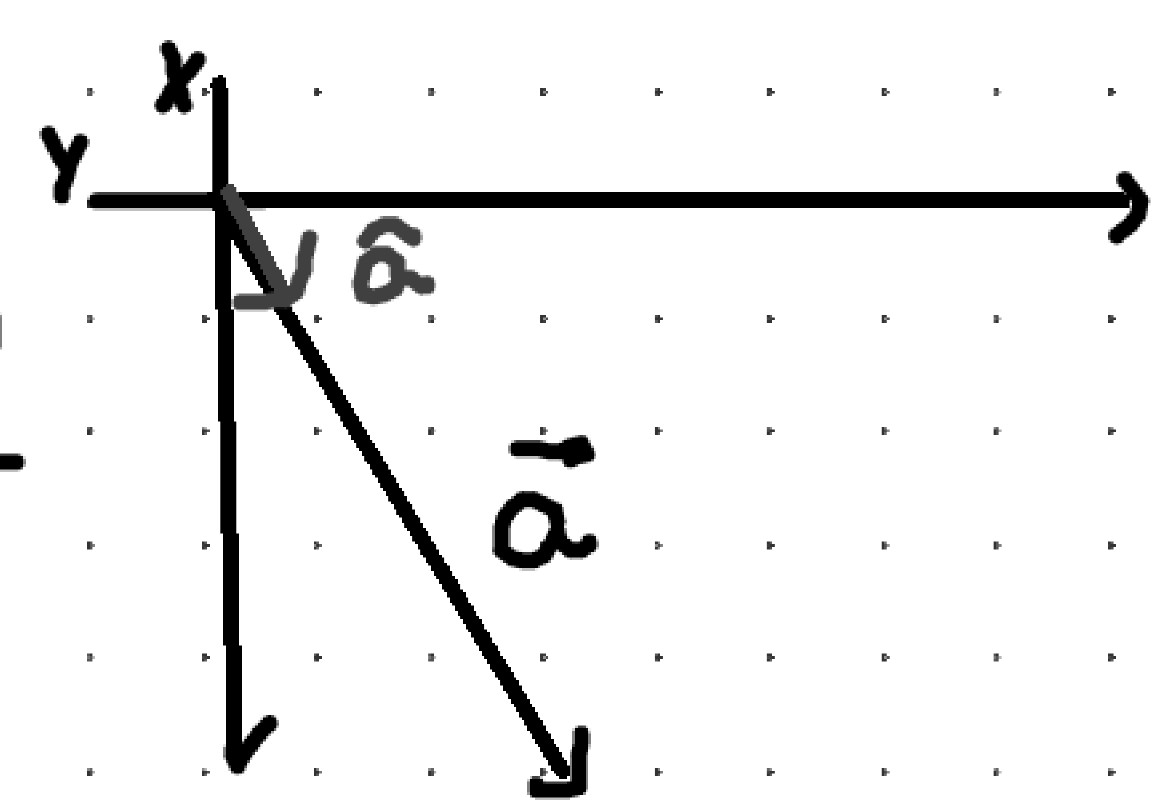
Un vector unitario de un vector $\vec{a}$ se saca dividiéndolo por su magnitud.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Ej: $\vec{a} = (3, -4)$

$$\hat{a} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{(3, -4)}{\sqrt{25}} = \frac{(3, -4)}{5}$$

$$\hat{a} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$



$|\hat{a}| = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = \sqrt{1} = 1 \leftrightarrow$ Es unitario.

Ej.: $\vec{m} = (-1, 2\sqrt{2})$, ¿$\hat{m}$?

$$\hat{m} = \frac{(-1, 2\sqrt{2})}{\sqrt{1+8}} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$|\hat{m}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{9}} = \sqrt{1} = 1 \leftrightarrow \hat{m} \text{ es v. unitario}$$

Ej.: $\vec{d} = (-12, -35)$, ¿$\hat{d}$?

$$\hat{d} = \frac{(-12, -35)}{\sqrt{144 + 1225}} = \frac{(-12, -35)}{\sqrt{1369}} = \frac{(-12, -35)}{37}$$

$$\hat{d} = \left(\frac{-12}{37}, \frac{-35}{37}\right)$$

$$|\hat{d}| = \sqrt{\frac{144}{1369} + \frac{1225}{1369}} = \sqrt{1} = 1 \leftrightarrow \text{es v. unitario}$$

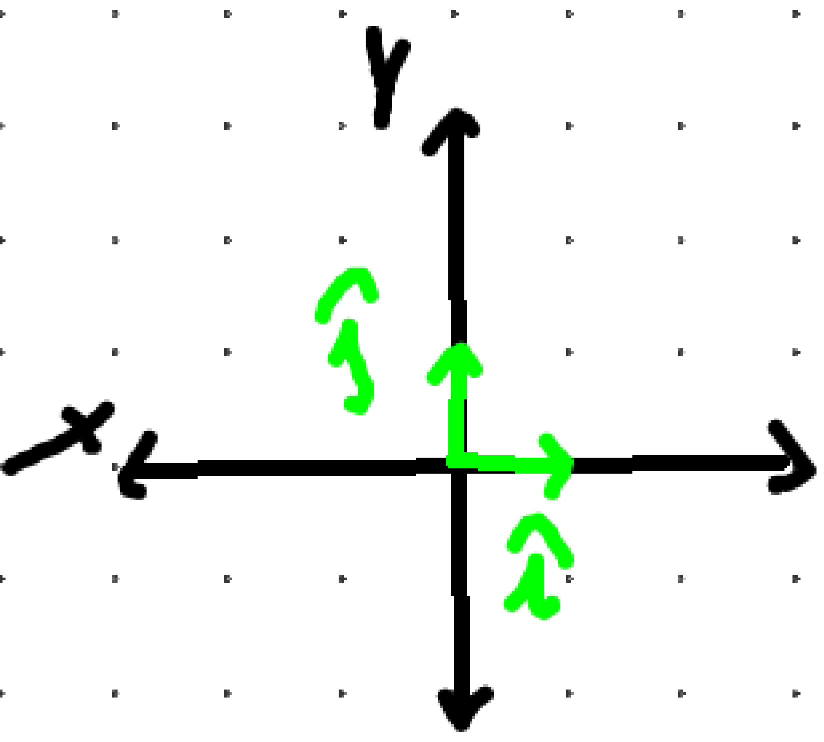
Ej.: $\vec{r} = (1, 3)$, ¿$\hat{r}$?

$$\hat{r} = \frac{(1, 3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{(1, 3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\frac{10}{100} + \frac{90}{100}} = \sqrt{1} = 1 \leftrightarrow \text{es v. unitario.}$$

Vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$

Son vectores unitarios paralelos a los ejes x e y, respectivamente.



$\hat{i} = (1,0)$
$\hat{j} = (0,1)$

Juntos forman la base del plano bi-dimensional.

Un número $n \in \mathbb{N}$ de vectores forma una base cuando se puede formar cualquier vector haciendo una combinación linear de estos vectores.

En este caso, se puede formar cualquier vector en 2 dimensiones con una combinación lineal de $\hat{i}$ y $\hat{j}$

$\vec{a} = (3,2) \longleftrightarrow \vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$

$\vec{a}=(4,3)$, $\vec{b}=(\sqrt{5},2)$, $\vec{c}=(-6,8)$, $\vec{d}=(-1,3)$, $\vec{e}=(1,2)$, $\vec{f}=(-1,2\sqrt{2})$

1. Encuentra los vectores unitarios

$\hat{a}=\frac{(4,3)}{\sqrt{16+9}}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ $\quad$ $\hat{d}=\frac{(-1,3)}{\sqrt{1+9}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\left(-\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$\hat{b}=\frac{(\sqrt{5},2)}{\sqrt{5+4}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{2}{3}\right)$ $\quad$ $\hat{e}=\frac{(1,2)}{\sqrt{1+4}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\hat{c}=\frac{(-6,8)}{\sqrt{36+64}}=\left(\frac{-6}{10},\frac{8}{10}\right)$ $\quad$ $\hat{f}=\frac{(-1,2\sqrt{2})}{\sqrt{1+8}}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

2. Escribelos como combinacion lineal de $\hat{i}$ y $\hat{j}$

$\vec{a}=4\hat{i}+3\hat{j}$, $\vec{b}=\sqrt{5}\,\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{c}=-6\hat{i}+8\hat{j}$, $\vec{d}=-\hat{i}+3\hat{j}$

$\vec{e}=\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{f}=-\hat{i}+2\sqrt{2}\,\hat{j}$