Devoir : Couches limites laminaires

Date de remise : 22 décembre 2021

Consignes pour le code et le rapport

- Déposer sur Moodle un dossier compressé (.zip ou autre) contenant votre **rapport** et l'ensemble des **codes** que vous avez écrits pour réaliser le devoir.
- Vous pouvez utiliser le langage de programmation de votre choix : si vous utilisez un langage interprété comme Matlab ou Python, déposez uniquement le code source prêt à être roulé, si vous utilisez un langage compilé, incluez en plus les instructions pour la compilation (par exemple sous la forme d'un CMakeLists) et les éventuelles dépendances.
- Inclure quelques commentaires pour faciliter la lecture du code
- Aller à l'essentiel lors de la rédaction de votre rapport, en particulier :
  - il n'est pas nécessaire d'inclure une page de garde : indiquer simplement au début du rapport le titre du cours et du devoir, la date, ainsi que votre nom et matricule
  - il n'est pas nécessaire d'inclure de table des matières ou des figures, ni de logo
  - ne pas recopier les énoncés des questions du devoir dans le rapport
- Pour les graphes :
  - montrer les graphes dans le rapport : pas de "Voir code Matlab" ou "Voir code"
  - les graphes doivent contenir des **axes nommés**, un **titre**, et une **légende de taille raisonnable** si plusieurs courbes sont montrées sur le même graphe
  - montrer uniquement les régions pertinentes et avec une échelle adéquate
  - éviter les printscreens si possible : exporter le graphe (en `png`, `eps`, etc.) et l'importer dans le rapport
- Exporter votre rapport en **PDF**, sinon la mise en page et/ou les caractères spéciaux risquent de se perdre à l'ouverture sur une autre plateforme
- La rédaction en LaTeX est conseillée, mais pas obligatoire
- Mentionner vos sources éventuelles à la fin du rapport

Plagiat

Il s'agit d'un travail individuel. La collaboration est autorisée dans la mesure du raisonnable, mais doit être mentionnée dans le code et/ou le rapport. Vous pouvez discuter de vos réponses, mais chacun est responsable de l'écriture de son propre rapport et de son propre code. Si des ressemblances frappantes sont observées dans le rapport et/ou dans le code soumis sans mention d'une collaboration, celles-ci seront assimilées à du plagiat et traitées comme telles.

Important

Dans plusieurs questions, des valeurs chiffrées sont demandées avec 8 chiffres significatifs, soit les 8 premiers chiffres de la mantisse a dans la notation scientifique $x = \pm a \times 10^n$. Il faut s'assurer que les valeurs aient convergé et que ces chiffres ne varient plus en fonction par exemple du pas spatial h (donc du nombre d'intervalles de discrétisation) ou du nombre de points de quadrature (donc du degré spécifié pour le calcul des points et poids).

1 Couche limite de vitesse

Dans un repère orthonormé $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$, on considère un écoulement externe stationnaire et incompressible à vitesse $u_e(x)$ autour d'une plaque plane semi-infinie et alignée avec l'axe des abscisses positives. Le bord d'attaque est situé en $x = 0$. Le fluide considéré est de l'eau, dont les propriétés physiques sont les suivantes :

ρ	$1 \times 10^3\ kg/m^3$
μ	$1 \times 10^{-3}\ Pa\,s$
ν	$1 \times 10^{-6}\ m^2/s$

Comme le fluide est visqueux, la condition de non-glissement à la paroi $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ doit être respectée, et une couche limite de vitesse se forme au-dessus de la plaque afin d'effectuer la transition de $u = 0$ en $y = 0$ à $u = u_e$ loin de la paroi. On désigne par $\delta(x)$ l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite de vitesse. À l'extérieur de la couche limite, l'écoulement est considéré irrotationnel et est modélisé par l'équation d'Euler :

$$u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx},$$

avec $p_e(x)$ la pression à l'extérieur de la couche limite. Dans la couche limite, on utilise les équations de Prandtl :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2ex] u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp_e}{dx} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

1. *Quelle hypothèse fondamentale doit-on appliquer pour obtenir les équations de Prandtl dans la couche limite à partir des équations de Navier-Stokes ? Cette hypothèse est-elle vérifiée partout ?*

On considère d'abord un écoulement externe à vitesse constante $u_e(x) = U$, avec $U = 0.1\,m/s$. En définissant la variable de similitude $\eta(x, y)$ et la fonction de courant $\psi(x, y)$ par

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\sqrt{\dfrac{2\nu x}{U}}} \qquad \text{et} \qquad \psi(x, y) = U\,\delta(x)\,f(\eta(x, y)),$$

la vitesse horizontale s'écrit $u(x, y) = u(\eta) = U\,f'(\eta)$ et nous avons montré que l'équation de quantité de mouvement en x pouvait se réécrire comme une équation différentielle ordinaire en $f(\eta)$, la fonction de similitude inconnue :

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0, \tag{1}$$

avec les conditions limites

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad \lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = 1. \tag{2}$$

Cette équation peut être résolue numériquement en l'exprimant comme un système de 3 équations différentielles d'ordre 1. En définissant les fonctions intermédiaires $f_0 = f(\eta)$, $f_1 = f'(\eta)$ et $f_2 = f''(\eta)$, on peut réécrire l'équation d'ordre 3 sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} f_0'(\eta) = f_1(\eta) \\ f_1'(\eta) = f_2(\eta) \\ f_2'(\eta) = -f_0(\eta)f_2(\eta) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{f}'(\eta) = \boldsymbol{F}(\eta, \boldsymbol{f}(\eta)) \quad \text{avec } \boldsymbol{f}(\eta) = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{F}(\eta, \boldsymbol{f}(\eta)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -f_0 f_2 \end{pmatrix}.$$

On demande ici d'intégrer le système d'équations différentielles ordinaires $\boldsymbol{f}'(\eta) = \boldsymbol{F}(\eta, \boldsymbol{f}(\eta))$ à l'aide d'une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2 ou méthode de Heun) définie comme suit :

$$\boldsymbol{f}_{i+1} = \boldsymbol{f}_i + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2\right),$$

avec

$$\boldsymbol{k}_1 = h\,\boldsymbol{F}(\eta_i, \boldsymbol{f}_i),$$

$$\boldsymbol{k}_2 = h\,\boldsymbol{F}\left(\eta_i + h, \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{k}_1\right),$$

avec la notation $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}(\eta_i)$. L'ordonnée adimensionnelle η discrétisée est notée η_i, avec $\eta_i = \eta_0 + ih$, où h désigne le pas spatial (subdivision de l'intervalle) choisi pour l'intégration. Les EDO doivent être intégrées à partir de la paroi, donc l'ordonnée initiale est $\eta_0 = 0$, jusqu'à une distance suffisamment éloignée que pour pouvoir considérer que $\eta \to \infty$: en pratique, intégrer jusque $\eta = 6$, donc jusque $y = 6\delta(x)$, est suffisant. On propose de choisir $h = 0.01$ pour discrétiser l'axe des ordonnées adimensionnelles : cette valeur peut être diminuée si des problèmes de convergence apparaissent.

La méthode d'intégration est explicite, c'est-à-dire que seules les valeurs de $\boldsymbol{f}$ au point η_i sont nécessaires pour calculer $\boldsymbol{f}$ au point η_{i+1} : les deux conditions initiales sur f_0 et f_1 sont donc facilement prises en compte, puisqu'elle peuvent être imposées initialement et ne seront pas modifiées. La condition à l'infini sur f_1 est plus délicate à imposer : en pratique on utilise une méthode de bissection qui consiste à choisir une condition initiale pour f_2, intégrer le système jusqu'à $\eta = 6$, puis vérifier que $f_1(\eta = 6) - 1$ soit proche de 0. Si ce n'est pas le cas, la condition initiale est modifiée de manière itérative jusqu'à ce que la condition soit satisfaite, à une certaine tolérance près. Cette utilisation conjointe d'une méthode d'intégration d'EDO (ici, la méthode de Heun) et d'une méthode de résolution d'équation non-linéaire (ici, la méthode de bissection) est appelée *méthode du tir.* La bissection se programme comme suit :

- Choisir un encadrement initial $[a, b]$ dans lequel la condition initiale inconnue $f_2(0)$ est susceptible de se trouver. Pour ce problème, on peut prendre $[0, 2]$.
- Pour les conditions initiales définies par les deux bornes a et b, évaluer la fonction

  $$g = f_1(\eta = 6) - 1.$$

  Si $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés, alors la fonction g admet bien une racine dans $[a, b]$. On évalue alors g au point milieu $x = a + (b - a)/2$. Si $g(a)$ et $g(x)$ sont du même signe, la racine se trouve dans $[x, b]$, et on peut recommencer la procédure avec $a \leftarrow x$ (assignation). Sinon, la racine se trouve dans $[a, x]$ et on recommence avec $b \leftarrow x$.
- On continue de réduire l'intervalle jusqu'à ce que sa longueur devienne inférieure ou égale à une tolérance `tol` , ou jusqu'à ce qu'un nombre `nmax` d'itérations soit atteint. La valeur finale de x est la condition initiale cherchée pour f_2.

2. *Résoudre numériquement l'équation différentielle ordinaire* (1) *sujette aux conditions limites* (2)*. Donner avec 8 chiffres significatifs la valeur de $f''(0)$ permettant de satisfaire la condition limite à l'infini.*
   Important *: on demande que vous implémentiez vous-mêmes la méthode de Runge-Kutta. Il n'est dont pas autorisé d'utiliser par exemple la fonction `ode23` dans Matlab, les fonctions `ode` ou `odeint` de Scipy/Numpy, ou toute autre fonction qui se chargerait d'intégrer le système d'équation pour vous.*
3. *Sur quatre graphes indépendants, représenter pour $\eta \in [0, 6]$ les quantités adimensionnelles*

$$f(\eta), \qquad \frac{u(\eta)}{U}, \qquad \frac{v(\eta)}{U\delta'(x)} \qquad et \qquad \tau(\eta)\,\frac{\delta(x)}{\mu U}.$$

4. *Commenter brièvement les graphes obtenus. Qu'est-ce qui vous permet d'affirmer que les quantités physiques obtenues sont cohérentes ? En particulier, comment se comportent-elles (a) à la paroi et (b) loin de la paroi, lorsque $\eta \to \infty$?*
5. *À partir des graphes obtenus, montrer que l'ordre de grandeur $\delta(x)$ utilisé pour rendre l'ordonnée y adimensionnelle est bien adéquat pour analyser la couche limite. Peut-on affirmer que la couche limite se termine en $y = \delta(x)$?*
6. *En supposant valide le modèle de la couche limite laminaire à partir du bord d'attaque, calculer la valeur numérique de la force de traînée* $\mathbf{D}$ *exercée par le fluide sur la section de la plaque plane s'étendant du bord d'attaque jusqu'à $x = 2\,m$ pour une largeur unitaire.*
7. *En pratique cependant, on observe l'apparition d'instabilités dans la couche limite laminaire à partir de $Re_x \approx 54\,000$, où $Re_x = Ux/\nu$ est le nombre de Reynolds basé sur la distance au bord d'attaque. Avec cette valeur du Reynolds critique, jusqu'à quelle distance x_c devrait-on considérer le modèle de la couche laminaire comme valide ?*
8. *Comparer la valeur de la force de traînée obtenue à la question 6 avec celle obtenue en utilisant la corrélation suivante pour le coefficient de frottement moyen, valable en couche limite turbulente :*
$$C_D = C_{f,m} = 0.0316\, Re_x^{-1/7}.$$
9. *Représenter sur un même graphe la vitesse horizontale adimensionnelle et les intégrandes apparaissant dans les épaisseurs de déplacement δ_* et de quantité de mouvement θ :*
$$\frac{u(\eta)}{U}, \qquad \left(1 - \frac{u(\eta)}{U}\right), \qquad \frac{u(\eta)}{U}\left(1 - \frac{u(\eta)}{U}\right).$$
10. *Calculer numériquement les valeurs de δ_*/δ et de θ/δ et les donner avec 8 chiffres significatifs :*
$$\frac{\delta_*}{\delta} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(\eta)}{U}\right)\, d\eta$$
$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^\infty \frac{u(\eta)}{U}\left(1 - \frac{u(\eta)}{U}\right)\, d\eta$$

Les intégrales ci-dessus peuvent être calculées numériquement par une méthode de quadrature de Gauss-Legendre :
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i\, f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right),$$
où f est une fonction quelconque de x (pas la fonction de Blasius) et les n points x_i et poids w_i de quadrature sont obtenus à partir des polynômes de Legendre[1]. Pour intégrer précisément les fonctions demandées, 20 points devraient être suffisants : augmenter au besoin jusqu'à convergence de l'intégrale obtenue. De nouveau, $\eta = 6$ est une bonne approximation de $\eta \to \infty$ pour la borne d'intégration. Afin d'intégrer la fonction de Blasius $f(\eta)$, celle-ci doit être évaluée aux points d'intégration x_i qui ne correspondent généralement pas aux points de discrétisation η_i où la fonction est connue : une simple interpolation linéaire[2] permet d'évaluer f aux abscisses x_i.

On considère à présent le cas d'un écoulement externe dont la vitesse est donnée par $u_e(x) = Cx^m$, avec C et m des constantes. Ce modèle permet de tenir compte d'une variation de pression en

[1] Les points x_i doivent être donnés dans l'intervalle canonique $[-1, 1]$ afin d'être tranformés vers l'intervalle d'intégration $[a, b]$. En Matlab, ceux-ci peuvent être calculés par la fonction `lgwt` dans le fichier `lgwt.m` fourni sur Moodle, en précisant l'intervalle avec `lgwt(deg,-1,1)`. En Python, la fonction `leggauss(deg)`, dans `numpy.polynomial.legendre`, fournit directement les points dans $[-1, 1]$. Pour d'autres langages, les points dans $[-1, 1]$ et les poids sont directement accessibles ici : `https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html`

[2] En Matlab, la fonction `interp1` permet d'interpoler linéairement une fonction connue en certains points seulement. En Python, la fonction `interp1d` dans `scipy.interpolate` retourne une fonction qui peut être appelée en n'importe quel point dans l'intervalle de définition de f. En Scilab, la fonction `interpln` retourne un vecteur de valeurs interpolées.

fonction de x : une valeur positive de m correspond à un gradient de pression favorable (négatif), alors que $m < 0$ correspond à un gradient de pression défavorable, qui peut résulter en un décollement de la couche limite si celui-ci devient trop important. Le décollement s'accompagne d'une augmentation de la force de traînée de pression, et est donc généralement à éviter. Avec un choix adéquat de variable de similitude η, on peut montrer que l'équation de quantité de mouvement en x se réduit à l'équation différentielle en $f(\eta)$ suivante :

$$f''' + ff'' + \beta\left(1 - (f')^2\right) = 0, \tag{3}$$

avec $\beta = \frac{2m}{m+1}$. On observe immédiatement que le cas $m = \beta = 0$ se réduit au problème de Blasius traité précédemment. Le paramètre β contrôle l'évolution de la fonction $f(\eta)$, et donc également de ses dérivées. En particulier, il existe une valeur $\beta_0 \in [-1, 0]$ telle que le cisaillement à la paroi $\tau(0) \sim f''(0)$ s'annule : cela signifie que le gradient de pression adverse est suffisant que pour décoller la couche limite. On s'intéresse ici aux valeurs de β dans l'intervalle $[\beta_0, 0.6]$, avec β_0 à déterminer.

11. *Adapter votre fonction programmée précédemment afin d'intégrer numériquement l'équation* (3). *Celle-ci est également sujette aux conditions limites* (2). *Déterminer la valeur de β_0 telle que $f''(0) \leq 0.01$, correspondant au décollement de la couche limite.*
    Indication *: la bissection risque de ne pas converger pour $\beta < \beta_0$: il est donc conseillé d'approcher β_0 "par la droite" (c'est-à-dire par des valeurs $\beta > \beta_0$).*
12. *Représenter sur un même graphe les profils adimensionnels*

$$\frac{u(\eta)}{u_e(x)} \quad \text{et} \quad \tau(\eta)\frac{\delta(x)}{\mu u_e(x)}$$

pour 10 valeurs de β uniformément espacée dans $[\beta_0, 0.6]$ et pour $\eta \in [0, 6]$. Identifier sur ce graphe les profils correspondant à la solution de Blasius. Commenter brièvement les résultats obtenus.

13. *Tracer l'évolution de la contrainte de cisaillement adimensionnelle à la paroi*

$$\tau(0)\frac{\delta(x)}{\mu u_e(x)} = f''(0)$$

en fonction de β pour $\beta \in [\beta_0, 0.6]$. Commenter brièvement.

2 Couche limite thermique

On considère à présent un écoulement d'air qui a pour but de refroidir une plaque plane à température T_w par convection forcée[3]. La géométrie de la plaque est identique au problème 1. L'écoulement externe est à vitesse constante $u_e(x) = U$ et à température constante T_e. Les propriétés physiques du fluide et de l'écoulement sont les suivantes :

ρ	$1.2\ kg/m^3$	c	$1\,005\ J/kg\,K$
μ	$1.8 \times 10^{-5}\ Pa\,s$	U	$2\ m/s$
ν	$1.5 \times 10^{-5}\ m^2/s$	T_e	$20°C$
k	$0.0262\ W/m\,K$	T_w	$80°C$

En plus de la couche limite de vitesse se forme une couche limite thermique, dans laquelle s'effectue le raccord de $T = T_w$ en $y = 0$ à $T = T_e$ loin de la paroi. On désigne par $\delta(x)$ et $\delta_T(x)$ l'épaisseur

[3]Dans un problème de convection forcée, la vitesse externe u_e est imposée et le problème mécanique est découplé du problème thermique. Ce n'est plus le cas pour un problème de convection naturelle, où la vitesse externe est déterminée en considérant les effets de la gravité et des variations de masse volumique $\rho(T)$, couplant ainsi les équations.

de la couche limite de vitesse et de la couche limite thermique, respectivement. Les équations considérées sont les équations de Prandtl, ainsi que l'équation d'énergie :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ &u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},\end{aligned}\right.$$

où $\alpha = k/\rho c$ désigne la diffusivité thermique en m^2/s.

1. *Définir et calculer le nombre de Prandtl de l'air, noté Pr_{air}.*
2. *Quelle est la signification physique du terme de dissipation visqueuse $\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$? Montrer et justifier que pour cet écoulement, on peut raisonnablement le négliger dans l'équation d'énergie devant le terme de conduction.*

En négligeant la dissipation visqueuse, les équations à considérer deviennent :

$$\left\{\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.\end{aligned}\right.$$

On définit la variable de similitude $\eta(x,y)$ et la température adimensionnelle $\theta(\eta)$ par

$$\eta(x,y)=\frac{y}{\delta(x)}=\frac{y}{\sqrt{\frac{2\nu x}{U}}}\qquad \text{et}\qquad \theta(\eta)=\frac{T(x,y)-T_e}{T_w-T_e}.$$

3. *En insérant la température adimensionnelle dans l'équation d'énergie, montrer que celle-ci se transforme en l'équation différentielle suivante pour $\theta(\eta)$:*

$$Pr\, f(\eta)\theta'(\eta)+\theta''(\eta)=0, \tag{4}$$

   avec Pr le nombre de Prandtl du fluide et $f(\eta)$ la solution du problème de Blasius. Montrer que les conditions limites sur $\theta(\eta)$ sont

$$\begin{aligned}\theta(0)&=1,\\ \lim_{\eta\to\infty}\theta(\eta)&=0.\end{aligned}\tag{5}$$

4. *À l'aide de la fonction que vous avez programmée précédemment, résoudre numériquement l'équation (4) sujette aux conditions limites (5). La résolution nécessite le calcul conjoint de $f(\eta)$ et $\theta(\eta)$: ceci revient à résoudre le système formé par les 5 équations*

$$\left\{\begin{aligned} &f_0'(\eta)=f_1(\eta)\\ &f_1'(\eta)=f_2(\eta)\\ &f_2'(\eta)=-f_0(\eta)f_2(\eta)\\ &\theta_0'(\eta)=\theta_1(\eta)\\ &\theta_1'(\eta)=-Pr\, f_0(\eta)\theta_1(\eta)\end{aligned}\right.\qquad \textit{soit}\qquad \begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ \theta_0\\ \theta_1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ -f_0f_2\\ \theta_1\\ -Pr\, f_0\theta_1\end{pmatrix}.$$

   Pour éviter de devoir imposer simultanément deux conditions à l'infini, vous pouvez utiliser comme condition initiale sur $f''(\eta)$ la valeur $f''(0)$ obtenue à la question 1.2. Il vous restera *alors à appliquer la méthode de bissection pour déterminer la condition initiale $\theta''(0)$, de manière identique au problème de Blasius. Donner avec 8 chiffres significatifs la valeur de $\theta''(0)$ obtenue pour les valeurs du nombre de Prandtl suivantes : Pr = [Pr_{air}, 0.01, 1, 10, 100].*

5. *Pour chacune des valeurs du nombre de Prandtl données ci-dessus, représenter graphiquement les fonctions $f'(\eta)$ et $\theta(\eta)$ et commenter brièvement. Les deux fonctions doivent apparaître sur un même graphe : vous devez donc montrer 5 graphes de 2 fonctions chacun.*
   ***Indication** : pour les petites valeurs de Pr, il faudra augmenter la valeur finale de η pour l'intégration, par exemple jusque $\eta = 50$, afin de voir la couche limite thermique au complet.*
6. *En analysant les ordres de grandeur dans les équations, nous avons montré que le ratio des épaisseurs de couche limite δ_T/δ était de l'ordre de $Pr^{-1/2}$. En réalité, ce ratio est plutôt donné par*
$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{Pr^a},$$
   où l'exposant a dépend lui-même du nombre de Prandtl. En définissant δ_T par l'épaisseur telle que $\theta(\eta) \leq 0.01$ et δ par l'épaisseur telle que $f'(\eta) \geq 0.99$ (appelées "épaisseurs à 99%", correspondant respectivement à l'épaisseur où $T(x,y) - T_e \leq 0.01\Delta T$ et $u(x,y) \geq 0.99U$), déterminer à 3 chiffres significatifs la valeur de l'exposant a pour Pr = [Pr_{air}, 0.01, 1, 10, 100].
7. ***Bonus** : Pour ce choix de température adimensionnelle, la solution analytique $\theta(\eta)$ est donnée, en fonction de $f(\eta)$, par l'expression*
$$\theta(\eta) = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^\eta \exp\left(-Pr\int_0^\xi f(\alpha)\ d\alpha\right) d\xi}{\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-Pr\int_0^\xi f(\alpha)\ d\alpha\right) d\xi} = 1 - \frac{\displaystyle\int_0^\eta G(\xi)\ d\xi}{\displaystyle\int_0^\infty G(\xi)\ d\xi},$$
   où le dénominateur est une constante qui peut être calculée une seule fois pour tous les points η. Pour chacun des graphes de la question 5, superposer (sous forme de marqueurs : bullets, étoiles, carrés, etc.) la solution analytique à la solution numérique obtenue pour θ.
8. *Proposer un écoulement pour lequel la dissipation visqueuse est du même ordre de grandeur que le terme de conduction dans l'équation d'énergie. Dans ce cas[4], obtenir l'équation différentielle ordinaire pour $\theta(\eta)$ en fonction de la fonction de Blasius $f(\eta)$ et de ses dérivées, du nombre de Prandtl et du nombre d'Eckert.*
9. *Adapter finalement votre programme pour résoudre cette équation en $\theta(\eta)$ et tracer sur un même graphe le profil de vitesse adimensionnel, le profil de température adimensionnel dans le cas où la dissipation visqueuse est négligeable et le profil de température adimensionnel pour l'écoulement proposé à la sous-question 8. Commenter brièvement.*
10. *En gardant les autres paramètres de l'écoulement inchangés, en déduire une vitesse d'écoulement pour laquelle le flux de chaleur à la paroi q_w devient négligeable ($q_w \leq 0.01$). Que se passe-t-il physiquement dans ce cas ? L'écoulement est-il toujours laminaire ?*
11. ***Bonus pour occuper vos longues soirées d'hiver :** Contrairement à ce que dit le dernier transparent du chapitre 8, il existe une solution analytique $\theta(\eta)$ à l'équation différentielle obtenue à la sous-question 8 : quelle est cette solution ?*

[4] C'est le cas 4 des transparents du cours, avec $Pr \neq 1$ et $Ec \not\ll 1$.