Sucesiones

Son aplicaciones $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(n) = a_n$ → término general

que se representan así:

$$\{a_n\}_{n\geq 1},\ \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \text{ ó } \{a_n\}$$

lo que a su vez puede representarse de estas formas:

- Forma explícita:

$$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n\geq 1},\ \{n!\}_{n\geq 0}$$

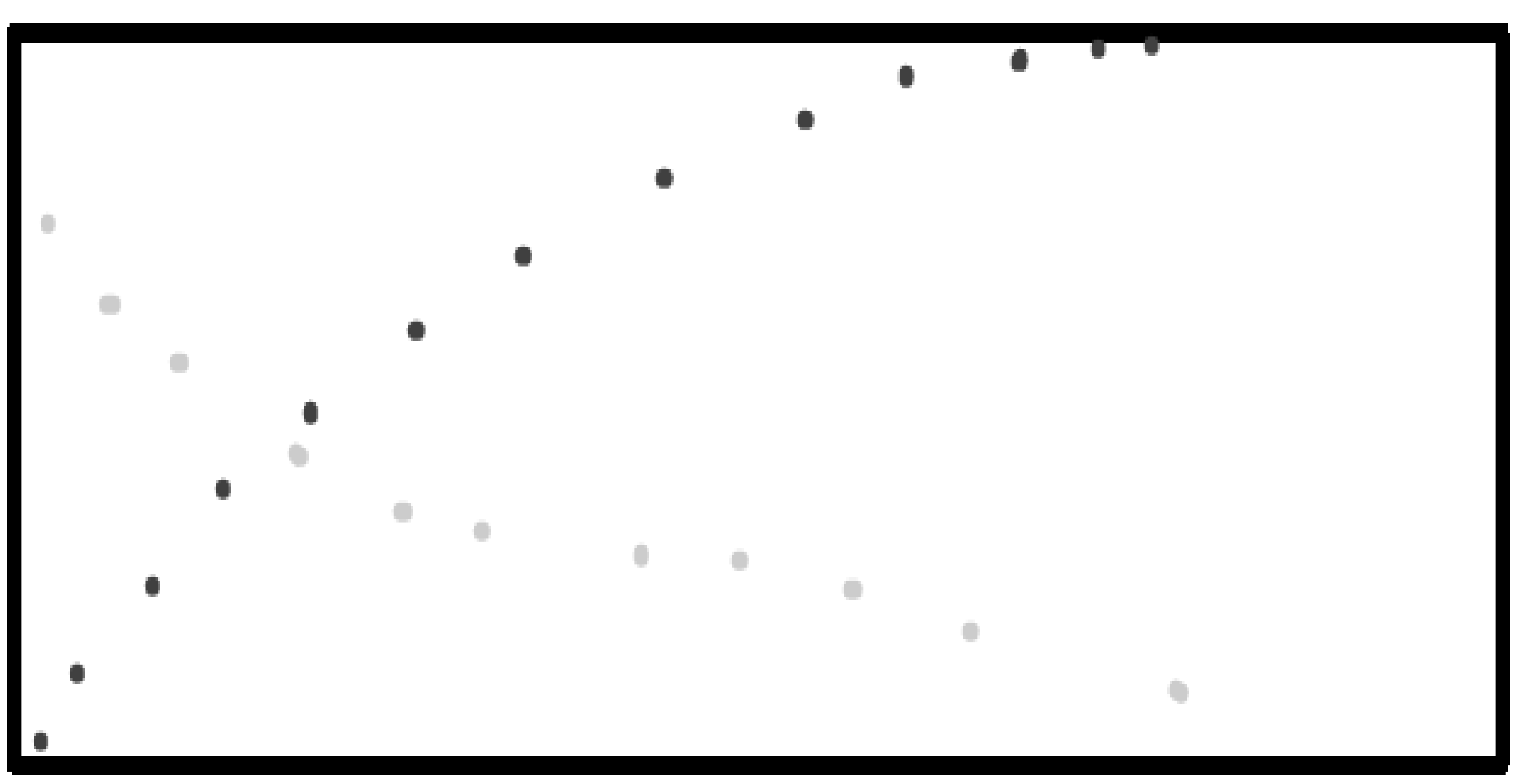
- Forma recurrente:

Sucesiones monótonas

Sucesiones que siempre crecen/decrecen.

$\{a_n\}$ decrece $\leftrightarrow a_n \geq a_{n+1}$ para $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ crece $\leftrightarrow a_n \leq a_{n+1}$ para $\forall n \in \mathbb{N}$



a_n crece

a_n decrece

$\{n^2+1\} \to$ creciente, $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to$ decreciente.

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \qquad \begin{cases} a_3 = 1-1 = 0 \\ a_4 = a_3 - 1 = 0-1 = -1 \\ a_5 = a_4 - a_3 = -1-0 = -1 \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = 1$$

$\left\{ \frac{2n+4}{1-3n} \right\} \to$ ¿creciente?

Sí

a_n

$$a_{n+1} \geq a_n \longleftrightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0$$

$$\frac{2(n+1)+4}{1-3(n+1)} - \frac{2n+4}{1-3n} \geq 0$$

$$\frac{2n+6}{-3n-2} - \frac{2n+4}{1-3n} \geq 0$$

$$\frac{(2n+6)(1-3n)+(2n+4)(3n+2)}{-(3n+2)(1-3n)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{2n} - \cancel{6n^2} + 6 - \cancel{18n} + \cancel{6n^2} + \cancel{4n} + \cancel{12n} + 8}{-(3n+2)(1-3n)} \geq 0$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$$ ¿decrece?

$a_{n+1} \leq a_n \leftrightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0$

$\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}} \leq 0$ → No se puede operar.

Inducción:

B |

$\sqrt{2+7} \leq 7 \leftrightarrow 3 \leq 7$ → Se cumple.

H |

$a_{n+1} \leq a_n$

P |

$a_{n+2} \leq a_{n+1} \leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+a_{n+1}} < \sqrt{2+a_n}}_{\text{Cierto para toda } n \in \mathbb{N}}$

Sucesiones acotadas

$\{a_n\}$ es acotada superior por K si:

$n \leq K$, para $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ es acotada inferior por K si:

$n \geq K$, para $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ es acotada por K si se dan los dos casos anteriores.

Por tanto, $\{a_n\}$ es acotada $\rightarrow$ $\{|a_n|\}$ lo es superior

$\{n^2+1\}$ $\rightarrow$ es acotada inferior. ($a_n \geq 2$)

$\{\text{sen}(n) - n\} \rightarrow \begin{matrix} 0 \leq \text{sen}(n) \leq 1 \\ n \geq 1 \end{matrix} \rightarrow$ acotada superior, pero no inferior.

$\left\{\frac{2n+4}{1-3n}\right\}$ → ¿acotada superior por $\frac{-2}{3}$?

$$a_n \leq \frac{-2}{3} \leftrightarrow \frac{2n+4}{1-3n} \leq \frac{-2}{3}$$

$$\frac{2n+4}{1-3n} + \frac{2}{3} \leq 0 \leftrightarrow \frac{3(2n+4) + 2(1-3n)}{3(1-3n)} \leq 0$$

$$\frac{\cancel{6n}+12+2-\cancel{6n}}{-9n+1} = -\frac{14}{9n-1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{14}{9n-1}$ siempre es < 0.

→ $\left\{\frac{2n+4}{1-3n}\right\}$ está acotada superiormente por $-\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \\ a_1 = 7 \end{cases}$$ → ¿acotada inferior por 2?

BI

$n=1$, $7 \geq 2$ → Se cumple

HI

$a_n \geq 2$

PI

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq 2$

Si $a_n = 2$ (el menor valor posible):

$a_{n+1} = \sqrt{2+2} = 2 \rightarrow \underline{2 \geq 2}$

Sucesiones convergentes

$\{a_n\}$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$,

existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Donde α es $\lim\limits_{n \to \pm\infty} a_n$

α se puede representar como:

$$\lim_{n \to \pm\infty} a_n , \quad a_n \xrightarrow{n \to \pm\infty} \alpha$$

ó simplemente:

$$\lim a_n , \quad a_n \rightarrow \alpha$$

es decir converge si su límite es un número

$$\left\{\frac{2n+4}{1-3n}\right\} \longrightarrow -\frac{2}{3} \qquad ¿\varepsilon?,\ ¿n_0?$$

$$\underbrace{}_{a_n} \qquad \underbrace{}_{\alpha}$$

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$|a_n - \alpha| = \left|\frac{2n+4}{1-3n} + \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{\cancel{6n} + 12 + 2 - \cancel{6n}}{3-9n}\right| =$$

$$\left|\frac{14}{9n-3}\right| \rightarrow \text{si } n \in \mathbb{N}, \text{ siempre es} \leq 0$$

$$\varepsilon > |a_n - \alpha| \leftrightarrow \varepsilon > \frac{14}{9n-3} \qquad ¿n?$$

$$\varepsilon > \frac{14}{9n-3} \leftrightarrow \varepsilon(9n-3) > 14 \leftrightarrow 9n-3 > \frac{14}{\varepsilon}$$

$$14 + 3\varepsilon \qquad 14 + 3\varepsilon$$

Series divergentes

$\{a_n\}$ es divergente si no converge.

Es decir, lo es si su límite cuando n tiende a $\pm\infty$, es $\pm\infty$.

$$\underbrace{\pm\infty, \text{ es } \pm\infty}_{\text{Pueden ser infinitos diferentes.}}$$

Teorema de Convergencia Monótona

Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superior
o $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferior:

$\{a_n\}$ es convergente.

Si $\{a_n\}$ es creciente, PERO NO
acotada superior:

diverge a $+\infty$

Si $\{a_n\}$ es decreciente PERO NO