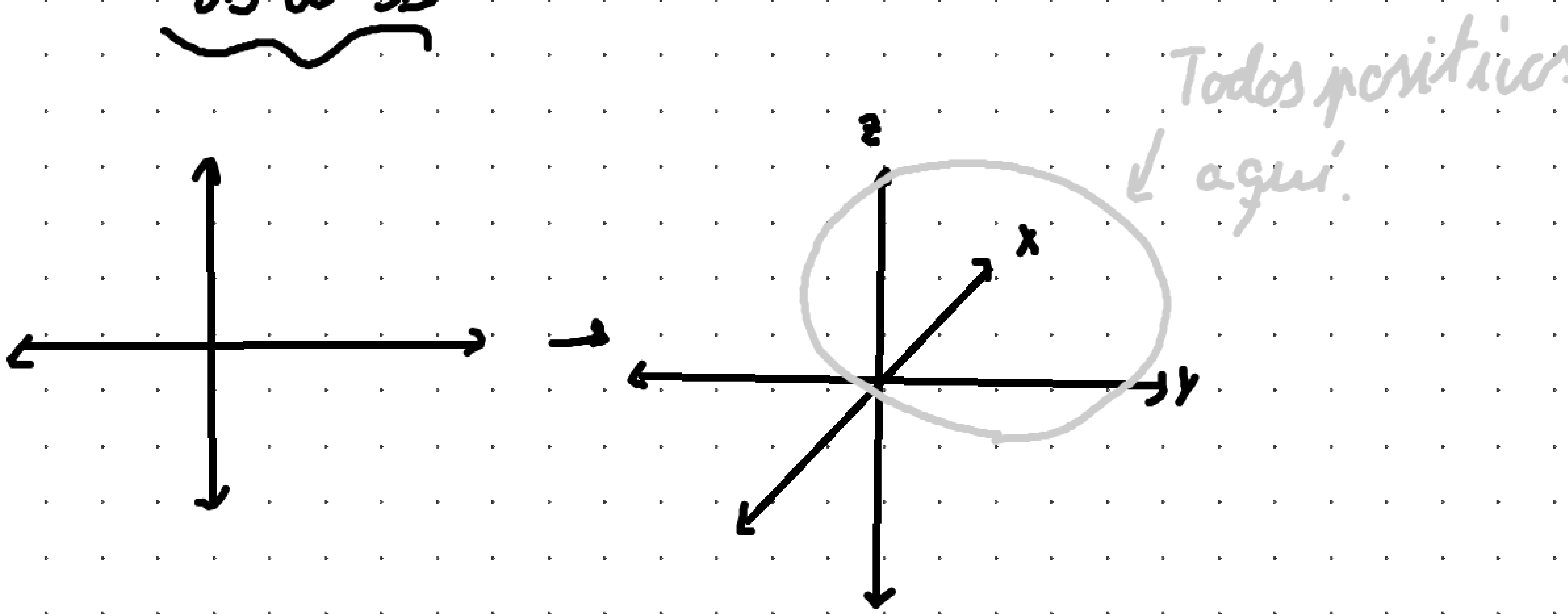
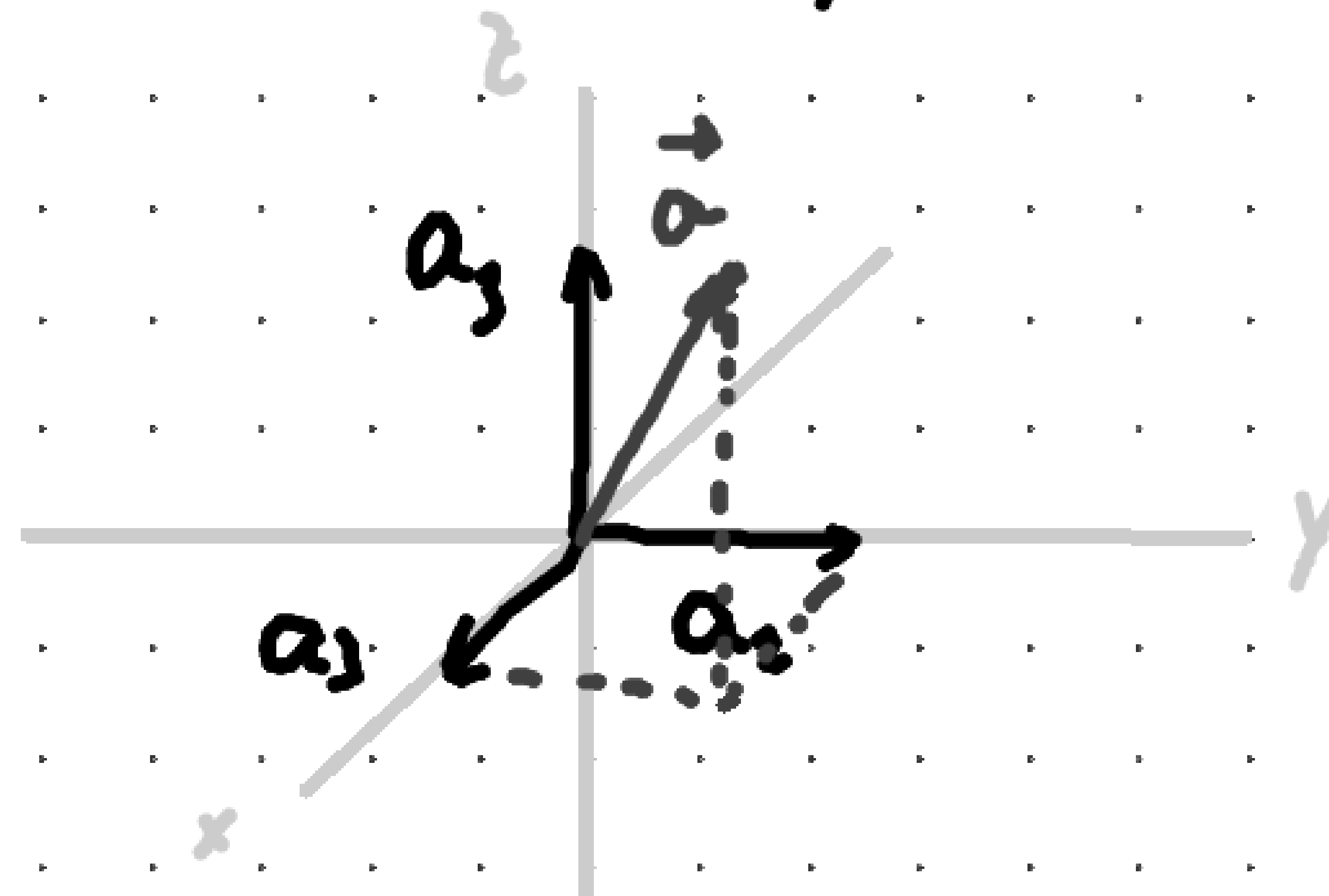
2D a 3D



Un vector en 3D tiene 3 componentes:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x & y & z \end{array}$$



El vector unitario paralelo al eje z es $\hat{k}$

$$\vec{a} = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k} \quad \begin{cases} \hat{\imath} = (1,0,0) \\ \hat{\jmath} = (0,1,0) \\ \hat{k} = (0,0,1) \end{cases}$$

Operaciones

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \ , \ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

- Suma

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- Producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3)$$

- Multiplicar por un escalar

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

- Magnitud

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

• Más sobre el producto escalar:

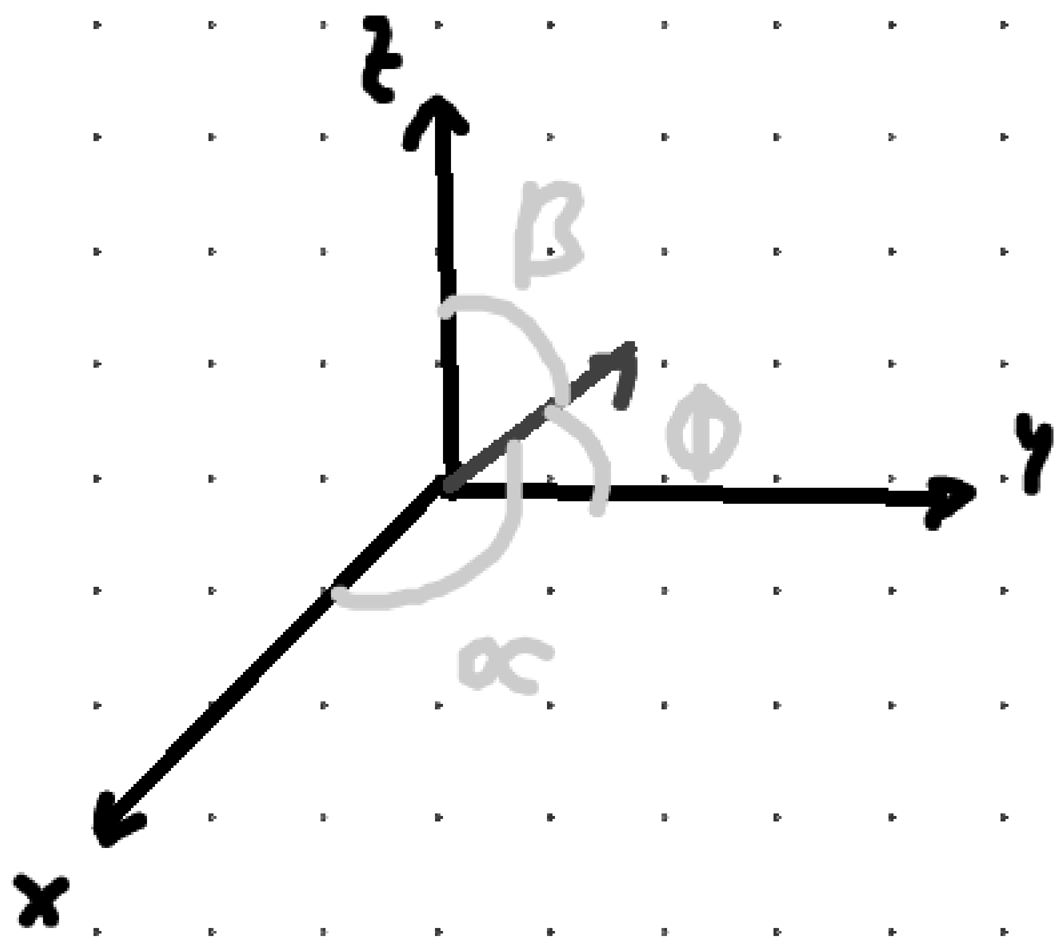
En 2D, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|proy_{\vec{b}}\vec{a}| = |\vec{a}|\underbrace{|\vec{b}|\cos(\theta)}_{proy_{\vec{b}}\vec{a}}$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leftrightarrow \theta = \underline{\underline{\arccos}}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right).$$

En 3D se puede hacer lo mismo.

Cosenos direccionales

Son los cosenos de los diferentes ángulos entre el vector y los ejes.



$\alpha \rightarrow$ Respecto al eje x
$\beta \rightarrow$ Respecto al eje z
$\phi \rightarrow$ Respecto al eje y

$\left.\right\}$ ángulos

Dado $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, los cosenos son:

$$X: \cos(\alpha) = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$Y: \cos(\phi) = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$Z: \cos(\beta) = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

1)

$\vec{a}=(-5,3,2)$, $\vec{b}=(0,4,-5)$, $\vec{c}=(-5,-6,0)$

$\vec{d}=(2,3,-4)$, $\vec{e}=(-15,0,3)$, $\vec{f}=(0,5,1)$

a) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot|\vec{c}| = 12-10\cdot\sqrt{25+36} = 2\cdot\sqrt{61}$

b) $\vec{a}+\vec{c} = (0,-3,2)$

c) $\vec{d}-\vec{f} = (2,-2,-5)$

d) $6\vec{f}-7\vec{a} = (0,30,6)-(-35,21,14) = (35,9,-8)$

e) $\vec{e}\cdot\vec{f} = 3$

f) $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{f}|} = \dfrac{-10+9-8}{\sqrt{25+1}} = \dfrac{-9}{\sqrt{26}} = \dfrac{-9\sqrt{26}}{26}$

d) $|5\vec{b}+3\vec{a}+9\vec{c}| = |(0,20,-25)+(-15,9,6)+(-45,-54,0)| =$

$= |(-60,-25,-19)| = \sqrt{3600+625+361} = \sqrt{4586}$

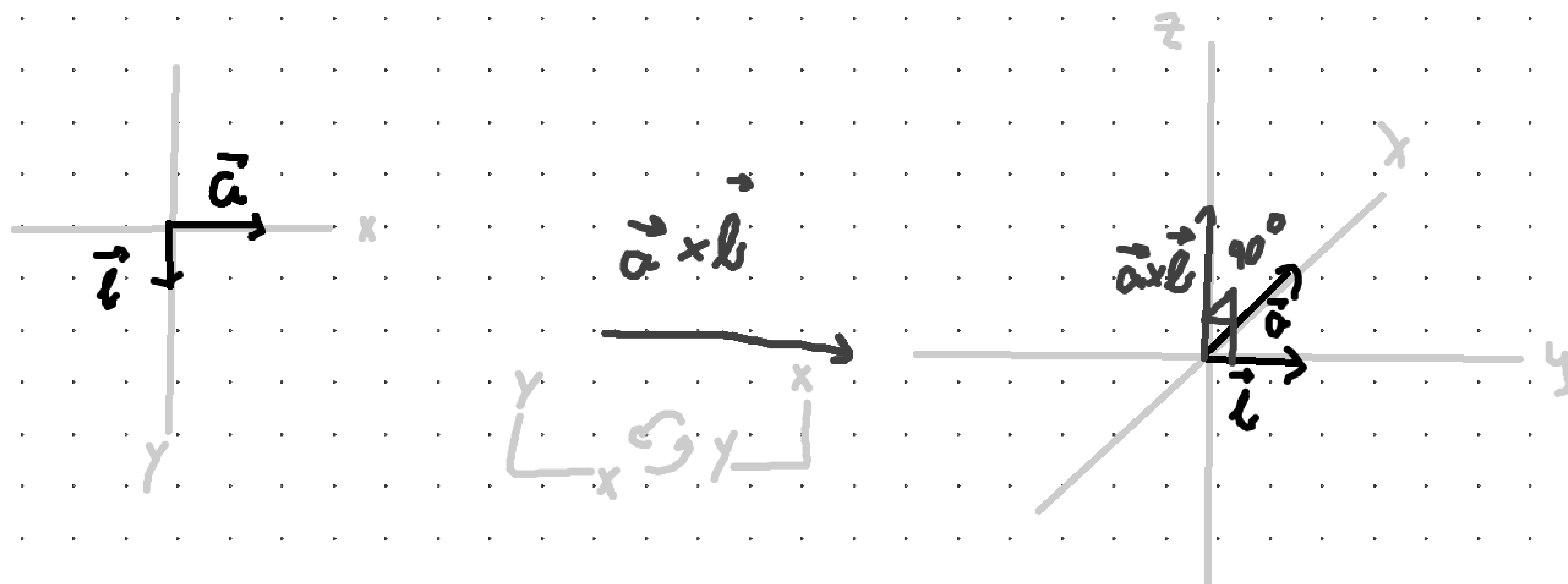
$\vec{a} = (-5, 3, 2),\ \vec{b} = (0, 4, -5),\ \vec{c} = (-5, -6, 0)$

$|\vec{a} \cdot (5\vec{b} \cdot 7\vec{c})|$

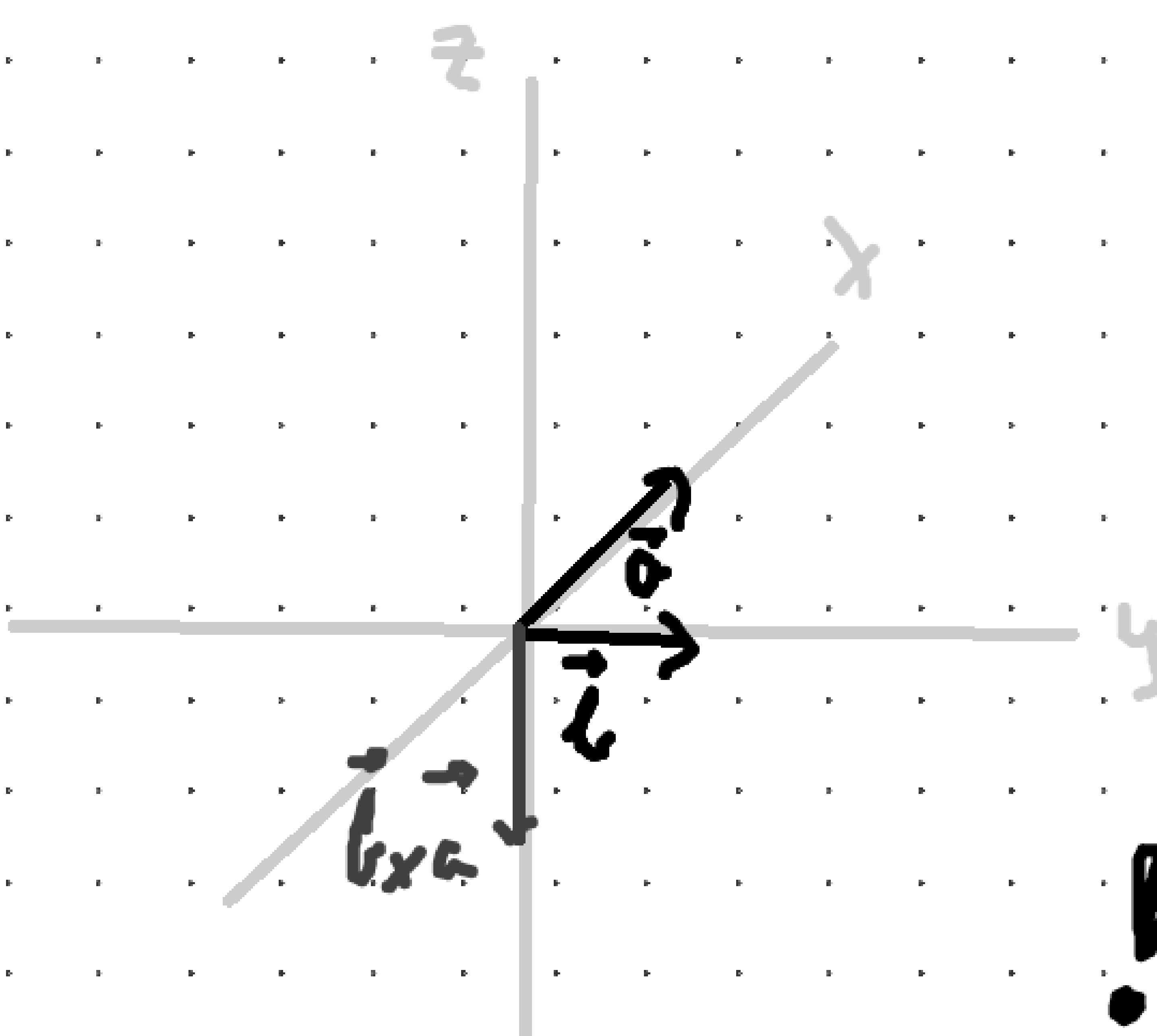
$5\vec{b} \cdot 7\vec{c} = (-25, 15, 10) \cdot (-35, -42, 0) = 875 - 630$
$= 245$

$|\vec{a} \cdot 245| = |(-1225, 735, 490)| = \sqrt{2388950}$

Producto cartesiano (cross product)



El producto cartesiano entre dos vectores produce un vector paralelo a ambos, por lo que aunque ambos vectores existan en un plano en 2D, el vector resultante siempre estará en 3D.



Si se invierte el orden de los operandos, se invierte el sentido del resultado

!! $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

Cálculo del producto cartesiano

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\theta)\, \hat{n}$

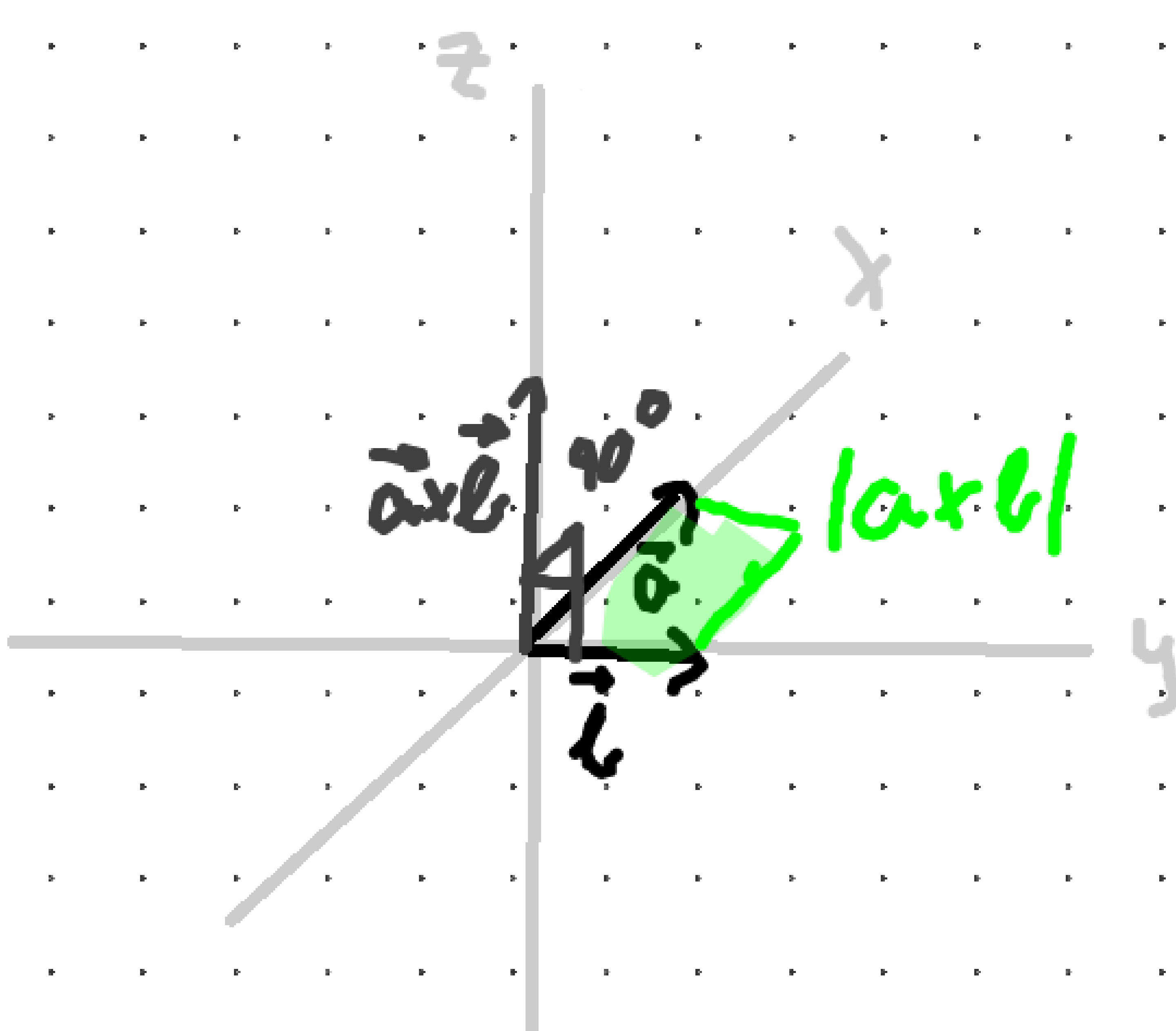
θ es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$\hat{n}$ es un vector unitario en la dirección del producto.

Este método es útil si se puede calcular fácilmente el seno:

$\sin(0) = \sin(\pi) = 0,\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$

- magnitud del producto cartesiano



La manitud de $a \times b$ representa el área que abarcan los dos vectores.

• Cálculo con matrices

$$\vec{a}\times\vec{b} \sim \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \left| \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} \right. & \begin{array}{c} a_2 \\ b_1 \end{array} & \left. \begin{array}{c} a_3 \\ b_2 \end{array} \right| \end{array}$$

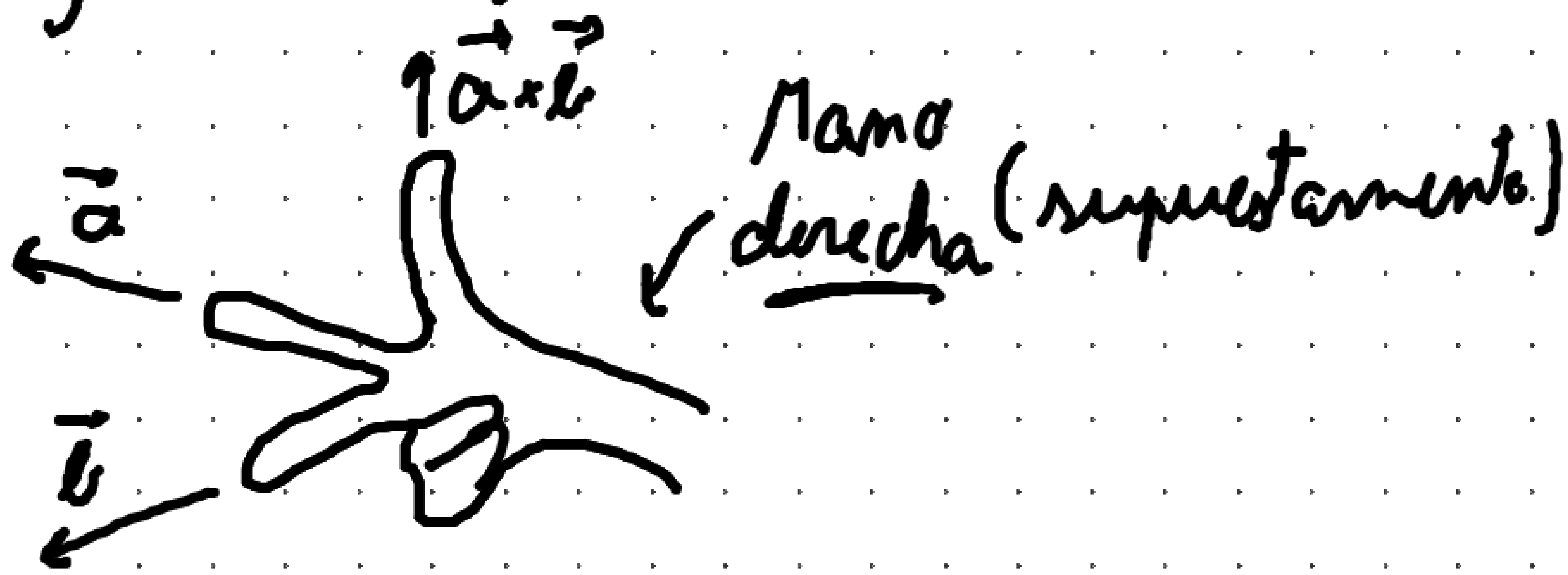
$$\vec{a}\times\vec{b} = \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i}}_{1} - \underbrace{(a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j}}_{2} + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}}_{3}$$

1. 1, 2 y 3 son los determinantes de submatrices de $\vec{a}\times\vec{b}$ formadas por los componentes que no están en la columna correspondiente a cada vector unitario multiplicados por dicho vector unitario.
   Vectores unitarios: 1 → $\hat{i}$, 2 → $\hat{j}$, 3 → $\hat{k}$
2. 1 − 2 + 3

El determinante de una matriz 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a\cdot d) - (b\cdot c)$

$\vec{a}\times\vec{b}$, realmente, es el determinante de la matriz 3×3 de arriba

- Averiguar el ángulo



Usa el índice para la $\vec{a}$, y el corazón para la $\vec{b}$.
Extiende el índice y dobla el corazón para que se perpendicular.
Para averiguar el ángulo, rota la mano para que las posiciones relativas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ coincidan con el gráfico.
El pulgar indica la dirección.

• Propiedades:

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \quad y \quad |\vec{a} \times \vec{a}| = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{c})$$

$$(K\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (K\vec{b}) = K(\vec{a} \times \vec{b})$$

Eg.:

$\vec{a} = (1,3,7)$ $\quad$ ¿$\vec{a} \times \vec{b}$?

$\vec{b} = (-5,3,-2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\imath}(3\cdot(-2) - 7\cdot 3) - \hat{\jmath}(1\cdot(-2) - 7\cdot(-5)) +$
$\hat{k}(1\cdot 3 - 3\cdot(-5)) =$

$= \hat{\imath}(-6-21) - \hat{\jmath}(-2+35) + \hat{k}(3+15)$

$= -27\hat{\imath} - \hat{\jmath}33 + \hat{k}18 = (-27,-33,18)$

Eg.: $\vec{r} = (8,3,1)$, $\vec{s} = (0,\frac{3}{2},-5)$

$\vec{r} \times \vec{s} = \hat{\imath}(3\cdot(-5) - 1\cdot\frac{3}{2}) - \hat{\jmath}(8\cdot(-5) - 1\cdot 0) + \hat{k} = (8\cdot\frac{3}{2} - 3\cdot 0)$

$= \hat{\imath}(-15 - \frac{3}{2}) - \hat{\jmath}(-40) + \hat{k}(12)$

$= -\frac{33}{2}\hat{\imath} + 40\hat{\jmath} + 12\hat{k} = (-\frac{33}{2}, 40, 12)$

Eg.: $\vec{c} = (0,0,1) = \hat{k}$
$\vec{d} = (0,1,0) = \hat{\jmath}$

$\vec{c} \times \vec{d} = \hat{\imath}(0\cdot 0 - 1\cdot 1) - \hat{\jmath}(0\cdot 0 - 1\cdot 0) + \hat{k}(0\cdot 1 - 0\cdot 0) =$

$= -\hat{\imath} = (-1,0,0)$

$\vec{a} = (-5, 3, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, -5)$, $\vec{c} = (-5, -6, 0)$
$\vec{d} = (2, 3, -4)$, $\vec{e} = (-15, 0, 3)$, $\vec{f} = (0, 5, 1)$

1)

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(3\cdot(-5) - 2\cdot 4) - \hat{j}((-5)^2 - 0\cdot 2) + \hat{k}(-5\cdot 4 - 3\cdot 0)$

$= \hat{i}(-15 - 8) - \hat{j}(25) + \hat{k}(-20)$

$= -23\hat{i} - 25\hat{j} - 20\hat{k} = (-23, -25, -20)$

b) $\vec{c} \times \vec{a} = \hat{i}(-6\cdot 2 - 0\cdot 3) - \hat{j}(-5\cdot 2 - 0\cdot(-5)) + \hat{k}(-5\cdot 3 - (-6)(-5))$

$= \hat{i}(-12) - \hat{j}(-10) + \hat{k}(-15 - 30)$

$= -12\hat{i} + 10\hat{j} - 45\hat{k} = (-12, 10, -45)$

c) $\vec{d} \times \vec{c} = \hat{i}(3\cdot 0 - (-4)(-6)) - \hat{j}(2\cdot 0 - (-4)(-5)) + \hat{k}(2(-6) - 3(-5))$

$= \hat{i}(-24) - \hat{j}(-20) + \hat{k}(-12 + 15)$

$= -24\hat{i} + 20\hat{j} - \hat{k} = (-24, 20, 3)$

$\vec{a} = (-5, 3, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, -5)$, $\vec{c} = (-5, -6, 0)$

$\vec{d} = (1, 3, -4)$, $\vec{e} = (-15, 0, 3)$, $\vec{f} = (0, 5, 1)$

d) $\vec{e} \times \vec{f} = \hat{i}(0 \cdot 1 - 3 \cdot 5) - \hat{j}(-15 \cdot 1 - 3 \cdot 0) + \hat{k}(-15 \cdot 5 - 0 \cdot 0)$

$= \hat{i}(-15) - \hat{j}(-15) + \hat{k}(-75)$

$= -15\hat{i} + 15\hat{j} - 75\hat{k} = (-15, 15, -75)$

e) $\vec{f} \times \vec{a} = \hat{i}(5 \cdot 2 - 1 \cdot 3) - \hat{j}(0 \cdot 2 - 1 \cdot (-5)) + \hat{k}(0 \cdot 3 - 5 \cdot (-5))$

$= \hat{i}(10 - 3) - \hat{j}(5) + \hat{k}(25)$

$= 7\hat{i} - 5\hat{j} + 25\hat{k} = (7, -5, 25)$

f) $\vec{e} \times \vec{e} = 0 = (0, 0, 0)$

g) $\vec{a} \times \vec{d} = \hat{i}(3 \cdot (-4) - 2 \cdot 3) - \hat{j}(-5 \cdot (-4) - 2^2) + \hat{k}(-5 \cdot 3 - 3 \cdot 2)$

$= \hat{i}(-12 - 6) - \hat{j}(20 - 4) + \hat{k}(-15 - 6)$

$= -18\hat{i} - 16\hat{j} - 21\hat{k} = (-18, -16, -21)$

$\vec{a} = (-6, \frac{1}{2}, \sqrt{2}), \vec{b} = (5, 6, 0)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(\frac{1}{2} \cdot 0 - \sqrt{2} \cdot 6) - \hat{j}(-6 \cdot 0 - \sqrt{2} \cdot 5) + \hat{k}(-(6^2) - \frac{1}{2} \cdot 5)$

$= \hat{i}(-6\sqrt{2}) - \hat{j}(-5\sqrt{2}) + \hat{k}(-36 - \frac{5}{2})$

$= -6\sqrt{2}\,\hat{i} + 5\sqrt{2}\,\hat{j} - \frac{77}{2}\hat{k} = (-6\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, -\frac{77}{2})$

$\vec{a} = (-4, 3, 0), \vec{b} = (-1, 6, \frac{1}{3})$

$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(3 \cdot \frac{1}{3} - 0 \cdot 6) - \hat{j}(-4 \cdot \frac{1}{3} - 0(-1)) + \hat{k}(-4 \cdot 6 - 3 \cdot (-1))$

$= \hat{i}(1) - \hat{j}(-\frac{4}{3}) + \hat{k}(-24 + 3)$

$= \hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} - 21\hat{k} = (1, 4/3, -21)$