



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

PROJET 3

MATHÉMATIQUE DES ÉLÉMENTS FINIS

Anthony Martin (1896355)  
Emmanuelle Vigneux-Foley (1908887)

Remis à  
M.Serge Prudhomme

15 décembre 2020

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La formulaion faible du problème</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Unicité de la solution</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Le cas <math>L = 1</math>, <math>EI = 1</math>, <math>q(x) = 0</math> et <math>g = 1</math></b>	<b>5</b>
4.1	Solution exacte . . . . .	6
4.2	Solution par éléments finis . . . . .	6
4.3	Validation du code et déflexion à l'extrémité libre de la poutre . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Le cas <math>L = 1</math>, <math>EI = 1</math>, <math>q(x) = x</math> et <math>g = 1</math></b>	<b>11</b>
5.1	Solution exacte . . . . .	12
5.2	Solution par éléments finis . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Méthode alternative pour la résolution du problème</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>

# 1 Présentation du problème

Les poutres en porte-à-faux sont des poutres qui ne sont fixées qu'à une seule extrémité. Elles sont présentes dans plusieurs domaines d'ingénierie. Par exemple, elles sont utilisées pour la construction de ponts et de bâtiments. Certains modèles d'avion font aussi usage de celles-ci. Ces poutres ont aussi des applications microscopiques : plusieurs microsystèmes, dont les microscopes à force atomique, reposent sur le principe de poutre en porte-à-faux. Bref, les applications de ce type de poutre sont multiples.

Dans ce projet, c'est une poutre en porte-à-faux, fixée en une extrémité et soumise à une force verticale  $g$  à l'autre extrémité, qui est étudiée. La déflexion de cette poutre est donnée par l'équation d'Euler-Bernoulli et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} (EIu'')'' &= q, \forall x \in \Omega = (0, L) \\ u &= 0, x = 0 \\ u' &= 0, x = 0 \\ EIu'' &= 0, x = L \\ (-EIu'')' &= g, x = L \end{aligned}$$

où  $E$  et  $I$  sont le module d'élasticité et le moment d'inertie de la poutre et  $q = q(x)$  est la charge par unité de longueur agissant sur la poutre. Ce problème est illustré à la figure 1

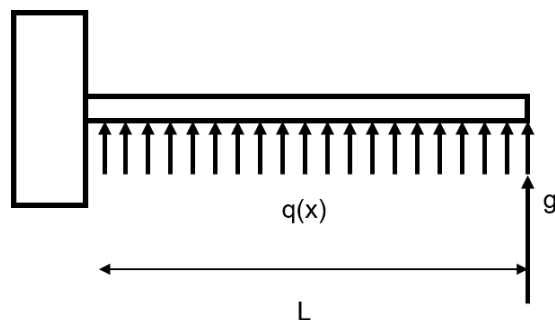


FIGURE 1 – Poutre en porte-à-faux.

## 2 La formulation faible du problème

Pour être en mesure de résoudre le problème par la méthode des éléments finis, il faut d'abord et avant tout trouver la formulation faible du problème. Pour trouver celle-ci, il faut commencer par multiplier l'EDO par une fonction test arbitraire  $v(x)$ , puis l'intégrer sur  $\Omega = (0, L)$ .

$$\int_0^L (EIu'')'' v dx = \int_0^L q v dx$$

Une intégration par partie pour le côté gauche de l'égalité est réalisée :

$$\begin{aligned} \int_0^L - (EIu'')' v' dx + \left[ (EIu'')' v \right]_0^L &= \int_0^L q v dx \\ \Rightarrow \int_0^L - (EIu'')' v' dx + \left[ (EIu''(L))' v(L) - (EIu''(0))' v(0) \right] &= \int_0^L q v dx \end{aligned}$$

Il est ensuite possible d'appliquer la condition limite  $\left(-EIu''(L)\right)' = g$  pour obtenir :

$$\Rightarrow \int_0^L -\left(EIu''\right)' v' dx - gv(L) - \left(EIu''(0)\right)' v(0) = \int_0^L qv dx$$

Puisque  $u''(0)$  n'est pas nécessairement définie (car  $u \in H^2$ ), la fonction test  $v$  est choisie de telle sorte que  $v(0) = 0$ . De cette manière,  $u''(0)$  n'apparaît pas dans l'équation. Cette équation est alors :

$$\Rightarrow - \int_0^L \left(EIu''\right)' v' dx = \int_0^L qv dx + gv(L)$$

Ensuite, une seconde intégration par partie est réalisée pour le côté gauche de l'égalité :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(EIu''\right) v'' dx - \left[EIu'' v'\right]_0^L = \int_0^L qv dx + gv(L) \\ \Rightarrow \int_0^L \left(EIu''\right) v'' dx - \left[EIu''(L)v'(L) - EIu''(0)v'(0)\right] &= \int_0^L qv dx + gv(L) \end{aligned}$$

Il est ensuite possible d'appliquer la condition limite  $EIu''(L) = 0$  pour obtenir :

$$\Rightarrow \int_0^L EIu'' v'' dx + EIu''(0)v'(0) = \int_0^L qv dx + gv(L)$$

Puisque  $u''(0)$  n'est pas nécessairement définie (car  $u \in H^2$ ), la fonction test  $v$  est choisie de telle sorte que  $v'(0) = 0$ . De cette manière,  $u''(0)$  n'apparaît pas dans l'équation. Cette dernière est alors :

$$\Rightarrow \int_0^L EIu'' v'' dx = \int_0^L qv dx + gv(L)$$

La forme obtenue est la formulation faible du problème :  
Trouver  $u \in U$  telle que :

$$\int_0^L EIu'' v'' dx = \int_0^L qv dx + gv(L)$$

avec  $B(u, v) = \int_0^L EIu'' v'' dx$ , qui est symétrique, et  $F(v) = \int_0^L qv dx + gv(L)$

Le choix des espaces est fait de telle sorte que les intégrales soient définies :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L EIu'' v'' dx \right| &\leq EI \|u''\|_{L^2} \|v''\|_{L^2} \leq EI \|u'\|_{H^1} \|v'\|_{H^1} \leq EI \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \\ \left| \int_0^L qv dx \right| &\leq \|q\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|q\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \leq \|q\|_{L^2} \|v\|_{H^2} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont donc prises dans  $H^2$  :

$$\begin{aligned} U &= \{u \in H^2(\Omega) : u'(0) = 0, u(0) = 0\} \\ V &= \{v \in H^2(\Omega) : v'(0) = 0, v(0) = 0\} \end{aligned}$$

Il peut être constaté que les conditions limites  $\left(-EIu''\right)' = g, x = L$  et  $EIu'' = 0, x = L$  sont naturelles, puisqu'elles apparaissent dans la formulation faible (elles ont été utilisées dans les applications des conditions limites). Les conditions limites  $u' = 0, x = 0$  et  $u = 0, x = 0$  sont essentielles. Elles n'apparaissent pas dans la formulation faible, donc elles doivent être spécifiées dans l'espace  $U$ .

### 3 Unicité de la solution

Il est aussi pertinent, avant de chercher à trouver la solution par la méthode des éléments finis, de définir si la solution qui sera trouvée est unique. Pour ce faire, il est possible d'utiliser le théorème de Lax-Milgram. Selon ce dernier, pour  $V$ , un espace de Hilbert muni de la norme  $\|\cdot\|_V$ , si  $B$  est continue et coercive et  $F$  est continue, donc si :

$$\begin{aligned}\exists M > 0 \quad t.q. \quad & |B(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V \\ \exists C > 0 \quad t.q. \quad & |F(v)| \leq C \|v\|_V, \quad \forall v \in V \\ \exists \alpha > 0 \quad t.q. \quad & |B(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V\end{aligned}$$

Alors il existe une unique solution  $u \in V$  telle que  $B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$  et le problème est bien posé.

Pour le cas ci-présent, il est possible de démontrer la continuité de  $B(u, v)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}|B(u, v)| &= \left| \int_0^L EI u'' v'' dx \right| \\ &\leq \int_0^L |EI u'' v''| dx \\ &\leq |E||I| \int_0^L |u'' v''| dx \\ &\leq |E||I| \|u''\|_{L^2} \|v''\|_{L^2} \\ &\leq |E||I| \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2}\end{aligned}$$

Le passage de l'avant-dernière ligne à la dernière est fait en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il est possible de constater que, dans ce cas,  $M = |E||I|$  qui est supérieur à 0, donc  $B(u, v)$  est bel et bien continue.

Il est aussi possible de démontrer la continuité de  $F(v)$  en procédant de la manière ci-dessous :

$$\begin{aligned}|F(v)| &= \left| \int_0^L qv dx + gv(L) \right| \\ &\leq \int_0^L |qv| dx + |g| |v(L)| \\ &\leq q_{max} \int_0^L |v| dx + |g| \|v\|_{L^2} \\ &\leq q_{max} \|v\|_{L^2} + |g| \|v\|_{L^2} \\ &\leq (q_{max} + |g|) \|v\|_{L^2} \\ &\leq (q_{max} + |g|) \|v\|_{H^2}\end{aligned}$$

Le passage de l'avant-dernière ligne à la dernière est fait en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il est possible de constater que, dans le cas étudié,  $C = (q_{max} + |g|)$  qui est supérieur à 0, donc  $F(v)$  est bel et bien continue.

Finalement, la coercivité de  $B(u, v)$  est démontré comme-ci :

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \int_0^L \left( EI u'' \right)^2 dx \\ &= EI \int_0^L \left( u'' \right)^2 dx \\ &= EI \|u''\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Selon le théorème de Poincaré,  $\|u\|_{L^2} \leq C_p \|u'\|_{L^2}$  et  $\|u'\|_{L^2} \leq C_p \|u''\|_{L^2}$  et donc  $\|u\|_{L^2} \leq C_p^2 \|u''\|_{L^2}$ .

En introduisant deux constantes  $0 \leq \epsilon \leq 1$  et  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $B(u, u)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} B(u, u) &= EI \left( \epsilon \|u''\|_{L^2}^2 + \beta \|u''\|_{L^2}^2 + \left( \frac{1}{2} - \epsilon \right) \|u''\|_{L^2}^2 + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \|u''\|_{L^2}^2 \right) \\ &\geq EI \left( \epsilon \|u''\|_{L^2}^2 + \beta \|u''\|_{L^2}^2 + \frac{(\frac{1}{2} - \epsilon)}{C_p^4} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{(\frac{1}{2} - \beta)}{C_p^2} \|u'\|_{L^2}^2 \right) \end{aligned}$$

En choisissant  $\epsilon$  telle que  $\epsilon = \frac{(\frac{1}{2} - \epsilon)}{C_p^4}$  et  $\beta$  telle que  $\beta = \frac{(\frac{1}{2} - \beta)}{C_p^2}$ , l'inégalité peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq EI \left( \frac{\frac{1}{2}}{C_p^4 + 1} \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\frac{1}{2}}{C_p^2 + 1} \left( \|u'\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2 \right) \right) \\ &\geq \frac{EI}{\max\{C_p^4 + 1, C_p^2 + 1\}} \left( \|u''\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 \right) \\ &\geq \frac{EI}{\max\{C_p^4 + 1, C_p^2 + 1\}} \frac{1}{2} \left( \|u''\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \right) \\ &\geq \frac{EI}{\max\{C_p^4 + 1, C_p^2 + 1\}} \frac{1}{2} \|u\|_{H^2}^2 \end{aligned}$$

Il est possible de constater que, dans le cas présenté ci-haut,  $\alpha = \frac{EI}{\max\{C_p^4 + 1, C_p^2 + 1\}} \frac{1}{2}$  qui est supérieur à 0 (car  $C_p$  est une constante strictement positive), donc  $B(u, v)$  est bel et bien coercive.

Puisque  $B(u, v)$  est continue et coercive et  $F(v)$  est continue, il est possible de conclure que, par le théorème de Lax-Milgram, le problème est bien posé. La solution qui sera obtenue ultérieurement par la méthode des éléments finis sera donc unique.

#### 4 Le cas $L = 1$ , $EI = 1$ , $q(x) = 0$ et $g = 1$

Dans le cas où il n'y a pas de charge qui agit sur la poutre, la fonction de charge  $q(x)$  est nulle. En considérant ce cas simple (avec  $EI = 1$  et  $g = 1$  pour simplifier d'avantage), le problème devient :

$$\begin{aligned} u'''' &= 0, \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ u &= 0, x = 0 \\ u' &= 0, x = 0 \\ u'' &= 0, x = 1 \\ -u''' &= 1, x = 1 \end{aligned}$$

Ce problème est illustré à la figure 2.



FIGURE 2 – Poutre fixée à l'extrémité pour le cas  $L = 1$ ,  $EI = 1$ ,  $q(x) = 0$  et  $g = 1$ .

#### 4.1 Solution exacte

Il est possible de trouver la solution de manière analytique :

De l'équation  $u'''' = 0$ , il est possible de déduire que  $u$  a la forme :

$$u(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Les valeurs des constantes sont déterminées en appliquant les conditions limites.

$$u(0) = 0 \Rightarrow A(0)^3 + B(0)^2 + C(0) + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$u'(0) = 0 \Rightarrow 3A(0)^2 + 2B(0) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u''(1) = 0 \Rightarrow 6A(1) + 2B = 0 \Rightarrow B = -3A$$

$$-u'''(1) = 1 \Rightarrow -6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, B = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la solution exacte du problème est :

$$u(x) = \frac{-x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$$

#### 4.2 Solution par éléments finis

##### 4.2.1 Problème éléments finis

Il est aussi possible de trouver la solution de ce problème par la méthode des éléments finis. Pour résoudre de cette manière, il faut d'abord appliquer la méthode de Galerkin pour trouver une approximation de  $u$  ( $\hat{u}$ ) dans un sous-espace de dimension finie  $\hat{V}$ . Puisque les fonctions  $\phi_i$  forment la base de  $\hat{V}$ ,  $\hat{u} = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j$  et le problème de la forme  $B(u, v) = F(v)$  devient  $\sum_{j=1}^N B(\phi_j, \phi_j) u_j = F(\phi_i)$ .

Dans le cas ci-présent, la formulation éléments finis du problème est donc :

$$\sum_{j=1}^N \int_0^1 \phi_j'' \phi_i'' dx u_j = \phi_i(1), i = 1, \dots, N$$

Ce problème peut s'écrire sous forme matricielle :

$$KU = F$$

où  $K$  est la matrice de rigidité dont les éléments sont définis par :

$$K_{i,j} = \int_0^1 \phi_j'' \phi_i'' dx$$

$U$  est le vecteur solution et  $F$  est la matrice de chargement dont les éléments sont définis par :

$$F = \phi_i(1)$$

C'est ce système matriciel qui sera résolu numériquement par la suite.

#### 4.2.2 Fonctions de base globales et fonctions de forme

Les fonctions de base globales  $\phi_i$  qui sont présentes dans le système d'équations sont déterminées à partir des fonctions de formes. Ces dernières sont obtenues en considérant la définition de l'élément fini qui est utilisé. Dans ce projet, c'est l'élément de Hermite cubique qui est utilisé. Cet élément est  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  où :

$$\begin{aligned} \hat{K} &= [-1, 1] \\ \hat{P} &= \mathbb{P}_3(\hat{K}) = \left\{ p(\xi) = \sum_{i=0}^3 a_i \xi^i, \forall \xi \in \hat{K}, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, 3 \right\} \\ \hat{\Sigma} &= \left\{ \hat{\sigma}_i : \hat{P} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4 \right\} \end{aligned}$$

Pour tout  $p \in \hat{P}$ , les degrés de liberté sont :

$$\hat{\sigma}_1 = p(-1) \quad \hat{\sigma}_2 = p(1) \quad \hat{\sigma}_3 = p'(-1) \quad \hat{\sigma}_4 = p'(1)$$

Puisque  $\hat{P} = \mathbb{P}_3(\hat{K})$ , les fonctions de forme  $\hat{\theta}_i(\xi)$  ont la forme suivante :

$$\hat{\theta}_i(\xi) = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3$$

et donc :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_j(\hat{\theta}_i) &= a_i \hat{\sigma}_j(1) + b_i \hat{\sigma}_j(\xi) + c_i \hat{\sigma}_j(\xi^2) + d_i \hat{\sigma}_j(\xi^3) \\ \hat{\sigma}_1(\hat{\theta}_i) &= a_i - b_i + c_i - d_i \\ \hat{\sigma}_2(\hat{\theta}_i) &= a_i + b_i + c_i + d_i \\ \hat{\sigma}_3(\hat{\theta}_i) &= b_i - 2c_i + 3d_i \\ \hat{\sigma}_4(\hat{\theta}_i) &= b_i + 2c_i + 3d_i \end{aligned}$$

Le système obtenu est alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de gauche a un déterminant non-nul. donc il est possible l'inverser pour trouver les valeurs des coefficients. La solution obtenue est :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Alors, les fonctions de forme sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1(\xi) &= \frac{2 - 3\xi + \xi^3}{4} \\ \hat{\theta}_2(\xi) &= \frac{2 + 3\xi - \xi^3}{4} \\ \hat{\theta}_3(\xi) &= \frac{1 - \xi - \xi^2 + \xi^3}{4} \\ \hat{\theta}_4(\xi) &= \frac{-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3}{4}\end{aligned}$$

Ces fonctions de forme sont représentées sur l'élément de référence à la figure 3.

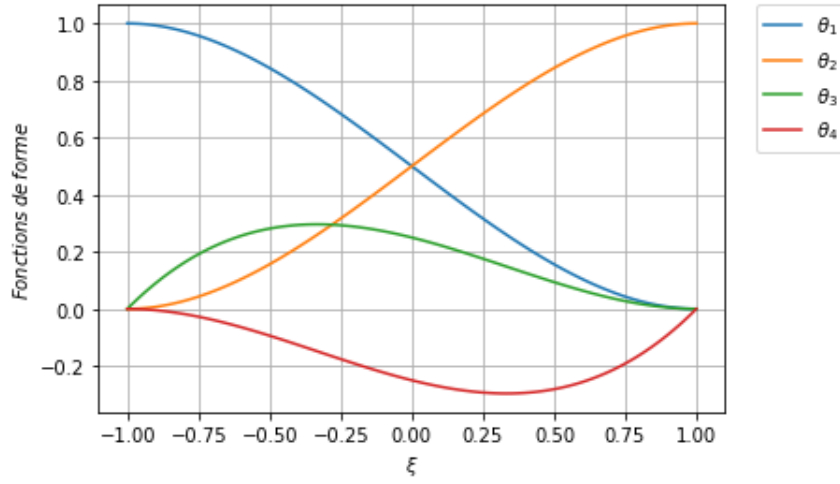


FIGURE 3 – Fonctions de forme sur l'élément de référence  $\hat{K}$

Les fonctions de bases globales sont définies de telle sorte que chaque élément contient toutes les fonctions de forme. De plus, elles respectent les conditions de continuité : elles sont continues et leurs dérivées sont continues (les dérivées doivent aussi être continues, puisque  $V = H^2$ ). Un exemple de fonctions de base globales définies sur trois éléments est illustré à la figure 4 présente dans la section 4.2.3.

Les dérivées secondes des fonctions de formes sont aussi utilisées pour la conception de la matrice de rigidité. Elles sont :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}'_1(\xi) &= \frac{3\xi}{2} \\ \hat{\theta}'_2(\xi) &= \frac{-3\xi}{2} \\ \hat{\theta}'_3(\xi) &= \frac{-1 + 3\xi}{2} \\ \hat{\theta}'_4(\xi) &= \frac{1 + 3\xi}{2}\end{aligned}$$

### 4.2.3 Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur de chargement

Le maillage est fait en utilisant 1 noeud pour chaque interface entre deux éléments du domaine, soit  $K_e = [x_{1,e}, x_{2,e}]$ . Les fonctions de base sont construites selon la continuité des fonctions de forme à l'interface de chaque élément. La continuité et la dérivabilité des fonctions de formes aux interfaces de chaque élément est alors définie de la manière suivante :

$$\theta_{1,e+1}(x_{1,e+1}) = \theta_{2,e}(x_{2,e})$$

$$\theta_{1,e}(x_{2,e}) = \theta_{2,e+1}(x_{1,e+1})$$

$$\theta_{3,e+1}(x_{1,e+1}) = \theta_{4,e}(x_{2,e})$$

$$\theta_{3,e}(x_{2,e}) = \theta_{4,e+1}(x_{1,e+1})$$

$$\theta'_{1,e+1}(x_{1,e+1}) = \theta'_{2,e}(x_{2,e})$$

$$\theta'_{1,e}(x_{2,e}) = \theta'_{2,e+1}(x_{1,e+1})$$

$$\theta'_{3,e+1}(x_{1,e+1}) = \theta'_{4,e}(x_{2,e})$$

$$\theta'_{3,e}(x_{2,e}) = \theta'_{4,e+1}(x_{1,e+1})$$

où  $e=1,2,3,\dots,N$  est le numéro de l'élément,  $x_{1,e}$  le noeud de l'interface gauche et  $x_{2,e}$  le noeud de l'interface de droite de l'élément. Pour faire l'assemblage, une matrice de connectivité représentant la répartition des fonctions de bases globales sur le domaine est utilisée. La matrice de connectivité pour 3 éléments est donc présentée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

On peut récupérer le numéro de la fonction de base globale par les composantes de la matrice où  $connect(e, i) = \text{numéro global de } \phi_i$ . chaque ligne représente l'élément  $K_e$  du domaine et chaque colonne la fonction de forme utilisée. La figure 4 suivante illustre les fonctions de bases sur un domaine constitué de 3 éléments pour l'élément fini de Hermite.

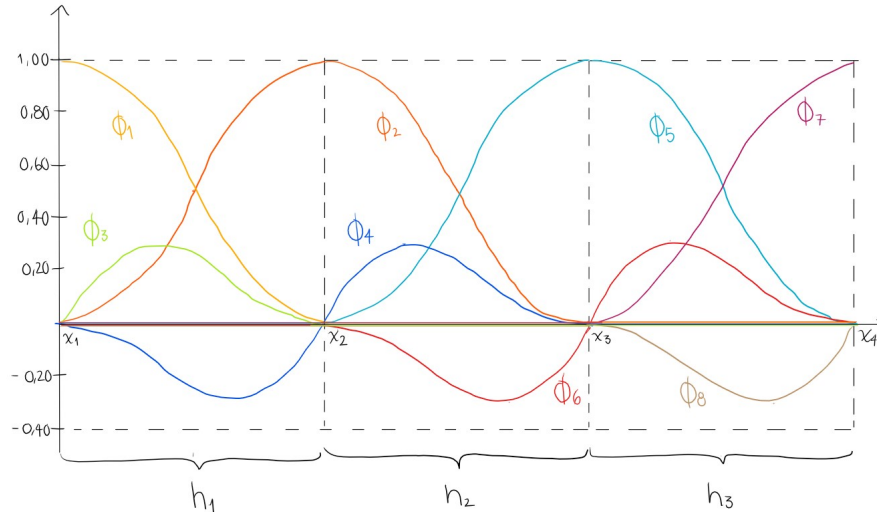


FIGURE 4 – Fonctions de base globales définies sur trois éléments

Une fois le maillage établi, il faut maintenant passer à l'élément de référence  $\hat{K} = [-1, 1]$  à partir de l'élément  $K_e = [x_{1,e}, x_{2,e}]$  en effectuant une transformation  $T_e$  telle que la fonction

d'interpolation  $\theta_i(x)$  pour  $i=1,2,3,4$  prend la même valeur que la fonction de forme  $\hat{\theta}_i$ , c'est-à-dire  $x = T_e(\xi)$ ,  $\forall \xi \in \hat{K}$ . Ce passage doit s'appliquer aux dérivées des fonctions de formes par une dérivation en chaîne de sorte qu'on arrive à :

$$\begin{aligned}\theta'_{i,e} &= \frac{2}{h_e} \hat{\theta}'_i \\ \theta''_{i,e} &= \frac{4}{h_e^2} \hat{\theta}''_i \\ x &= \frac{x_{1,e} + x_{2,e} + h_e \xi}{2} \\ dx &= \frac{h_e}{2} d\xi\end{aligned}$$

qui peut être aussi exprimé en fonction du jacobien étant donné que la taille  $h$  choisie pour chaque élément est pareil sur tout le domaine, soit :

$$\begin{aligned}\theta'_{i,e} &= \frac{1}{jac} \hat{\theta}'_i \\ \theta''_{i,e} &= \frac{1}{jac^2} \hat{\theta}''_i \\ dx &= jac d\xi\end{aligned}$$

où  $jac = \frac{h}{2}$ .

Ainsi, on obtient sur l'élément de référence

$$\begin{aligned}K_{i,j}^e &= \int_{x_{1,e}}^{x_{2,e}} \theta''_{j,e} \theta''_{i,e} dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{jac^2} \hat{\theta}''_j \frac{1}{jac^2} \hat{\theta}''_i jac d\xi \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_g} \omega_k \hat{\theta}_{kj}''(\xi) \hat{\theta}_i''(\xi_k) \frac{1}{jac^3}\end{aligned}$$

Pour le vecteur chargement, la seule composante non-nulle est l'avant-dernière, puisque  $F = \phi_i(1)$  et seule l'avant dernière fonction de base globales  $\phi_{n_{els}-1}$  est non-nulle pour  $x = 1$ .

Le nombre de points de gauss  $n_g$  minimal utilisé est de deux pour que la méthode de quadrature soit exacte. En effet, on a besoin de  $n$  points pour un polynôme de degré  $2n - 1$  (pour des polynôme de degré impair) pour que la méthode soit exacte donc deux points pour le polynôme est de degré 3 dans ce cas.

Finalement, le vecteur  $U$  doit respecter les deux conditions essentielles établies dans la définition de l'espace soit

$$\begin{aligned}u &= 0, x = 0 \\ u' &= 0, x = 0\end{aligned}$$

Pour garantir la condition de Dirichlet  $u = 0$  en  $x=0$ , c'est-à-dire que  $x_1 = 0$  sur le premier élément  $K_1$ , il faut imposer la première fonction de base globale  $\phi_1$  à être nulle sur celui-ci

puisque'elle est non-nulle à ce noeud. Ainsi,  $K_{1,j} = 0$  sauf  $K_{1,1} = 1$ . Pour respecter la condition  $u' = 0, x = 0$ , il faut imposer que la troisième fonction de base globale  $\phi_3$  soit nulle au noeud  $x_1 = 0$  du premier élément. En effet, la dérivée première de la troisième fonction de forme est non-nulle au noeud  $x_1$ . Donc,  $K_{3,j} = 0$  sauf  $K_{3,3} = 1$  pour assurer la condition essentielle.

Le code MatLab a été produit de façon à ce que ces configurations soient respectées. Il est contenu dans le dossier compressé intitulé "1D\_Code\_projet3".

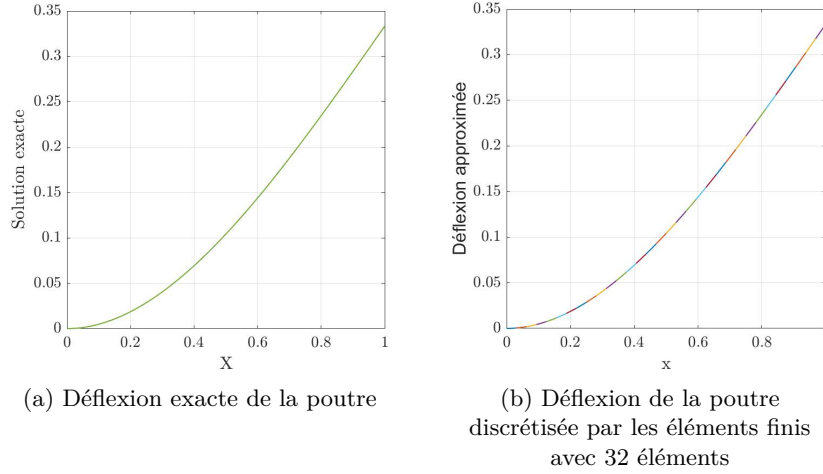


FIGURE 5 – Solution exacte et solution par éléments finis de la déflexion de la poutre lorsque  $EI = 1, L = 1, q(x) = 0$  et  $g = 1$

### 4.3 Validation du code et déflexion à l'extrémité libre de la poutre

Le code qui a été implémenter fonctionne correctement. En effet, on peut voir sur la figure 5 que la solution obtenue est identique à la solution exacte. De plus, la norme  $L^2$  et la semi-norme  $H^2$  de l'erreur sont nulles (en fait, elles ont des valeurs qui sont de l'ordre de  $10^{-11}$  et  $10^{-12}$ , donc elles sont approximativement nulles). La démarche pour calculer ces normes dans le code est montrée à la section 5.2.3.

Comme il est possible de le constater sur le graphique, la déflexion à l'extrémité libre de la poutre est de 0,3333 unités de longueurs dans ce premier cas.

## 5 Le cas $L = 1, EI = 1, q(x) = x$ et $g = 1$

Un autre cas possible est celui où une charge simple linéaire agit sur la poutre, avec la fonction de charge  $q(x) = x$ . En considérant ce cas simple (avec  $EI = 1$  et  $g = 1$  pour simplifier d'avantage), le problème devient :

$$\begin{aligned} u'''' &= x, \forall x \in \Omega = (0, 1) \\ u &= 0, x = 0 \\ u' &= 0, x = 0 \\ u'' &= 0, x = 1 \\ -u''' &= 1, x = 1 \end{aligned}$$

Ce problème est illustré à la figure 6.

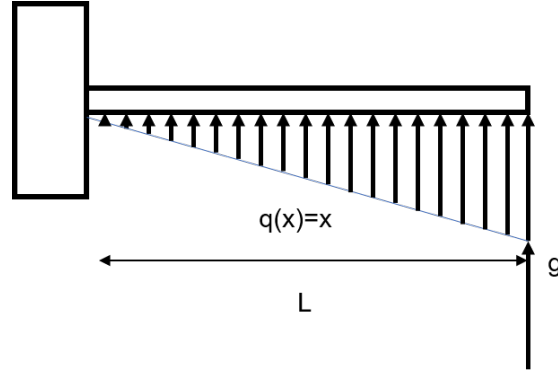


FIGURE 6 – Poutre fixée à l'extrémité pour le cas  $L = 1$ ,  $EI = 1$ ,  $q(x) = x$  et  $g = 1$ .

### 5.1 Solution exacte

Il est possible de trouver la solution de manière analytique. Pour ce faire, le changement de variable ci-dessous est utilisé :

$$\begin{aligned}x_1 &= u(x) \Rightarrow x'_1 = u'(x) \\x_2 &= u'(x) \Rightarrow x'_2 = u''(x) = x_3 \\x_3 &= u''(x) \Rightarrow x'_3 = u'''(x) = x_4 \\x_4 &= u'''(x) \Rightarrow x'_4 = u''''(x) = x\end{aligned}$$

En intégrant chacune des dérivées premières et en utilisant les conditions frontières, la solution est obtenue :

$$\begin{aligned}\int x'_4 dx &= \int x dx \Rightarrow x_4 = \frac{x^2}{2} + A \Rightarrow \\-x_4(1) &= 1 \Rightarrow \frac{1^2}{2} + A = -1 \Rightarrow A = -\frac{3}{2} \\ \int x'_3 dx &= \int \left( \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \right) dx \Rightarrow x_3 = \frac{x^3}{6} - \frac{3x}{2} + B \\x_3(1) &= 0 \Rightarrow x_3 = \frac{(1)^3}{6} - \frac{3(1)}{2} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{4}{3} \\ \int x'_2 dx &= \int \left( \frac{x^3}{6} - \frac{3x}{2} + \frac{4}{3} \right) dx \Rightarrow x_2 = \frac{x^4}{24} - \frac{3x^2}{4} + \frac{4x}{3} + C \\x_2(0) &= 0 \Rightarrow \frac{(0)^4}{24} - \frac{3(0)^2}{4} + \frac{4(0)}{3} + C = 0 \Rightarrow C = 0 \\ \int x'_1 dx &= \int \left( \frac{x^4}{24} - \frac{3x^2}{4} + \frac{4x}{3} \right) dx \Rightarrow x_1 = \frac{x^5}{120} - \frac{3x^3}{12} + \frac{4x^2}{6} + D \\x_1(0) &= 0 \Rightarrow \frac{(0)^5}{120} - \frac{3(0)^3}{12} + \frac{4(0)^2}{6} + D = 0 \Rightarrow D = 0\end{aligned}$$

Cette solution est donc :

$$u(x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{4} + \frac{2x^2}{3}$$

## 5.2 Solution par éléments finis

### 5.2.1 Problème éléments finis

Il est aussi possible de trouver la solution de ce problème par la méthode des éléments finis. Pour résoudre de cette manière, il faut d'abord appliquer la méthode de Galerkin pour trouver une approximation de  $u$  ( $\hat{u}$ ) dans un sous-espace de dimension finie  $\hat{V}$ . Puisque les fonctions  $\phi_i$  forment une base la base de  $\hat{V}$ ,  $\hat{u} = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j$  et le problème de la forme  $B(u, v) = F(v)$  devient  $\sum_{j=1}^N B(\phi_j, \phi_j) = F(\phi_i)$ .

Dans le cas ci-présent, la formulation éléments finis du problème est donc :

$$\sum_{j=1}^N \int_0^1 \phi_j'' \phi_i'' dx u_j = \int_0^1 x \phi_i dx + \phi_i(1), i = 1, \dots, N$$

Ce problème peut s'écrire sous forme matricielle :

$$KU = F$$

où  $K$  est la matrice de rigidité dont les éléments sont définis par :

$$K_{ij} = \int_0^1 \phi_j'' \phi_i'' dx$$

$U$  est le vecteur solution et  $F$  est la matrice de chargement dont les éléments sont définis par :

$$F_i = \int_0^1 x \phi_i dx + \phi_i(1)$$

C'est ce système matriciel qui sera résolu numériquement par la suite.

### 5.2.2 Solution numérique

Les fonctions de formes et fonctions de base globales utilisées pour résoudre ce cas sont les mêmes que celle de la section 4, puisque c'est le même élément finis qui est utilisé (élément fini cubique de Hermite). Les éléments  $K_{ij}$  sont aussi les mêmes que ceux obtenus dans la section 4. Cependant, le vecteur chargement  $F$  est légèrement différent que celui de la section précédent. Le passage à l'élément de référence est effectué comme suit :

$$\begin{aligned} F_i^e &= \int_{x_{1,e}}^{x_{2,e}} x \theta_{i,e} dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{x_{1,e} + x_{2,e} + h\xi}{2} \hat{\theta}_{i,jacd} d\xi \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_g} \omega_k x_k \hat{\theta}_i(\xi_k) j_{ac} \end{aligned}$$

où  $x_{1,e}$  est le noeud à la frontière de gauche de l'élément  $e$  et  $x_{2,e}$  est le noeud à la frontière de droite de l'élément  $e$ .

De plus, puisque la deuxième fonction de forme du dernier élément est non nulle à la frontière droite de l'élément (en  $x=L$ ), on additionne celle-ci à la dernière composante du vecteur chargement  $F$ . De cette manière, la continuité de la solution est assurée.

$$F_i^e = F_i^e + 1$$

L'application des conditions limites est la même que dans le cas précédent.

La solution est trouvée numériquement avec le code contenue dans le dossier compressé intitulé "1D\_Code\_projet3".

### 5.2.3 Estimation du taux de convergence

Les différentes valeurs de

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{\|e_k\|}{\|e_{k+1}\|}\right)}{\log(2)}$$

sont calculées par rapport à la semi-norme  $H^2$  qui est illustrée sur figure 7 (soit  $\|e\| = \|u_{exacte} - u_h\|_{H^2} = \|u_{exacte}'' - u_h''\|$ ) en faisant varier le maillage de telle sorte que  $h_{k+1} = \frac{h_k}{2}$ . Les valeurs obtenus sont présentées dans le tableau 1

h	$\log\ u'' - u_h''\ $	$\alpha$
1/4	-6.61871	1.96793
1/8	-7.99960	1.99220
1/16	-9.38456	1.99806
1/32	-10.77052	1.99952

Tableau 1 – Valeurs de  $\alpha$  obtenues en faisant varier le maillage

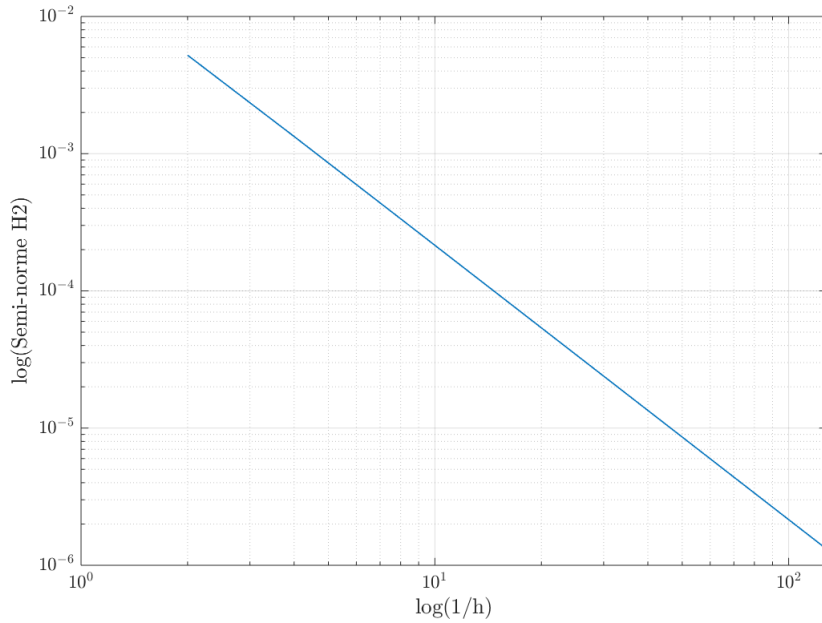


FIGURE 7 – Semi-norme  $H^2$  de l'erreur par rapport au nombre d'éléments.

Les valeurs de  $\alpha$  convergent vers 2, qui est le taux de convergence par rapport à la semi-norme  $H^2$ . Il est à noter qu'ici le taux de convergence pourrait être amélioré en utilisant des polynômes de degré plus élevés pour les fonctions de formes. En effet, la solution  $u(x)$  est un polynôme, donc la résolution de celle-ci est infinie ( $s = \infty$ ). Alors, le taux de convergence par rapport à la norme  $H^1$  est  $p$ , puisqu'il est donné par  $\beta = \min(p, r)$  (avec  $r = s-1$  qui est très grand dans ce cas, donc  $\beta = p$  qui est le degré des polynômes utilisés). Augmenter le degré des polynôme augmenterait donc le taux de convergence. Par ailleurs, le taux de convergence par rapport à la semi-norme  $H^2$  est égal au taux de convergence par rapport à la norme  $H^1$  moins 1, ce qui est bel et bien le cas ici.

La norme  $L^2$  et la semi-norme  $H^2$  a été implémentée dans le code en respectant la démarche suivante :

$$\begin{aligned}\|e\|_{L^2}^2 &= \|u - u_h\|_{L^2}^2 \\ &= \int_0^1 (u(x) - u_h(x))^2 dx \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \int_{-1}^{+1} (u(\xi) - u_h(\xi))^2 jac d\xi \\ &\approx \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{n_g} \omega_g (u(\xi_g) - u_h(\xi_g))^2 jac\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|e|_{H^2}^2 &= \|u'' - u_h''\|_{L^2}^2 \\ &= \int_0^1 (u''(x) - u_h''(x))^2 dx \\ &= \sum_{e=1}^{N_e} \int_{-1}^{+1} (u''(\xi) - \frac{1}{jac^2} u_h''(\xi))^2 jac d\xi \\ &\approx \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{n_g} \omega_g (u''(\xi_g) - \frac{1}{jac^2} u_h''(\xi_g))^2 jac\end{aligned}$$

On utilise au minimum 3 points de Gauss pour calculer les normes dans le cas où  $q(x) = x$ , puisque la solution exacte trouvée est un polynôme de degré 5, ce qui veut dire qu'il faut au moins 3 points de gauss pour que la quadrature de Gauss soit exacte.

#### 5.2.4 Valeur de la déflexion à l'extrémité libre de la poutre

La solution obtenue dans ce cas avec 32 éléments est présentée à la figure 8. Cette solution est similaire à celle trouvée dans le cas précédent : elle a la même allure. Cependant, la déflexion est plus grande dans ce cas. Comme il est possible de le constater sur la figure, la déflexion à l'extrémité libre de la poutre est de 0,4250 unités de longueur. Ainsi, la déflexion à l'extrémité libre de la poutre est supérieure au cas précédent d'environ 0,092 unités de longueur dans ce cas.



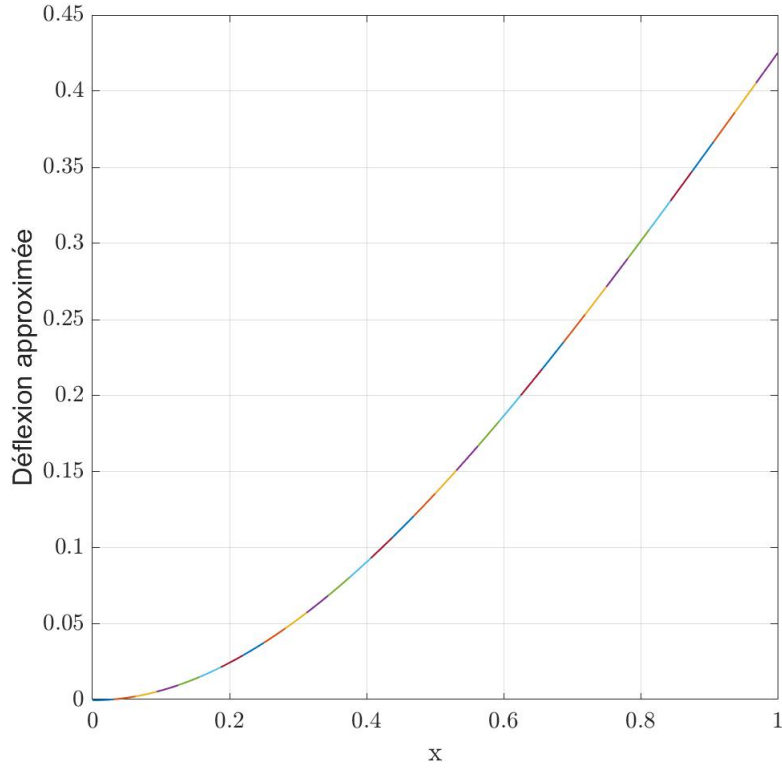


FIGURE 8 – Déflexion de la poutre discrétisée par éléments finis avec 32 éléments lorsque  $EI = 1$ ,  $L = 1$ ,  $q(x) = x$  et  $g = 1$

## 6 Méthode alternative pour la résolution du problème

La méthode utilisée dans ce projet n'est pas la seule qui peut être employée pour trouver la solution au problème. Par exemple, un autre moyen de procéder pour la résolution de l'EDO est d'introduire une nouvelle variable  $v = EIu''$ . Dans ce cas, au lieu de résoudre une équation d'ordre 4, il faut résoudre 2 équations d'ordre 2. Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} v &= EIu'' \\ (EIu'')'' &= q \Rightarrow v'' = q \end{aligned}$$

De plus, les conditions limites deviennent alors :

$$\begin{aligned} u &= 0, x = 0 \\ u' &= 0, x = 0 \\ EIu'' &= 0, x = L \Rightarrow v = 0, x = L \\ (-EIu'')' &= g, x = L \Rightarrow -v' = g, x = L \end{aligned}$$

Ainsi, le premier problème à résoudre est

$$\begin{aligned} EIu' &= v \\ u &= 0, x = 0 \\ u' &= 0, x = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Le deuxième problème à résoudre est

$$\begin{aligned} v'' &= q \\ v &= 0, x = L \\ v' &= -g, x = L \end{aligned} \tag{2}$$

La formulation faible associée au problème 1 (voir Annexe 1 pour la démarche utilisée pour trouver celle-ci) est :  
Trouver  $u \in U$  telle que

$$\begin{aligned} \int_0^L (-EIu')f' dx &= \int_0^L v f dx \\ U &= \{u \in H^1; u(0) = 0\} \\ F &= \{f \in H^1; f(L) = 0\} \end{aligned}$$

La formulation faible associée au problème 2 (voir Annexe 1 pour la démarche utilisée pour trouver celle-ci) est :  
Trouver  $v \in V$  telle que

$$\begin{aligned} \int_0^L v' h' dx &= \int_0^L q h dx + g h(L) \\ V &= \{v \in H^1; v(L) = 0, v(0) = 0\} \\ H &= \{h \in H^1; h(0) = 0\} \end{aligned}$$

Pour résoudre avec la méthode des éléments finis, l'approximation de Galerkin doit être utilisée pour discrétiser les fonctions ( $u, v, f$  et  $h$ ). Cette approximation ne peut être réalisée que dans le cas où les espaces sont identiques (donc si  $U = F$  et  $V = H$ ). Or, ces espaces ne sont pas identiques dans le cas qui est étudié. Ceci est dû au fait que les deux conditions limites sont en  $x = 0$  pour le problème 1 et que les deux conditions limites sont en  $x = L$  pour le problème 2. Ainsi, il est impossible d'utiliser l'approximation de Galerkin dans ce cas, ce qui veut dire que les fonctions ne peuvent pas être discrétisées et donc que la méthode des éléments finis ne peut pas être utilisée pour résoudre le problème. Cependant, d'autres méthodes (la méthode analytique si  $q(x)$  est assez simple, par exemple) peuvent être utilisées pour résoudre le système de deux équations.

## 7 Conclusion

Pour conclure, une poutre en porte-à-faux peut être modélisée par la méthode des éléments finis. Deux cas ont été étudiés dans ce projet, soit le cas où il n'y a qu'un chargement appliqué à l'extrémité libre de la poutre et un autre cas avec une charge additionnelle répartie linéairement sur la poutre de longueur équivalente à 1 unité. Le moment d'inertie et le module d'élasticité sont équivalents à 1 aussi. Les solutions analytiques sont trouvées et comparées avec les solutions trouvées par l'approche de Galerkin. L'élément fini d'Hermite cubique est employé et implémenté dans le code MatLab dans le dossier compressé intitulé "1D\_Code\_projet3". À l'extrémité libre de la poutre, la déflexion trouvée pour le premier cas est de 0,3333 unités de longueur avec une norme  $L^2$  et semi-norme  $H^2$  équivalentes à environ  $1 \times 10^{-11}$  et  $1 \times 10^{-12}$  respectivement, qui sont très près de zéro, ce qui valide l'implémentation du code. Pour le deuxième cas, on trouve une déflexion à l'extrémité libre de 0,4250 unités de longueurs. Le taux de convergence par rapport à la norme  $L^2$  et la semi-norme  $H^2$  trouvées sont de 4 et 2 respectivement. Si une nouvelle variable  $v = EIu''$  est introduite, un système de 2 équations d'ordre 2 est obtenu. Par contre, en gardant les conditions limites du problème initial, il est impossible d'utiliser la méthode des éléments finis pour calculer les approximations puisque l'espace de l'équation d'ordre 4 et celui d'ordre 2 ne sont pas similaires.

## Annexe 1 - Démarches pour obtenir les formulations faibles des deux équations considérées dans la section 6

Pour trouver la formulation faible du problème 1, il faut d'abord multiplier par une fonction test arbitraire  $f$ , puis intégrer sur le domaine :

$$\begin{aligned} \int_0^L EI u'' f dx &= \int_0^L v f dx \\ \Rightarrow \int_0^L -EI u' f' dx + [EI u' f]_0^L &= \int_0^L v f dx \\ \Rightarrow \int_0^L -EI u' f' dx + EI u'(L) f(L) - EI u'(0) f(0) &= \int_0^L v f dx \end{aligned}$$

En appliquant la condition limite  $u'(0) = 0$  l'équation devient :

$$\int_0^L -EI u' f' dx + EI u'(L) f(L) = \int_0^L v f dx$$

Alors, puisque  $u'(L)$  n'est pas nécessairement définie (car  $u \in H^1$ ), la fonction test  $f$  est choisi de telle sorte que  $f(L) = 0$ . De cette manière,  $u'(L)$  n'apparaît pas dans l'équation. Cette dernière devient alors :

$$\int_0^L -EI u' f' dx = \int_0^L v f dx$$

Cette forme est la formulation faible du problème 1.

Le choix des espaces est fait de telle sorte que les intégrales soient définies :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L -EI u' f' dx \right| &\leq EI \|u'\|_{L^2} \|f'\|_{L^2} \leq EI \|u\|_{H^1} \|f\|_{H^1} \\ \left| \int_0^L v f dx \right| &\leq \|v\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} \|f\|_{H^1} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont donc prises dans  $H^1$  :

$$\begin{aligned} U &= \{u \in H^1(\Omega) : u(0) = 0\} \\ F &= \{f \in H^1(\Omega) : f(L) = 0\} \end{aligned}$$

Pour trouver la formulation faible du problème 2, il faut d'abord multiplier par une fonction test arbitraire  $h$ , puis intégrer sur le domaine :

$$\begin{aligned} \int_0^L v'' h dx &= \int_0^L q h dx \\ \Rightarrow \int_0^L -v' h' dx + [v' h]_0^L &= \int_0^L q h dx \\ \Rightarrow \int_0^L -v' h' dx + v'(L) h(L) - v'(0) h(0) &= \int_0^L q h dx \end{aligned}$$

En appliquant la condition limite  $v'(L) = -g$  l'équation devient :

$$\int_0^L -v' f' dx + v'(0)f(0) = \int_0^L qh dx + gf(L)$$

Alors, puisque  $v'(0)$  n'est pas nécessairement définie (car  $v \in H^1$ ), la fonction test  $h$  est choisi de telle sorte que  $h(0) = 0$ . De cette manière,  $v'(0)$  n'apparaît pas dans l'équation. Cette dernière devient alors :

$$\int_0^L -v' h' dx = \int_0^L qh dx + gf(L)$$

Cette forme est la formulation faible du problème 2.

Le choix des espaces est fait de telle sorte que les intégrales soient définies :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L -v' h' dx \right| &\leq \|v'\|_{L^2} \|h'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1} \|h\|_{H^1} \\ \left| \int_0^L qh dx \right| &\leq \|q\|_{L^2} \|h\|_{L^2} \leq \|q\|_{L^2} \|h\|_{H^1} \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont donc prises dans  $H^1$  :

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega) : v(L) = 0\} \\ H &= \{h \in H^1(\Omega) : h(0) = 0\} \end{aligned}$$