



POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

PHS2107

MÉCANIQUE SUPÉRIEURE

Projet de mécanique supérieure

Système masse-ressort en rotation autour d'un point en translation

Jacob Fournier-Beau	1894498
Jérémi Thiffault	1900989
Anthony Martin	1896355

Remis à

M. Xavier Daxhelet et
Étienne Boulais

Jeudi 6 décembre 2018

Introduction

L'étude de mouvements peu intuitifs interpelle les chercheurs de mécanique classique. Un mouvement chaotique sera étudié dans ce projet. Ce mouvement proviendra de l'oscillation de deux masses entre elles. Toutefois, celles-ci ne possèdent pas le même nombre de degrés de liberté. L'une bouge horizontalement en plus de tourner sur elle-même tandis que l'autre, en plus de bouger en translation, peut tourner autour de la première (voir figure 1). Comment est-ce que les masses interagissent entre elles ? Quelle sera l'allure du mouvement du système ? Est-ce que nos modèles mathématiques correspondent au mouvement ? L'étude de ce mouvement peut éventuellement mener à des applications concrètes. Par exemple, la création de nouveaux systèmes mécaniques pour des machines se basant sur ce mouvement. Ou plus fondamentalement, créer des modèles comprenant ce mouvement afin d'expliquer des phénomènes physiques.

Théorie

Cas général

Tout d'abord, le mouvement sera d'abord étudié à l'aide du Lagrangien, qui utilise des principes de minimisation par l'équation d'Euler-Lagrange. Il sera aussi étudié par la mécanique hamiltonienne. Cette branche de la mécanique s'intéresse à l'énergie totale du système dépendante des moments conjugués, des coordonnées généralisées ainsi que du temps.

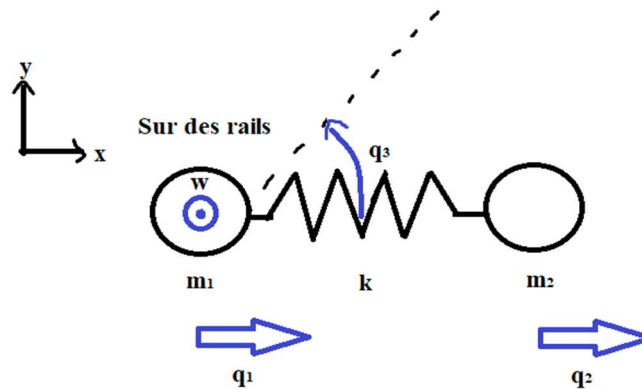


Figure 1: Système complet étudié vu du dessus: La masse 1 a un degré de liberté, en q_1 suivant l'axe des x , en plus de tourner sur elle-même selon q_3 . La masse 2 a deux degrés de liberté : selon q_2 , en direction radiale, et selon q_3 (angle par rapport à l'axe des x).

Traitions le cas général. Nous avons l'énergie cinétique de la masse 1 et l'énergie cinétique de la masse 2.

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{5} m_1 R^2 \dot{q}_3^2$$
 où l'on suppose que la masse 1 est sphérique de rayon R et d'inertie $I = \frac{2}{5} m_1 R^2$.

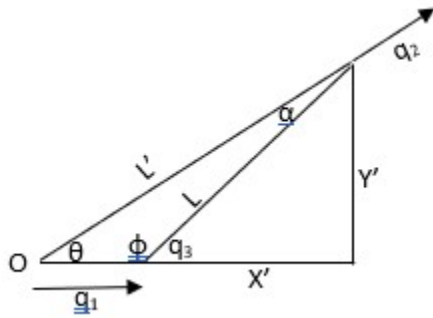
$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{q}_3^2$ On suppose ici que l'inertie de la masse 2 en rotation autour de la masse 1 est celle d'une particule, ayant $L \gg R$ (où L est la longueur du ressort, et R le rayon de la masse 2). La forme du mouvement ne sera de toute façon pas modifiée par cette supposition, mis à part en amplitude.

Le problème dans cette approche est que L est variable, ce qui complique donc les calculs. On pourrait donc exprimer l'énergie cinétique de la masse 2 en partant de x et y :

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{q}_3^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L^2 \frac{v^2}{L^2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Où $x = q_1 + L \cos q_3$ et $y = L \sin q_3$. Il faut encore une fois trouver L .

Considérant qu'il est difficile de le déduire du schéma précédent, nous allons utiliser une autre approche. En fixant la masse 1 à l'origine, puis en la décalant ensuite selon son degré de liberté q_1 , nous pouvons trouver L (la longueur du ressort étant plus facile à exprimer en fonction des coordonnées généralisées si q_1 est fixée).



On fixe donc un allongement q_2 , ce qui forme un angle θ (inconnu) par rapport à l'horizontale. On peut aisément trouver $L' = L_0 + q_2$, où L_0 est l'allongement initial du ressort. En conservant le même allongement q_2 , on rajoute maintenant un décalage en q_1 , ce qui comprimera le ressort. On peut ainsi trouver L quand nos trois coordonnées généralisées ne sont pas nulles, donc pour tous les points du plan cartésien.

On trouve facilement $Y' = (L_0 + q_2) \sin \theta$ et $X' = (L_0 + q_2) \cos \theta - q_1$. On peut en déduire L :

$$L^2 = ((L_0 + q_2) \sin \theta)^2 + ((L_0 + q_2) \cos \theta - q_1)^2$$

Il faut toutefois trouver θ . On a $\varphi = 180 - q_3$ et $\alpha = 180 - \varphi - \theta = 180 - 180 + q_3 - \theta = q_3 - \theta$

On peut utiliser la loi des sinus pour trouver θ (démarche complète en annexe 1):

$$\theta = -\arcsin\left(\frac{q_1 \sin(180 - q_3)}{(L_0 + q_2)}\right) + q_3$$

On trouve alors (après simplification) :

$$L^2 = (L_0 + q_2)^2 + q_1^2 - 2q_1(L_0 + q_2) \cos\left(-\arcsin\left(\frac{q_1 \sin(q_3)}{(L_0 + q_2)}\right) + q_3\right)$$

Si $q_1 = 0$, on trouve bien $L = L_0 + q_2$, soit le L' trouvé plus haut, et si $q_3 = 0$, on retrouve bien l'équation de la longueur d'un ressort en une dimension, soit $L = L_0 + q_2 - q_1$. L'équation semble donc vraisemblable (qui plus est, l'analyse dimensionnelle fonctionne !).

Et on pose l'énergie potentielle $U = \frac{1}{2}k(L_R - L_0)^2$ puisque l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle.

On a alors toutes les équations pour écrire le Lagrangien (à partir de maintenant, la longueur du ressort L sera notée L_R pour ne pas la confondre avec le lagrangien) :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_2L_R^2\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{5}m_1R^2\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}k(L_R - L_0)^2$$

On remarque rapidement que toute tentative de dérivation de cette fonction pour trouver les équations d'Hamilton ou pour résoudre par le Lagrangien sont vouées à l'échec, puisque l'expression de la longueur du ressort est complexe et varie selon toutes les coordonnées généralisées. Même si leur expression est trouvable, les équations différentielles seraient alors impossibles à résoudre.

Comme la résolution du cas général est trop complexe, nous tenterons une approche en décomposant le mouvement en deux parties. Bien sûr, cela ne tiendra pas compte de l'interaction des deux mouvements entre eux, mais cela peut tout de même donner une idée de ce qui se passe (essentiellement, nous négligerons la traction du ressort sur la masse 1).

Premier cas

Pour le premier cas, on veut analyser la trajectoire de la masse 2 lorsqu'elle est en rotation autour de la masse 1 alors qu'elles sont jointes par un ressort (Figure 2). La masse 1 est fixée à l'origine du système et elle est considérée comme un pivot: elle peut seulement être en rotation sur elle-même. Le mouvement est fait sur un plan horizontal, donc l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle. Seule la masse 2 peut osciller dans cette situation. Ces masses sont des sphères pleines de masses égales.

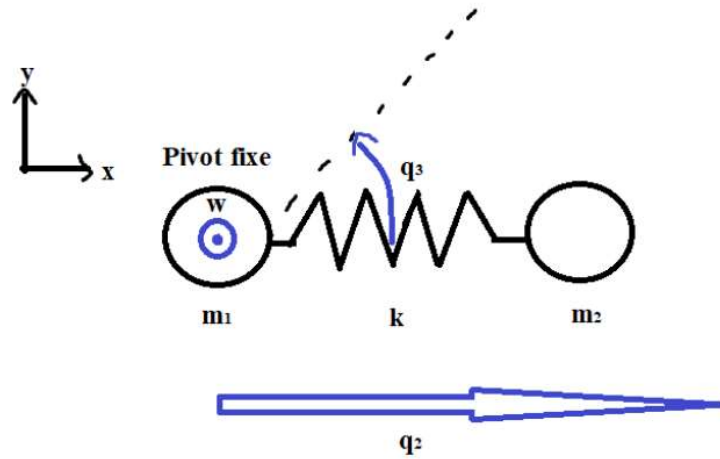


Figure 2: Cas 1 (vu du dessus) simplifié où la masse 1 est fixée et la masse 2 conserve ses deux degrés de liberté. Pour simplifier les calculs, q_2 sera prise à partir de la masse 1.

On veut observer la position de la masse 2 par rapport au temps lorsque le ressort oscille. Aussi, on donne une vitesse angulaire constante à la masse 2 par rapport à la masse 1.

Dans cette situation, on a deux degrés de liberté, soit

q_2 : position de la masse 2 par rapport à l'origine du système (masse 1)

q_3 : angle entre l'axe des x et le ressort

Pour aider à la résolution du problème, les coordonnées généralisées sont les coordonnées polaires du système en 2D, qui sont

$$q_2 = r$$

$$q_3 = \theta$$

On est capable de mesurer son mouvement à l'aide du Lagrangien.

L'équation du Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U$, en trouvant l'équation de l'énergie cinétique de chaque masse et l'énergie potentielle du ressort, on a alors (voir le calcul détaillé en annexe 2) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{5} m_1 (R \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2^2 + (q_2 \dot{q}_3)^2) - \frac{1}{2} k (q_2 - L_0)^2$$

Où k est la constante de rappel du ressort et L_0 est la longueur du ressort au repos.

On détermine les équations du mouvement pour les coordonnées généralisées de notre système par les équations d'Euler-Lagrange et on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \Leftrightarrow m_2 \ddot{q}_2 = m_2 \dot{q}_3^2 - k(q_2 - L_0)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \Leftrightarrow \ddot{q}_3 \left(\frac{1}{5} m_1 R^2 + m_2 q_2^2 \right) + 2 m_2 \dot{q}_3 \dot{q}_2 q_2 = 0$$

Pour simplifier les équations, on pose que la longueur du ressort au repos est beaucoup plus grande que le rayon de chaque masse. L'inertie des deux masses est alors négligeable ($R \approx 0$). On peut alors dire que ce sont approximativement des masses ponctuelles. Par conséquent, l'amplitude et l'énergie du mouvement seront augmentées, puisqu'elles ne seront plus considérées comme des sphères pleines. Cependant, cela ne changera pas la forme du mouvement du système en tant que telle, qui est ce qui nous intéresse.

On obtient donc deux équations différentielles plus simples à résoudre,

$$\ddot{q}_2 = \dot{q}_3^2 - \frac{k}{m_2}(q_2 - L_0)$$

$$\ddot{q}_3 = -2 \frac{\dot{q}_3 \dot{q}_2}{q_2}$$

Les conditions initiales de ce cas, lorsque $t=0$ sont: $q_2 = c$, $\dot{q}_2 = 0$, $q_3 = 0$, $\dot{q}_3 = b$, où c est la longueur initiale maximale du ressort. Donc, c ne peut pas être nulle ou négative. b est la vitesse angulaire initiale de la masse 2. Au départ, on veut que le ressort soit étiré, ou comprimé, afin d'observer des oscillations.

On considère que \dot{q}_3 (vitesse angulaire) demeure constante dans le temps dans tout le mouvement, ce qui simplifie aussi la résolution des équations différentielles. Autrement, elles ne sont pas linéaires et, par conséquent, plus difficiles à résoudre.

On a alors cette équation différentielle simplifiée,

$$\ddot{q}_2 + \frac{k}{m_2} q_2 = b^2 + \frac{k}{m_2} L_0$$

On peut trouver la solution non homogène $q_2(t)$ par la méthode des coefficients indéterminés qui permet de résoudre les équations de cette forme $\ddot{y} + ay + by = s(t)$, où $s(t)$ est un cas particulier de la forme générale (voir le calcul détaillé en annexe 2).

Finalement, on obtient donc la solution non-homogène qui est

$$q_2(t) = c \cos \sqrt{\frac{k}{m_2}} t + \frac{m_2 b^2}{k} + L_0$$

Ce qui est bel et bien le type de résultat attendu, soit une masse oscillant et tournant autour de l'autre.

Toutefois, cette solution représente un cas idéal. En effet, toutes les forces non conservatives, comme le frottement, sont négligées. De ce fait, le mouvement arrêtera après un certain temps, ce qui n'est pas considéré dans cette équation.

Deuxième cas

Pour le deuxième cas, on ne remplace que le ressort par une tige de longueur fixe, enlevant l'oscillation entre les masses.

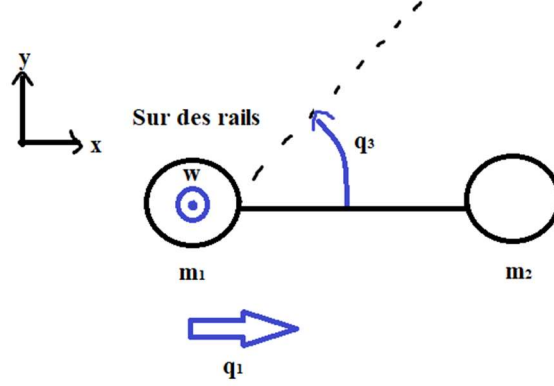


Figure 3: Cas 2 (vu du dessus) simplifié: La masse 1 a un degré de liberté en q_1 , et la rotation en q_3 est conservée. Toutefois, le ressort est remplacé par une tige rigide.

Dans le cas où l'on voudrait étudier le mouvement du système, mais en changeant le ressort pour une tige fixe, on obtient le Lagrangien suivant (démarche complète en annexe 3) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{q}_1^2 + \frac{2}{5}R^2\dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_3^2L_0^2 + \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_3L_0\sin q_3)$$

On trouve les deux équations associées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0 = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2(\ddot{q}_3L_0\sin q_3 + \dot{q}_3^2L_0\cos q_3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) = -m_2\dot{q}_1\dot{q}_3L_0\cos q_3 = \ddot{q}_3 \left(\frac{2R^2m_1}{5} + m_2L_0^2 \right) - m_2L_0(\ddot{q}_1\sin q_3 + \dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_3)$$

On voit tout de suite que ces équations sont difficiles à résoudre. Essayons par le hamiltonien:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T = & p_1 \frac{p_1 \left(\frac{2R^2m_1}{5} + m_2L^2 \right) + p_2(m_2L_0\sin q_3)}{(m_1 + m_2) \left(\frac{2R^2m_1}{5} + m_2L^2 \right) - (m_2L_0\sin q_3)^2} \\ & + p_2 \frac{p_1m_2L_0\sin q_3 + p_2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) \left(\frac{2R^2m_1}{5} + m_2L^2 \right) - (m_2L_0\sin q_3)^2} \end{aligned}$$

On voit qu'ici encore, les équations différentielles ne seront pas linéaires et ne pourront être aisément résolues. On supposera donc que \dot{q}_3 est une constante. On peut alors facilement trouver le mouvement en q_1 .

Par le Lagrangien:

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2(\ddot{q}_3 L_0 \sin q_3 + \dot{q}_3^2 L_0 \cos q_3) = 0$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 = m_2(\dot{q}_3^2 L_0 \cos q_3)$$

En posant $m_1 = m_2$ et $\dot{q}_3 = b$ (donc $q_3 = bt$)

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2}(bL_0 \cos bt)$$

On trouve la solution homogène directement $\ddot{q}_1 = 0$

$$\dot{q}_1 = c$$

$q_1(t) = ct + k$ ($k = 0$, car la masse est initialement à l'origine, et c est au choix)

Et la solution non homogène (calculs détaillés en annexe 3):

$$q_1(t) = -\frac{bL_0}{2} \cos(bt)$$

La solution générale est donc

$$q_1(t) = ct - \frac{bL_0}{2} \cos(bt)$$

Il s'agit d'un cas logique. En effet, la masse 1 avance plus ou moins lentement selon l'orientation du vecteur vitesse de la masse 2.

Il faut cependant noter que ce modèle dispose de certaines faiblesses. En fait, le frottement n'est pas considéré. En d'autres mots, le mouvement devrait être décéléré. Cela causerait une diminution de la vitesse angulaire des vitesses des masses. Tout comme le premier cas, après un certain temps, le système arrêtera.

Expérimentation et analyse



Figure 4: Montage expérimental pour le cas général

En réalisant l'expérience, plusieurs complications se sont produites. Une des plus importantes concerne les rails. En fait, comme le prédisait les calculs (et confirmé par la simulation) la masse 1 réalisait une translation plus importante d'un côté que de l'autre, décalant le système. Alors, très rapidement, la masse 2 entrait en collision avec les rails et le mouvement arrêtait totalement. Cela est en partie dû au fait que la vitesse initiale était donnée dans une direction x . Alors, par conservation de la quantité de mouvement (du moins partielle, puisqu'une partie est perdue à cause des forces de réaction sur les rails), le système se déplaçait dans ladite direction x . Pour minimiser ce problème, il faudrait pouvoir donner une vitesse purement angulaire à la masse 2, ce qui est difficile à faire manuellement. Par ailleurs, si la vitesse initiale donnée était purement angulaire et forcée constante, on trouverait alors que la constante c dans l'expression du mouvement en q_1 vaudrait 0. Il n'y aurait donc pas de translation du système, et il resterait alors centré à l'origine. Il y a un autre problème concernant les rails. La masse 1 frappait les guides et perdait beaucoup d'énergie sous forme d'impulsion. La solution idéale serait d'utiliser un chariot qui possède des roues ne pouvant que se déplacer dans une direction. Le chariot ne perdrait plus d'énergie sous forme d'impulsion. En plus, n'ayant pas de contrainte physique, la masse 2 tournerait librement autour du chariot. Alors, il serait possible d'observer le mouvement.

Une autre difficulté concerne le ressort de compression utilisé. En fait, l'oscillation ne se produit pas. Donc, le ressort agit comme une tige rigide. Cela revient au deuxième cas étudié dans la théorie. Une piste pour contrer cet effet serait de prendre un ressort avec une constante de rappel plus faible. En effet, pour une même énergie, l'étirement d'un ressort avec une petite constante de rappel est plus important que si cette constante était élevée, puisque $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$. Ce qui permet de penser que pour des mêmes pertes d'énergie, le ressort avec la plus petite constante aura de plus grande oscillation (donc un plus grand Δx).

Une autre complication importante provient des billes utilisées. Ces dernières roulaient alors que dans les calculs théoriques, seul le glissement était considéré. Cela augmente l'inertie du système. Alors, donner une vitesse angulaire élevée au système afin d'observer plus longtemps le mouvement était plus difficile. Il est possible d'éviter un roulement des masses. Il suffirait de prendre un corps qui ne peut que glisser avec un frottement minime. Par exemple, un bloc de téflon (agissant comme la masse 2) sur de la glace possède un coefficient de frottement faible et ne pourrait que glisser.

Simulation et analyse de celle-ci

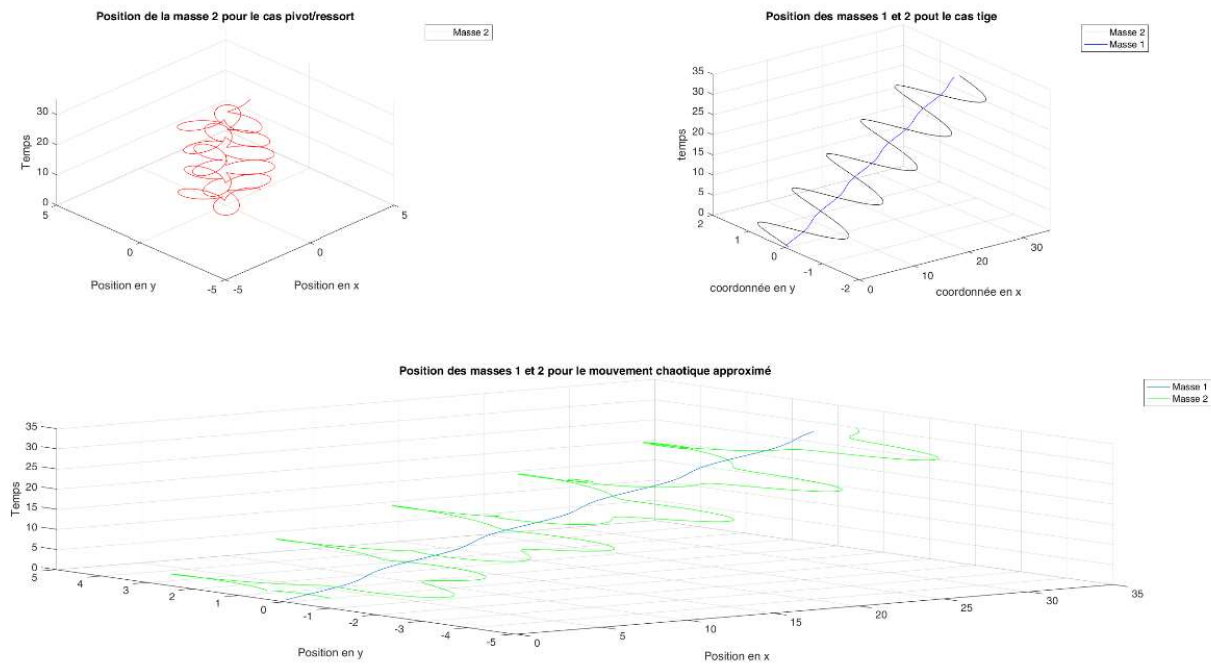


Figure 5 : Résultat de la simulation MATLAB des mouvements

Pour le graphique de la position de la masse 2, l'oscillation du ressort est visible. En fait, à un temps donné, il est possible d'observer la position de la masse 2 en x et en y. Lorsque le module du vecteur q_2 est inférieur à la longueur initiale du ressort, le ressort est en compression et si le module de q_2 est supérieur à la longueur initiale du ressort, celui-ci est en étirement. Aussi, il est possible d'observer que la masse 2 tourne autour de l'origine. L'origine correspond à la position de la masse 1, qui est immobile, tout comme considéré dans les calculs théoriques du premier cas. Pour le graphique des positions des masses 1 et 2, le déplacement du système vers les x positifs est sans équivoque (parce que l'on a considéré une quantité de mouvement en x non nulle dû à une difficulté expérimentale à donner une vitesse purement angulaire). La masse 1 se déplace toujours vers les x positifs à des vitesses différentes selon la position de la masse 2. Cette dernière, en plus d'osciller selon les y, ne se déplace que dans la même direction que la masse 1. Cet effet est dû à une vitesse élevée de la masse 1. Alors, lorsque la masse 2 aurait tendance à se diriger dans la sens contraire de la masse 1, la vitesse dans le référentiel du plan demeure dans la même direction. Dans le cas du graphique des positions approximées des masses 1 et 2 pour le mouvement chaotique, une superposition des deux autres mouvements a été effectuée. Donc, les mêmes observations sont réalisées : la masse 2 tourne autour de la masse 1 tout en oscillant et le système se déplace toujours vers les x positifs. Cependant, le mouvement de la masse 2 est plus chaotique. Cette dernière ne semble plus osciller constamment autour de la masse 1 et celle-ci n'en subit pas

les effets. Ce qui est normal puisque la superposition ne tient pas compte de l'oscillation pour la masse 1. Selon la superposition, il est plausible de supposer que le mouvement approximé ne correspond pas à la réalité puisqu'une seule des deux masses oscille.

Conclusion

En conclusion, nous avons pu observer un mouvement assez complexe, étrange et non intuitif. Bien qu'il semble aléatoire, il est prédit par des modèles physiques et suit une certaine logique. Toutefois, étant donné la complexité du mouvement à étudier et surtout, la complexité des équations le décrivant, il a fallu utiliser plusieurs approximations. Tout d'abord, afin d'utiliser les modèles physiques que nous connaissons, il a fallu négliger tout frottement ou perte d'énergie. Ce qui correspond à étudier le mouvement idéalisé, qui peut être une bonne approximation. Ensuite, les pertes d'énergie liées aux forces de réaction causées par les rails ont aussi été négligées, étant donné la complexité de la modélisation de ces dernières. Encore une fois, il peut s'agir d'une bonne approximation, puisqu'elles n'influencent pas le mouvement, la masse 1 étant guidée des deux côtés. On traite encore un cas idéalisé. Nous avons donc pu trouver le Lagrangien de notre système, sans toutefois pouvoir le résoudre. À cause de la complexité de l'expression de la longueur du ressort, qui dépend de trois coordonnées généralisées, toute tentative de résoudre par des équations différentielles ne peut que mener à une impasse. Nous avons donc dû séparer le mouvement en deux cas : dans le premier, on fixe la masse 1, en supposant donc que la masse 2 tourne autour en oscillant, sans que le ressort ne tire sur la masse 1 ou encore que la vitesse de la masse 2 n'influence le mouvement de la masse 1. Autrement dit, nous traitons le cas comme si le mouvement de la masse 2 était vu depuis la masse 1. Nous négligeons donc l'interaction des deux masses par le ressort, ce qui aura pour effet d'amplifier le mouvement de la masse 2 dans notre modèle (elle a le mouvement de la masse 1 liée au ressort, plus le sien), en réduisant celui de la masse 1. Ce n'est donc pas le meilleur modèle, mais cela peut tout de même donner une idée de comment se déplaceront les masses. Dans notre deuxième cas, nous avons étudié comment la rotation de la masse 2 autour de la masse 1 faisait déplacer cette dernière en x , en fixant la longueur du ressort. Le but étant de superposer les deux mouvements, nous avons donc supposé que les oscillations liées au ressort n'influençaient pas la position de q_1 ni la position angulaire de q_2 par rapport à q_1 . Ce qui n'est pas un modèle parfait, mais qui permet d'arriver à des résultats approximatifs. Au final, nous sommes arrivés à des solutions plausibles pour nos deux cas séparés (voir l'analyse des résultats faite précédemment), et la superposition des deux donne un mouvement plutôt particulier, comme ce qui avait été prédit. Nous voyons donc qu'il n'y a pas d'application physique matérielle à ce projet, un mouvement comme celui-ci n'étant pas très utile. Par contre, si l'expérience pouvait être refaite avec de plus grands moyens, et que l'on pouvait observer véritablement par l'expérience le mouvement étudié, nous pourrions valider nos modèles mathématiques dans le cadre d'un mouvement complexe et non intuitif. Nous pourrions aussi valider nos approximations, afin d'étudier quelles approximations sont raisonnables dans le cadre de l'étude d'un mouvement mécanique complexe.

Annexe

Annexe 1 : Calculs du cas général

Calcul de L :

Loi des sinus pour trouver θ

$$\begin{aligned}\frac{q_1}{\sin(\alpha)} &= \frac{L'}{\sin(\varphi)} \\ \frac{q_1}{\sin(q_3 - \theta)} &= \frac{L_0 + q_2}{\sin(180 - q_3)} \\ \sin(q_3 - \theta) &= \frac{q_1 \sin(180 - q_3)}{(L_0 + q_2)} \\ \theta &= -\arcsin\left(\frac{q_1 \sin(180 - q_3)}{(L_0 + q_2)}\right) + q_3\end{aligned}$$

Expression de L^2 non simplifiée :

$$\begin{aligned}L^2 &= \left[(L_0 + q_2) \sin\left(-\arcsin\left(\frac{q_1 \sin(180 - q_3)}{(L_0 + q_2)}\right) + q_3\right) \right]^2 \\ &\quad + \left[(L_0 + q_2) \cos\left(-\arcsin\left(\frac{q_1 \sin(180 - q_3)}{(L_0 + q_2)}\right) + q_3\right) - q_1 \right]^2\end{aligned}$$

Annexe 2 : Calcul pour le premier cas

Les coordonnées généralisées sont :

$$q_2 = r$$

$$q_3 = \theta$$

On a l'énergie cinétique des deux masses, soit l'énergie de rotation selon l'axe des z de la masse 1 et l'énergie de rotation de la masse 2 autour de la masse 1.

$$\begin{aligned}T &= T_{m_1} + T_{m_2} \\ T_{m_1} &= \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{5} m_1 (R \dot{q}_3)^2 \\ T_{m_2} &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2^2 + (q_2 \dot{q}_3)^2)\end{aligned}$$

On doit considérer que la longueur du ressort varie par rapport au temps

Pour l'énergie cinétique et potentielle du système, on obtient :

$$T = \frac{1}{5}m_1(R\dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_2^2 + (q_2\dot{q}_3)^2)$$

$$U = \frac{1}{2}k(q_2 - L_0)^2$$

Calcul du Lagrangien et des équations d'Euler-Lagrange :

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{5}m_1(R\dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_2^2 + (q_2\dot{q}_3)^2) - \frac{1}{2}k(q_2 - L_0)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \Leftrightarrow m_2\ddot{q}_2 = m_2\dot{q}_3^2 - k(q_2 - L_0)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \Leftrightarrow \ddot{q}_3 \left(\frac{1}{5}m_1R^2 + m_2q_2^2 \right) + 2m_2\dot{q}_3\dot{q}_2q_2 = 0$$

On pose $R=0$ (masses ponctuelles),

$$\ddot{q}_2 = \dot{q}_3^2 - \frac{k}{m_2}(q_2 - L_0)$$

$$\ddot{q}_3 = -2 \frac{\dot{q}_3\dot{q}_2}{q_2}$$

Solution aux équations différentielles :

Les conditions initiales de ce cas, lorsque $t=0$ sont: $q_2 = c$, $\dot{q}_2 = 0$, $q_3 = 0$, $\dot{q}_3 = b$, où c est la longueur initiale maximale du ressort. Elle ne peut donc pas être nulle ou négative. b est la vitesse angulaire initiale de la masse 2.

On considère que \dot{q}_3 (vitesse angulaire) demeure constante dans le temps dans tout le mouvement, ce qui simplifie aussi la résolution des équations différentielles

$$\ddot{q}_2(t) = \dot{q}_3^2 - \frac{k}{m_2}(q_2 - L_0) = b^2 - \frac{k}{m_2}(q_2 - L_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_2 + \frac{k}{m_2}q_2 = b^2 + \frac{k}{m_2}L_0$$

$$\ddot{q}_3(t) = -2 \frac{\dot{q}_3\dot{q}_2}{q_2} = 0$$

On peut trouver la solution non homogène $q_2(t)$ par la méthode des coefficients indéterminés qui permet de résoudre les équations de cette forme

$\ddot{y} + ay + by = s(t)$, où $s(t)$ est un cas particulier de la forme générale.

Cas homogène : $\ddot{q}_2 + \frac{k}{m_2} q_2 = 0$

On pose $q_2(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

La solution générale homogène est

$$q_2(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m_2}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m_2}} t$$

On dérive et on utilise les conditions initiales pour trouver la valeur des constantes

$$\dot{q}_2(t) = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m_2}} \sin \sqrt{\frac{k}{m_2}} t + C_2 \sqrt{\frac{k}{m_2}} \cos \sqrt{\frac{k}{m_2}} t$$

$$0 = 0 + C_2 \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$c = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m_2}}(0) = C_1$$

Avec $C_1 = c$ et $C_2 = 0$, on a la solution homogène suivante

$$q_2(t) = c \cos \sqrt{\frac{k}{m_2}} t$$

Qui est la solution homogène

Cas non-homogène : $\ddot{q}_2 + \frac{k}{m_2} q_2 = b^2 + \frac{k}{m_2} L_0 \quad (1)$

$$s(t) = e^{\alpha t} [P_n(t) \cos(\beta t) + Q_n(t) \sin(\beta t)]$$

$$q_2(t) = t^k e^{\alpha t} [P_n(t) \cos(\beta t) + Q_n(t) \sin(\beta t)]$$

Par comparaison, on trouve

$$q_2(t) = e^0 [P_n(t) + 0] = P_n(t) = A \quad (2)$$

Où A est une constante, alors

$$\dot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 = 0$$

On substitue (2) dans l'équation (1) et on isole. On obtient,

$$A = \frac{m_2 b^2}{k} + L_0$$

Qui est la solution particulière non-homogène

Donc la solution non-homogène est

$$q_2(t) = c \cos \sqrt{\frac{k}{m_2}} t + \frac{m_2 b^2}{k} + L_0$$

Où c est la longueur initiale maximale du ressort, b est la vitesse angulaire initiale de la masse 2 par rapport à la masse 1, k est la constante de rappel du ressort, et L_0 est la longueur du ressort au repos.

Annexe 3 : Résolution des équations du mouvement dans le cas 2

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{5} m_1 R^2 \dot{q}_3^2$$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$x = L_0 \cos q_3 + q_1$$

$$\dot{x} = -\dot{q}_3 L_0 \sin q_3 + \dot{q}_1$$

$$y = L_0 \sin q_3$$

$$\dot{y} = \dot{q}_3 L_0 \cos q_3$$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 ((-\dot{q}_3 L_0 \sin q_3 + \dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_3 L_0 \cos q_3)^2)$$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_3^2 L_0^2 + \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 L_0 \sin q_3)$$

Le lagrangien est donc $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \frac{2}{5} R^2 \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_3^2 L_0^2 + \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_3 L_0 \sin q_3)$

On trouve les deux équations associées :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0 = (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 - m_2 (\ddot{q}_3 L_0 \sin q_3 + \dot{q}_3^2 L_0 \cos q_3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} \right) = -m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 L_0 \cos q_3 = \ddot{q}_3 \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L_0^2 \right) - m_2 L_0 (\ddot{q}_1 \sin q_3 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos q_3)$$

On voit tout de suite que ces équations sont difficiles à résoudre. Essayons par le hamiltonien:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &= p_1 = (m_1 + m_2)\dot{q}_1 - m_2\dot{q}_3 L_0 \sin q_3 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_3} &= p_2 = \dot{q}_3 \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) - m_2 \dot{q}_1 L_0 \sin q_3 \\ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -m_2 L_0 \sin q_3 \\ -m_2 L_0 \sin q_3 & \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{p_1 \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) + p_2 (m_2 L_0 \sin q_3)}{(m_1 + m_2) \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) - (m_2 L_0 \sin q_3)^2} \\ \dot{q}_3 &= \frac{p_1 m_2 L_0 \sin q_3 + p_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) - (m_2 L_0 \sin q_3)^2}\end{aligned}$$

Le hamiltonien est alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = T &= \frac{1}{2} \sum p_i \dot{q}_i \\ &= p_1 \frac{p_1 \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) + p_2 (m_2 L_0 \sin q_3)}{(m_1 + m_2) \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) - (m_2 L_0 \sin q_3)^2} \\ &\quad + p_2 \frac{p_1 m_2 L_0 \sin q_3 + p_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) \left(\frac{2R^2 m_1}{5} + m_2 L^2 \right) - (m_2 L_0 \sin q_3)^2}\end{aligned}$$

Et on voit qu'ici encore, les équations différentielles ne seront pas linéaires et ne pourront être résolues aisément. On supposera donc que \dot{q}_3 est une constante. On peut alors aisément trouver le mouvement en q_1 .

Par le Lagrangien:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2(\ddot{q}_3 L_0 \sin q_3 + \dot{q}_3^2 L_0 \cos q_3) &= 0 \\ (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 &= m_2(\dot{q}_3^2 L_0 \cos q_3)\end{aligned}$$

En posant $m_1 = m_2$ et $\dot{q}_3 = b$ (donc $q_3 = bt$)

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2} (b L_0 \cos bt)$$

On trouve la solution homogène directement $\ddot{q}_1 = 0$

$$\dot{q}_1 = c$$

$q_1 = ct + k$ ($k = 0$, car la masse est initialement à l'origine, et c est au choix)

Solution non homogène:

$$\frac{1}{2}(bL_0 \cos bt) = e^{\alpha t} [P_n(t) \cos(\beta t) + q_n(t) \sin(\beta t)]$$

Par comparaison, on trouve $\alpha = 0, \beta = b, q_n(t) = 0$.

On trouve une solution non homogène de la forme $q_1(t) = A \cos(bt)$

$$q'_1(t) = -bA \sin(bt)$$

$$q''_1(t) = -b^2 A \cos(bt)$$

$$-b^2 A \cos(bt) = \frac{1}{2}(bL_0 \cos bt)$$

$$A = -\frac{bL_0}{2}$$

La solution générale est donc

$$q_1(t) = ct - \frac{bL_0}{2} \cos(bt)$$