KTH Engineering Sciences

Partiell integration i högre dimensioner

Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ vara ett öppet begränsat område med en styckvis snäll rand $\partial\Omega$. Antag att $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ är en snäll (C^1) vektorvärd funktion. Divergenssatsen/Gauss sats säger då att

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \hat{n} dS,$$

där $\hat{n}$ är en utåtriktad enhetsnormal och dS är ett ytelement till $\partial\Omega$. (I två dimensioner, $d = 2$, är $\partial\Omega$ en kurva i planet och $dS = ds =$ båglängdselementet.)

Om vi nu tar $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ där $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ är en skalär funktion och $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ är en vektorvärd funktion får vi

$$\int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{g} \cdot \hat{n} dS = \int_\Omega \nabla \cdot (f\boldsymbol{g}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla f \cdot \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} + \int_\Omega f \nabla \cdot \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x}.$$

Efter att vi stuvat om termerna har vi formeln för partiell integration i högre dimensioner, nämligen

$$\int_\Omega f \nabla \cdot \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{g} \cdot \hat{n} dS - \int_\Omega \nabla f \cdot \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x},$$

alternativt

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{g} \cdot \hat{n} dS - \int_\Omega f \nabla \cdot \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x}.$$

I projektet är det lämpligt att notera följande identitet för nabla-operatorer,

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u).$$