Est-ce que le motif σ est dans la permutation π

1 Le problème

Étant donné une permutations π de n et une permutation σ de $k < n$, on se demande si le motif σ apparaît à l'intérieur de la permutation π dans le sens discuté cette après-midi.

Par exemple si

$$\begin{array}{rl} \pi & = 10\ 1\ 4\ 8\ 7\ 5\ 6\ 2\ 3\ 9 \quad \text{et} \quad \sigma = 4\ 1\ 2\ 3 \\ \text{pos} = & {\scriptstyle 1\ \ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10} \end{array}$$

alors σ apparaît à l'intérieur de la permutation π à la position (1,2,3,4) (i.e σ_1 à la position 1, σ_2 à la position 2, σ_3 à la position 3 et σ_4 à la position 4). Ce n'est pas la seule occurrence de σ dans π. σ apparaît aussi aux positions suivantes: $\{$(1,2,3,5),(1,2,3,6),(1,2,3,7),(1,2,3,10), (4,6,7,10),(4,8,9,10)$\}$

2 L'algorithme brute force

On regarde pour chaque k-tuplet de position dans π, on regarde si on a une occurrence de *sigma*.

3 L'idée pour réduire le temps de calcul

Pour la permutation π et le motif σ, on calcul deux *codes*. Intuitivement,pour une position i dans une permutation π, le code gauche (resp. droit) pour cette position est simplement le nombre d'éléments plus grand (resp. plus petit) que π_i à sa gauche (resp. sa droite). Plus formellement, on a

Definition 1. *Étant donné une permutation $\pi = \pi_1 \dots \pi_n$, le* **code gauche** *de l'élément π_i de π, dénoté $cg(\pi_i)$, est*

$$cg(\pi_i) = |\{\pi_j \mid \pi_j > \pi_i \text{ and } 0 \leq j \leq i-1\}|, \text{ for } 1 \leq i \leq n,$$

De façon similaire, le **code droit** *de l'élément π_i de π, dénoté $cd(\pi_i)$, est*

$$cd(\pi_i) = |\{\pi_j \mid \pi_j < \pi_i \text{ and } i+1 \leq j \leq n+1\}|, \text{ for } 1 \leq i \leq n.$$

Le code gauche (resp. droit) d'une permutation π est alors défini comme la suite des cg (resp. cd) de ces éléments.

L'idée est d'utiliser ces codes pour réduire le nombre de positions dans π où on peut possiblement trouver notre motif.

Voici les étapes de cette idée:

1. Calculer les codes gauche et droit de la permutation et du motif Par exemple, on a les codes gauche et droit suivants pour π et les motifs σ et ρ:

$$\begin{array}{rlrlrl} cd(\pi) = & 9\ \ 0\,2\,5\,4\,2\,2\,0\,0\,0 & cd(\sigma) = & 3\,0\,0\,0 & cd(\rho) = & 5\,4\,3\,2\,1\,0 \\ cg(\pi) = & 0\ \ 1\,1\,1\,2\,3\,3\,6\,6\,1 & cg(\sigma) = & 0\,1\,1\,1 & cg(\rho) = & 0\,1\,2\,3\,4\,5 \\ \pi \quad = & 10\,1\,4\,8\,7\,5\,6\,2\,3\,9 & \sigma \quad = & 4\,1\,2\,3 & \rho \quad = & 6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{array}$$

2. Regarder pour chaque position de π si cette position pourrait être une position pour σ_i, $1 \leq i \leq k$. Une position j de π peut être une position pour σ_i si $cg(\pi_j) > cg(\sigma_i)$ et $cd(\pi_j) > cd(\sigma_i)$. Dans le tableau ci-dessous, la ligne pos(σ) (resp. pos(ρ)) contient pour chaque position de π l'ensemble des positions de σ (resp. ρ) pouvant possiblement être correctes.

π =	10	1	4	8	7	5	6	2	3	9
pos(σ)	{1}	{2}	{2,3}	{1,2,3,4}	{1,2,3,4}	{2,3,4}	{2,3,4}	{2,3,4}	{3,4}	{4}
pos(ρ)	{1}	{}	{}	{1,2}	{2,3}	{4}	{4}	{6}	{6}	{}

3. à suivre