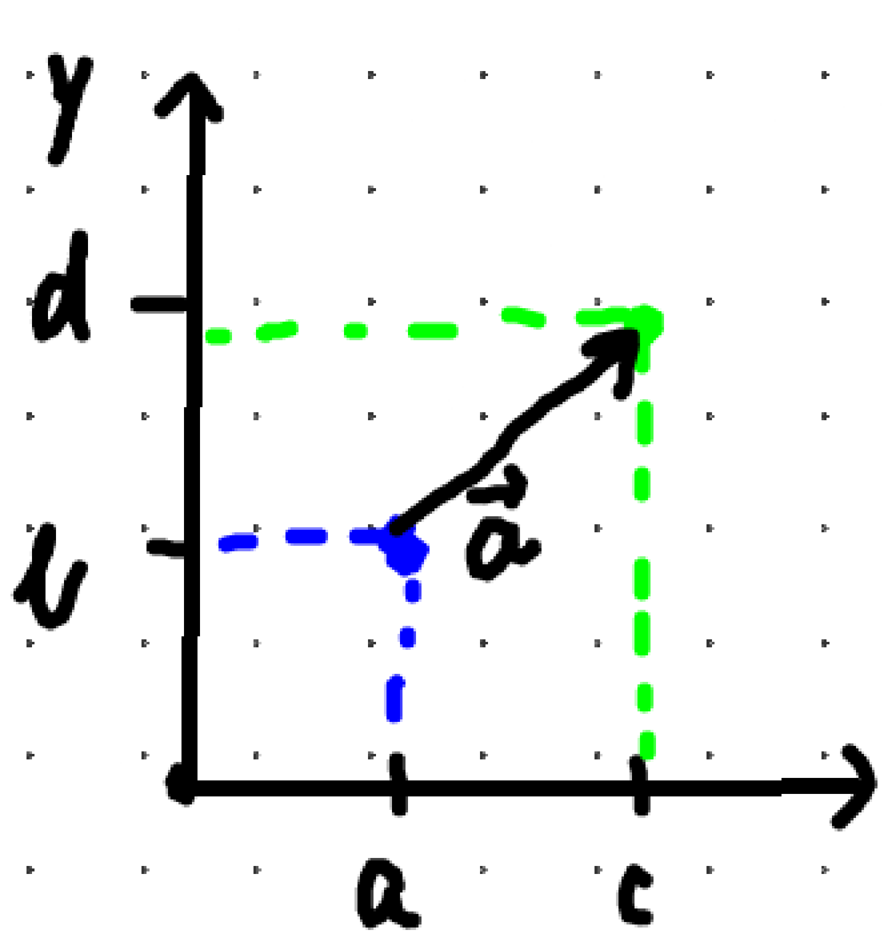
Magnitudes y vectores

Las magnitudes pueden expresarse solo con <u>cantidad + unidad</u>.

Masa, Densidad, Volumen y longitud son ejemplos de magnitud.

Los vectores permiten expresar cosas no se pueden expresar solo con magnitudes. Por ejemplo, el movimiento de un coche tiene una <u>magnitud y una dirección</u>.



$A(a,b) \rightsquigarrow$ Tail

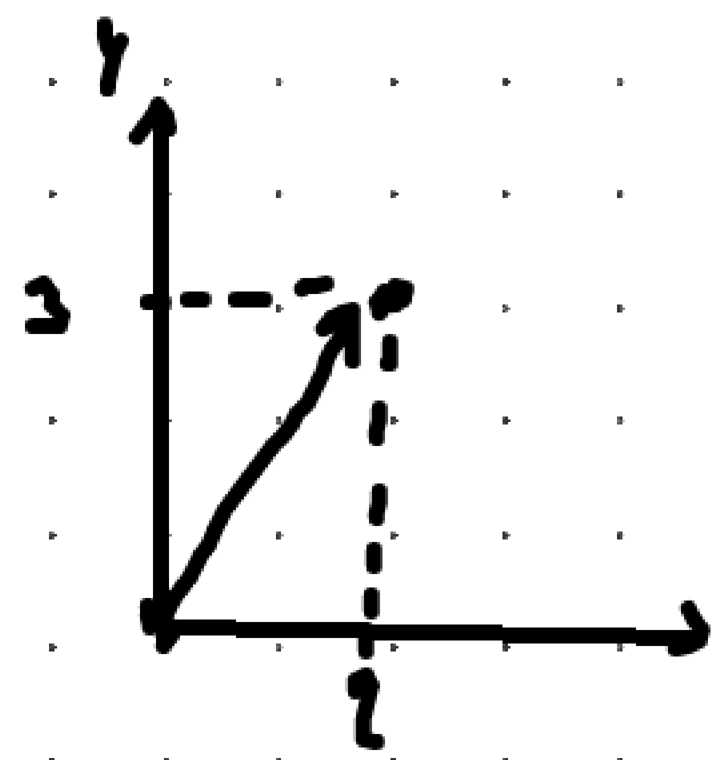
$B(c,d) \rightsquigarrow$ Head

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

Tail Head

Nombre elegido.

Componentes de un vector

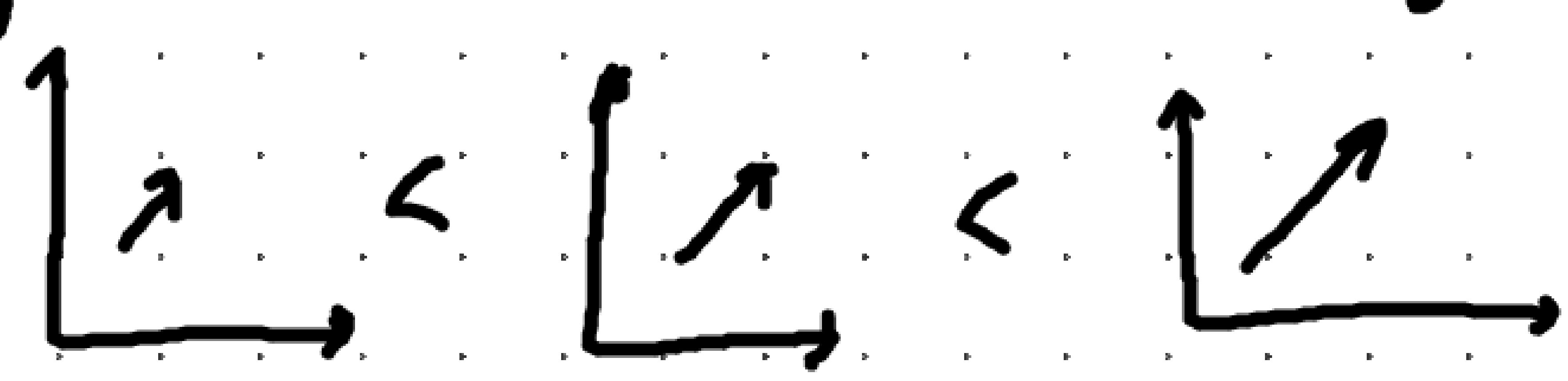


$$\vec{AB} = \overbrace{(2,3)}^{\text{comp.}} = (x, y)$$

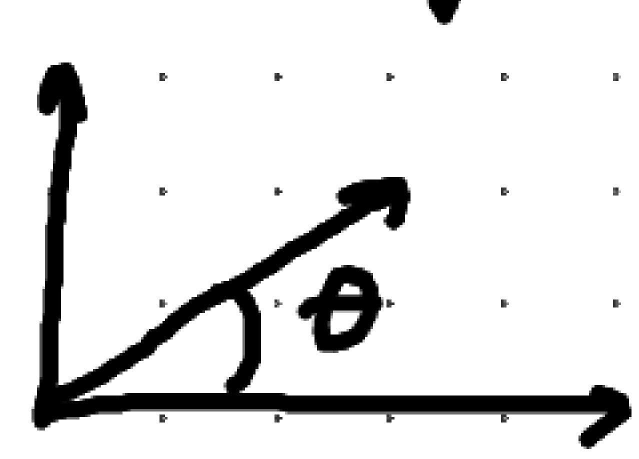
↳ El punto final (si empieza en el origen).

Propiedades de un vector

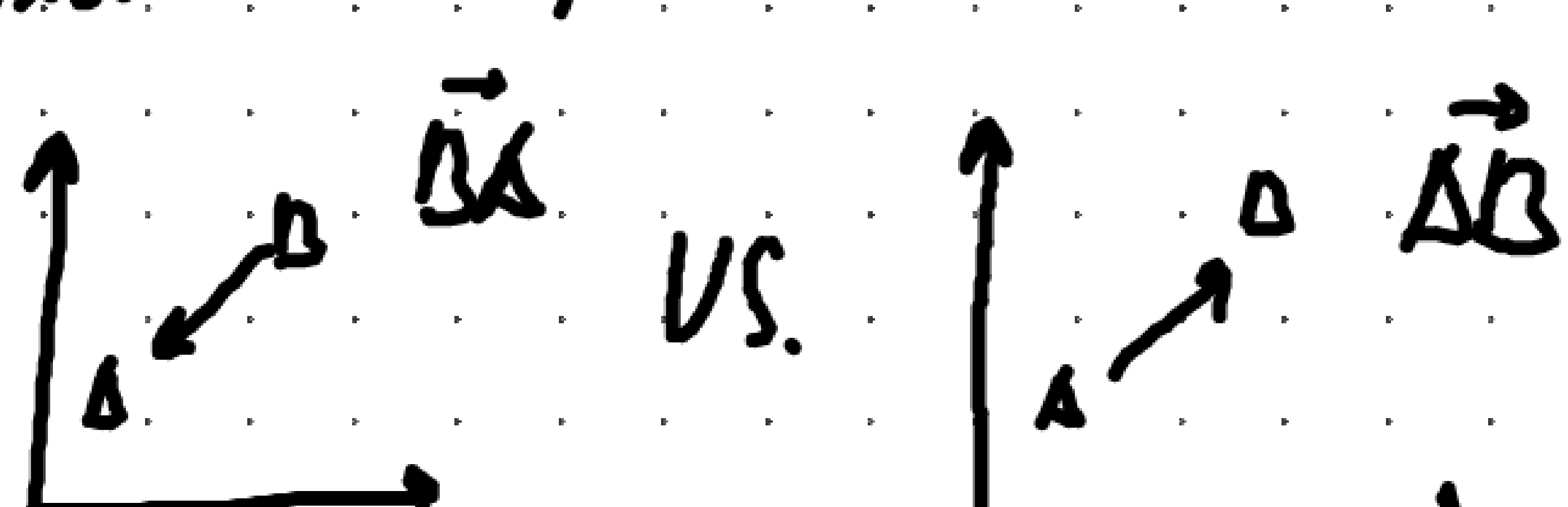
• Magnitud: Se expresa con la longitud de la flecha



• Dirección: Se expresa con el ángulo del vector respecto al eje X (o Y).



• Sentido: Se expresa con el extremo de la flecha



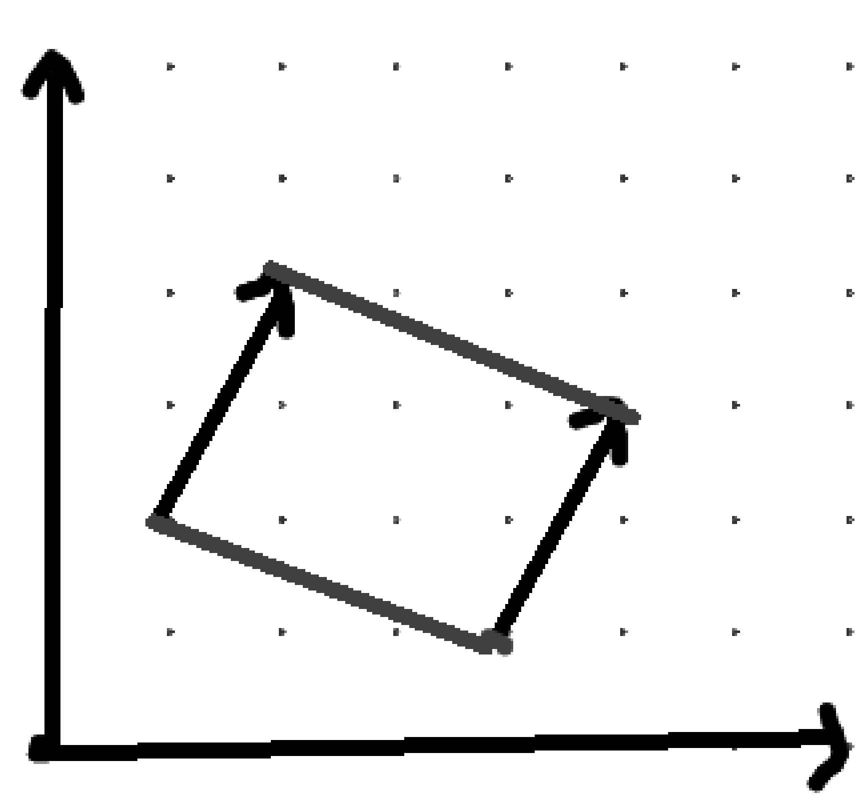
Igualdad de vectores

Criterios de igualdad:

- Las magnitudes han de ser iguales
- Las direcciones han de ser iguales
- Los sentidos han de ser iguales

Es decir, si cualquiera de estos se incumple, son diferentes.

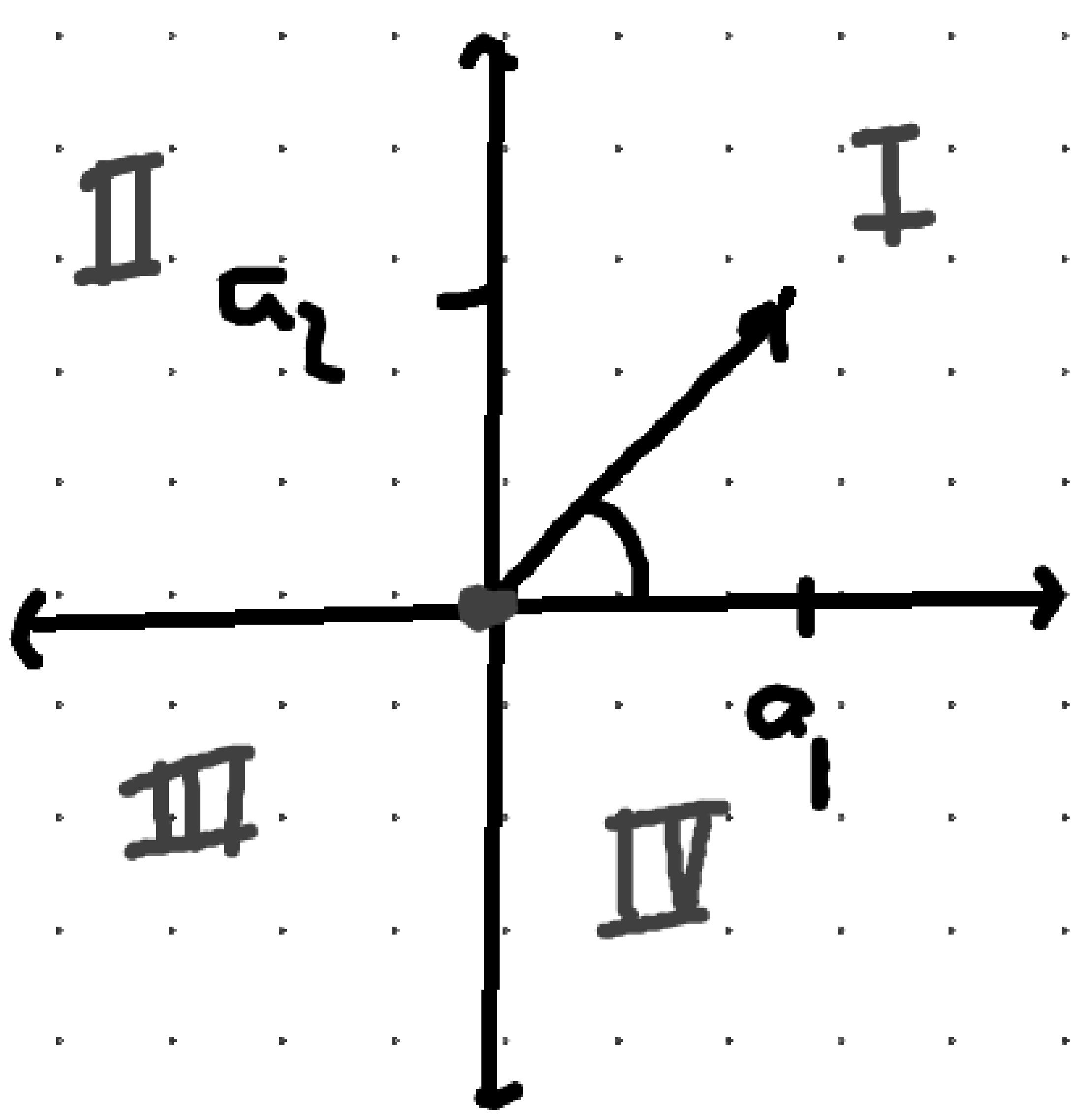
Método gráfico



Si son iguales, las líneas entre sus extremos son paralelas.

Componentes de vectores y el plano cartesiano

$$\vec{a} = (\underbrace{a_1}_{x}, \underbrace{a_2}_{y})$$



$$\text{I si } \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

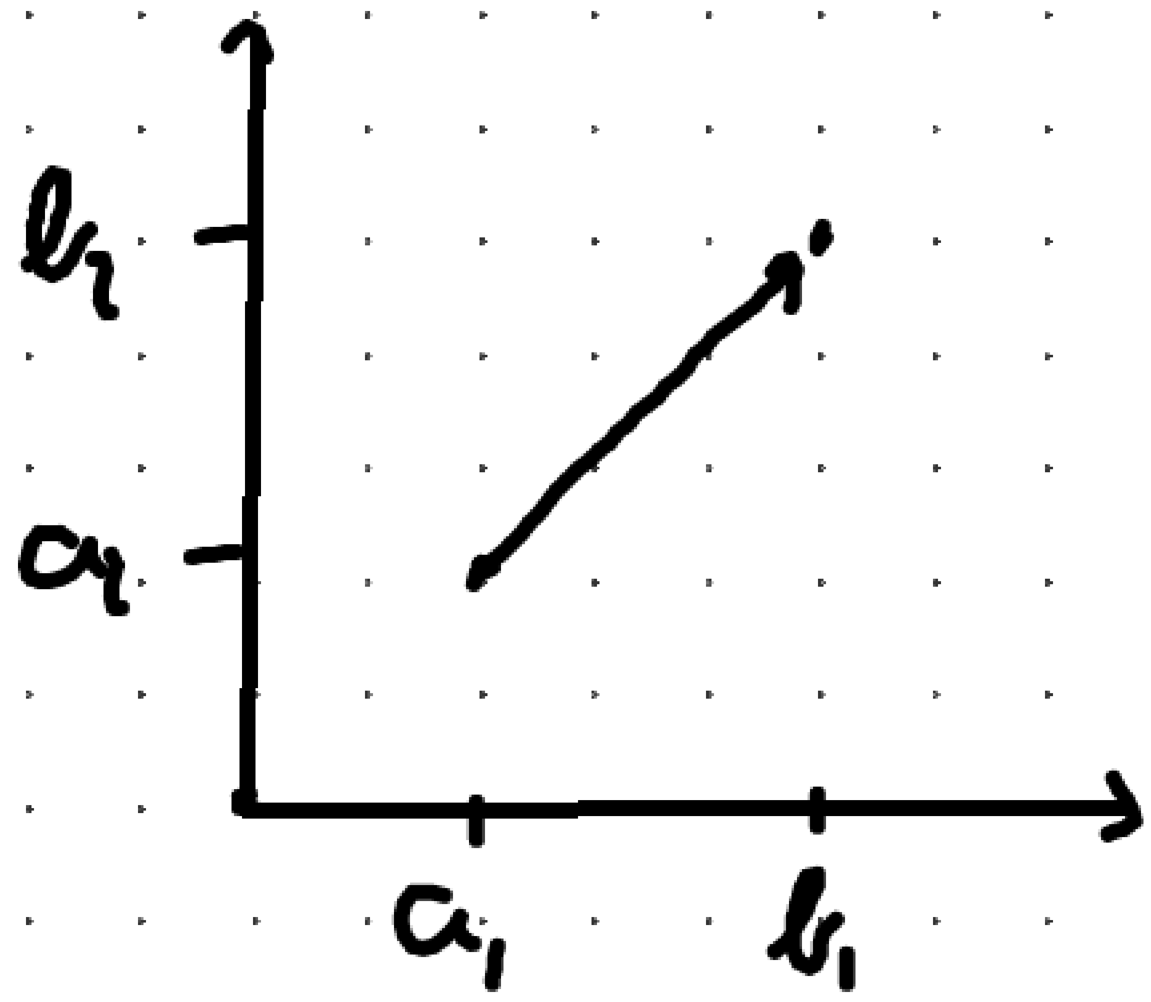
$$\text{II si } \begin{cases} a_1 < 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{III si } \begin{cases} a_1 < 0 \\ a_2 < 0 \end{cases}$$

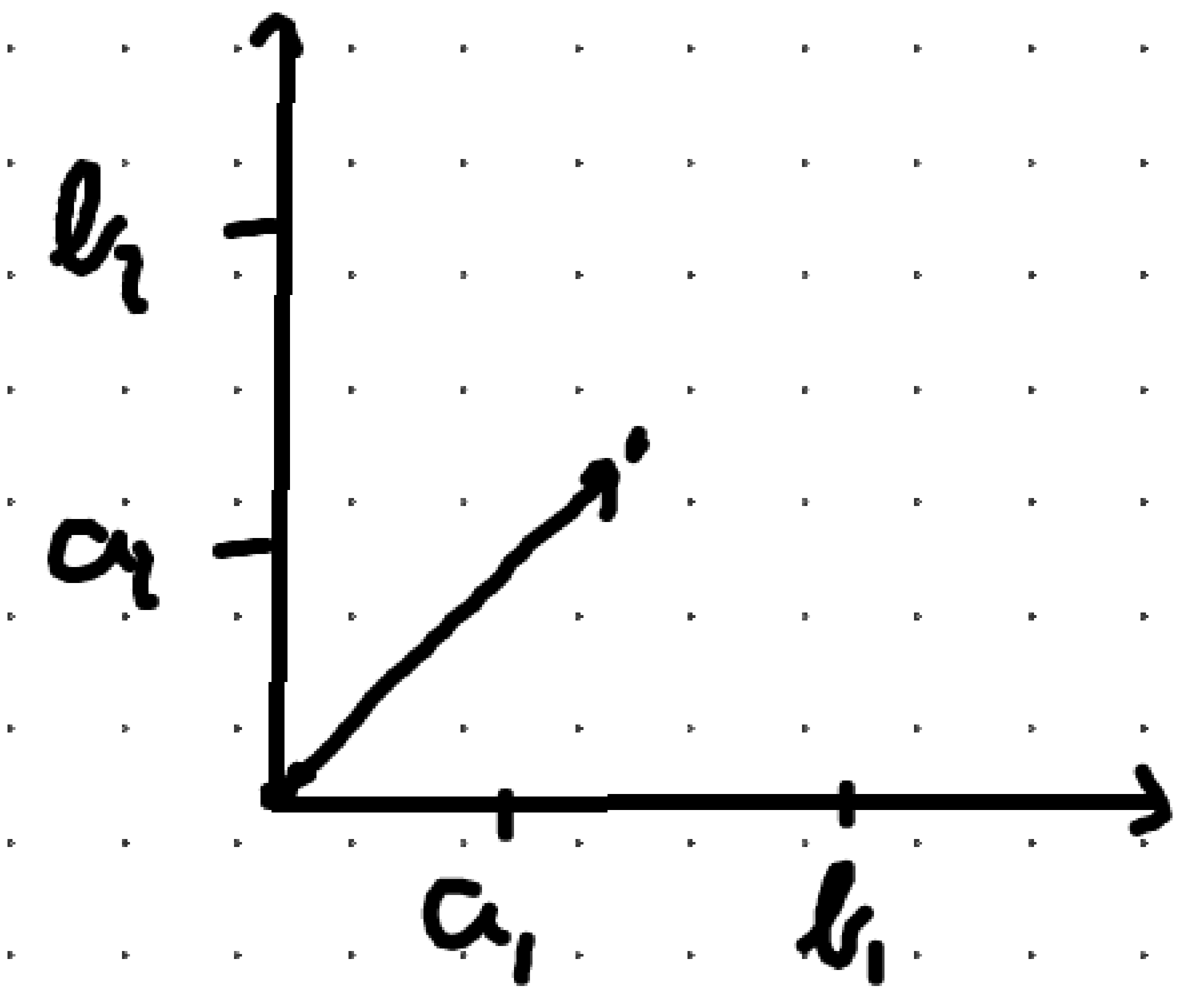
$$\text{IV si } \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Origin } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Componentes de vectores desde fuera del origen



=

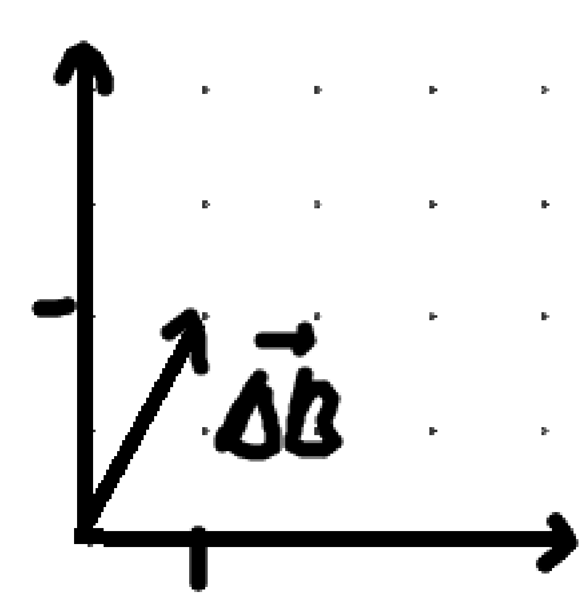


$$\vec{AB} = \vec{a} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

FIN - INICIO = $\vec{a}$

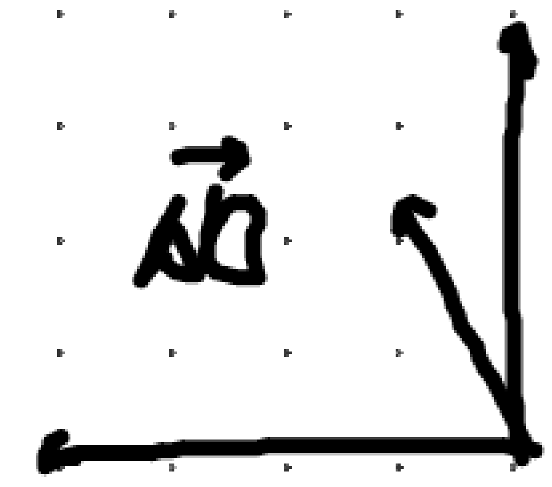
Ej.: $B(2,7)$, $A(1,5)$, ¿$\vec{AB}$?

$\vec{AB}(2-1, 7-5) = \vec{AB}(1,2)$

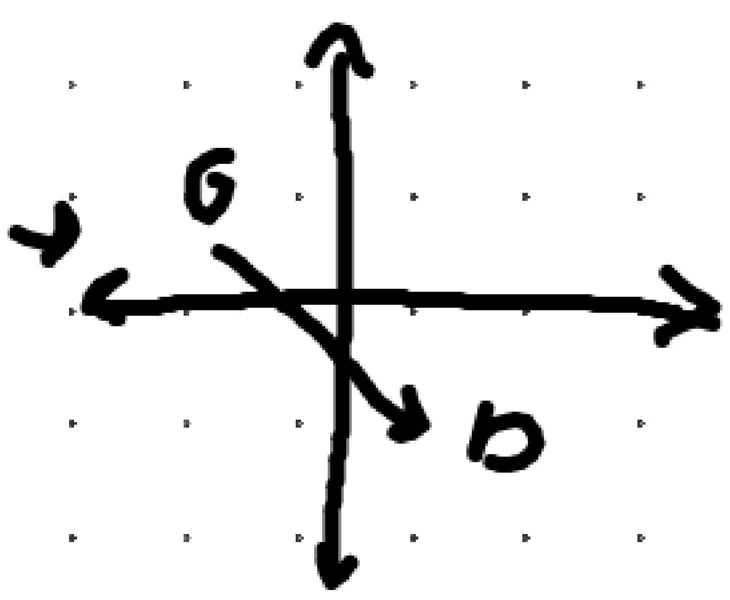


Ej.: $A(3,5)$, $B(2,7)$, ¿$\vec{AB}$?

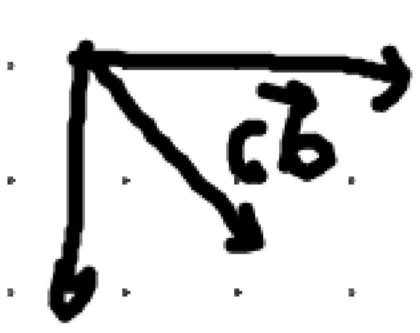
$\vec{AB}(-1,2)$



Ej.: $G\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, -3\right)$, ¿$\vec{GD}$? →



$$\vec{GD} = \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}, -3 - \frac{1}{3}\right) = \left(1, -\frac{10}{3}\right)$$



1. Finding vector components

1) $P(6,10)$ $Q(\sqrt{3}, 5\sqrt{5})$ $R\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $S(4,2)$ $M(0,12)$

a) $\vec{QS} = (4-\sqrt{3}, 2-5\sqrt{5})$

b) $\vec{QR} = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} - 5\sqrt{5}\right)$

c) $\vec{MQ} = (\sqrt{3}, 5\sqrt{5} - 12)$

d) $\vec{SQ} = (\sqrt{3} - 4, 5\sqrt{5} - 2)$

e) $\vec{RM} = \left(-\frac{1}{2}, 12 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $\vec{PS} = (-2, -8)$

g) $\vec{SM} = (-4, 10)$

h) $\vec{QM} = (-\sqrt{3}, 12 - 5\sqrt{5})$

i) $\vec{PQ} = (\sqrt{3} - 6, 5\sqrt{5} - 10)$

j) $\vec{RS} = \left(\frac{7}{2}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2) Determine the quadrant these vectors belong to

a) $\vec{b} = (-3,4) \rightarrow II$

b) $\vec{a} = (4,0) \rightarrow$ Y Axis, derecha

c) $\vec{z} = (\sqrt{3}, -4) \rightarrow IV$

d) $\vec{d} = (5,10) \rightarrow I$

e) $\vec{t} = (0,0) \rightarrow$ Origin

f) $\vec{g} = (0, -\sqrt{2} + \sqrt{5}) \rightarrow$ X Axis, arriba

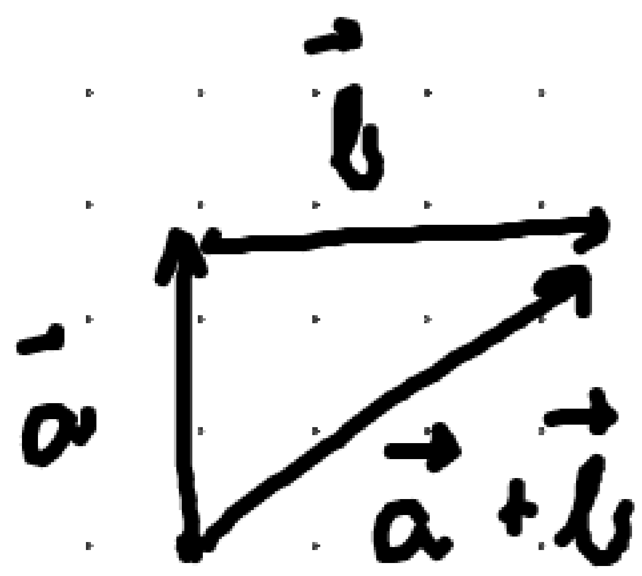
g) $\vec{o} = (-4,0) \rightarrow$ Y Axis, izquierda

h) $\vec{e} = (0,-15) \rightarrow$ X Axis, abajo

i) $\vec{AB} = (-20, -5454) \rightarrow III$

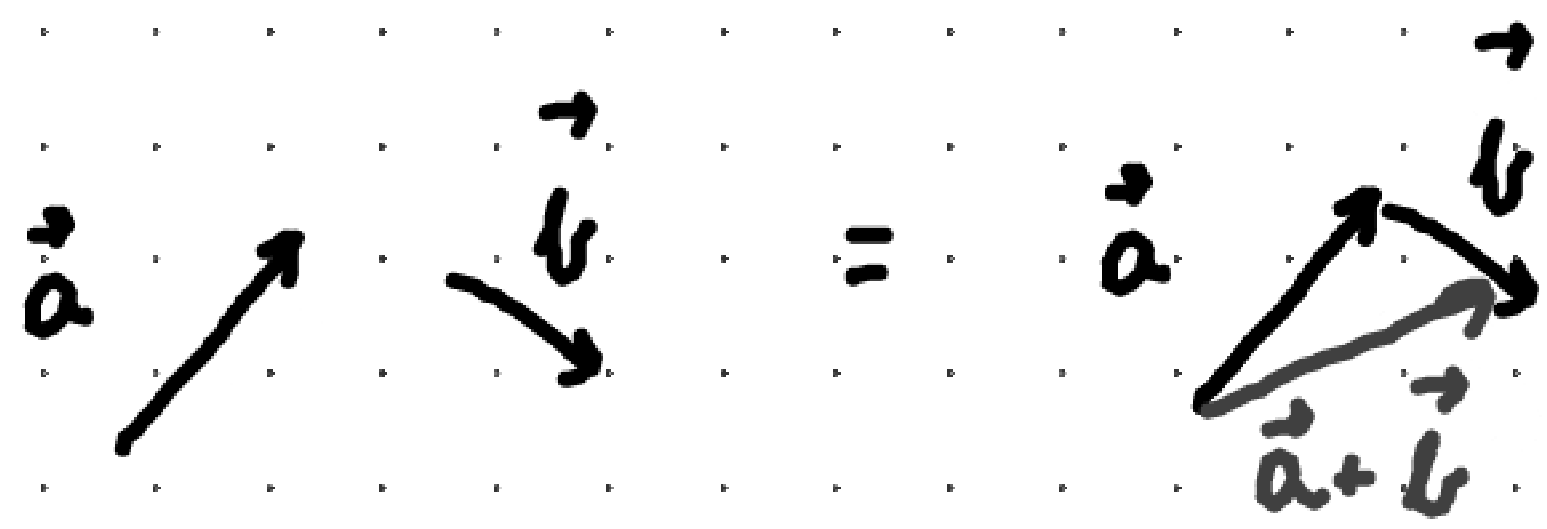
j) $\vec{BD} = \left(-\frac{17}{35}, -\frac{225}{34244}\right) \rightarrow III$

Suma de vectores

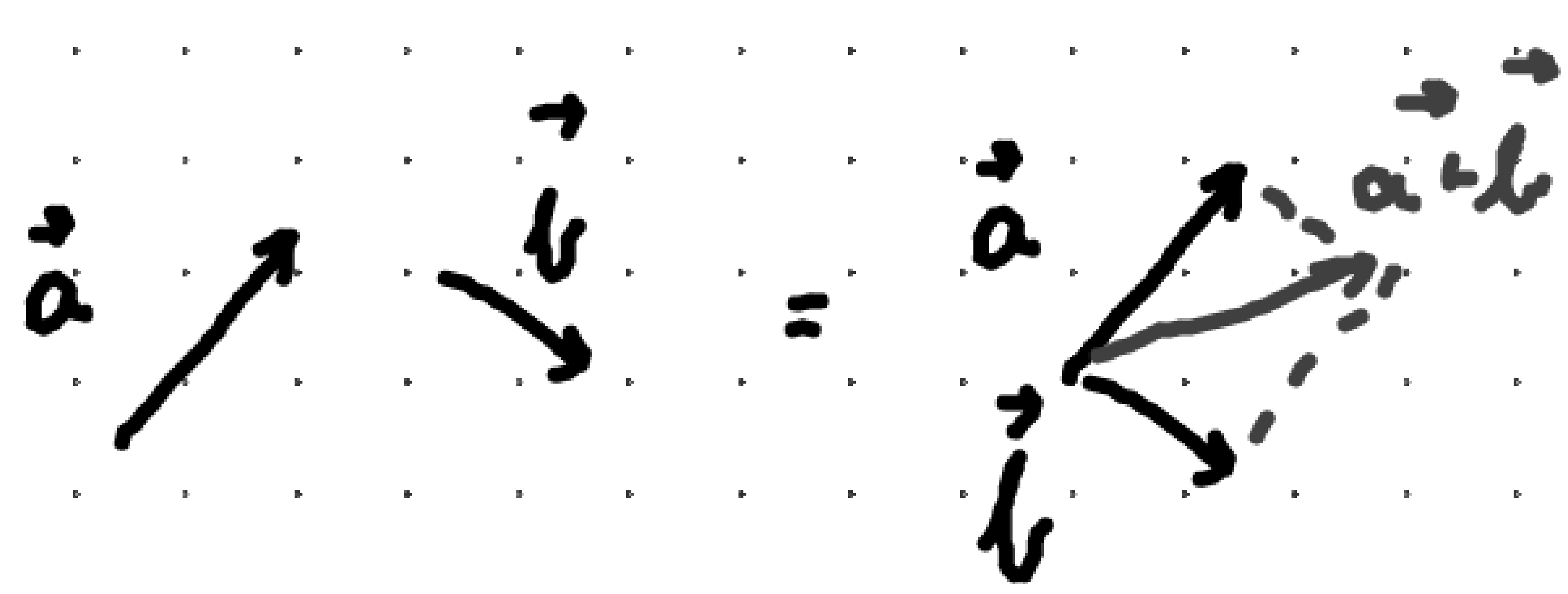


Es como una suma de fuerzas

- Suma gráfica



- Ley del paralelogramo

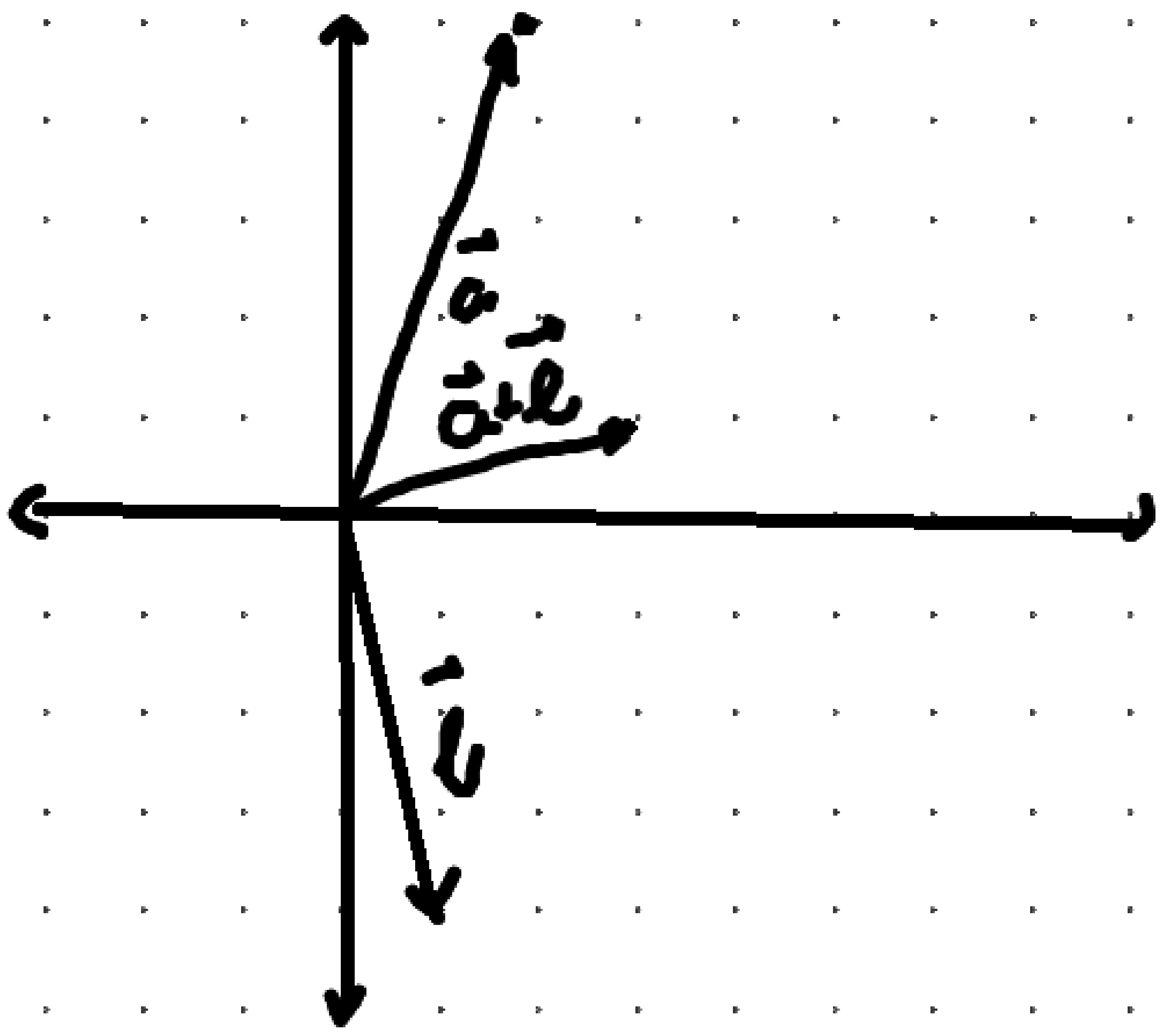


- Suma con componentes

$$\vec{a}+\vec{b} = \underbrace{(a_1, a_2) + (b_1, b_2)}_{\text{componentes}} = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$

(es como la suma gráfica)

Ej.: $\vec{a} = (2,5)$, $\vec{b} = (1,-4)$

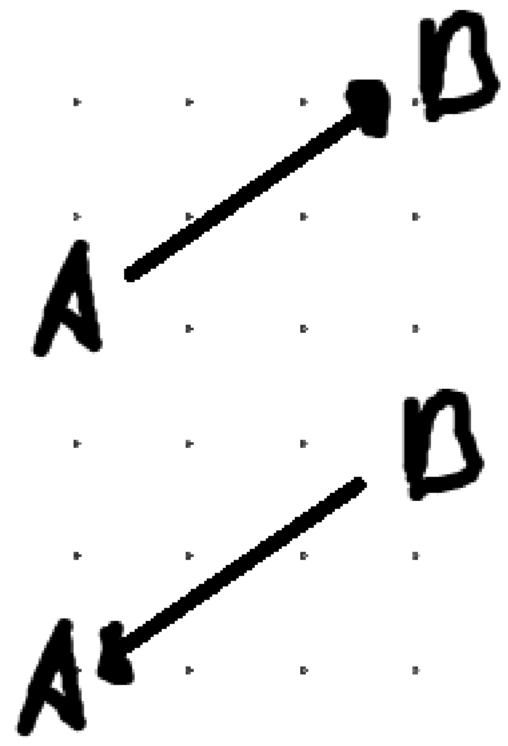


$\vec{a}+\vec{b} = (3,1)$

Vector opuesto y resta de vectores

$\vec{a} = \vec{AB}$

$-\vec{a} = \vec{BA}$

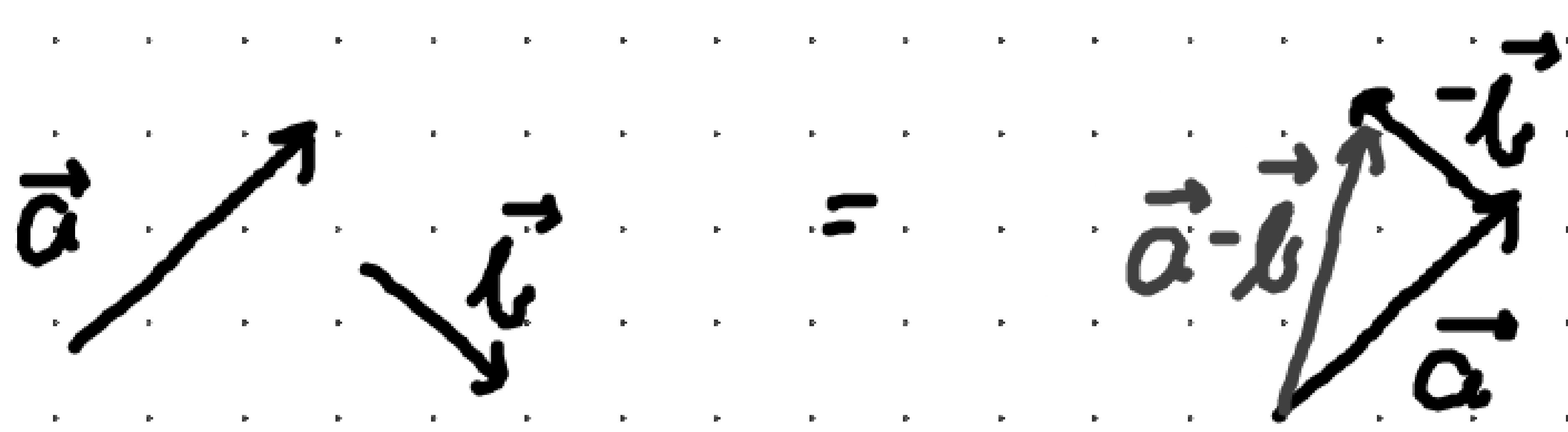


Misma magnitud, en sentido contrario

$\vec{a} = (a_1, a_2) \longleftrightarrow -\vec{a} = (-a_1, -a_2)$

- La resta de vectores es una suma de opuestos:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$



Ej.: $\vec{a} = (2,5)$, $\vec{b} = (1,-4)$, ¿$\vec{a}-\vec{b}$?

$\vec{a} - \vec{b} = (2-1, 5+4) = (1,9)$

1) Vector addition

$\vec{a} = (3,-4)$, $\vec{b} = (2,5)$, $\vec{c} = (-3,-1)$, $\vec{d} = (3, \frac{1}{2})$

$\vec{e} = (\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $\vec{f} = (2\sqrt{3}, -5\sqrt{5})$

1. find the opposites

$-\vec{a} = (-3,4)$, $-\vec{b} = (-2,-5)$, $\vec{c} = (3,1)$, $-\vec{d} = (3, -\frac{1}{2})$

$-\vec{e} = (-\sqrt{3}, -\sqrt{5})$, $\vec{f} = (-2\sqrt{3}, +5\sqrt{5})$

2. Operate

a) $\vec{a} + \vec{b} = (5,1)$

b) $\vec{b} + \vec{c} = (-1,4)$

c) $\vec{e} + \vec{f} = (3\sqrt{3}, -4\sqrt{5})$

d) $\vec{e} + \vec{a} = (3+\sqrt{3}, -4+\sqrt{5})$

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = (5+3\sqrt{3}, \frac{1}{2} - 4\sqrt{5})$

f) $\vec{a} - \vec{c} = (6,-3)$

g) $\vec{d} - \vec{a} + \vec{e} - \vec{c} = (3+\sqrt{3}, \frac{11}{2} + \sqrt{5})$

h) $\vec{f} + \vec{a} + \vec{d} = (6+2\sqrt{3}, -\frac{7}{2} - 5\sqrt{5})$

3 Opposites

a) $(-5,1)$

b) $(1,-4)$

c) $(-3\sqrt{3}, +4\sqrt{5})$

d) $(-3-\sqrt{3}, +4-\sqrt{5})$

e) $(-5-3\sqrt{3}, -\frac{1}{2}+4\sqrt{5})$

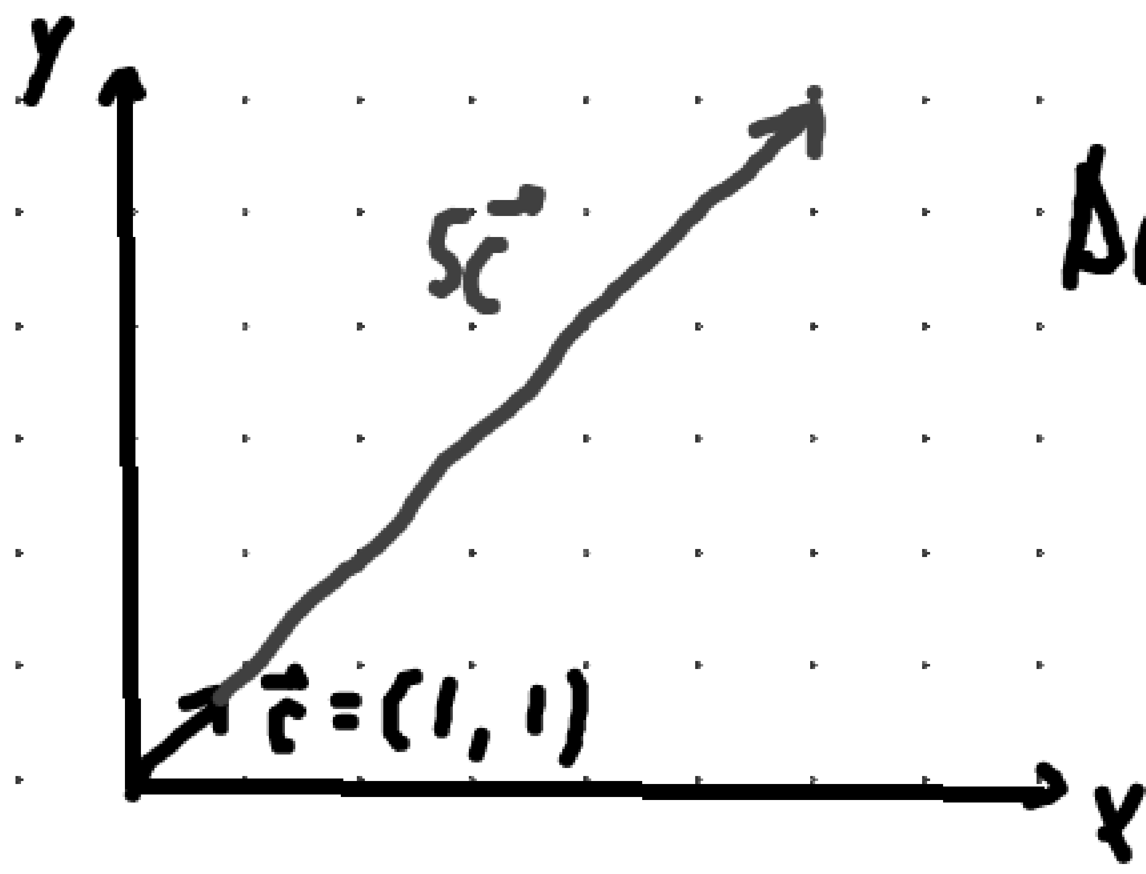
f) $(-6,3)$

g) $=(-3-\sqrt{3}, -\frac{11}{2} - \sqrt{5}$

h) $= (-6-2\sqrt{3}, \frac{7}{2} + 5\sqrt{5})$

Multiplicar un escalar por un vector

$\vec{a} = (a_1, a_2) \longleftrightarrow K \cdot \vec{a} = (Ka_1, Ka_2)$



Aumenta o disminuye la escala.

- Propiedades

Sean $\vec{a}$ un vector y $K \in \mathbb{R}$ una constante...

- Si $K < 0$, el sentido de $\vec{a}$ y el de $K\vec{a}$ son contrarios
- Si $K = 0$, $K\vec{a}$ es el origen
- Si $|K| > 1$, $K\vec{a} > \vec{a}$ (crece)
- Si $|K| < 1$, $K\vec{a} < \vec{a}$ (encoge)

magnitud de $\vec{a}$

- La magnitud de $K \cdot \vec{a}$ es $\|K \cdot \vec{a}\| = |K| \cdot |a|$
- Sean $c, d \in \mathbb{R}$ constantes, $cd\vec{a} = (cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$
- $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$, y $(c \cdot d) + \vec{u} = (c + \vec{u}) \cdot (d + \vec{u})$

(También se cumple sustituyendo vectores y constantes

Ej.: $\vec{d} = (5,10)$, ¿$-\frac{1}{5}\vec{d}$? $\quad \frac{1}{5}\vec{d} = (-1,-2)$

Ej.: $\vec{b} = (12,-6)$, $\vec{d} = (-4, \frac{1}{3})$, ¿$\vec{b} + 3\vec{d}$?

$3\vec{d} = (-12, 1)$

$\vec{b} + 3\vec{d} = (0, -5)$

Ej.: $\vec{a} = (3,-5)$, $b = (18,12)$, $c = (-1,2)$

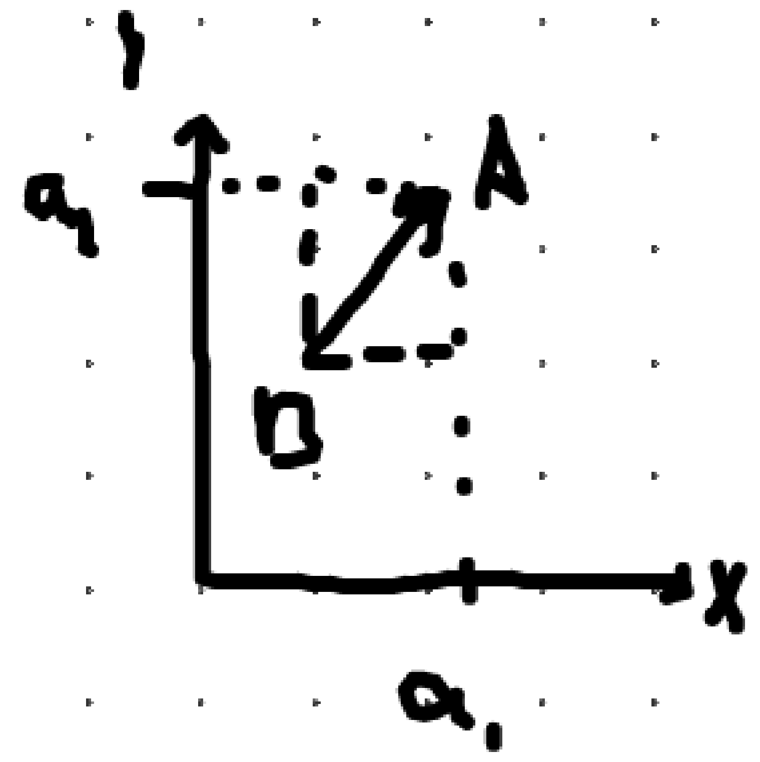
¿$2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + 5\vec{c}$?

$$\left.\begin{array}{l} 2\vec{a} = (6,-10) \\ -\frac{2}{3}\vec{b} = (-12,-8) \\ 5\vec{c} = (-5,10) \end{array}\right\} 2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + 5\vec{c} = (-11,-8)$$

Cálculo de magnitudes

$\vec{a} = (a_1, a_2) \longleftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

Magnitud. (largo)



Se puede sacar haciendo pitágoras

Ej.: $\vec{a} = (3,4) \to |\vec{a}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|\vec{a}| = 5$

Ej.: $\vec{a} = (5,-2)$, $\vec{b} = (0,-5)$, ¿$|\vec{a} + 2\vec{b}|$?

$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} = (5,-12)$

$|\vec{c}| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

Ej.: $a = (5,-2)$, $b = (0,-5)$, $c = (1,-7)$ ¿$|\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}|$?

$\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 4c = (5,-12) + 4(1,-7) = (9,-40)$

$|\vec{v}| = \sqrt{9^2 + (-40)^2} = \sqrt{81+1600} = \sqrt{1681} = 41$

1)

$\vec{a}=(5,-2)$, $\vec{b}=(1,8)$, $\vec{c}=(\sqrt{3},\sqrt{2})$, $d=(-1,0)$

$e=(1/2,3)$, $\vec{f}=(1,-3)$

$|\vec{a}|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$

$|\vec{c}|=\sqrt{5}$

$|\vec{d}|=\sqrt{1}=1$

$|\vec{e}|=\sqrt{1/4+3}=\sqrt{15/4}$

$|\vec{f}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 38 \\ \hline 304 \\ 114 \\ \hline 1444 \end{array}$$

$|\vec{a}+5\vec{e}-3\vec{d}|=|(10,38)-3(-1,0)|=|(13,38)|=$

$=\sqrt{169+1444}=\sqrt{1613}$

$|\vec{a}-\vec{b}+\vec{e}|=|(5,-2)-(3/2,11)|=|(7/2,-13)|=$

$=\sqrt{\frac{49}{4}+169}$

$|3\vec{c}|=\sqrt{9(3+2)}=\sqrt{45}$

$\vec{a}=(5,2)$, $d=(0,-5)$, $\vec{e}=(6,7)$, $\vec{f}=(1,3)$

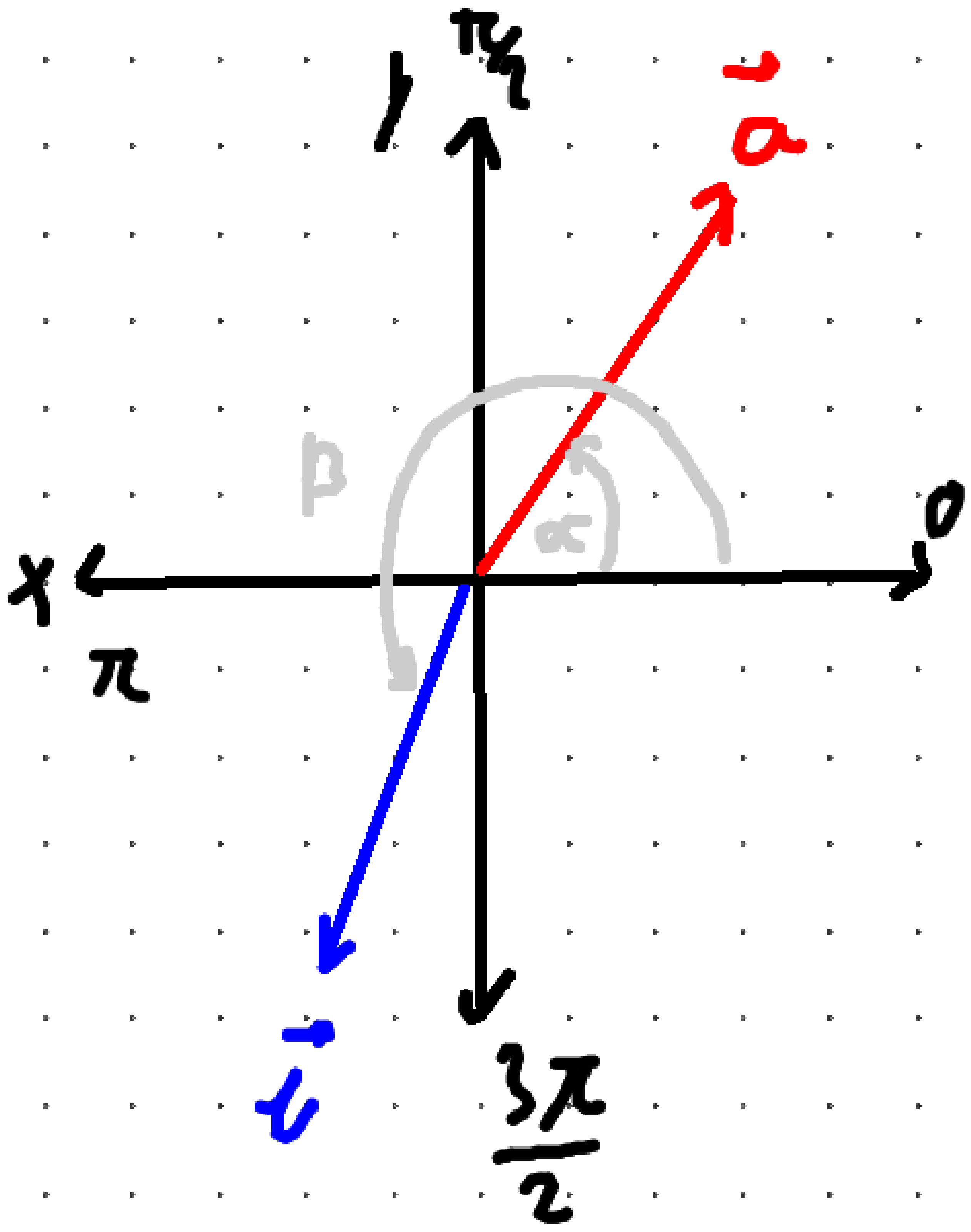
$$\left|\vec{a}+4\vec{f}-\frac{1}{3}\vec{e}+6\vec{d}\right| =$$

$$\left|(5,2)+(4,12)-(2,\,{}^{7}/_{3})+(0,-30)\right| =$$

$$\left|(9,14)-\left(2,\frac{83}{3}\right)\right| = \left|\left(7,-\frac{31}{3}\right)\right| = \sqrt{49+\frac{961}{9}} =$$

$$\sqrt{\frac{441+961}{9}} = \sqrt{\frac{1402}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{1402} \simeq 12{,}48$$

Dirección y ángulo de un vector



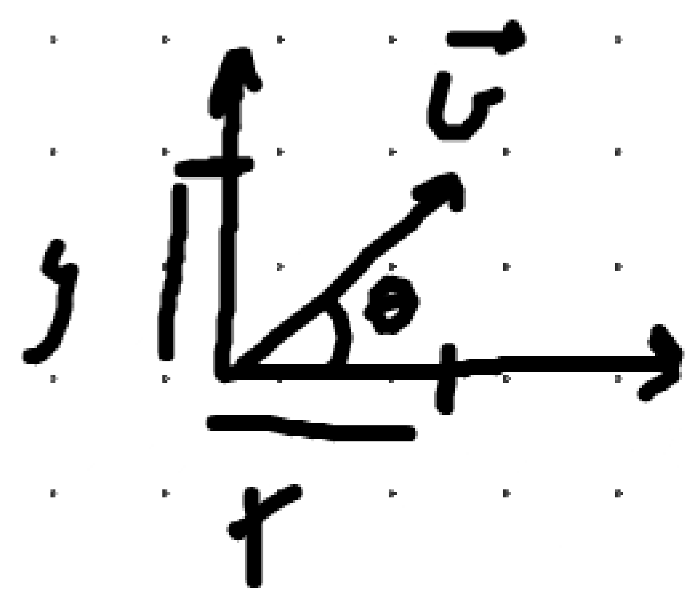
Los ángulos se miden en sentido antihorario desde el lado positivo del eje x.

Los ángulos pueden darse en grados ($n°$) ó radianes (n rad). !! $180° = 2\pi$ rad

Cálculo de componentes y ángulo

Se pueden averiguar las componentes (x, y) de un vector sabiendo su magnitud y dirección.

$$\left.\begin{array}{l} x = |\vec{u}|\cos(\theta) \\ y = |\vec{u}|\operatorname{sen}(\theta) \end{array}\right\} \longrightarrow$$



Y se puede averiguar el ángulo sacando la pendiente $\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$\frac{y}{x} = \frac{\cancel{|\vec{u}|}\operatorname{sen}(\theta)}{\cancel{|\vec{u}|}\cos(\theta)} = \tan(\theta) \longleftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

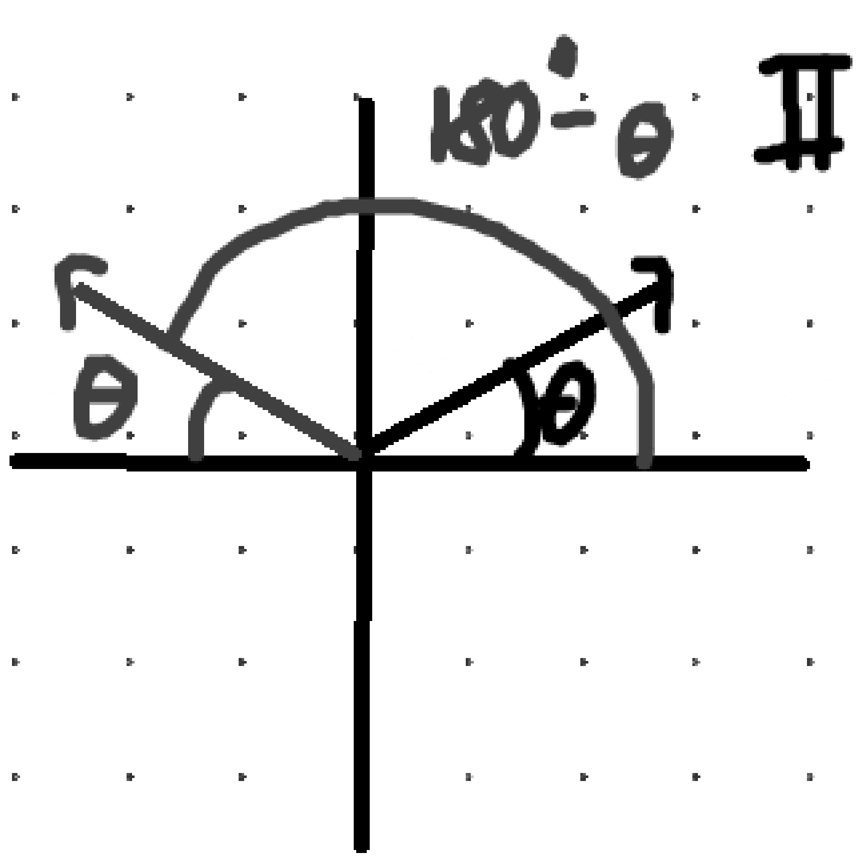
!! $a = x,\ b = y$ $\quad \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right)$

NO ES CORRECTO, ya que están en guadrantes diferentes (I y III), por lo que no pueden tener el mismo ángulo.

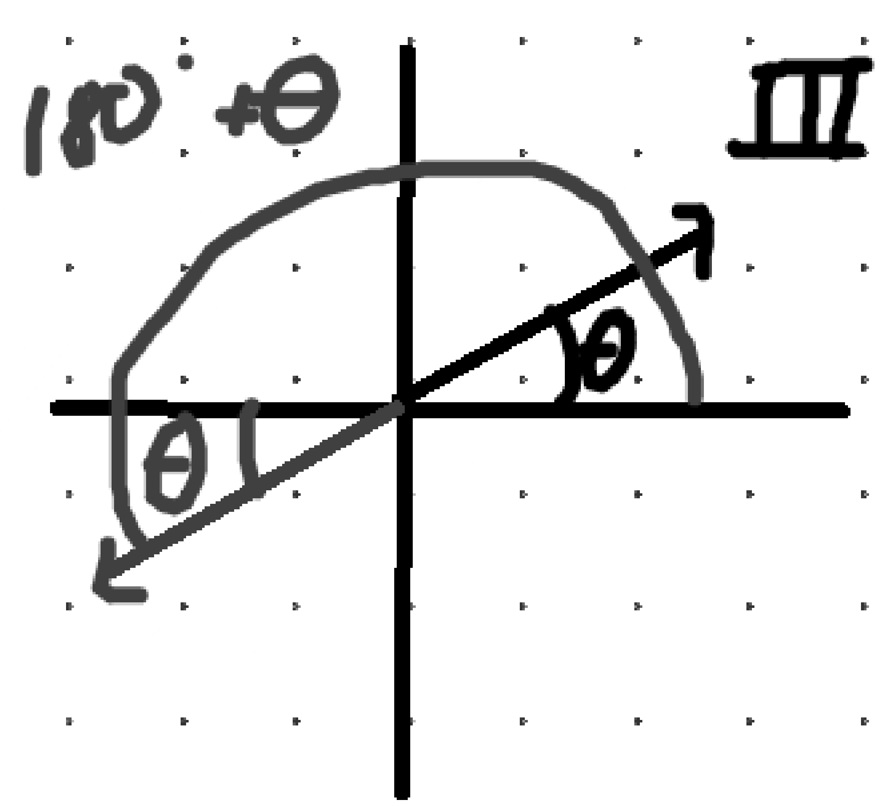
!! $a = x,\ b = y$ $\quad \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-b}{-a}\right)$

NO ES CORRECTO, ya que están en cuadrantes diferentes (I y III), por lo que no pueden tener el mismo ángulo.

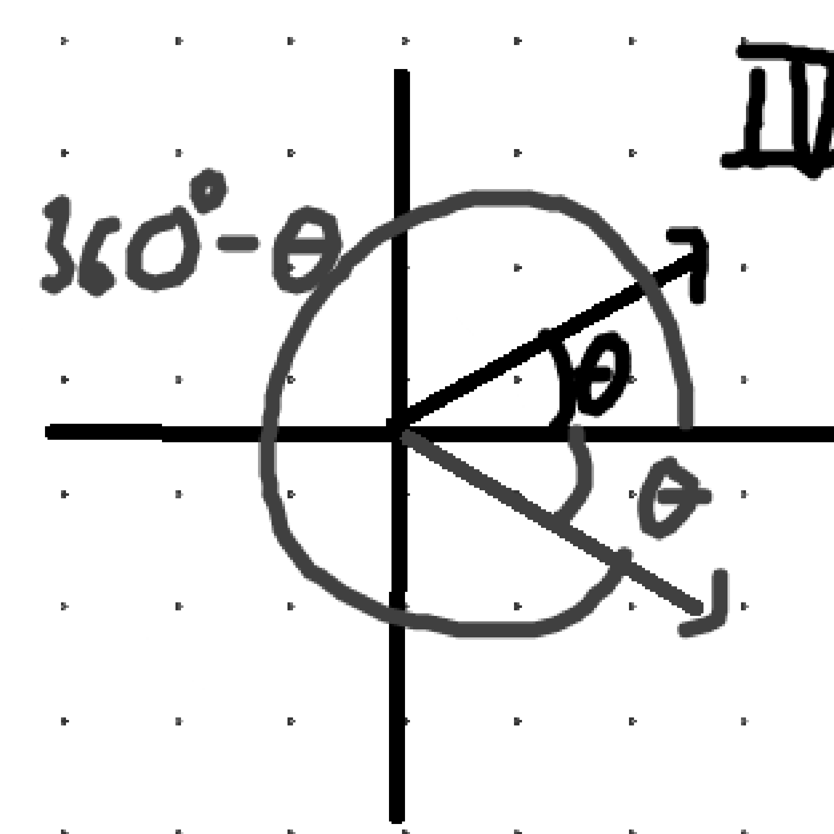
Por tanto, en vez de que θ sea respecto al lado positivo del eje x y calcular $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, se calcula $\theta = \arctan\left(\frac{|x|}{|y|}\right)$ y se ajusta el ángulo de acuerdo al cuadrante:



$\alpha = \pi - \theta$



$\alpha = \pi + \theta$



$\alpha = 2\pi - \theta$

Ej.: $\vec{a} = (5,15)$ ¿ángulo?

$\theta = \arctan\left(\frac{15}{5}\right) = \arctan(3) \simeq 1,25 \text{ rad} = 71,57^\circ$

1) $\vec{a} = (-5,-6)$, $\vec{b} = (3,4)$, $\vec{c} = (-2,7)$, $\vec{d} = (5,-8)$, $\vec{e} = (\sqrt{2},\sqrt{2})$
$\vec{f} = (4,-5)$

1.
a) $\vec{a}$ está en III $\rightarrow \theta = \pi + \arctan\left(\frac{6}{5}\right) \simeq 4,02 \text{ rad}$

b) $\vec{b}$ está en I $\rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \simeq 0,93 \text{ rad}$

c) $\vec{c}$ está en II $\rightarrow \theta = \pi - \arctan\left(\frac{7}{2}\right) \simeq 1,85 \text{ rad}$

d) $\vec{d}$ está en IV $\rightarrow \theta = 2\pi - \arctan\left(\frac{8}{5}\right) \simeq 5,27 \text{ rad}$

e) $\vec{e}$ está en I $\rightarrow \theta = \arctan(1) = 45^\circ \simeq 0,785 \text{ rad}$

pendiente de 1 = 45°

f) $\vec{f}$ está en IV $\rightarrow \theta = 2\pi - \arctan\left(\frac{5}{4}\right) \simeq 5,39$

$\vec{a}=(-5,-6)$, $\vec{b}=(3,4)$, $\vec{c}=(-2,7)$, $\vec{d}=(5,-8)$, $\vec{e}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$

$\vec{f}=(4,-5)$

2) Find the angles of...

a) $5\vec{a}$ → el mismo que $\vec{a}$, 4,02 rad

b) $6\vec{b}-8\vec{d}=(18,24)-(-16,57)=(34,33) \rightsquigarrow \text{I}$

$$\theta=\arctan\left(\frac{33}{34}\right)=0{,}77 \text{ rad}$$

c) $\frac{1}{5}\vec{f}+\frac{2}{3}\vec{e}=\left(\frac{4}{5},-1\right)+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\left(\frac{4}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{3},-1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=$

$$=\left(\frac{12+10\sqrt{2}}{15},\frac{-3+2\sqrt{2}}{3}\right) \rightsquigarrow -1+\frac{2\sqrt{2}}{3}<0 \rightarrow \text{IV}$$

$$\theta=2\pi-\arctan\left(\left|\frac{-3+2\sqrt{2}}{3}\div\frac{12+10\sqrt{2}}{15}\right|\right)=$$

$$=2\pi-\arctan\left(\left|5(-3+2\sqrt{2})\cdot(12+10\sqrt{2})\right|\right)=$$

$$=2\pi-\arctan\left(\left|(-15+10\sqrt{2})\cdot(12+10\sqrt{2})\right|\right)=$$

$$=2\pi-\arctan\left(\left|-180-150\sqrt{2}+120\sqrt{2}+200\right|\right)=$$

$$=2\pi-\arctan\left(\left|20-30\sqrt{2}\right|\right)=2\pi-\arctan\left(-20+30\sqrt{2}\right)$$

Convertir grados en radianes

$\pi \text{ rad} = 180°$

$x \text{ rad} = 90°$

$$\frac{\pi}{x} = \frac{180}{90} \longleftrightarrow 180x = 90\pi \longleftrightarrow x = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

$\downarrow$

$\pi \text{ rad} = 180°$

$x \text{ rad} = a°$

$$\frac{\pi}{x} = \frac{180}{a} \longleftrightarrow \pi a = 180x \longleftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi a}{180}} \longleftrightarrow \boxed{a = \frac{180x}{\pi}}$$

$a° \to x \text{ rad}$ $\qquad$ $x \text{ rad} \to a°$

$$2\pi \text{ rad} \to \frac{180 \cdot 2\pi}{\pi} = 360°$$