



KTH Engineering Sciences

## Partiell integration i högre dimensioner

Låt  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  vara ett öppet begränsat område med en styckvis slät rand  $\partial\Omega$ . Antag att  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  är en slät ( $C^1$ ) vektorvärld funktion. Divergenssatsen/Gauss sats säger då att

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

där  $\mathbf{n}$  är en utåtriktad enhetsnormal och  $dS$  är ett ytelement till  $\partial\Omega$ . (I tvådimensioner,  $d = 2$ , är  $\partial\Omega$  en kurva i planet och  $dS = ds =$  bågselementet.)

Om vi nu tar  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})$  där  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  är en skalär funktion och  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  är en vektorvärld funktion får vi

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (f\mathbf{g}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\nabla f) \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x}.$$

Efter att vi stuvat om termerna har vi formeln för partiell integration i högre dimensioner, nämligen

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x},$$

alternativt

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x}.$$

I projektet är det lämpligt att notera följande identitet för nabla-operatorer,

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u.$$