Recurrencias

$a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q a_n = t_n$; $a_n^G = a_n^H + a_n^P$

a_n^G: solución general

a_n^H: solución homogénea

a_n^P: solución particular

- Si $t_n = 0 \rightarrow a_n^P = 0 \rightarrow a_n^G = a_n^H$

Resolver a_n^H:

1.- Calcular la ecuación característica

se ignora t_n ... r de raíz

$$a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0 \rightarrow P_C(r) = r^2 + pr + q = 0$$

$$P_C(r) \begin{cases} r_1 = r_2 = r \rightarrow a_n^H = (C_1 + n C_2) r^n \\ r_1 \neq r_2 \rightarrow a_n^H = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \end{cases}$$

Si t_n ya es 0 de por sí, usar sustitución con los casos base para obtener C_1 y C_2.
Colocando sus valores en la fórmula de a_n^H ya se obtiene a_n^G.

Resolver a_n^p: hay que fijarse en t_n.

$$a_{n+2}^p + p a_{n+1}^p + q a_n^p = t_n$$

- Si t_n es cte. $\rightarrow a_n^p = K$, donde K es cte.
- Si t_n es de 1er grado, $a_n^p = An + B$
- Si t_n es de 2do grado, $a_n^p = An^2 + Bn + C$
- Si t_n es r_1^n, r_2^n ó r^n, $a_n^p = Ar^n$, donde r es el resultado de $P_c(r)$.
- Si t_n es l^n, siendo l un número cualquiera, probar con $a_n^p = K \cdot l^n$.

Resolver a_n^G:

1.- Primero, se suman a_n^H y a_n^P.

Despues, se usa sustitucion con los casos base para encontrar C_1 y C_2, en caso de que los haya.

① $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 7^n$; $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

$P_c(r) = r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3) = 0$

$r = 3 \to a_n^H = (C_1 + nC_2)\cdot 3^n$

$f_n = 7^n \to$ No cumple los casos seguros, probar con $K \cdot 7^n$.

$a_n^p = K \cdot 7^n$; $a_{n+1}^p = K \cdot 7^{n+1}$; $a_{n+2}^p = K \cdot 7^{n+2}$

$a_{n+2}^p - 6a_{n+1}^p + 9a_n^p = 7^n$

$K7^{n+2} - 6 \cdot K7^{n+1} + 9K7^n = 7^n$

$K7^2 - 6 \cdot K7^1 + 9K = 1 \leftrightarrow K(49 - 42 + 9) = 1$

$K = \frac{1}{16} \to a_n^p = \frac{1}{16} \cdot 7^n$

$a_n^G = (C_1 + nC_2)3^n + \frac{7^n}{16}$

49

② $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = n$

1. a_n^H: $P_2(r) = r^2 - 6r + 9 = 0 \rightsquigarrow (r-3)^2 = 0 \iff r = 3$

$a_n^H = (C_1 + nC_2)\,3^n$

2. a_n^p:

$f_n = n \to$ Primer grado

$a_n^p = An + B$; $a_{n+1}^p = A(n+1) + B$; $a_{n+2}^p = A(n+2) + B$

$An + 2A + B - 6An - 6A - 6B + 9An + 9B = n + 0$

$(4An) + (-4A + 4B) = n + 0$ $\begin{cases} 4An = n \to A = \frac{1}{4} \\ -4A + 4B = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow -1 + 4B = 0 \iff B = \frac{1}{4}$

$a_n^p = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$

$a_n^G = (C_1 + nC_2)\,3^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$ (no hay casos base)