Límites de cocientes

$$\lim \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_Q n^Q + b_{Q-1} n^{Q-1} + \dots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0} =$$

$$= \lim \frac{a_p n^p}{b_Q n^Q}$$

→ El límite de una fracción es igual al límite de la fracción de los términos con mayor exponente de del numerador y el denominador.

$$\begin{cases} p > Q \to \infty \\ Q > p \to 0 \\ p = Q \to \dfrac{a_p}{b_Q} \end{cases} \quad (\text{Si } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0)$$

Ej.:

$$\lim \frac{6n^2 + 3n - 5}{\dots} = \lim \frac{6n^2}{\dots} = \dots$$

en casos en los que no está claro, por ejemplo, al haber raíces, se puede dividir cada uno de los términos del numerador por la n con el exponente más grande.

$$\lim \frac{6n^2+3n-5}{3n^2-1} = \lim \frac{\frac{6n^2}{n^2}+\overset{\to 0}{\frac{3n}{n^2}}-\overset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}}{\frac{3n^2}{n^2}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = \frac{6}{3} = 2$$

n^2 es el más grande

$$\lim \frac{n^3+3n^2-5}{3n-2} = \lim \frac{\frac{n^3}{n^3}+\overset{\to 0}{\frac{3n^2}{n^3}}-\overset{\to 0}{\frac{5}{n^3}}}{\overset{\to 0}{\frac{3n}{n^3}}-\overset{\to 0}{\frac{2}{n^3}}} = \frac{1}{0} \approx \underline{\underline{\infty}}$$

TENER EN CUENTA:

$\boxed{\lim \frac{k}{n} = 0}$ $\boxed{\lim k^n = 0 \text{ si } |k|<1}$

Formula de Euler

$$e = \lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$, dónde $a \in \mathbb{R}$ y $\lim a = \infty$

buscar un límite con esta forma, o forzar que lo tenga (operando)

Además, $\lim (a_n)^{b_n} = e^{\lim[b_n(a_n-1)]}$, dónde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, siempre y cuando $\lim a_n = 1$ y $\lim b = \infty$

$$\lim\left(\frac{3n-5}{3n+2}\right)^{n-1}=\lim\left[\frac{(3n+2)-5-2}{3n+2}\right]^{n-1}=$$

$$=\lim\left(1+\frac{-7}{3n+2}\right)^{n-1}=\lim\left(1+\frac{1}{\frac{3n+2}{-7}}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}}$$

$$a_n=\frac{3n+2}{-7}$$

$$(n-1)=(n-1)\cdot\underbrace{\frac{3n+2}{-7}\cdot\frac{-7}{3n+2}}_{\text{Inversao, }=1 \text{ y } c\cdot 1=c} \qquad \lim a_n=\infty$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n\cdot(n-1)\cdot\frac{-7}{3n+2}}=$$

$$=\underbrace{\lim\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]}_{e}^{(n-1)\cdot\frac{-7}{3n+2}}=$$

$$e^{\lim\left[(n-1)\frac{-7}{3n+2}\right]}$$

$$\lim\left[(n-1)\frac{-7}{3n+2}\right]=\lim\left[\frac{-7n+7}{3n+2}\right]=-\frac{7}{3}$$

Criterio de Stolz (cociente)

$$\lim \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\text{, Si}$$

b_n es creciente y tiende a ∞.

Ej.:

$$\lim \frac{\log(n)}{n} \quad \begin{cases} a_n = \log(n) \\ b_n = n \begin{cases} n \to \infty \\ n \text{ es creciente} \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\log(n)}{n} \overset{\text{Stolz}}{=} \lim \frac{\log(n+1)-\log(n)}{n+1-n} = \lim \log\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \lim \log(1+\overset{\to 0}{\tfrac{1}{n}}) = \log(1) = 0$$

$$
= \begin{cases} \lim \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} & \begin{cases} a_n = 1+2+3+\ldots+n \\ b_n = n^2 \begin{cases} n^2 \to \infty \\ n^2 \text{ es creciente} \end{cases} \end{cases} \\ \lim \dfrac{(\cancel{1}+\cancel{2}+\cancel{3}+\cancel{\ldots}+\cancel{n}+(n+1)) - (\cancel{1}+\cancel{2}+\cancel{3}+\cancel{\ldots}+\cancel{n})}{(n+1)^2 - n^2} = \end{cases}
$$

$$
= \lim \frac{n+1}{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}} = \lim \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}
$$

$$
\lim \frac{1+2+3+\ldots+2n}{n^2} \quad \begin{matrix} \to a_n \\ \\ b_n \end{matrix} \qquad a_n = a_{n-1} + 2n - 1 + 2n, \; a_1 = 1
$$

$$
\{a_n\} = \{1+2+\ldots+2n-1+2n\}
$$

Si $n=4$, $\{a_n\} = \{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},\cancel{7},\cancel{8}\}$

$$
\{a_{n+1}\} = \{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},\cancel{7},\cancel{8},9,10\}
$$

Órdenes de Magnitud

Cuando $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienden a ∞

- Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0 \to a_n \ll b_n$

- Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \infty \to a_n \gg b_n$

- Si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0 \to a_n \simeq b_n$

$\ll$ y $\gg$ se usan para denotar que sucesión tiene una magnitud superior.

Es decir, si $a > b$ es 'a es mayor que b',

$a \gg b$ sería 'a es muchísimo mayor que b'