Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2020

Projet	100 points
Distribué le 2020/11/09	À rendre le 2020/12/15

Le projet est à faire de préférence **par groupe de deux** (au maximum trois). Vous avez jusqu'au mardi 15 décembre 2020 avant minuit pour me rendre le rapport. Ne pas hésiter à le remettre avant si vous le complétez plus tôt.

Vous pouvez choisir entre l'un des projets suivants :

1. Projet de votre choix
2. Projet 1 : Estimateur d'erreur a posteriori et adaptation de maillage
3. Projet 2 : Méthodes de stabilisation pour le problème de couche limite
4. Projet 3 : Modélisation d'une poutre en porte-à-faux
5. Projet 4 : Modélisation d'une poutre simplement appuyée aux extrémités

Projet de votre choix

Le rapport devrait au moins couvrir les points suivants (soyez précis et, dans la mesure du possible, concis):

1. Écrire une brève introduction qui décrit la motivation et les objectifs du projet.
2. Donner les équations différentielles et les conditions aux limites et, si besoin, les conditions initiales, qui définissent le problème considéré, tout en prenant soin de bien définir tous les termes introduits.
3. Écrire la formulation faible du problème et montrer si possible que le problème est bien posé.
4. Introduire le problème éléments finis et résoudre celui-ci par le code de votre choix.
5. Estimer les taux de convergence par rapport aux normes L^2 et H^1 lorsque l'espace éléments finis est raffiné en h et enrichi en p.
6. Estimer le taux de convergence pour une quantité d'intérêt (fonctionnelle de la solution) de votre choix.
7. Commenter tous les résultats obtenus et donner une brève conclusion.

Énoncé du Projet 1

Estimateur d'erreur a posteriori et adaptation de maillage

On considère le problème de couche limite suivant :

$$\begin{aligned} -(\varepsilon u')' + u' &= 1, \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0, \quad \text{en } x = 0 \\ u &= 0, \quad \text{en } x = 1 \end{aligned}$$

où ε représente la viscosité cinématique du fluide. Le premier et deuxième termes de l'équation différentielle définissent les termes de diffusion et de convection, respectivement.

1. Développer et programmer un estimateur résiduel explicite de l'erreur, soit dans la norme H^1, soit dans l'une des deux normes équivalentes :

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 \varepsilon(u')^2 + u^2 dx} \qquad \text{ou} \quad \|u\| = \sqrt{\int_0^1 \varepsilon(u')^2 dx}.$$

   Noter que l'on peut utiliser l'inégalité de Poincaré pour montrer que cette dernière est bien une norme.

2. Développer et programmer une stratégie d'adaptation de maillage à partir de l'estimateur obtenu ci-dessus. En partant d'un maillage uniforme constitué de deux éléments, faites plusieurs itérations (au moins dix itérations) avec votre code pour obtenir un maillage adapté et donnez la courbe log-log de l'erreur $\|e\|$ en fonction du nombre de degrés de liberté. Répéter l'exercice pour plusieurs valeurs de ε. Commenter les résultats obtenus.
3. Soit $x_0 \in \Omega$. Écrire le problème adjoint associé à la quantité d'intérêt $Q(u) = u(x_0)$. Montrer que celui-ci est bien posé et trouver la solution exacte.
4. En utilisant la solution exacte du problème adjoint, programmer une stratégie d'adaptation de maillage par rapport à la quantité d'intérêt. Donnez un exemple en prenant $x_0 = 0.25$ et $\varepsilon = 0.0001$ (si possible) et donnez la courbe de convergence de l'erreur $e(x_0) = u(x_0) - u_h(x_0)$ en fonction du nombre de degrés de liberté.
5. Calculer un estimateur η de l'erreur $e(x_0)$ en utilisant une approximation de la solution adjointe obtenue sur le même maillage que celui pour u_h mais avec des fonctions polynômiales par morceaux de degré $p+1$, où p est le degré de la solution u_h. Calculer pour cet estimateur l'indice d'efficacité défini par $\lambda = \eta/e(x_0)$. Utiliser η pour adapter le maillage et répéter les expériences de la question précédente.
6. **Bonus :** Si vous avez encore du temps, construisez un estimateur d'erreur pour la quantité $Q(u) = \varepsilon u'(1)$, c'est-à-dire, le flux sur le bord $x = 1$ du domaine. On remarque que pour $u \in H_0^1(\Omega)$, $u'(1)$ n'est pas nécessairement défini (prendre par exemple $u(x) = (x-1)^{3/4}$). On peut alors avoir recours à la relation suivante, avec $w(x) = x$, pour représenter la quantité d'intérêt :

$$\begin{aligned} \varepsilon u'(1) &= \varepsilon u'(1) w(1) - \varepsilon u'(0) w(0) \\ &= \int_0^1 \varepsilon(u'w)' dx = \int_0^1 \varepsilon u'' w \, dx = \int_0^1 u'w \, dx - \int_0^1 w \, dx \end{aligned}$$

   où, pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé l'équation différentielle $\varepsilon u'' = u' - 1$.

Énoncé du Projet 2

Méthodes de stabilisation pour le problème de couche limite

On considère le problème de couche limite suivant :

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' + u' &= 1, \quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u &= 0, \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

où $\varepsilon > 0$. Lorsque $\varepsilon \ll 1$, on observe que la solution élément fini du problème obtenue sur un maillage uniforme de taille h plus grande que ε présente de larges oscillations près de la frontière $x = 1$. Un moyen de remédier à ce problème, sans avoir recours à des maillages adaptés, est d'ajouter de la diffusion numérique. Une méthode fréquemment utilisée est la "streamline diffusion method", dont l'objectif est de n'ajouter de la diffusion que dans la direction du vecteur vitesse, soit le long des lignes de courant. En dimension un, la vitesse est simplement donnée par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ (la vitesse est donnée par le coefficient du terme u' et vaut donc 1 ici). La "streamline diffusion method" consiste à tester l'équation différentielle avec des fonctions test $v + \delta v'$ (en 1D), où δ est un paramètre à spécifier. Le problème élément fini correspondant est :

$$\text{Trouver } u_{\varepsilon,h} \in V^h \text{ telle que} \quad B_\varepsilon(u_{\varepsilon,h}, v_h + \delta v_h') = F(v_h + \delta v_h'), \quad \forall v_h \in V^h \tag{2}$$

où $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ est l'espace élément fini des fonctions continues et polynomiales par morceaux sur chaque élément K du maillage, et

$$B_\varepsilon(u_\varepsilon, v + \delta v') = \int_0^1 \varepsilon u_\varepsilon' v' dx - \sum_K \int_K (\varepsilon u_\varepsilon'')(\delta v') dx + \int_\Omega u_\varepsilon'(v + \delta v') dx$$

$$F(v) = \int_0^1 v \, dx$$

Questions :

1. Si $v \in H_0^1(\Omega)$, dans quel espace se trouve la fonction $v + \delta v'$? Expliquer alors pourquoi il n'est pas possible de faire une intégration par partie pour l'intégrale $\int_\Omega (\varepsilon u_\varepsilon'')(\delta v') dx$. De plus, expliquer pourquoi lorsque l'on utilise la méthode des éléments finis, l'intégrale $\int_\Omega (\varepsilon u_{\varepsilon,h}'')(\delta v_h') dx$ doit être remplacée par le terme $\sum_K \int_K (\varepsilon u_{\varepsilon,h}'')(\delta v_h') dx$.
2. On dit que le problème (2) est cohérent avec le problème (1) si l'on peut démontrer que

   $$B_\varepsilon(u, v_h + \delta v_h') = F(v_h + \delta v_h'), \quad \forall v_h \in V^h$$

   où u est la solution de (1). Montrez que (2) est cohérent avec (1).
3. Trouver les valeurs de δ pour lesquelles le problème (2) est stable, i.e. pour lesquelles la forme bilinéaire B_ε est coercive. On peut supposer ici le résultat suivant :

   $$\left| \sum_K \int_K (\varepsilon v_{\varepsilon,h}'')(\delta v_h') dx \right| \le \frac{1}{2} C^2 \varepsilon \delta^2 h^{-2} \|v_h'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \|v_h'\|_{L^2(\Omega)}^2, \qquad \forall v_h \in V^h$$

   où C est une constante indépendante de h. Montrer alors par le théorème de Lax-Milgram que le problème (2) est bien posé.
4. Implanter la "streamline diffusion method" dans le code EF 1D Matlab.

5. Estimer numériquement le taux de convergence de la solution obtenue pour $\varepsilon = 10^{-4}$ en fonction de l'ordre p des éléments finis et comparer les courbes de convergence avec celles obtenues par la méthode EF classique (sans diffusion).

Énoncé du Projet 3

Modélisation d'une poutre en porte-à-faux

On considère le problème d'une poutre fixée en une extrémité et soumise à une force verticale g à l'autre extrémité. La déflexion u de la poutre est donnée par l'équation d'Euler-Bernoulli :

$$(EIu'')'' = q, \quad \forall x \in \Omega = (0, L)$$

où E and I sont le module d'élasticité et le moment d'inertie de la poutre, et $q = q(x)$ représente une charge par unité de longueur agissant sur la poutre. Pour une poutre en porte-à-faux, les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad x = 0 & \qquad EIu'' &= 0, \quad x = L \\ u' &= 0, \quad x = 0 & \qquad (-EIu'')' &= g, \quad x = L \end{aligned}$$

1. Donner la forme faible du problème sous la forme :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ telle que : } \quad B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

   Définir explicitement V, B, et F.
2. Montrer que le problème est bien posé.
3. Implanter dans le code EF 1D l'élément de Hermite et l'assemblage de la matrice et du vecteur chargement associés à B et F, respectivement.
4. Calculer la solution exacte du problème pour $L = 1$, $EI = 1$, $q(x) = 0$, et $g = 1$, et l'utiliser pour vérifier que l'implantation du code est correcte.
5. Estimer le taux de convergence par rapport à la seminorme H^2 de la solution par éléments finis lorsque $L = 1$, $EI = 1$, $q(x) = x$, et $g = 1$.
6. Calculer par éléments finis la déflection à l'extrémité libre de la poutre.
7. Supposons que l'on introduise la nouvelle variable $v = EIu''$. Donner le système des deux équations d'ordre deux et les conditions aux limites associées. Peut-on utiliser une méthode par éléments finis pour calculer des approximations de u et v? Expliquer.

Énoncé du Projet 4

Modélisation d'une poutre simplement appuyée aux extrémités

La déflexion u d'une poutre simplement appuyée aux extrémités satisfait l'équation d'Euler-Bernoulli :

$$(EIu'')'' = q, \quad \forall x \in \Omega = (0, L)$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad x = 0 & \qquad u &= 0, \quad x = L \\ EIu'' &= 0, \quad x = 0 & \qquad EIu'' &= 0, \quad x = L \end{aligned}$$

où E and I sont le module d'élasticité et le moment d'inertie de la poutre, et $q = q(x)$ représente une charge par unité de longueur agissant sur la poutre.

1. On introduit la nouvelle variable $v = EIu''$. Construire le système couplé formé par les deux équations d'ordre deux et les conditions aux limites associées.
2. Donner la forme faible du problème couplé sous la forme :

   $$\text{Trouver } \boldsymbol{u} = (u, v) \in V \text{ telle que :} \quad B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{w} = (w, z) \in V$$

   Définir explicitement V, B, et F.
3. Montrer que le problème couplé est bien posé (on propose de choisir, pour $\boldsymbol{u} = (u, v) \in V$, la norme $\|\boldsymbol{u}\|$ telle que $\|\boldsymbol{u}\|^2 = |u|_{H^1}^2 + |v|_{H^1}^2$).
4. Poser le problème éléments finis associé au problème couplé ci-dessus et développer le code 1D (à partir du code 1D Matlab) pour résoudre le problème.
5. Calculer la solution exacte du problème pour $L = 1$, $EI = 1$, $q(x) = -\delta(x - x_0)$, avec $x_0 \in (0, 1)$ et l'utiliser pour vérifier que l'implantation du code est correcte.
6. Développer un estimateur a priori de l'erreur.
7. Estimer numériquement le taux de convergence de la solution par éléments finis en utilisant $L = 1$, $EI = 1$, $q(x) = -\delta(x - x_0)$, avec $x_0 = 0.75$, et vérifier qu'il correspond au taux de convergence obtenu en 6.
8. Calculer par éléments finis le point et la valeur de la déflection maximale dans la poutre.
