Siendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos,
y $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una colección de conjuntos,
el producto cartesiano es el siguiente conjunto:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle, a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

De modo que $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \ldots$
$(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \ldots$
$, \ldots\}$

Una relación n-aria es un subconjunto de
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
Es decir, una relación binaria entre $A$ y $B$
está incluida en $A \times B$.

$R \subseteq A \times B \rightsquigarrow$ Osea, es el grafo de una correspondencia

$$R = G(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$$

Son pares ordenados

Ej.: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$

$R = \{(1,b),(1,c),(2,a),(3,a),(3,b)\} \subseteq A \times B$

$\hookrightarrow$ $1Rb$, $1Rc$, $2Ra$, $3Ra$, $4 \not R x \ \forall x \in B$

Ej.: Si $A = B = \mathbb{N}$, se puede establecer la relación:

$aRb \leftrightarrow a$ es divisor de $b \rightsquigarrow a|b$

$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a|b\}$, entonces:

$3R6$ (o $(3,6) \in R$), $7 \not R 15$ (o $(7,15) \notin R$)

## Más relaciones

$R = \emptyset \rightsquigarrow$ relación vacía

$R = A_1 \times \ldots \times A_n \rightsquigarrow$ relación universal

$A = A_i, \forall i \rightsquigarrow$ relación $n$-aria sobre $A$.

Si $n=2$, relación binaria.

Si $n=3$, relación ternaria.

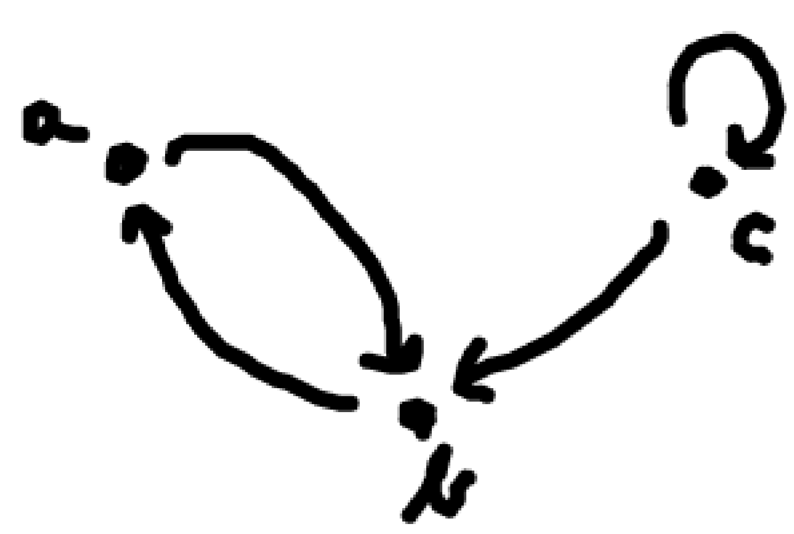
...

# Representación de relaciones:

Si $A = B$ $\rightsquigarrow$ $\langle A, R \rangle$, $(A, R)$, $R \subseteq A \times A$

→ a y b están relacionados $\rightsquigarrow$ $aRb$, $(a, b) \in R$

→ Grafos dirigidos:

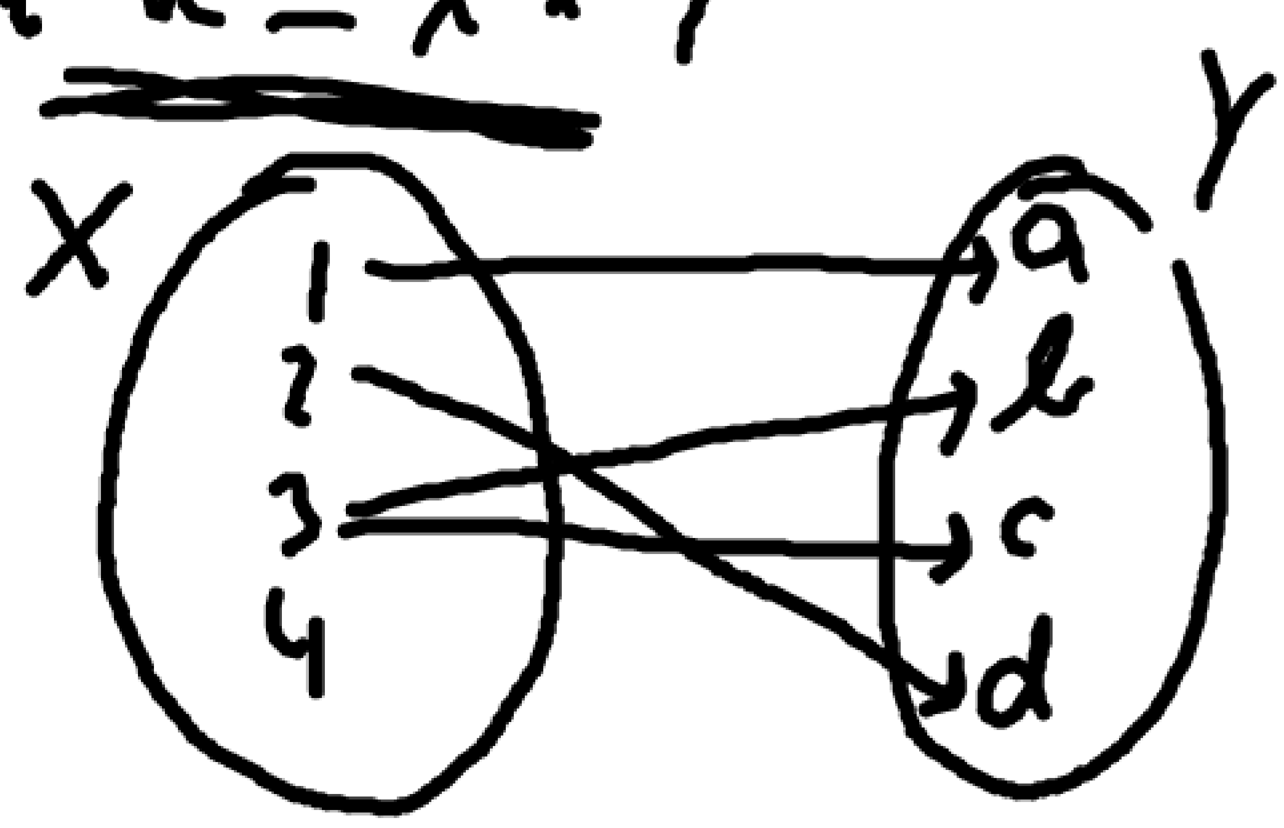



adyacencia

$A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,b), (b,a), (c,b), (c,c)\}$

Si $R \subseteq X \times Y$




$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(1, a), (2, d), (3, b)$
$(3, c)\}$

Si $A = B$ también se puede representar en forma de matriz similar a la de adyacencia, donde solo hay 0 o 1.

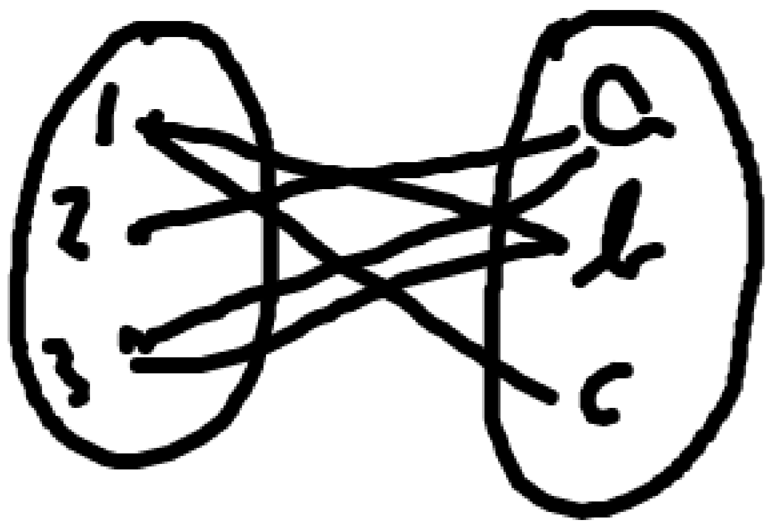

$A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,b), (b,a), (c,b), (c,c)\}$

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

Ej.:

$$R = \{(1,b), (1,c), (2,a), (3,a), (3,b)\}$$




¿Correspondencia? ✓

¿Aplicación? X

HACER MÁS EJEMPLOS

Tipos de relación binaria

- Reflexiva: $xRx \quad \forall x \in A$
  Todo elemento está relacionado consigo mismo
  La matriz tendrá "1" en toda la diagonal.

- Simétrica: $xRy \rightarrow yRx \quad \forall x, y \in A$
  Todas las relaciones son bidireccionales,
  como en un grafo no dirigido.

- Antisimétrica $xRy \land yRx \rightarrow x = y \quad \forall x, y \in A$
  Las relaciones solo pueden ser simétricas si
  son sobre el propio elemento (bucle), de modo
  que no hay relaciones bidireccionales.

- Transitiva $\quad xRy \land yRz \rightarrow xRz \quad \forall x, y, z \in A$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Reflexiva
- Transitiva
- antisimétrica.

HACER MÁS EJEMPLOS

# Operaciones con relaciones

$f: A \to B$ , $g: B \to C$

$Grafo(f) = F = \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$

$Grafo(g) = G = \{(b,c) \in B \times C \mid c \in f(b)\}$

$F_{[G(m)]} = G \circ F$

$G \circ F = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B \in F \wedge (b,c) \in G\}$

Funciona del mismo modo para las relaciones.

También se puede operar con las relaciones como si fuesen conjuntos

$R \cup S$, $S \cap R$, $R^c$, etc.

Si $R = \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$,

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ ← intercambiar a y b.

Si $R \cup S \subseteq A \times B$

$(R^{-1})^{-1} = R$

$(A \times B)^{-1} = B \times A$

$\phi^{-1} = \phi$

$(R^{c})^{-1} = (R^{-1})^{c}$

$A = B \rightarrow (R \; S)^{-1} = R^{-1} \; S^{-1}$

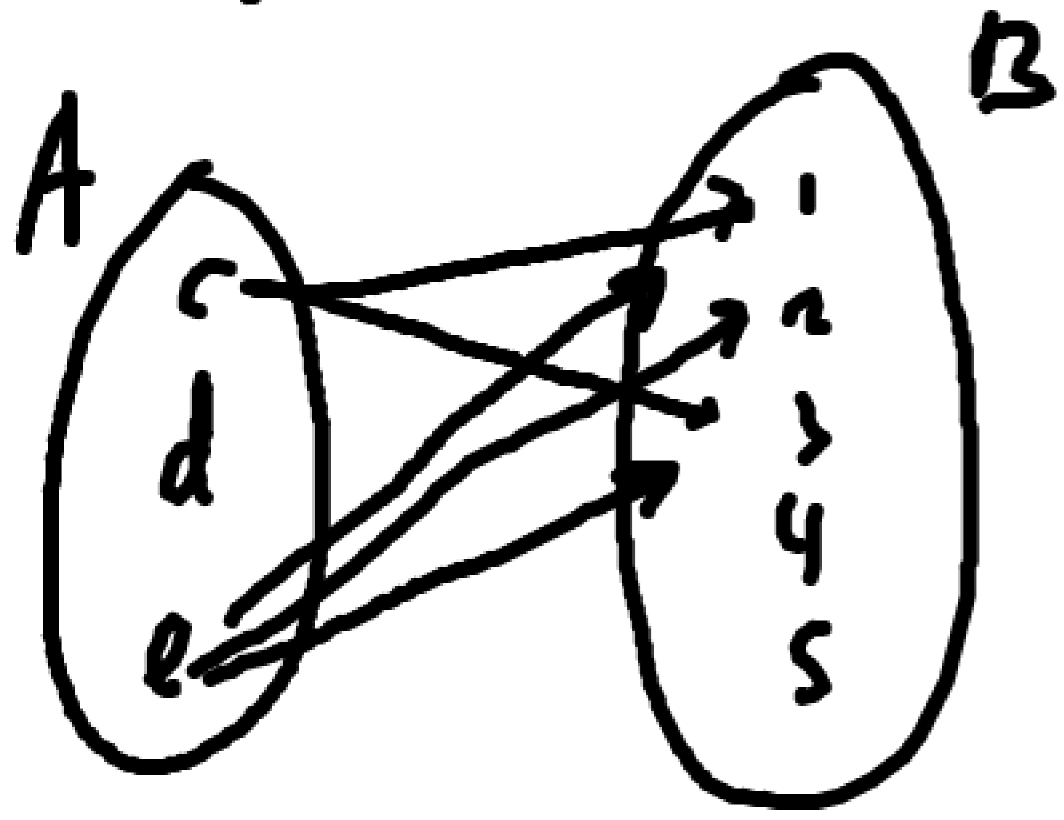
$R \subset S \rightarrow R^{-1} \subset S^{-1}$

Si $R \subseteq A \times B$ , $S \cup P \subseteq B \times C$

- $R(S \cup P) = RS \cup RP$
- $R(S \cap P) \subset R_1 R_2 \cap R_1 R_3$

Ej.: $A=\{c,d,e\}$ $B=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{(c,1),(c,3),(e,1),(e,2),(e,3)\}\subset A\times B$




$c \not R 1$

$\exists x\in B,\ d \not R x$

$\exists x\in A,\ x \not R 5 \wedge x \not R 4$

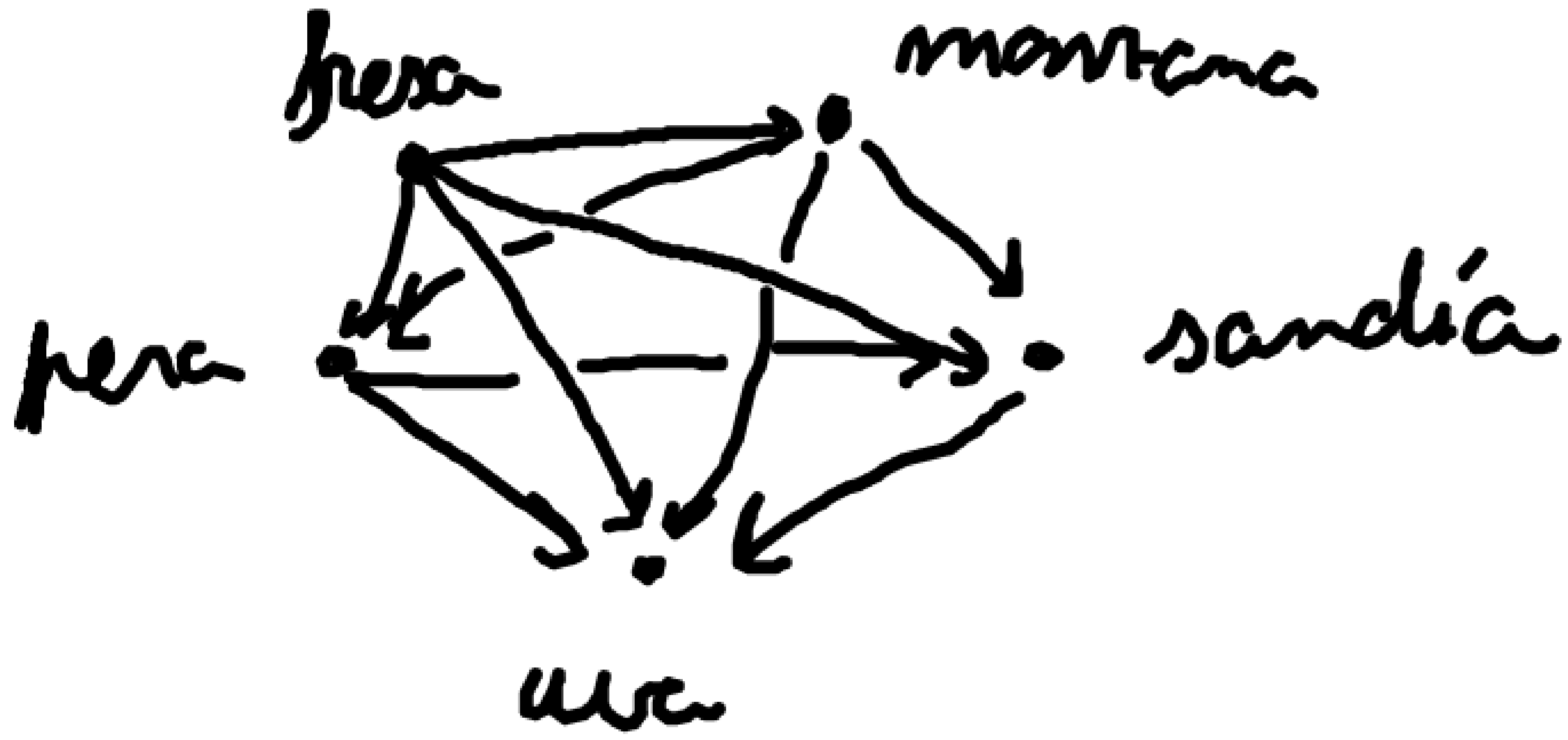
$\exists x\in \{1,2,3\},\ e R x$

Ej.: $A=\{a,b,c\}$

$R=\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,a),(c,b)\}\subset A\times A$


Ej.: $A=\{$fresa, manzana, sandía, pera, uva$\}$

$\forall i,j\in A \quad i R j \leftrightarrow$ i aparece antes que j en el diccionario.




$R=\{(f,m),(f,s),(f,p),(f,u),(m,s),(m,p),(m,u),(p,s),(p,u),(s,u)\}\subset A\times A$

Ej.: $A = \{2,3,4,5,6\}$

$\forall i,j \in A \quad iRj \leftrightarrow i+j \le 7$

$R = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),$
$(3,2),(3,3),(3,4),$
$(4,2),(4,3),(5,2)\}$


$\forall x,y \in A \quad xRy \leftrightarrow yRx$ ⇝ Simétrica

$\forall x \in A \quad \cancel{xRx}$ ⇝ No reflexiva $\cancel{(4,4)}$

$\forall x,y \in A \quad \cancel{xRy \wedge yRx \to x=y}$ ⇝ No Anti-s.

$\forall x,y,z \in A \quad \cancel{xRy \wedge yRz \to xRz}$ ⇝ No transitiva

$2R5 \wedge 3R2$, pero $3\not R5$.

$\exists x \in A \quad x \not R x$ ⇝ No refl.

$\exists x,y \in A \quad \neg(xRy \wedge yRx \to x=y)$

$\exists x,y \in A \quad \neg(x\not Ry \vee y\not Rx \vee x=y)$

$\exists x,y \in A \quad xRy \wedge yRx \wedge x\neq y$ ⇝ No Anti-sim.

$\exists x,y,z \in A \quad \neg(xRy \wedge yRz \to xRz)$

$\exists x,y,z \in A \quad \neg(x\not Ry \vee yRz \vee xRz)$

$\exists x,y,z \in A \quad xRy \wedge yRz \wedge x\not Rz$

## Representación matricial:

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $B = \{b_1, \dots, b_m\}$

La matriz asociada a la relación $R \subset A \times B$ es una matriz de adyacencia booleana (sólo 0 y 1) de $n$ filas (A) y $m$ columnas (B).

Es decir, las filas correspon a A y las columnas a B

La matriz $M_R = (r_{ij})_{n \times m}$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
i \backslash j & 1 & 2 & 3 & \dots \\
\hline
1 & r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & r_{1,m} \\
2 & r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & r_{2,m} \\
3 & r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & r_{3,m} \\
\dots & r_{n,1} & r_{n,2} & r_{n,3} & r_{n,m}
\end{array}
$$

$$
r_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } a_i \not R\, b_j \\ 1 \text{ si } a_i R\, b_j \end{cases}
$$

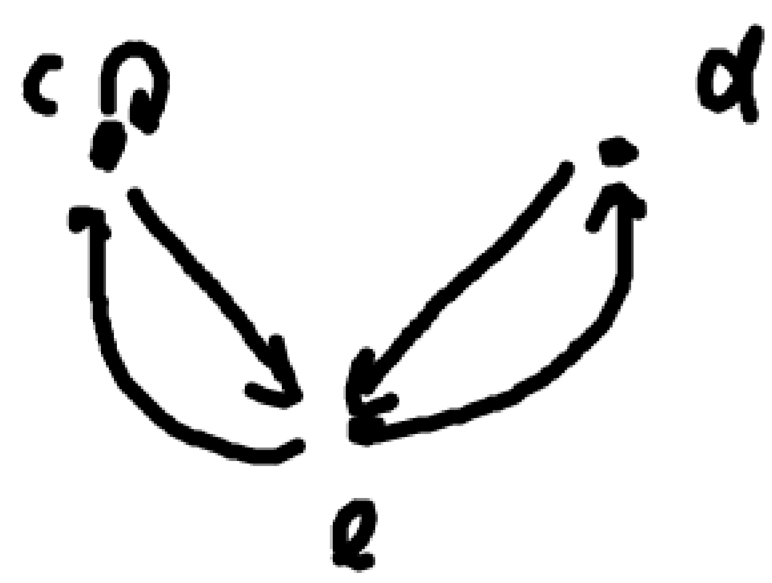
Eg.:

$A = \{c, d, e\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(c,1), (c,3), (c,4), (e,1), (e,2), (e,3)\} \subset A \times B$

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Eg.: $A = \{c, d, e\}$




$S = \{(c,c), (c,e), (d,e), (e,c), (e,d)\} \subset A \times A$

$$M_S = \begin{array}{c|ccc|} & c & d & e \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 \\ e & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

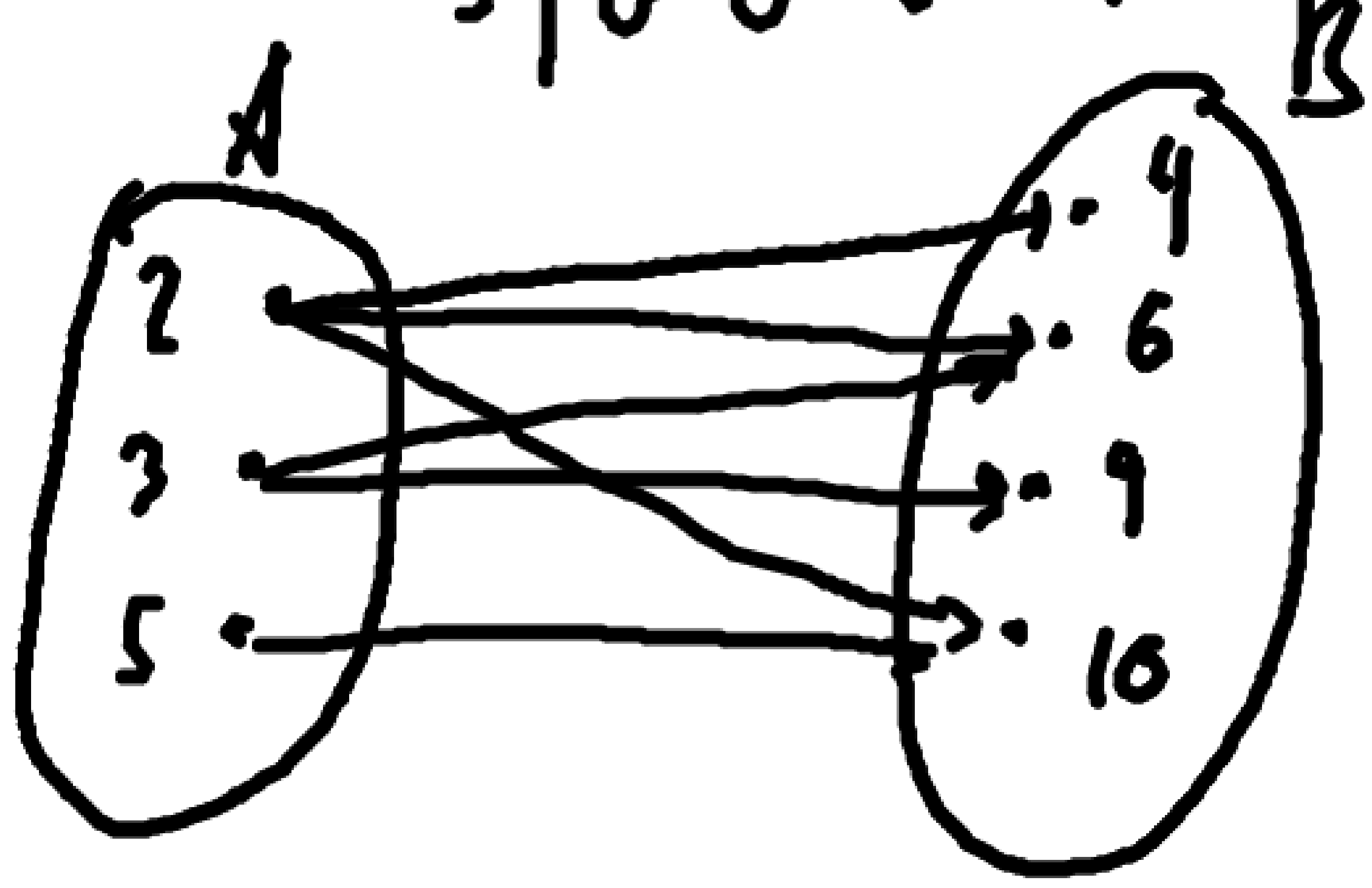
Ej.: $A=\{2,3,5\}$ $B=\{4,6,9,10\}$

$\forall a\in A, \forall b\in B \quad aRb \leftrightarrow a|b$

a divisor de b

$R=\{(2,4),(2,6),(2,10),(3,6),(3,9),(5,10)\}\subset A\times B$

$$M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 4 & 6 & 9 & 10 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



Ej.:

$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$\forall a, b \in A \quad aRb \leftrightarrow a \mid b$

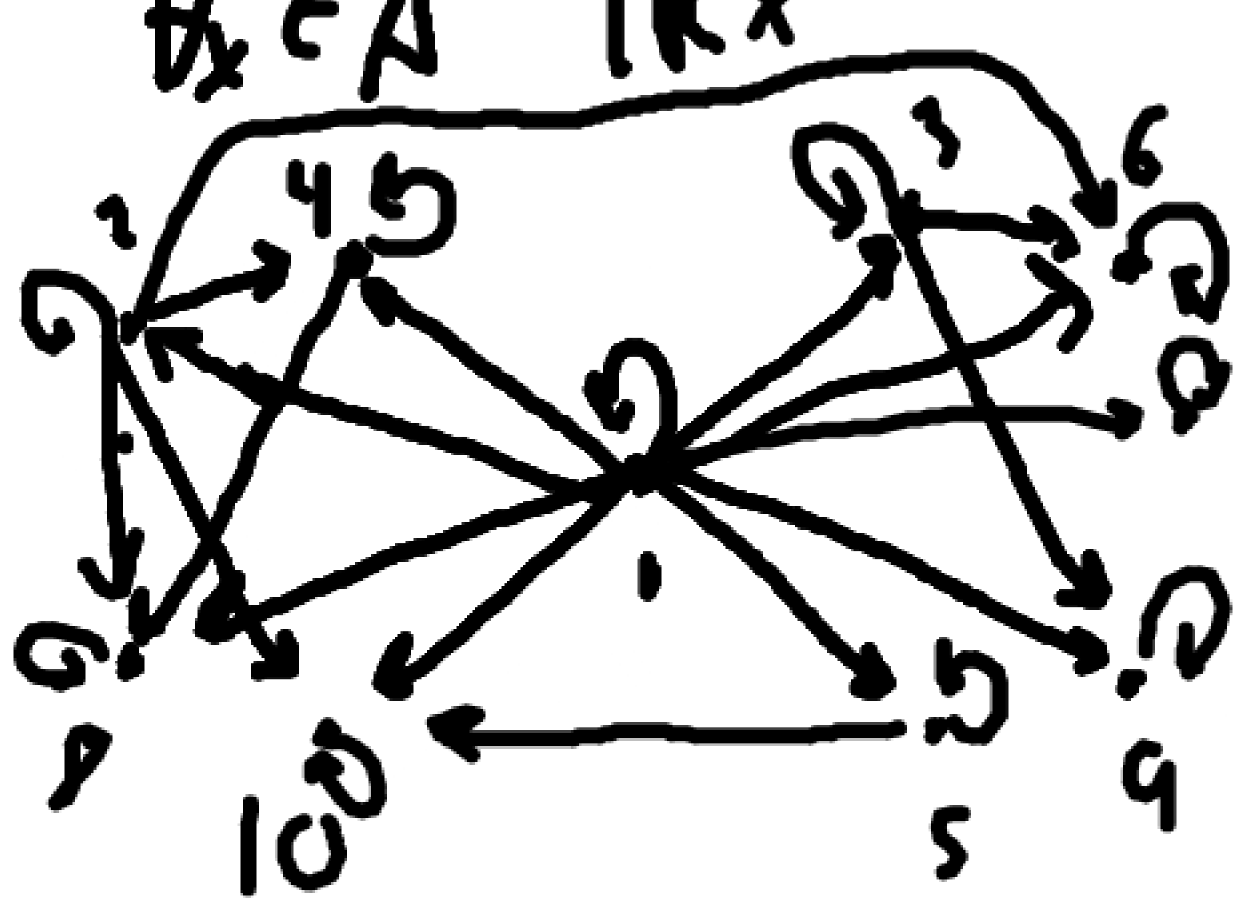
$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$

$2R4 \quad 2R6 \quad 2R8 \quad 2R10$

$\forall x \in A \quad xRx$

$\forall x \in A \quad 1Rx$

$3R6 \quad 3R9 \qquad 4R8$




$$M = \begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

# Operaciones de relaciones binarias

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c\}$

$R = \{(1,a),(2,c),(3,a),(3,c)\}$

$S = \{(1,b),(2,c),(3,b)\}$

$$M_R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad M_S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$R \cup S = \{(1,a),(1,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$

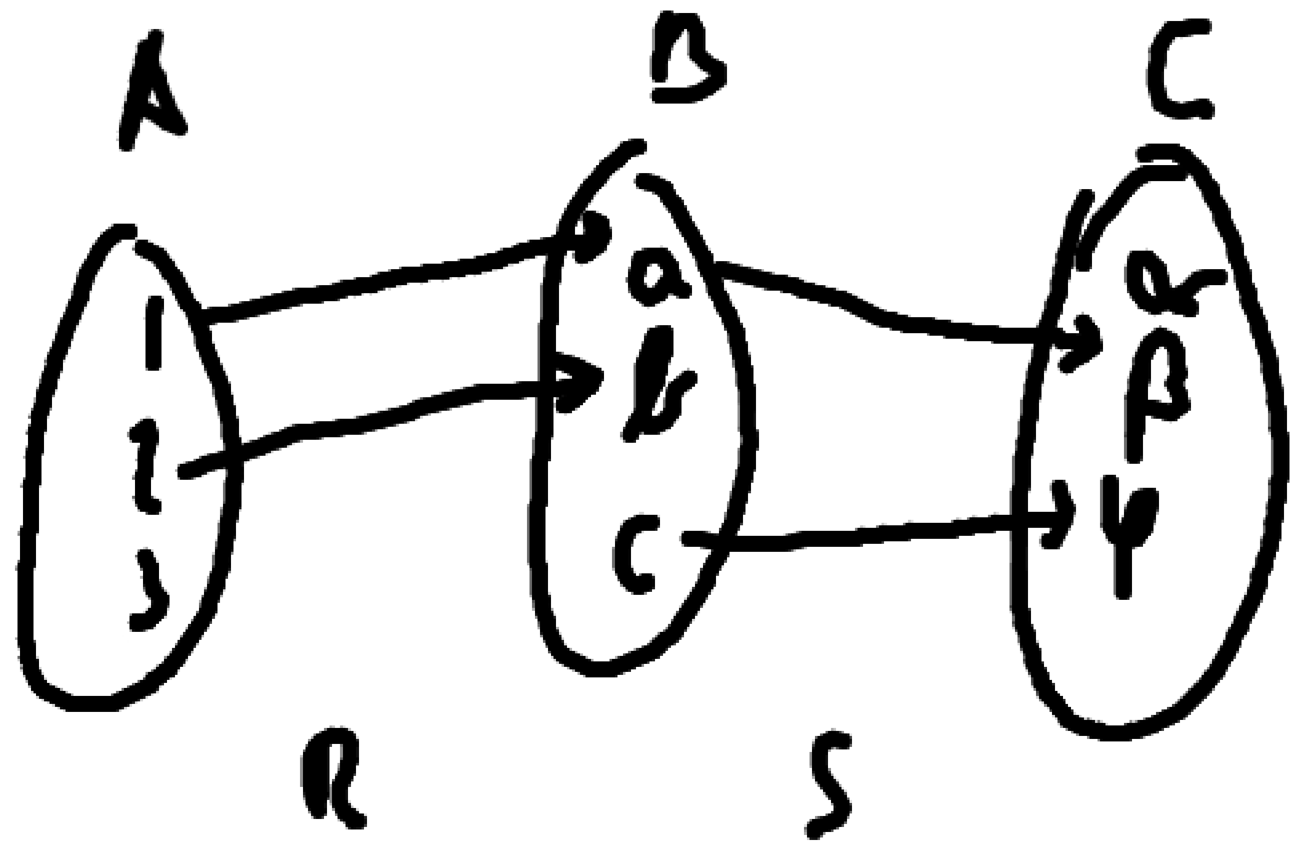
$$M_{R\cup S} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow r_{ij} \text{ OR } s_{ij}$$

$R \cap S = \{(2,c)\}$ $\quad M_{R\cap S} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow r_{ij} \text{ AND } s_{ij}$

$R - S = R \cap S^c = \{(1,a),(3,a),(3,c)\}$ $\quad M_{R-S} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow r_{ij} \text{ AND NOT } s_{ij}$

$R^c = (A \times B) - R$ $\quad M_{R^c} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

# Composición de relaciones binarias




$A = \{1,2,3\}$ $R = \{(1,a),(2,b)\}$

$B = \{a,b,c\}$ $S = \{(a,\beta),(c,\varphi)\}$

$C = \{\alpha,\beta,\varphi\}$

$$R \circ S = \{(a,c) \in A \times C \mid (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$$

$$R \circ S = \{(1,\beta)\}$$

$$M_R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad M_S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

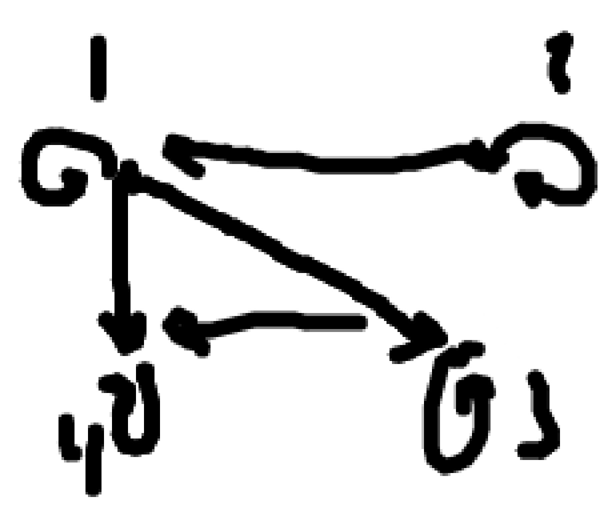
$$M_{R \circ S} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

# Propiedad Reflexiva

$\forall_x \in A \quad xRx$

Para todo miembro de A, dicho miembro tiene relación consigo mismo.

$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4)\} \subset A \times A$




Todas tienen bucle.

$$M_R = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix}$$

Siempre hay 1 en toda la diagonal.

$$M_R \leq \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = Id$$

Siempre es mayor que la matriz de Identidad

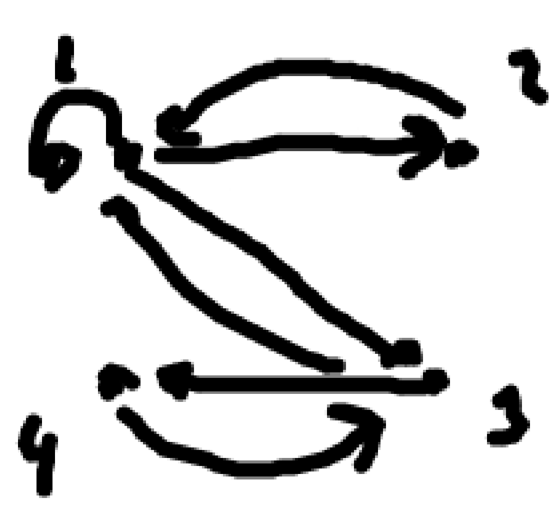
## Propiedad simétrica

$\forall x \in A \quad xRy \to yRx$

Si un elemento tiene relación con otro, tiene que haber una inversa.

$A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(4,3)\} \subset A \times A$



Todos los caminos tienen camino de vuelta, como un grafo no dirigido.

1) Es simétrica a ambos lados de la diagonal

$$M_R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2) $M_R = M_R^{-1} \iff R = R^{-1}$

# Propiedad antisimétrica

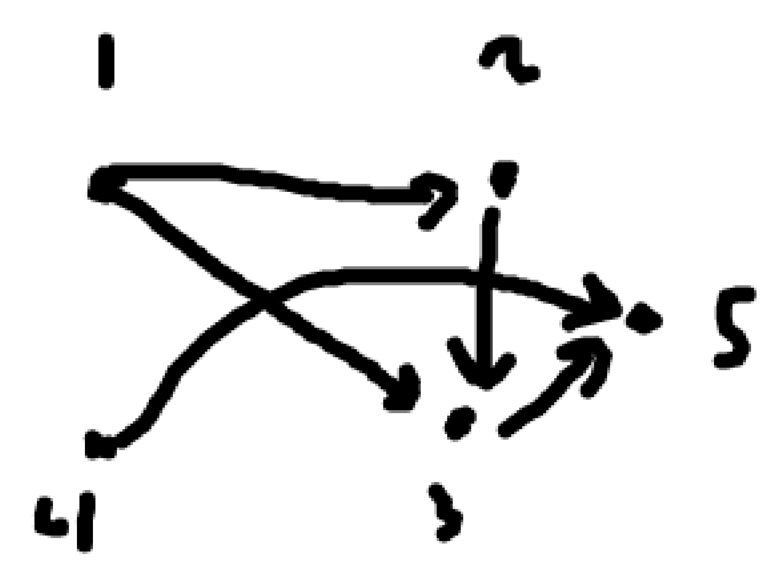
$$\forall x,y \quad xRy \wedge yRx \to x=y$$

Un par de elementos no pueden tener su inversa en la relación.

No puede ser anti-simétrica y simétrica a la vez, pero sí puede no ser ambas.

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,5),(4,5)\}\subset A\times A$$




No hay ningún camino de vuelta.

La diagonal se mantiene

$$M_R=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{vmatrix}\quad M_{R^{-1}}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\end{vmatrix}\quad M_R\cap M_{R^{-1}}=\begin{vmatrix}\boxed{1}&0&0&0&0\\0&\boxed{0}&0&0&0\\0&0&\boxed{0}&0&0\\0&0&0&\boxed{0}&0\\0&0&0&0&\boxed{0}\end{vmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$R\cap R^{-1}=\Delta=\text{la diagonal}$$

$i\neq j \to r_{ij}=0,\ r_{ji}=1$ y viceversa.

# Propiedad Transitiva

$$\forall x,y,z \quad xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$$

Por ejemplo, si $a>b \wedge b>c \rightarrow a>c$.

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),$
$(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$


Es difícil ver cuando es transitiva visualmente, sobretodo si hay bucles.

$$\begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&1&1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&1&1&1 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&1&1&1 \end{vmatrix}$$

# Multiplicación de Matrices

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1a+3b+5c) & (2a+4b+6c) \\ (1d+3e+5f) & (2d+4e+6f) \end{vmatrix}$$

# Relaciones de orden

Una relación binaria es de orden si es:

- Reflexiva: $\forall x \in A \; xRx$
- Antisimétrica: $\forall x,y \in A \; xRy \wedge yRx \rightarrow x=y$
- Transitiva: $\forall x,y,z \in A \; xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

$aRb \begin{cases} a \text{ es anterior a } b \rightsquigarrow a \preceq b \\ b \text{ es posterior a } a. \rightsquigarrow b \succeq a \end{cases}$

Si todo par de elementos se puede comparar, es una RO total. es decir, si todos estan relacionados

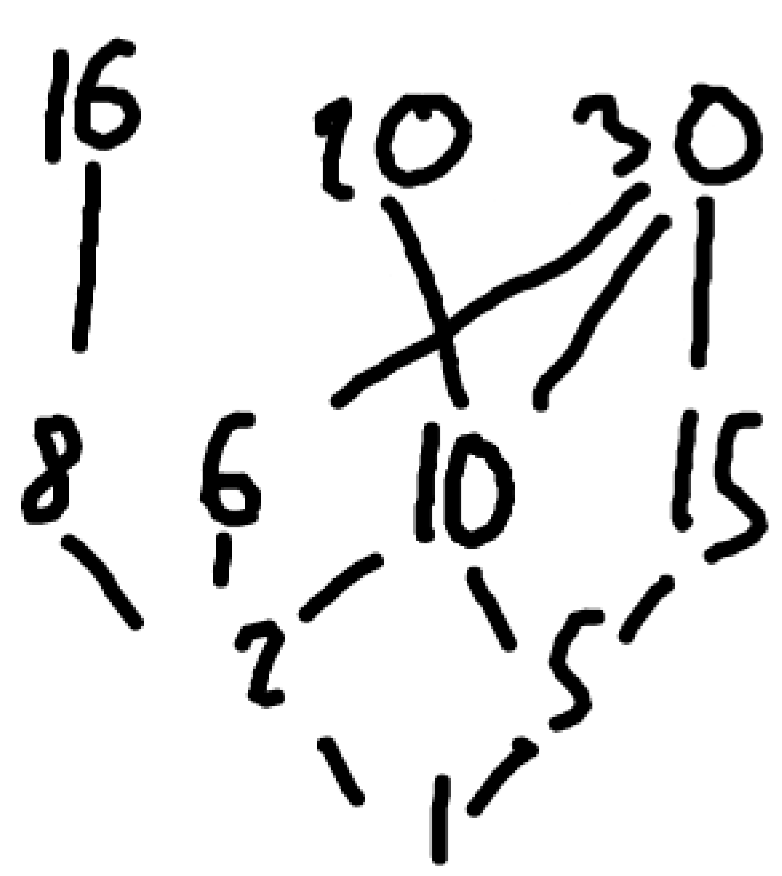
↳ $\forall a,b \in A \; aRb \vee bRa$

Si no se da el caso, es una RO parcial.

# Diagrama de Hasse

$A=\{1,2,5,6,8,10,15,16,20,30\}$

$\forall a,b \in A \quad aRb \leftrightarrow a|b \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ b = k\cdot a$




Sólo se hace si es una RO

Es como un grafo dirigido en el que asumimos y borramos los bucles, la transitividad y la dirección.

Si $R$ es RO total, el diagrama es una línea.

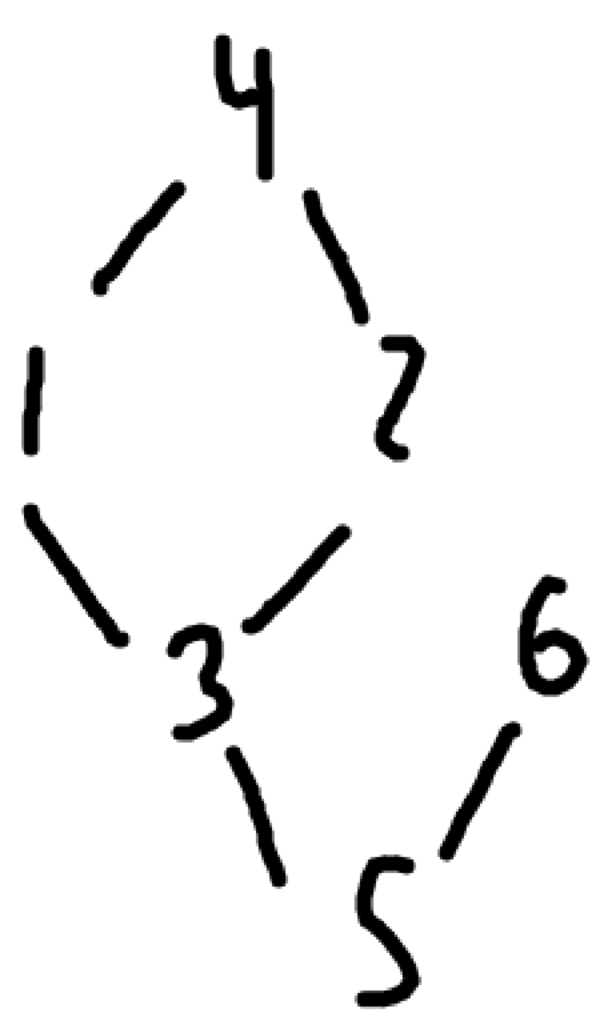
6 y 10 no se pueden comparar, $6 \not R 10$, pero sabemos que ambos son anteriores a 30 ($6R30 \wedge 10R30$).

# Elementos notables de la RO

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$R = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),$
$(3,4),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),$
$(5,6),(6,6)\}$

$\forall x \in A \ \ xRx$
$\forall x,y \in A \ \ xRy \wedge yRx \to x=y$
$\forall x,y,z \in A \ \ xRy \wedge yRz \to xRz$




$m \in A$ es máximo si $\forall x \in A \ m \succeq x$

$m \in A$ es mínimo si $\forall x \in A \ m \preceq x$

$m \in A$ es maximal si no hay un el. por encima

$\neg(\exists x \in A \mid x \neq m \wedge x \succeq m)$

$m \in A$ es minimal si no hay un el. por debajo

$\neg(\exists x \in A \mid x \neq m \wedge x \preceq m)$

5 es mínimo y minimal

$4 \not R 6$, 4 no es máximo, pero sí es maximal

# Cota superior e inferior

- $a \in A$ es cota superior del subconjunto no nulo $B$ si:

  $\forall b \in B,\ a \succeq b$

- $a \in A$ es cota inferior del subconjunto no nulo $B$ si:

  $\forall b \in B,\ a \preceq b$

Nótese que $a$ no tiene porqué estar en $B$.

- $a \in A$ es supremo ($\sup(B)$) si $a$ es la menor de las cotas superiores de $B$.

- $a \in A$ es ínfimo ($\inf(B)$) si $a$ es la mayor de las cotas inferiores de $B$.

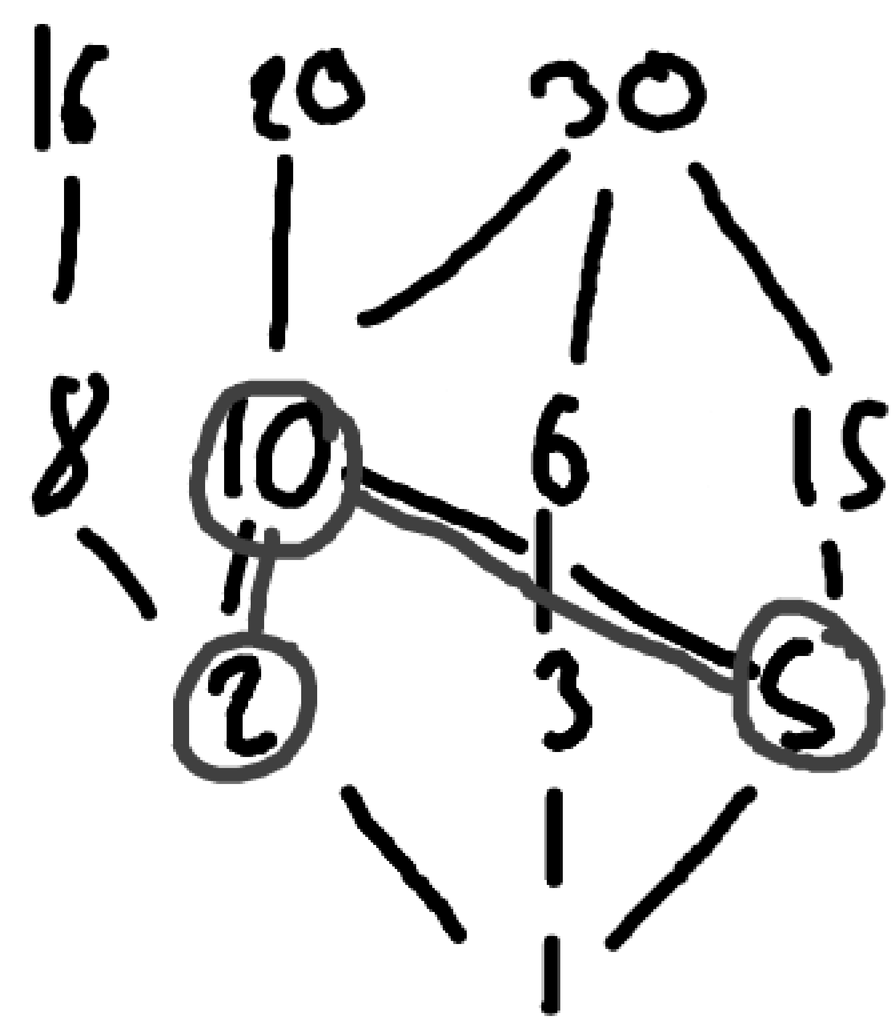
Es decir, el supremo es la primera cota superior y el ínfimo la primera cota inferior.

Ej.: $A=\{1,2,3,5,6,8,10,15,16,20,30\}$

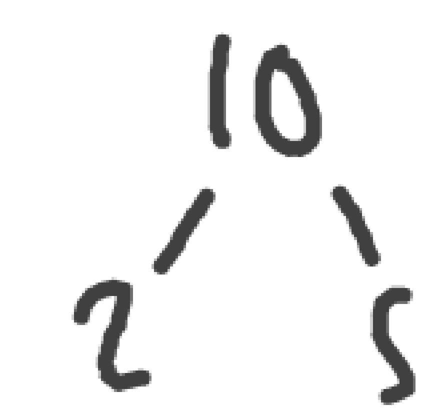
$\forall a,b \in A \quad aRb \Leftrightarrow a|b$

$B=\{2,10,5\}$

A



B



Cota inferior de B: 1

Cota superior de B: 20, 30, 10

Supremo: 10, porque $20 \not R 30$

Ínfimo: 1

Máximo de A: No hay

Máximo de B: 10

Mínimo de A: 1

Mínimo de B: No hay

Maximales de A: 16, 20, 30

Minimales de A: 1

Maximales de B: 10

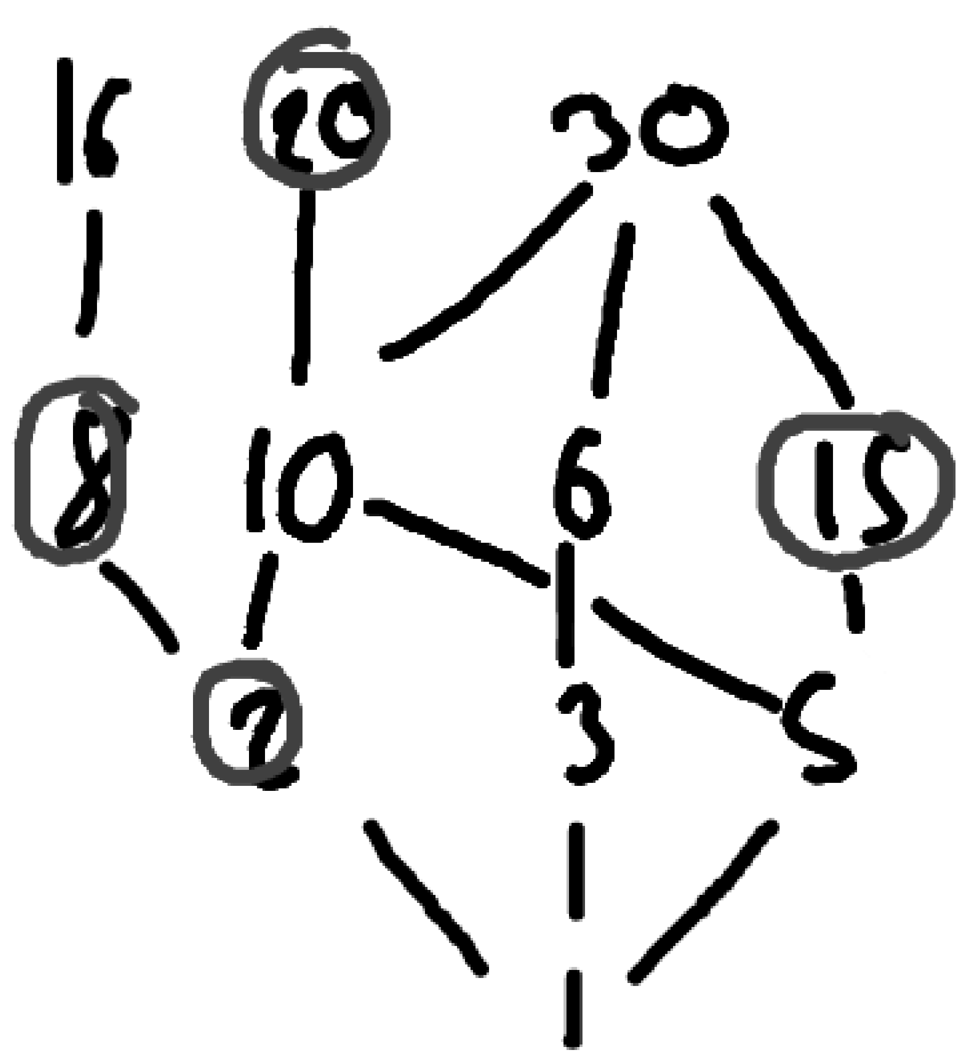
Minimales de B: 2, 5

Ej.: $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 20, 30\}$

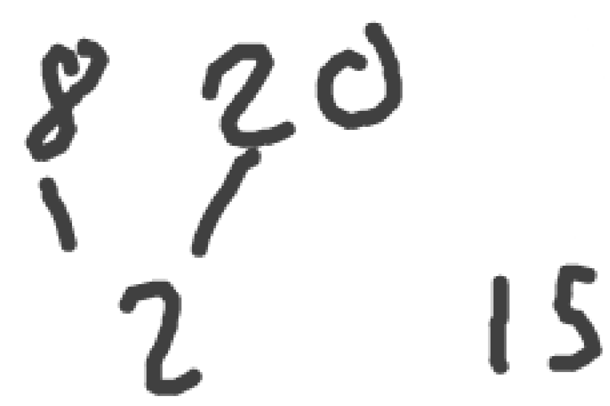
$\forall a, b \in A \quad aRb \Leftrightarrow a \mid b$

$B = \{2, 8, 15, 20\}$

A




B

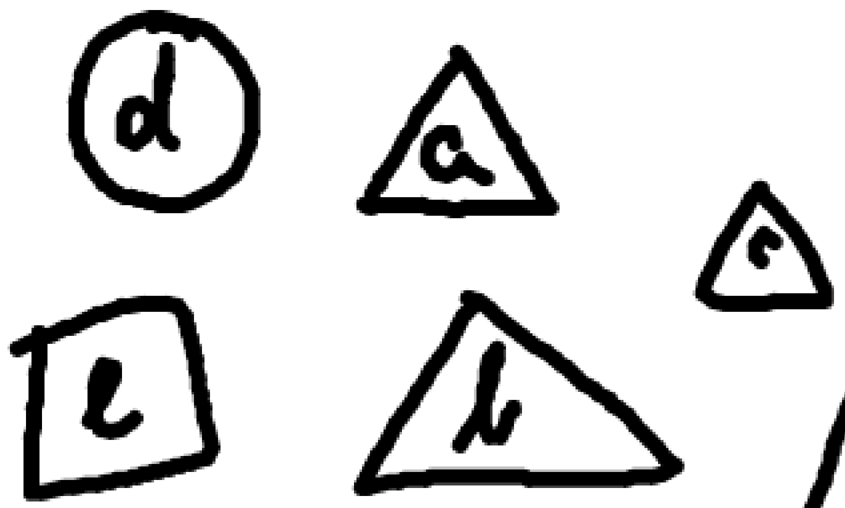



B:

- Cota superior: /
- supremo: /
- C. inferior: 1
- ínfimo: 1
- Máximo: /
- Mínimo: /
- Maximales: 8, 20, 15
- Minimales: 2, 15

# Relaciones binarias de equivalencia

Equivalencia $\rightsquigarrow$ "es de la misma forma que"



- a tiene la misma forma que b.
- b tiene la misma forma que a.
- c tiene la misma forma que b, así que también es de la forma de a.
- la forma de a, b, c, d y e se puede comparar.

La relación de equivalencia es toda relación reflexiva, simétrica y transitiva.

## Clases de equivalencia

Sea $R$ una relación de equivalencia en $C \times C$

La clase de equivalencia de $a \in C$ respecto a $R$ es un subconjunto de de $C$ formado por todos los $x \in C$ para los que se cumple $(x, a) \in R$.

La clase de $a$ se escribiría así: $[a] = [a]_R = \overline{a}$

$\hookrightarrow [a]_R = \{x \in C \mid x R a\}$

El conjunto cociente de $C$ sería el conjunto de todas las clases posibles, y se denota como $C/R$.

$\hookrightarrow C/R = \{[a] \mid a \in C\} = \{[a], [b], [c], \dots\}$

## Propiedades de la RBE

Si R es un RBE en $C \times C$, R verifica lo siguiente:

1. $\forall a, b \in C \quad aRb \leftrightarrow [a] = [b]$

   Dos elementos están relacionados si y sólo si tienen la misma clase.

2. $\forall a, b \in C \quad [a] = [b] \vee [a] \cap [b] = \phi$

   Si no estan relacionados, sus clases son disjuntas, es decir, nó comparten elementos.

3. $C/R$ es una partición de C. Es decir, las clases no se solapan (punto 2) y todos los elementos de C han de formar parte de una clase. Tampoco hay clases vacías.

   I) $\bigcup_{x \in C} [x] = C$ ⇝ La union de todas las clases es C.

   II) $\forall [a], [b] \in C/R \quad [a] \cap [b] = \phi$ ⇝ Sin solapar.

   III) $\forall x \in C \; [x] \neq \phi$ ⇝ No hay clases vacías.

Ej.: $A=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(2,4)$
$(4,2)\}$

¿Reflexiva? $\forall x \in A \ xRx$ ✓

¿Simétrica? $1R3 \rightarrow 3R1$ ✗, $1R3 \equiv T$ y $3R1 \equiv F$

¿Transitiva? $\forall x,y,z \in A \ xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$ ✓

<u>No es reflexiva</u>, no es simétrica.

Ej.: $A=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(2,4),$
$(2,5),(3,1),(4,2),(5,2)\}$

$4R2 \wedge 2R5 \rightarrow 4R5$ ✗ No es transitiva.

No es RBE

Ej.: $A = \{1,2,3,4,5\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(2,4),$
$(2,5),(3,1),(4,2),(5,2)\}$

$4R2 \wedge 2R5 \rightarrow 4R5$ ✗ No es transitiva.

No es RBE

Ej.: $A = \{1,2,3,4,5\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),$
$(2,4),(4,2)\}$

Esta sí es RBE $\qquad [a] = \{x \in C \mid (x,a)\}$

Clases:

$$\left.\begin{array}{l}
[1] = \{1,3\} = [3] \\
[2] = \{2,4\} = [4] \\
\cancel{[3] = \{3,1\}} \\
\cancel{[4] = \{4,2\}} \\
[5] = \{5\}
\end{array}\right\} A/R = \{[1],[2],[5]\}$$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\forall x, y \in A \quad xRy \longleftrightarrow$ x e y tienen la misma cantidad de divisores.

divisores:

$1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 2$

$4 \to 3, 6 \to 3, 7 \to 2$

$8 \to 4 \quad 5 \to 2$

¿Reflexiva? $xRx$ ✓

¿Simétrica? $xRy \to yRx$ ✓

¿Transitiva? $xRy \wedge yRx \to xRz$

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (2,3), (2,5), (2,7), (3,2), (3,5), (3,7), (4,6), (5,2), (5,3), (5,7), (6,4), (7,2), (7,3), (7,5)\}$$

$[1] = \{1\}$ ; $[2] = \{2, 3, 5, 7\} = [3] = [5] = [7]$

$[4] = \{4, 6\} = [6] \quad [8] = \{8\}$

$A/R = \{[1], [2], [4], [8]\}$

Ej.:

$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad aRb \longleftrightarrow (a+b)$ es par

Si a y b son ambos pares ó impares, se cumple.

En la relación habrá dos tipos de pares: los compuestos por pares y los compuestos por impares.

Por tanto, si $a=b$ se cumple, quedando demostrada la reflexividad

Además, $(a+b)=(b+a)$, de modo que si $aRb$, entonces $bRa$, probando la simetría.

Como solo pueden estar emparejados los pares e impares y cualquier par compuesto únicamente de uno de estos es par, se cumple la transitividad. Es una RBE

Como todos los pares e impares se pueden combinar entre sí, la relación tiene dos clases: una con todos los pares y una con todos los impares.

$[1] = \{1, 3, 5, \dots\}$ ; $[2] = \{2, 4, 6, \dots\}$

Por lo que $\mathbb{N}/R = \{[1], [2]\}$

Otra forma:

$a + b = 2 \cdot K_1$ $\quad K_1, K_2, K \in \mathbb{Z}$

$b + c = 2 \cdot K_2$

¿$a + c = 2 \cdot K$?

$(a+b) + (b+c) = 2K_1 + 2K_2$

$a + c = 2K_1 + 2K_2 - 2b$

$a + c = 2\underbrace{(K_1 + K_2 - b)}_{\in \mathbb{Z}}$

$K = K_1 + K_2 - b$

$a + c = 2K, \; K \in \mathbb{Z}$

## Relaciones de congruencia

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad aRb \leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \quad a - b = m \cdot K$

¿Simétrica? $a - b = m \cdot K$ ✓

$b - a = -(a - b) = m \cdot \underbrace{(-K)}_{\in \mathbb{Z}}$

¿Reflexiva? $a - a = m \cdot K$

$0 = m \cdot K \rightarrow K = 0, \ 0 \in \mathbb{Z}$ ✓

¿Transitiva? $a - b = m \cdot K_1$

$b - c = m \cdot K_2$

$a - c = m \cdot K$

$b = a - m \cdot K_1$

$a - m \cdot K_1 - c = m \cdot K_2$

$a - c = m(\underbrace{K_1 + K_2}_{\in \mathbb{Z}})$ ✓

Dado $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, tenemos una RBE R en $\mathbb{Z}$ tal que:

$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad aRb \leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \quad a-b = m \cdot K$

R es la relación de congruencia módulo m.

Supongamos $m=3$:

$aRb \leftrightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \quad a-b=3 \cdot K$

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid \overset{a}{\downarrow}{x} R \overset{b}{\downarrow}{0}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x-0 = 3 \cdot K\}$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x R 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x-1 = 3 \cdot K\}$

$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x R 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x-2 = 3 \cdot K\}$

$[3] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x R 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x-3 = 3 \cdot K\}$

$$\left.\begin{array}{l} [0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} \\ [3] = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, \ldots\} \end{array}\right\} [0]=[3]$$

$\hookrightarrow \{x_{-K}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_K\}$

(Pasa igual con el [1] y el [2])

$[a] = [a + m \cdot c]$, $c \in \mathbb{Z}$

$[a] = [x \in \mathbb{Z} \mid xRa\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x-a = 3 \cdot K\}$, $K \in \mathbb{Z}$

Al conjunto cociente de la relación de congruencia con módulo $m \in \mathbb{N}, m > 1$ en vez de $\mathbb{Z}/R$, la llamaremos $\mathbb{Z}_m$

$$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}$$

$[a] = [a \cdot m \cdot c]$, $c \in \mathbb{Z}$ ⇝ clases iguales

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x R a\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - a = 3 \cdot K\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 \cdot K + a\} = \{\ldots, a - 1m, a + 0m, a + 1m, \ldots\}$$

en vez de $aRb$, se escribe $a \equiv b \pmod{m}$

el resto de una división $\begin{array}{l|l} b & a \\ \hline r & c \end{array}$ está en módulo $a$, por tanto:

$aRb \leftrightarrow a$ y $b$ tienen el mismo resto al dividir por $m$

$\begin{array}{l|l} a & m \\ \hline r_a & c_a \end{array}$ y $\begin{array}{l|l} b & m \\ \hline r_b & c_b \end{array} \longrightarrow r_a = r_b$

Es otra forma de definir la relación