Analyse de séries temporelles avec R

Alexis Gabadinho
alexis.gabadinho@protonmail.com

15 novembre 2024

Table des matières I

Table des matières II

Section 1

Introduction

Support de cours et exercices

- Ce support est écrit avec LaTeX et `knitr` (document incluant du code R exécuté dynamiquement)
- L'environnement RStudio sera utilisé lors de la formation
- Le fichier source du support sera fourni aux participant-e-s, et leur permettra d'exécuter le code contenu dans les diapositives sur leur ordinateur
- Plusieurs jeux de données contenant des séries macroéconomiques sont utilisées pour les exemples. Ces données sont disponibles sous la forme de fichiers ‘csv‘ ou fournies par certaines des librairies R utilisées
- De nombreuses formules mathématiques sont présentes dans les diapositives. Il n'est pas nécessaire de les comprendre, elles seront expliquées en détail lors de la formation

Librairies R requises

- Les librairies suivantes doivent être installées :
  - insee
  - tidyverse (il s'agit en fait d'une collection de librairies dont : tibble, tidyr, ggplot2)
  - GGally (ajout de fonctions à ggplot2)
  - ggfortify (ajout de fonctions à ggplot2)
  - tsibble (objets de type 'tidy' pour le stockage de données temporelles)
  - feasts (description, décomposition, représentations graphiques de séries temporelles)
  - fable
  - structchange (tests de changement structurel)
  - urca (test de racine unitaire)
  - vars (modèles VAR et VEC)

Section 2

Environnement de travail (rappels)

Le tidyverse et ggplot

- Pour importer et manipuler les données, on utilisera principalement le tidyverse une collection de librairies pour la science des données (data science)
- Les librairies partagent des structures de données, une philisophie

```
library(tidyverse)

## - Attaching core tidyverse packages ------------ tidyverse 2.0.0 -
## v dplyr     1.1.4     v readr     2.1.5
## v forcats   1.0.0     v stringr   1.5.1
## v ggplot2   3.5.1     v tibble    3.2.1
## v lubridate 1.9.3     v tidyr     1.3.1
## v purrr     1.0.2
## - Conflicts --------------------- tidyverse_conflicts() -
## x dplyr::filter() masks stats::filter()
## x dplyr::lag()    masks stats::lag()
## i Use the conflicted package (<http://conflicted.r-lib.org/>) to force all conflicts to become
errors
```

- Pour les graphiques nous utiliserons principalement la librairie ggplot2, avec le theme 'minimal'

```
library(ggplot2)
theme_set(theme_minimal())
```

Données Nelson-Plosser

Introduction

- Les données 'Nelson-Plosser' contiennent 14 séries temporelles macroécononiques
- L'article orignal [1], Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series est paru dans *Journal of Monetary Economics*)
- Dans leur article, Nelson et Plosser font l'hypothèse que la plupart des séries temporelles macroéconomiques sont mieux décrites par une nonstationarité de type stochastique (unit-root stationarity) que par une tendance déterministe
- La longueur des séries est variable, mais elles se terminent toutes en 1988
- Le jeu de données est décrit ici

Données Nelson-Plosser

Liste des séries

- Les 14 séries temporelles :
  - cpi = consumer price index
  - ip = industrial production
  - gnp.nom = nominal GNP (millions de dollars 1988)
  - vel = velocity
  - emp = employment
  - int.rate = interest rate
  - nom.wages = nominal wages
  - gnp.def = GNP deflator
  - money.stock = money stock
  - gnp.real = real GNP (milliards de dollars 1958)
  - stock.prices = stock prices (SP500)
  - gnp.capita = GNP per capita (dollars 1958)
  - real.wages = real wages
  - unemp = unemployment

Données Nelson-Plosser

Importation des données au format csv

- La fonction `read.csv2` permet d'importer les données à partir du fichier csv
- A noter : dans le fichier csv, le séparateur de champ est une virgule et le séparateur décimal est un point (format européen)

```
Nelson_Plosser <- read.csv2("../data/Nelson_Plosser.csv",
                           header=TRUE, sep=",", dec = ".")
head(Nelson_Plosser)

##   year      cpi         ip gnp.nom vel emp int.rate nom.wages gnp.def
## 1 1860 3.295837 -0.1053605      NA  NA  NA       NA        NA      NA
## 2 1861 3.295837 -0.1053605      NA  NA  NA       NA        NA      NA
## 3 1862 3.401197 -0.1053605      NA  NA  NA       NA        NA      NA
## 4 1863 3.610918  0.0000000      NA  NA  NA       NA        NA      NA
## 5 1864 3.871201  0.0000000      NA  NA  NA       NA        NA      NA
## 6 1865 3.850148  0.0000000      NA  NA  NA       NA        NA      NA
##   money.stock gnp.real stock.prices gnp.capita real.wages unemp
## 1          NA       NA           NA         NA         NA    NA
## 2          NA       NA           NA         NA         NA    NA
## 3          NA       NA           NA         NA         NA    NA
## 4          NA       NA           NA         NA         NA    NA
## 5          NA       NA           NA         NA         NA    NA
## 6          NA       NA           NA         NA         NA    NA
```

Données Nelson-Plosser

Statistiques descriptives (1)

- Pour les statistiques descriptives de chaque variable on peut utiliser la fonction `descr` de la librairie `summarytools`

```
library(summarytools)
descr(Nelson_Plosser %>% select(1:6))
```

```
## Descriptive Statistics
## Nelson_Plosser
## N: 129
##
##                          cpi      emp   gnp.nom        ip       vel      year
## ----------------- -------- -------- --------- -------- -------- ---------
##              Mean     3.99    10.85     12.59     2.73     0.78   1924.00
##           Std.Dev     0.71     0.45      1.47     1.56     0.38     37.38
##               Min     3.22     9.96     10.42    -0.11     0.15   1860.00
##                Q1     3.39    10.53     11.35     1.48     0.53   1892.00
##            Median     3.78    10.78     12.46     2.77     0.68   1924.00
##                Q3     4.40    11.19     13.71     4.07     0.92   1956.00
##               Max     5.87    11.67     15.40     5.23     1.72   1988.00
##               MAD     0.67     0.49      1.67     1.92     0.24     47.44
##               IQR     1.01     0.63      2.34     2.59     0.38     64.00
##                CV     0.18     0.04      0.12     0.57     0.48      0.02
##          Skewness     1.06    -0.09      0.34    -0.12     0.97      0.00
##       SE.Skewness     0.21     0.24      0.27     0.21     0.22      0.21
##          Kurtosis     0.24    -0.94     -1.13    -1.13     0.13     -1.23
##           N.Valid   129.00    99.00     80.00   129.00   120.00    129.00
##         Pct.Valid   100.00    76.74     62.02   100.00    93.02    100.00
```

Données Nelson-Plosser

Matrice de corrélation

- La matrice de corrélation contient les coefficients de corrélation linéaire entre les variables prises 2 à 2

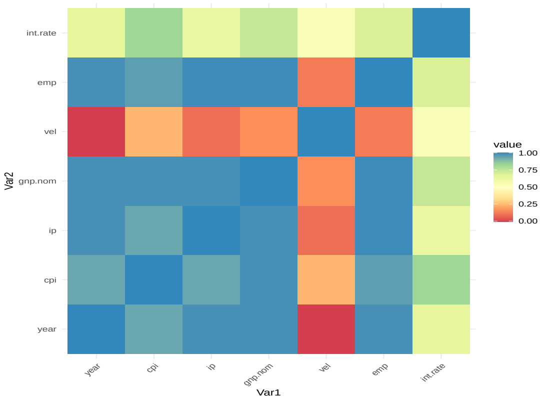
```
datanum <- Nelson_Plosser %>%
    filter(year > 1909) %>%
    select(1:7)
cormat <- round(cor(datanum), 2)
cormat
```

```
##           year  cpi   ip gnp.nom   vel  emp int.rate
## year      1.00 0.93 0.98    0.98 -0.01 0.98     0.65
## cpi       0.93 1.00 0.93    0.98  0.24 0.95     0.82
## ip        0.98 0.93 1.00    0.98  0.09 0.99     0.63
## gnp.nom   0.98 0.98 0.98    1.00  0.16 0.99     0.74
## vel      -0.01 0.24 0.09    0.16  1.00 0.12     0.53
## emp       0.98 0.95 0.99    0.99  0.12 1.00     0.69
## int.rate  0.65 0.82 0.63    0.74  0.53 0.69     1.00
```

Données Nelson-Plosser

Matrice de corrélation : Heatmap

```
library(reshape2)
cormat %>% melt() %>% ggplot(aes(x=Var1, y=Var2, fill=value)) +
  geom_tile() +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, vjust = 1, hjust=1)) +
  scale_fill_distiller(palette = "Spectral", direction = 1)
```



Données Nelson-Plosser

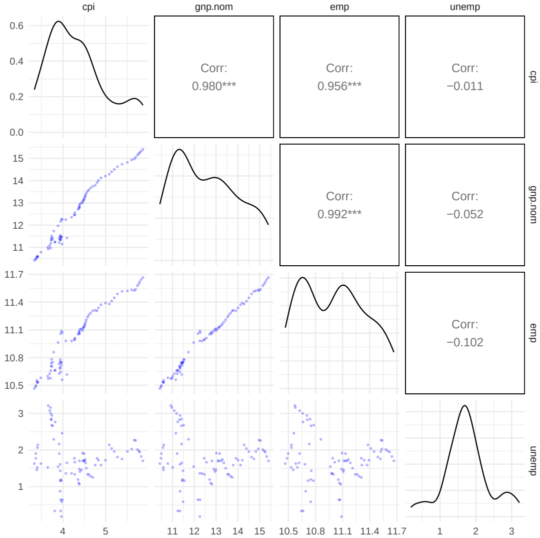
Pairplot (1)

- On peut visualiser la distribution et la corrélation entre variables avec la fonction `ggpairs` de la librairie `GGally`
- On sélectionne ici un sous-ensemble de variables pour limiter la taille du graphique

```
Nelson_Plosser %>%
  filter(year>=1909) %>%
  select(cpi, gnp.nom, emp, unemp) %>%
  ggpairs(upper = list(continuous = wrap("cor", size = 4)),
          lower = list(continuous = wrap("points", colour="blue", alpha=0.3, size=0.5)))
```

Données Nelson-Plosser

Pairplot (1)



Données retail

Importation des données au format csv

- Série des ventes du commerce de détail et nourriture (Advance retail sales)
- Données mensuelles, en millions de dollars, non corrigées des variations saisonnières
- Source : FRED (Federal Reserve Bank Economic Data)
- On importe les données à partir du fichier csv
- A noter : dans le fichier csv, le séparateur décimal est un point

```
retail <- read.csv2("../data/RSXFSN.csv", header=TRUE, sep=",", dec = ".")
head(retail)
```

```
##         DATE RSXFSN
## 1 1992-01-01 130683
## 2 1992-02-01 131244
## 3 1992-03-01 142488
## 4 1992-04-01 147175
## 5 1992-05-01 152420
## 6 1992-06-01 151849
```

Données retail

Conversion de la date

- La date est au format `character`, il faut la convertir

```
summary(retail)
```

```
##      DATE               RSXFSN
##  Length:381         Min.   :130683
##  Class :character   1st Qu.:236830
##  Mode  :character   Median :315540
##                     Mean   :326550
##                     3rd Qu.:394764
##                     Max.   :654825
```

- On utilise la fonction `as.Date`

```
retail$DATE <- as.Date(retail$DATE,format="%Y-%m-%d")
summary(retail)
```

```
##       DATE                RSXFSN
##  Min.   :1992-01-01   Min.   :130683
##  1st Qu.:1999-12-01   1st Qu.:236830
##  Median :2007-11-01   Median :315540
##  Mean   :2007-10-31   Mean   :326550
##  3rd Qu.:2015-10-01   3rd Qu.:394764
##  Max.   :2023-09-01   Max.   :654825
```

La librairie insee

Taux de chômage (1)

- La librairie insee permet d'accéder directement à de nombreuses séries temporelles macro-économiques
- Ici on récupère la série des taux de chômage

```
library(insee)
df_idbank_list_selected =
  get_idbank_list("CHOMAGE-TRIM-NATIONAL") %>% #Unemployment dataset
  add_insee_title() %>%
  filter(INDICATEUR == "CTTXC") %>% #unemployment rate based on ILO standards
  filter(REF_AREA == "FM") %>%  # all France excluding overseas departements
  filter(SEXE == 0) # men and women

list_idbank = df_idbank_list_selected %>% pull(idbank)

fr_unemp = get_insee_idbank(list_idbank, startPeriod = "1950-01") %>% split_title()
```

La librairie `insee`

Taux de chômage (2)

- La série est sauvegardée dans le fichier `fr_unemp.RData`, elle peut être importée avec la fonction `load`

```
load("../data/fr_unemp.RData")
head(fr_unemp)
```

```
## # A tibble: 6 x 24
##   DATE       TIME_PERIOD OBS_VALUE OBS_STATUS OBS_QUAL OBS_TYPE IDBANK    FREQ
##   <date>     <chr>           <dbl> <chr>      <chr>    <chr>    <chr>     <chr>
## 1 2024-04-01 2024-Q2           7.1 A          DEF      A        001688526 T
## 2 2024-01-01 2024-Q1           7.2 A          DEF      A        001688526 T
## 3 2023-10-01 2023-Q4           7.3 A          DEF      A        001688526 T
## 4 2023-07-01 2023-Q3           7.2 A          DEF      A        001688526 T
## 5 2023-04-01 2023-Q2           7   A          DEF      A        001688526 T
## 6 2023-01-01 2023-Q1           6.9 A          DEF      A        001688526 T
## # i 16 more variables: TITLE_FR <chr>, TITLE_FR1 <chr>, TITLE_FR2 <chr>,
## #   TITLE_FR3 <chr>, TITLE_FR4 <chr>, TITLE_EN <chr>, TITLE_EN1 <chr>,
## #   TITLE_EN2 <chr>, TITLE_EN3 <chr>, TITLE_EN4 <chr>, LAST_UPDATE <chr>,
## #   UNIT_MEASURE <chr>, UNIT_MULT <chr>, REF_AREA <chr>, DECIMALS <chr>,
## #   OBS_REV <chr>
```

La librairie insee

Taux de chômage (3)

- Les colonnes TITLE_xxx contiennent l'intitulé des séries

```
fr_unemp %>% distinct(TITLE_FR)
```

```
## # A tibble: 4 x 1
##   TITLE_FR
##   <chr>
## 1 Taux de chômage au sens du BIT - Ensemble - France métropolitaine - Données C~
## 2 Taux de chômage au sens du BIT - Ensemble des 25 à 49 ans - France métropolit~
## 3 Taux de chômage au sens du BIT - Ensemble des 50 ans ou plus - France métropo~
## 4 Taux de chômage au sens du BIT - Ensemble des moins de 25 ans - France métrop~
```

- Début et fin de la série

```
fr_unemp %>% summarise(début=min(DATE), fin=max(DATE))
```

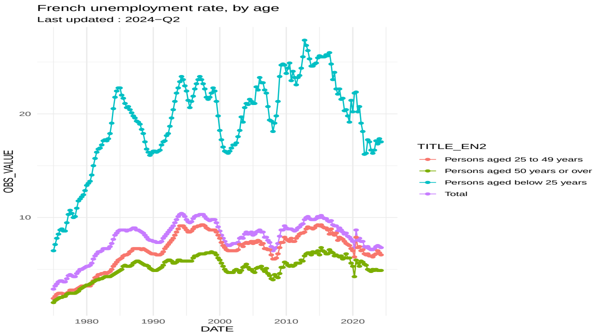
```
## # A tibble: 1 x 2
##   début      fin
##   <date>     <date>
## 1 1975-01-01 2024-04-01
```

La librairie insee

Taux de chômage (4)

- On visualise les séries avec ggplot

```
ggplot(fr_unemp, aes(x = DATE, y = OBS_VALUE, colour = TITLE_EN2)) +
  geom_line() +
  geom_point() +
  ggtitle("French unemployment rate, by age") +
  labs(subtitle = sprintf("Last updated : %s", fr_unemp$TIME_PERIOD[1]))
```



La librairie insee

PIB (1)

- Téléchargement de la série trimestrielle du PIB, corrigé des variations saisonnières (CVS)

```
df_idbank_list_selected =
  get_idbank_list("CNT-2014-PIB-EQB-RF") %>% # Gross domestic product balance
  filter(FREQ == "T") %>% #quarter
  add_insee_title() %>% #add titles
  filter(OPERATION == "PIB") %>% #GDP
  filter(NATURE == "VALEUR_ABSOLUE") %>% #rate
  filter(CORRECTION == "CVS-CJO") #SA-WDA, seasonally adjusted, working day adjusted

idbank = df_idbank_list_selected %>% pull(idbank)

fr_pib = get_insee_idbank(idbank)
```

La librairie insee
PIB (2)

- La série est sauvegardée dans le fichier `fr_pib.RData`, elle peut être importée avec la fonction `load`

```
load("../data/fr_pib.RData")
head(fr_pib)
```

```
## # A tibble: 6 x 16
##   DATE       TIME_PERIOD OBS_VALUE OBS_STATUS OBS_QUAL OBS_TYPE IDBANK    FREQ
##   <date>     <chr>           <dbl> <chr>      <chr>    <chr>    <chr>     <chr>
## 1 2024-01-01 2024-Q1        595694 A          DEF      A        010565708 T
## 2 2023-10-01 2023-Q4        594336 A          DEF      A        010565708 T
## 3 2023-07-01 2023-Q3        593602 A          DEF      A        010565708 T
## 4 2023-04-01 2023-Q2        593156 A          DEF      A        010565708 T
## 5 2023-01-01 2023-Q1        589375 A          DEF      A        010565708 T
## 6 2022-10-01 2022-Q4        589499 A          DEF      A        010565708 T
## # i 8 more variables: TITLE_FR <chr>, TITLE_EN <chr>, LAST_UPDATE <chr>,
## #   UNIT_MEASURE <chr>, UNIT_MULT <chr>, REF_AREA <chr>, DECIMALS <chr>,
## #   OBS_REV <chr>
```

La librairie insee
PIB (3)

- Date de début de la série

```
min(fr_pib$DATE)
## [1] "1949-01-01"
```

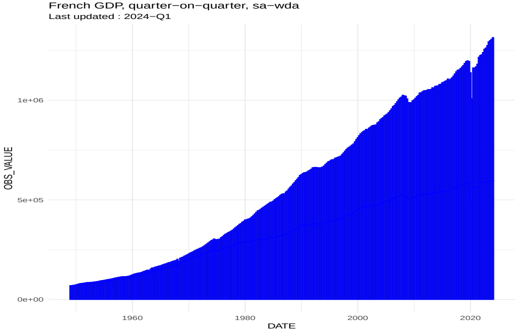
- Les colonnes TITLE_xxx contiennent l'intitulé des séries

```
fr_pib %>% distinct(TITLE_EN)
## # A tibble: 2 x 1
##   TITLE_EN
##   <chr>
## 1 Total gross domestic product - Volumes chained at previous year prices - SA-W~
## 2 Total gross domestic product - Values at current prices - SA-WDA series - Sto~
```

La librairie insee
PIB (4)

- Visualisation avec ggplot

```
ggplot(fr_pib, aes(x = DATE, y = OBS_VALUE)) +
  geom_col(color="blue") +
  ggtitle("French GDP, quarter-on-quarter, sa-wda") +
  labs(subtitle = sprintf("Last updated : %s", fr_pib$TIME_PERIOD[1]))
```



La librairie insee

Indice des prix à la consommation (1)

- Téléchargement de la série mensuelle de l'indice des prix à la consommation (attention, il y a énormément de séries, et il faut repérer l'identifiant de la série (`idbank`))

```
df_idbank_list_selected =
  get_idbank_list("IPC-2015") %>% # Gross domestic product balance
  filter(FREQ == "M" & idbank=="001759970") %>%
  add_insee_title()

idbank = df_idbank_list_selected %>% pull(idbank)

fr_cpi = get_insee_idbank(idbank)
```

La librairie `insee`

Indice des prix à la consommation (2)

- La série est sauvegardée dans le fichier `fr_cpi.RData`
- Pour cette série les données sont **mensuelles**

```
load("../data/fr_cpi.RData")
head(fr_cpi)

## # A tibble: 6 x 17
##   DATE       TIME_PERIOD OBS_VALUE OBS_STATUS OBS_QUAL OBS_TYPE IDBANK    FREQ
##   <date>     <chr>           <dbl> <chr>      <chr>    <chr>    <chr>     <chr>
## 1 2024-10-01 2024-10          120. P          P        A        001759970 M
## 2 2024-09-01 2024-09          120. P          P        A        001759970 M
## 3 2024-08-01 2024-08          121. A          DEF      A        001759970 M
## 4 2024-07-01 2024-07          120. A          DEF      A        001759970 M
## 5 2024-06-01 2024-06          120. A          DEF      A        001759970 M
## 6 2024-05-01 2024-05          120. A          DEF      A        001759970 M
## # i 9 more variables: TITLE_FR <chr>, TITLE_EN <chr>, LAST_UPDATE <chr>,
## #   UNIT_MEASURE <chr>, UNIT_MULT <chr>, REF_AREA <chr>, DECIMALS <chr>,
## #   DATE_JO <chr>, OBS_REV <chr>
```

La librairie `insee`

Indice des prix à la consommation (3)

- Les colonnes `TITLE_xxx` contiennent l'intitulé des séries

```
fr_cpi %>% distinct(TITLE_FR)
```

```
## # A tibble: 1 x 1
##   TITLE_FR
##   <chr>
## 1 Indice des prix à la consommation - Base 2015 - Ensemble des ménages - France~
```

- Début et fin de la série

```
fr_cpi %>% summarise(début=min(fr_cpi$DATE), fin=max(fr_cpi$DATE))
```

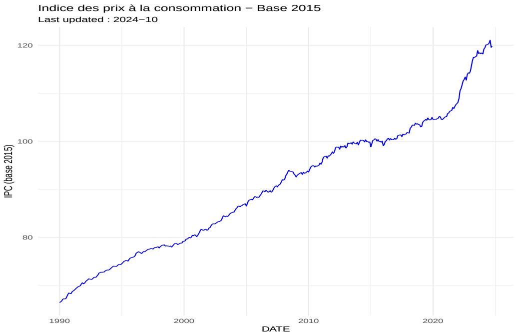
```
## # A tibble: 1 x 2
##   début      fin
##   <date>     <date>
## 1 1990-01-01 2024-10-01
```

La librairie insee

Indice des prix à la consommation (4)

- Visualisation avec ggplot

```
ggplot(fr_cpi, aes(x = DATE, y = OBS_VALUE)) +
  geom_line(color="blue") +
  ggtitle("Indice des prix à la consommation - Base 2015") +
  labs(subtitle = sprintf("Last updated : %s", fr_cpi$TIME_PERIOD[1])) +
  ylab("IPC (base 2015)")
```



Environnement de travail

Exercices

1. Le fichier `pib_fr.csv` contient la série temporelle du PIB et de ses composants depuis 1949 (valeurs aux prix courants - Source : INSEE) :
   - Importez les données à partir du fichier `csv`
   - Explorez les données avec des statistiques descriptives et des graphiques
2. La série de l'indice des prix à la consommation est contenue dans le fichier `fr_cpi.RData`
   - Importez les données
   - La fréquence de cette série est mensuelle. Transformez-là en série trimestrielle (moyenne sur les trois mois d'un trimestre). Les fonctions `quarter` et `year` vous seront utiles.
3. Fusionnez les séries `fr_pbi`, `fr_unemp` et `fr_cpi` dans un jeu de données unique `fr_macro` (utilisez les fonctions '`_join`' de `dlpyr`)

Environnement de travail

Exercices : Solutions (1)

- Importation du fichier csv

```
pib <- read.csv("../data/pib_fr.csv", sep=";", dec=',')
head(pib)
```

```
##   PERIODE PIB  P7 P3M P3P P31G P32G  P3 P51S P51B P51G P51M P51P P51 P54  P6
## 1  1949T1 3.2 0.4 1.9 0.1  0.2  0.2 2.4  0.4    0  0.1  0.1    0 0.6 0.1 0.4
## 2  1949T2 3.2 0.4 2.0 0.1  0.3  0.2 2.5  0.4    0  0.1  0.1    0 0.6 0.1 0.5
## 3  1949T3 3.3 0.4 2.1 0.1  0.3  0.2 2.6  0.4    0  0.1  0.1    0 0.6 0.1 0.5
## 4  1949T4 3.4 0.4 2.1 0.1  0.3  0.3 2.6  0.4    0  0.1  0.1    0 0.7 0.1 0.5
## 5  1950T1 3.6 0.5 2.1 0.1  0.3  0.3 2.7  0.5    0  0.1  0.1    0 0.7 0.2 0.5
## 6  1950T2 3.8 0.5 2.2 0.1  0.3  0.3 2.8  0.5    0  0.1  0.1    0 0.7 0.2 0.6
```

Environnement de travail

Exercices : Solutions (2)

- Importation et transformation de la série `fr_cpi`

```
load("../data/fr_cpi.RData")
fr_cpi <- fr_cpi %>% mutate(Année=year(DATE), Trimestre=quarter(DATE)) %>%
  group_by(Année, Trimestre) %>%
  rename(cpi=OBS_VALUE) %>%
  summarise(cpi=mean(cpi))
```

```
## `summarise()` has grouped output by 'Année'. You can override using the
## `.groups` argument.
```

```
head(fr_cpi)
```

```
## # A tibble: 6 x 3
## # Groups:   Année [2]
##   Année Trimestre   cpi
##   <dbl>     <int> <dbl>
## 1  1990         1  66.6
## 2  1990         2  67.2
## 3  1990         3  67.7
## 4  1990         4  68.3
## 5  1991         1  68.8
## 6  1991         2  69.4
```

Environnement de travail

Exercices : Solutions (3)

- Fusion des jeux de données

```
load("../data/fr_pib.RData")
fr_pib <- fr_pib %>% mutate(Année=year(DATE), Trimestre=quarter(DATE)) %>%
  rename(gnp=OBS_VALUE) %>%
  filter(TITLE_FR==unique(fr_pib$TITLE_FR)[1]) %>%
  select(Année, Trimestre, gnp)

load("../data/fr_unemp.RData")
fr_unemp <- fr_unemp %>% mutate(Année=year(DATE), Trimestre=quarter(DATE)) %>%
  rename(unemp=OBS_VALUE) %>%
  filter(TITLE_FR2=='Ensemble') %>%
  select(Année, Trimestre, unemp)

fr_macro <- fr_pib %>%
  left_join(fr_unemp, by=c("Année", "Trimestre")) %>%
  left_join(fr_cpi, by=c("Année", "Trimestre")) %>%
  arrange(Année, Trimestre)

head(fr_macro)
```

```
## # A tibble: 6 x 5
##   Année Trimestre   gnp unemp   cpi
##   <dbl>     <int> <dbl> <dbl> <dbl>
## 1  1949         1 66592    NA    NA
## 2  1949         2 67170    NA    NA
## 3  1949         3 68183    NA    NA
## 4  1949         4 69046    NA    NA
## 5  1950         1 70999    NA    NA
## 6  1950         2 72780    NA    NA
```

Section 3

Librairies spécialisées et structures de séries temporelles dans R

Liste des librairies

- En plus de la librairie standard `stats`, il existe plusieurs librairies R pour la manipulation et l'analyse des séries temporelles
  - tsibble
  - `forecasts`
  - `feasts`
  - `fable`
  - `ggfortify`
  - `tseries`
  - `zoo`
- Dans cette partie on se focalise sur les classes permettant de stocker les séries temporelles fournies par les librairies `stats` et `tsibble`

Les objets `ts` et `mts`

- La classe de base fournie par R pour représenter des séries temporelles s'appelle `ts` (ts = time series, série univariée) ou `mts` (mts = multiple time series, série multivariée)
- Cette classe est définie dans le package `stats`
- Elle concerne des séries temporelles qui sont échantillonnées à des périodes **équidistantes** dans le temps

Les objets `ts` et `mts`

Paramètres

- Les objets de classe `ts` ou `mts` possèdent trois paramètres caractéristiques :
  - `frequency` : nombre d'observations par unité de temps. Si l'unité de temps de la série est l'année, la valeur 4 correspond à des trimestres et la valeur 12 à des mois
  - `start` : date de début de la série temporelle (nombre unique ou vecteur de deux entiers représentant respectivement une unité temporelle (e.g. une année) et une subdivision de cette unité (mois ou trimestre selon la valeur du paramètre frequency)
  - `end` : date de fin de la série temporelle, exprimée comme pour le paramètre `start`

Les objets ts et mts

Données NelPlo (1)

- Les données Nelson-Plosser sont également présentes dans la librairie `tseries`
- Les données annuelles (frequency=1) sont contenues dans un objet de type `mts`

```
library(tseries)

## Registered S3 method overwritten by 'quantmod':
##   method            from
##   as.zoo.data.frame zoo

data(NelPlo)
class(NelPlo)

## [1] "mts" "ts"
```

Les objets ts et mts

Données NelPlo (2)

- La fonction `window` permet d'extraire une portion d'une série temporelle `ts`
- L'ensemble des séries est complet à partir de 1909 (il y a des valeurs manquantes sur certaines séries avant)

```
window(NelPlo, start=1905, end=1910)
```

```
## Time Series:
## Start = 1905
## End = 1910
## Frequency = 1
##           cpi       ip  gnp.nom       vel      emp int.rate nom.wages  gnp.def
## 1905 3.295837 2.219203       NA 0.7561220 10.37274     3.50  6.329721 3.277145
## 1906 3.332205 2.282382       NA 0.8241754 10.42671     3.55  6.357842 3.303217
## 1907 3.367296 2.302585       NA 0.8241754 10.44497     3.80  6.393591 3.342862
## 1908 3.332205 2.140066       NA 0.7227060 10.41169     3.95  6.306275 3.335770
## 1909 3.332205 2.302585 10.41631 0.7839015 10.46516     3.77  6.395262 3.370738
## 1910 3.367296 2.360854 10.47164 0.7747272 10.48464     3.80  6.478510 3.397858
##      money.stock gnp.real stock.prices gnp.capita real.wages     unemp
## 1905    2.326302       NA     2.196113         NA   3.033991 1.4586150
## 1906    2.405142       NA     2.265921         NA   3.025776 0.5306283
## 1907    2.451005       NA     2.059239         NA   3.026261 1.0296194
## 1908    2.437116       NA     2.051556         NA   2.973998 2.0794415
## 1909    2.540026 4.760463     2.273156   7.163172   3.062924 1.6292405
## 1910    2.590767 4.788325     2.235376   7.170120   3.111291 1.7749524
```

Les objets ts et mts

Données growthofmoney (Growth of Money Supply)

- Deux séries temporelles concernant le contrôle de la monnaie par la réserve fédérale aux USA
- Article original : R.L. Hetzel (1981), The Federal Reserve System and Control of the Money Supply in the 1970's. *Journal of Money, Credit and Banking*
- Série temporelle multivariée, données trimestrielles

```
library(lmtest)
data(growthofmoney)
window(growthofmoney, end=c(1971,4))
```

```
##         TG1.TG0 AG0.TG0
## 1970 Q2     0.0    -0.4
## 1970 Q3     1.0    -1.0
## 1970 Q4     1.0     1.1
## 1971 Q1     2.5     5.8
## 1971 Q2    -6.0    -4.4
## 1971 Q3     4.5    -1.6
## 1971 Q4    -0.5     1.6
```

Les objets ts et mts

Données USIncExp (US Income and Expenditure)

- Deux séries macro-économiques (USA) de janvier 1959 à février 2001, corrigées des variations saisonnières :
  - Revenus personnels mensuels aggrégés (millions de dollars)
  - Dépences de consommation aggrégées (millions de dollars)

```
library(strucchange)
data("USIncExp")
window(USIncExp, start = c(1959, 6), end = c(1960, 6))
```

```
##          income expenditure
## Jun 1959  396.3       319.2
## Jul 1959  396.5       318.8
## Aug 1959  395.0       321.2
## Sep 1959  396.2       325.2
## Oct 1959  397.8       323.8
## Nov 1959  401.2       323.9
## Dec 1959  405.7       323.9
## Jan 1960  407.0       324.6
## Feb 1960  407.7       326.4
## Mar 1960  408.6       331.2
## Apr 1960  411.3       337.6
## May 1960  412.8       331.1
## Jun 1960  413.1       331.2
```

Les objets ts et mts

Conversion des données retail

- Pour les données retail, frequency=12 (mois)

```
retail_ts <- ts(retail['RSXFSN'], frequency=12, start=c(1997,3))
window(retail_ts, start=2020)
```

```
##         Jan    Feb    Mar    Apr    May    Jun    Jul    Aug    Sep    Oct
## 2020 391483 451076 350291 341828 393094 387358 409453 397809 406550 404923
## 2021 396067 464014 351787 363543 405012 394764 413059 410100 406013 416538
## 2022 413933 482011 369102 365610 423016 407256 434511 423071 416908 431797
## 2023 441923 496745 389703 380562 444873 420099 464101 443603 441604 455946
## 2024 459172 493167 398783 384243 446272 441878 474963 447578 461010 472517
## 2025 467189 518979 417123 413923 426258 376867 461785 479784 492689 487325
## 2026 490941 557696 461308 437031 560218 554269 565177 557446 552179 550169
## 2027 574978 627113 516923 507901 598541 596690 616626 609743 599929 613508
## 2028 605205 654825 547156 529374 604084 588220 631496 612243 605403 628892
##         Nov    Dec
## 2020 381996 392602
## 2021 394237 397425
## 2022 412522 417753
## 2023 417072 441746
## 2024 428241 454941
## 2025 474038 493601
## 2026 529133 553588
## 2027 577966 597170
## 2028 592660
```

Les objets ts et mts

Extraction de l'index

- La fonction tsp permet d'extraire les propriétés d'un objet ts ou mts

```
tsp(retail_ts)

## [1] 1997.167 2028.833   12.000
```

- Extraction de l'index

```
retail2022 <- window(retail_ts, start=c(2022,1), end=c(2022,12))
time(retail2022)

##           Jan      Feb      Mar      Apr      May      Jun      Jul      Aug
## 2022 2022.000 2022.083 2022.167 2022.250 2022.333 2022.417 2022.500 2022.583
##           Sep      Oct      Nov      Dec
## 2022 2022.667 2022.750 2022.833 2022.917
```

- Conversion de l'index au format numérique

```
library(lubridate)
as.numeric(time(retail2022))

##  [1] 2022.000 2022.083 2022.167 2022.250 2022.333 2022.417 2022.500 2022.583
##  [9] 2022.667 2022.750 2022.833 2022.917
```

Les objets `tsibble`

- La librairie `tsibble` fournit une structure de type ‘tidy‘ pour les données temporelles ainsi que des outils pour le traitement de ces données
- Les objets de la classe `tsibble` possèdent deux attributs principaux :
  - `index` est la variable qui représente le temps (qui permet d’ordonner du passé au présent)
  - `key` identifie (éventuellement) la série (unité d’observation)
- Chaque observation est identifiée de manière unique par la combinaison `index` et `key`

Les objets tsibble

Conversion des données growthofmoney

- On utilise la fonction as_tsibble

```
library(tsibble)
gmoney_tsbl <- growthofmoney %>% as_tsibble()
gmoney_tsbl
```

```
## # A tsibble: 38 x 3 [1Q]
## # Key:       key [2]
##       index key     value
##       <qtr> <chr>   <dbl>
##  1 1970 Q2 TG1.TG0   0
##  2 1970 Q3 TG1.TG0   1
##  3 1970 Q4 TG1.TG0   1
##  4 1971 Q1 TG1.TG0   2.5
##  5 1971 Q2 TG1.TG0  -6
##  6 1971 Q3 TG1.TG0   4.5
##  7 1971 Q4 TG1.TG0  -0.5
##  8 1972 Q1 TG1.TG0  -1
##  9 1972 Q2 TG1.TG0   0.5
## 10 1972 Q3 TG1.TG0  -1.5
## # i 28 more rows
```

Les objets tsibble

Conversion des données NelPlo (1)

- La transformation d'un objet de type mts en objet tsibble produit un jeu de données au format long

```
nelplo_tsbl <- NelPlo %>% as_tsibble()
nelplo_tsbl %>% filter(index>1980 & key=="gnp.capita")
```

```
## # A tsibble: 8 x 3 [1Y]
## # Key:       key [1]
##   index key        value
##   <dbl> <chr>      <dbl>
## 1  1981 gnp.capita  8.34
## 2  1982 gnp.capita  8.31
## 3  1983 gnp.capita  8.33
## 4  1984 gnp.capita  8.39
## 5  1985 gnp.capita  8.41
## 6  1986 gnp.capita  8.43
## 7  1987 gnp.capita  8.46
## 8  1988 gnp.capita  8.49
```

Les objets tsibble

Conversion des données NelPlo (2)

- Les 14 séries sont identifiées par la variable key

```
nelplo_tsbl %>% distinct(key)
```

```
## # A tibble: 14 x 1
##    key
##    <chr>
##  1 cpi
##  2 ip
##  3 gnp.nom
##  4 vel
##  5 emp
##  6 int.rate
##  7 nom.wages
##  8 gnp.def
##  9 money.stock
## 10 gnp.real
## 11 stock.prices
## 12 gnp.capita
## 13 real.wages
## 14 unemp
```

Les objets tsibble

Conversion des données retail

- Les données `retail` ne contiennent qu'une seule série, il n'y a pas de variable key

```
retail_tsbl <- retail_ts %>% as_tsibble()
head(retail_tsbl)
```

```
## # A tsibble: 6 x 2 [1M]
##        index  value
##        <mth>  <dbl>
## 1  1997 mars 130683
## 2 1997 avril 131244
## 3   1997 mai 142488
## 4  1997 juin 147175
## 5 1997 juil. 152420
## 6  1997 août 151849
```

Librairies spécialisées et strucutre de séries temporelles

Exercices

- Convertissez les données `pib` (série du PIB et de ses composantes) en objets `mts` et `tsibble`
- Convertissez les données `fr_macro` (série de l'index des prix à la consommation, du teux de chômage et du pib) en objets `mts` et `tsibble`

Librairies spécialisées et strucutre de séries temporelles

Exercices : Solutions (1)

- Convertissez les données `pib` (série du PIB et de ses composantes) en objets `mts` et `tsibble`

```
pib_ts <- pib %>% select(-PERIODE) %>% ts(start=1949, frequency=4)
window(pib_ts, start=1949, end=1950)
```

```
##         PIB  P7 P3M P3P P31G P32G  P3 P51S P51B P51G P51M P51P P51 P54  P6
## 1949 Q1 3.2 0.4 1.9 0.1  0.2  0.2 2.4  0.4    0  0.1  0.1    0 0.6 0.1 0.4
## 1949 Q2 3.2 0.4 2.0 0.1  0.3  0.2 2.5  0.4    0  0.1  0.1    0 0.6 0.1 0.5
## 1949 Q3 3.3 0.4 2.1 0.1  0.3  0.2 2.6  0.4    0  0.1  0.1    0 0.6 0.1 0.5
## 1949 Q4 3.4 0.4 2.1 0.1  0.3  0.3 2.6  0.4    0  0.1  0.1    0 0.7 0.1 0.5
## 1950 Q1 3.6 0.5 2.1 0.1  0.3  0.3 2.7  0.5    0  0.1  0.1    0 0.7 0.2 0.5
```

```
pib_tsbl <- as_tsibble(pib_ts)
pib_tsbl
```

```
## # A tsibble: 4,470 x 3 [1Q]
## # Key:       key [15]
##      index key   value
##      <qtr> <chr> <dbl>
##  1 1949 Q1 PIB     3.2
##  2 1949 Q2 PIB     3.2
##  3 1949 Q3 PIB     3.3
##  4 1949 Q4 PIB     3.4
##  5 1950 Q1 PIB     3.6
##  6 1950 Q2 PIB     3.8
##  7 1950 Q3 PIB     4
##  8 1950 Q4 PIB     4.2
##  9 1951 Q1 PIB     4.4
## 10 1951 Q2 PIB     4.8
## # i 4,460 more rows
```

- Convertissez les données `fr_macro` (série de l'index des prix à la consommation, du

Librairies spécialisées et strucutre de séries temporelles

Exercices : Solutions (2)

- Convertissez les données `fr_macro` (série de l'index des prix à la consommation, du teux de chômage et du pib) en objets `mts` et `tsibble`

```
fr_macro_ts <- fr_macro %>% select(-c(Année, Trimestre)) %>% ts(start=1949, frequency=4)
window(fr_macro_ts, start=1989, end=1992)
```

```
##            gnp unemp      cpi
## 1989 Q1 353355   8.1       NA
## 1989 Q2 357704   7.9       NA
## 1989 Q3 361651   7.8       NA
## 1989 Q4 366833   7.8       NA
## 1990 Q1 367883   7.7 66.56667
## 1990 Q2 369798   7.7 67.15333
## 1990 Q3 372019   7.6 67.65333
## 1990 Q4 371377   7.6 68.33000
## 1991 Q1 372215   7.6 68.80333
## 1991 Q2 373446   7.7 69.36333
## 1991 Q3 374761   8.0 69.82000
## 1991 Q4 376881   8.2 70.38333
## 1992 Q1 379939   8.4 70.71667
```

```
fr_macro_tsbl <- as_tsibble(fr_macro_ts)
fr_macro_tsbl
```

```
## # A tsibble: 903 x 3 [1Q]
## # Key:       key [3]
##      index key   value
##      <qtr> <chr> <dbl>
##  1 1949 Q1 gnp   66592
##  2 1949 Q2 gnp   67170
##  3 1949 Q3 gnp   68183
##  4 1949 Q4 gnp   69046
##  5 1950 Q1 gnp   70999
```

Section 4

Définitions

Série temporelle et processus stochastique

- Série temporelle univariée à temps discret = ensemble d'observations dans $\mathbb{R}$ enregistrées à un temps spécifique $t \in \mathbb{Z}$
- En statistique l'observation x est considérée comme la réalisation d'une **variable aléatoire** X
- Une série temporelle $(x_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sera considérée comme la réalisation d'un **processus stochastique** $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
- Processus stochastique => pour tout $t \in \mathbb{Z}$ fixé, X_t est une variable aléatoire réelle
- L'objectif est d'étudier les caractéristiques principales de ce processus (tendance, variation saisonnière), de le modéliser et de faire des prévisions

Stationarité

- Dans de très nombreux cas, on ne peut pas renouveler la suite de mesures dans des conditions identiques
- Pour que le modèle déduit à partir d'une suite d'observations ait un sens, il faut que toute portion de la trajectoire observée fournisse des informations sur la loi du processus et que des portions différentes, mais de même longueur, fournissent les mêmes indications. D'où la notion de stationnarité.
- Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est (faiblement) stationnaire si son espérance et ses autocovariances sont invariantes par translation dans le temps :
  - $\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(X_t) = \mu$
  - $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z}$: $Cov(X_t, X_{t-h})$ dépend de l'intervalle h, mais pas de t

Fonction d'autocovariance et d'autocorrélation

- La fonction d'autocorrelation (ACF) est la corrélation entre x_t et x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, etc ... :

$$\rho_j = \frac{Cov(y_t, y_{t-j})}{\sqrt{Var(y_t) \cdot Var(y_{t-j})}}$$

- Elle permet d'identifier une structure dans la série temporelle

Fonction d'autocorrélation avec acf

- Pour les objets de la classe `ts` ou `mts` on peut utiliser la fonction `acf` (cette fonction produit un graphique par défaut)

```
acf(NelPlo[,'cpi'], plot=FALSE)

##
## Autocorrelations of series 'NelPlo[, "cpi"]', by lag
##
##     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
## 1.000 0.966 0.928 0.889 0.853 0.818 0.784 0.748 0.712 0.677 0.645 0.615 0.585
##    13    14    15    16    17    18    19    20    21
## 0.558 0.533 0.509 0.489 0.469 0.450 0.431 0.412 0.396
```

- La corrélation entre le cpi à l'instant t et le cpi à l'instant $t-1$ (une année avant) est de 0.966

Fonction d'autocorrélation avec ACF

- Pour les objets de la classe `tsibble` on peut utiliser la fonction `ACF` de la librairie `feasts`

```
library(feasts)

## Le chargement a nécessité le package : fabletools

nelplo_tsbl %>%
  filter(key=="cpi") %>%
  ACF(value)

## # A tsibble: 21 x 3 [1Y]
## # Key:       key [1]
##    key        lag   acf
##    <chr> <cf_lag> <dbl>
##  1 cpi         1Y 0.966
##  2 cpi         2Y 0.928
##  3 cpi         3Y 0.889
##  4 cpi         4Y 0.853
##  5 cpi         5Y 0.818
##  6 cpi         6Y 0.784
##  7 cpi         7Y 0.748
##  8 cpi         8Y 0.712
##  9 cpi         9Y 0.677
## 10 cpi        10Y 0.645
## # i 11 more rows
```

Bruit blanc
Définition

- Un bruit blanc (white noise) ϵ_t est une série de variables aléatoires **non corrélées** de moyenne nulle et de variance constante
- $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible si :
  - Son espérance est égale à 0 :
  $$\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$$
  - Sa variance est constante :
  $$\mathbb{E}(\sigma_t^2) = \sigma^2$$
  - La covariance entre (ϵ_t) et (ϵ_{t-h}) est nulle :
  $$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{Z} : Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-h}) = 0$$
- Un bruit blanc gaussien ϵ_t est une série de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), suivant une loi normale $N(0, \sigma_z^2)$ de moyenne nulle et de variance σ_z^2
- Un bruit blanc gaussien est une série **strictement stationnaire**

Bruit blanc gaussien

Simulation (1)

- On simule un bruit blanc gaussien en générant 100 nombres aléatoires issus d'une loi normale $N(0, 1)$

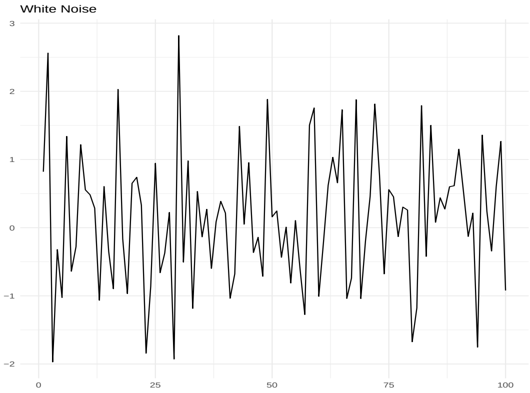
```
bbg <- ts(rnorm(100))
window(bbg, start=1, end=10)
```

```
## Time Series:
## Start = 1
## End = 10
## Frequency = 1
##  [1]  0.8207019  2.5613941 -1.9693333 -0.3211296 -1.0248720  1.3393405
##  [7] -0.6390270 -0.2776282  1.2175927  0.5548819
```

- Pour la représentation graphique, on utilise la fonction `autoplot` de la librairie `ggfortify`

```
library(ggfortify)
autoplot(bbg) +
  ggtitle("White Noise")
```

Bruit blanc gaussien
Simulation (2)



Bruit blanc gaussien
Simulation (3)

- On peut vérifier que la série ne présente pas d'autocorrélation avec la fonction `acf`

```
acf(bbg, plot=FALSE)
##
## Autocorrelations of series 'bbg', by lag
##
##      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
##  1.000 -0.237 -0.113 -0.046  0.067 -0.039  0.017 -0.074 -0.025  0.023  0.076
##     11     12     13     14     15     16     17     18     19     20
## -0.036 -0.154  0.203  0.035  0.045 -0.043 -0.093 -0.086  0.190  0.046
```

Bruit blanc
Test de Portmanteau

- A l'issue d'une modélisation, il nous faudrait idéalement obtenir un signal résiduel qui ne contient plus d'information temporelle
- Dans le cadre des modèles ARMA, on souhaite que le résidu soit un bruit blanc (faible), c'est-à-dire sans dépendance temporelle linéaire
- On peut tester la **blancheur** d'une série $y_t, t = 1, \ldots, T$ en utilisant le test de Portmanteau
- La statistique de Portmanteau est calculée à partir des k premiers coefficients d'autocorrélation $Q_k = T \sum_{h=1}^{k} \hat{\rho}^2(h)$ où k est un décalage choisi par l'utilisateur et ρ_j l'estimateur du coefficient d'autocorrélation d'ordre h de la série y_t

Bruit blanc

Test de Portmanteau : Exemple

- On peut utiliser les fonctions `box_pierce` et `ljung_box` (pour les petits échantillons) de la librairie `feasts`
- Par défaut $k = 1$ (argument `lag=1`)
- Hypothèse H0 : pas d'autocorrélation

```
box_pierce(rnorm(100))

##   bp_stat bp_pvalue
## 0.8194048 0.3653543
```

- La p-valeur est supérieure à 0.05, on accepte H0
- A noter : quand le test est appliqué non sur des v.a. indépendantes, mais sur les résidus d'un ajustement estimant m paramètres, on utilise le paramètre 'dof' (degrees of freedom, degrés de liberté)

Marche aléatoire

Définition

- La série $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$ est une **marche aléatoire** (random walk)
- Une série suivant une marche aléatoire prend, à deux dates consécutives, des valeurs proches et la variation par rapport à la date précédente est **indépendante du passé** (c'est un bruit blanc)
- En exprimant y_{t-1} en fonction de $y_{t-2}, \ldots$ et d'une valeur initiale y_0 on obtient :

$$y_t = y_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_t$$

- Espérance :

$$E(y_t) = y_0$$

- Variance :

$$var(y_t) = t \cdot \sigma_\epsilon^2$$

- Covariance :

$$cov(y_t, y_{t+k}) = t \cdot \sigma_z^2, (k > 0)$$

- Il s'agit d'une série **non-stationnaire** car ni la variance ni l'autoccorélation ne sont constantes

Marche aléatoire

Simulation (1)

- On simule une marche aléatoire avec un bruit blanc gaussien de moyenne 0 et d'écart type 1

```
tmax <- 100
wnoise <- rnorm(99, mean=0, sd=1)
y <- rep(0,tmax)

for (t in 2:tmax) {
  y[t] = y[t-1] + wnoise[t-1]
}
rw <- tibble(time=1:tmax, y=y)
head(rw)
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##    time     y
##   <int> <dbl>
## 1     1  0
## 2     2  2.23
## 3     3  3.45
## 4     4  3.63
## 5     5  2.77
## 6     6  2.10
```

Marche aléatoire

Simulation (2)

- L'auto-corrélation est significative

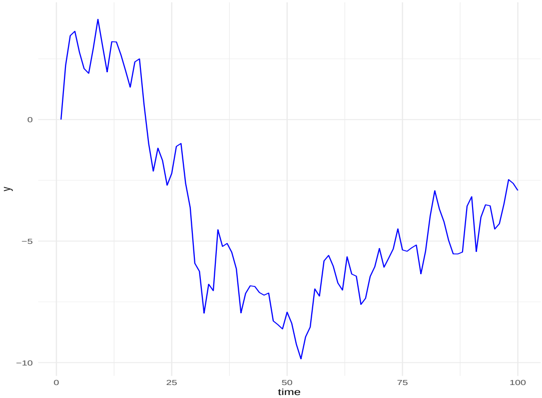
```
acf(rw[,"y"], plot=FALSE)
```

```
##
## Autocorrelations of series 'rw[, "y"]', by lag
##
##     0     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10    11    12
## 1.000 0.959 0.906 0.855 0.823 0.785 0.752 0.724 0.699 0.659 0.610 0.557 0.503
##    13    14    15    16    17    18    19    20
## 0.454 0.401 0.352 0.301 0.251 0.201 0.160 0.119
```

Marche aléatoire (random walk)

Simulation (3)

```
ggplot(rw) +
  geom_line(aes(x=time, y=y), colour="blue")
```



Marche aléatoire avec dérive

Définition

- La série $y_t = \alpha + y_{t-1} + \epsilon_t$ est une **marche aléatoire** avec dérive (random walk with drift)
- En exprimant y_{t-1} en fonction de $y_{t-2}, \ldots$ et d'une valeur initiale y_0 on obtient :

$$y_t = \alpha \cdot t + y_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_t$$

- Espérance :

$$E(y_t) = \alpha \cdot t + y_0$$

- Variance :

$$var(y_t) = t \cdot \sigma_z^2$$

- Covariance :

$$cov(y_t, y_{t+k}) = t \cdot \sigma_z^2, (k > 0)$$

Marche aléatoire avec dérive
Simulation (1)

- On simule une marche aléatoire avec dérive ($alpha = 0.8$), on réutilise bruit blanc gaussien `wnoise` généré pour l'exemple précédent

```
tmax <- 100
alpha <- 0.8

y <- rep(0,tmax)

for (t in 2:tmax) {
  y[t] = alpha + y[t-1] + wnoise[t-1]
}
rwd <- tibble(time=1:tmax, y=y)
head(rwd)
```

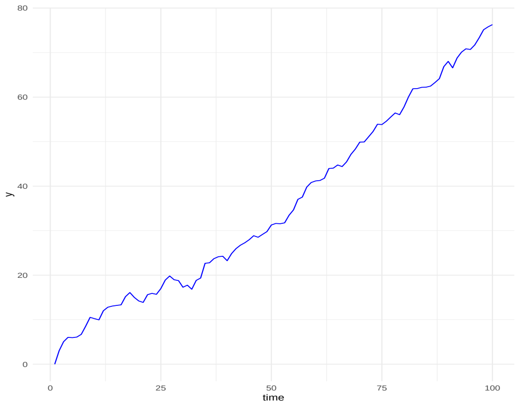
```
## # A tibble: 6 x 2
##    time     y
##   <int> <dbl>
## 1     1  0
## 2     2  3.03
## 3     3  5.05
## 4     4  6.03
## 5     5  5.97
## 6     6  6.10
```

Marche aléatoire avec dérive

Simulation (2)

- Le graphique de y_t en fonction du temps est donc celui d'une droite à laquelle est superposée une marche aléatoire

```
ggplot(rwd) +
  geom_line(aes(x=time, y=y), colour="blue")
```



Modèles théoriques

Exercices

1. Simulez une série temporelle $y_t, t = 1, \dots, 1000$ représentant bruit blanc gaussien suivant une loi normale $N(0, 3)$ de moyenne 0 et d'écart type 3
   - Calculez la moyenne et l'écart-type pour les observations $y_0, \dots, y_{99}$, $y_{100}, \dots, y_{199}$, etc ... et représentez les graphiquement
   - Calculez les coefficients d'autocorrélation de la série
2. Construisez une série $y_t, t = 1, \dots, 1000$ représentant une marche aléatoire avec $y_0 = 1.39$ et $\sigma_\epsilon^2 = 0.41$
   - Calculez la moyenne et l'écart-type pour les observations $y_0, \dots, y_{99}$, $y_{100}, \dots, y_{199}$, etc ... et représentez les graphiquement
   - Calculez les coefficients d'autocorrélation de la série
   - Réalisez un test de Portmanteau sur la série, que concluez vous ?

Section 5

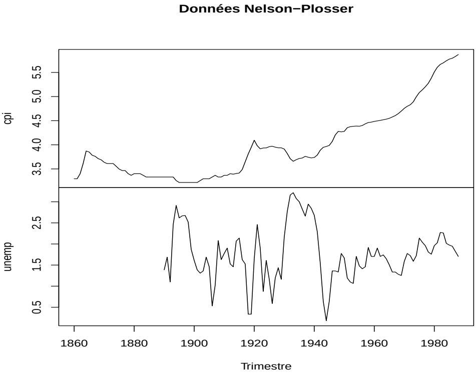
Analyse descriptive et représentations graphiques

Représentations graphiques de séries temporelles

Le chronogramme

- Chronogramme : diagramme des points (x=date, y=valeur de l'observation)
- Pour un objet de la classe `ts` on peut utiliser la méthode générique `plot`

```
plot(NelPlo[,c("cpi", "unemp")], xlab="Trimestre", main="Données Nelson-Plosser")
```

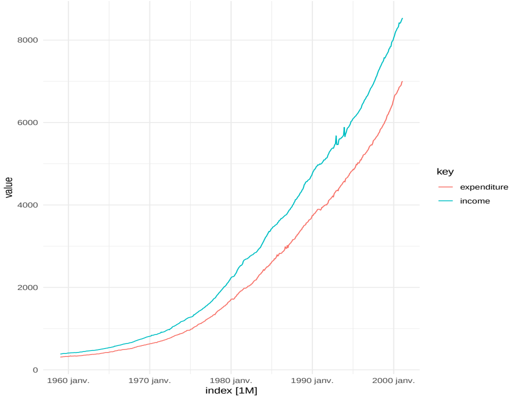


Représentations graphiques de séries temporelles

Chronogramme : Données USIncExp

- Pour un objet de la classe `tsibble`, on peut utiliser la fonction `autoplot`

```
USIncExp %>% as_tsibble() %>% autoplot()
```

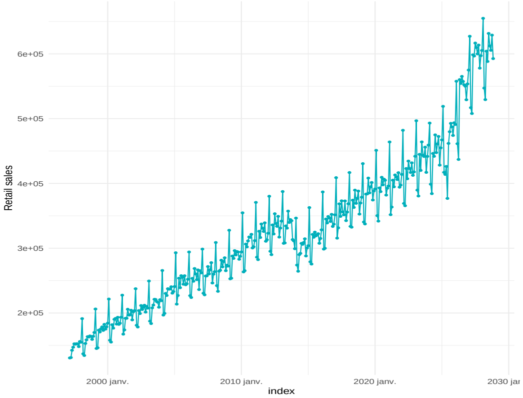


Représentations graphiques de séries temporelles

Chronogramme : Données retail

- Pour un objet de la classe tsibble, on peut également utiliser ggplot pour plus de contrôle

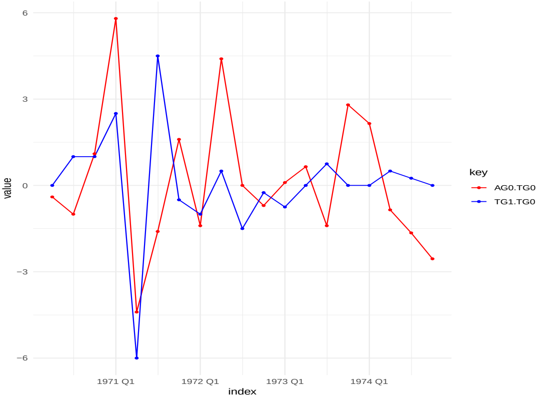
```
ggplot(retail_tsbl, aes(x = index, y = value)) +
    geom_line(color = "#00AFBB", size = 0.5) +
    geom_point(color = "#00AFBB", size = 1) + ylab("Retail sales")
```



Représentations graphiques de séries temporelles

Chronogramme : Données growthofmoney

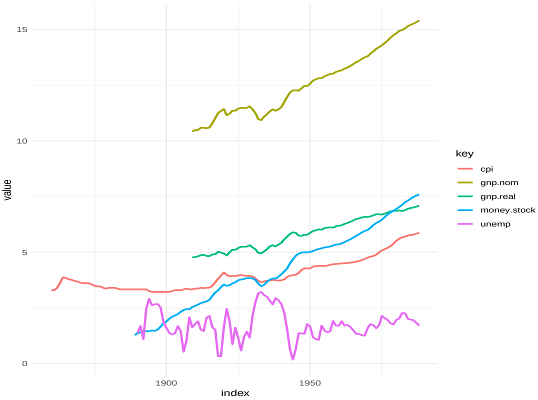
```
ggplot(gmoney_tsbl, aes(x = index, y = value)) +
  geom_line(aes(color = key), size = 0.5) +
  geom_point(aes(color = key), size = 1) +
  scale_color_manual(values = c("red", "blue"))
```



Représentations graphiques de séries temporelles

Chronogramme : Données nelplo (Nelson-Plosser)

```
nelplo_tsbl %>% filter(key %in% c("gnp.nom", "gnp.real", "unemp", "cpi", "money.stock")) %>%
  ggplot(aes(x = index, y = value)) +
    geom_line(aes(color = key), size = 1)
```

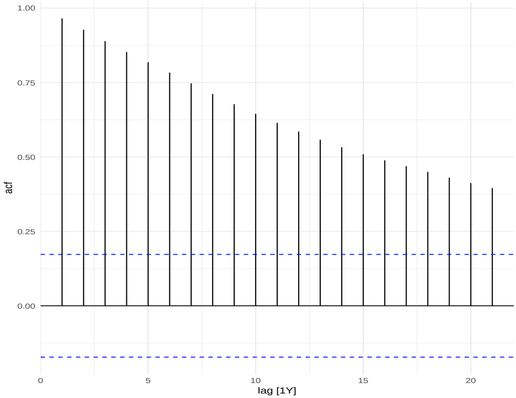


Représentations graphiques de séries temporelles

Fonction d'autocorrélation

- On peut représenter simplement la fonction d'autocorrélation obtenue avec la fonction `ACF`, ici la série `cpi` des données Nelson-Plosser

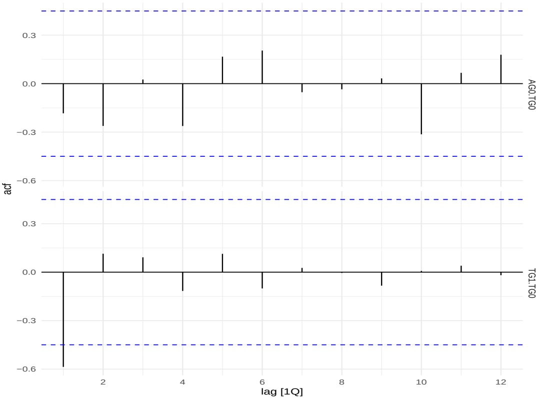
```
nelplo_tsbl %>% filter(key=="cpi") %>%
  ACF(value) %>% autoplot()
```



Représentations graphiques de séries temporelles

Fonction d'autocorrélation : Données growthofmoney

```
gmoney_tsbl %>% ACF() %>% autoplot()
```

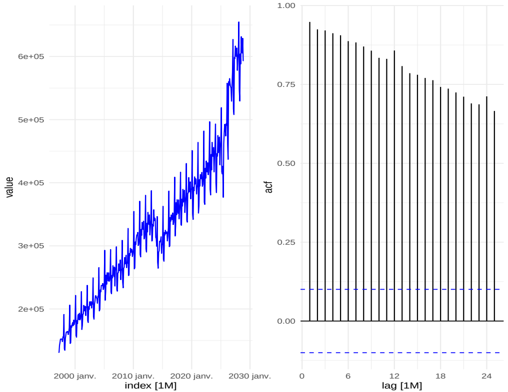


Représentations graphiques de séries temporelles

Fonction d'autocorrélation : Données `retail`

- Ici on utilise la librairie `patchwork` pour combiner deux graphiques

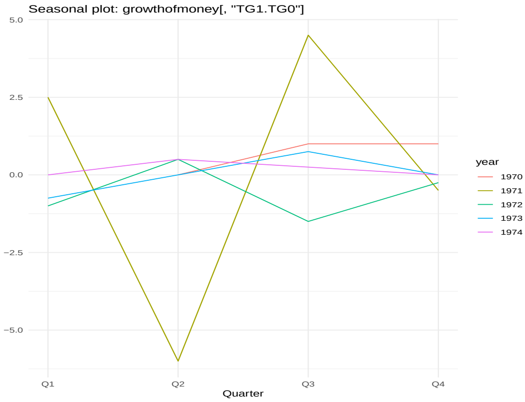
```
library(patchwork)
g1 <- retail_tsbl %>% autoplot(color='blue')
g2 <- ACF(retail_tsbl) %>% autoplot()
g1+g2
```



Représentations graphiques de séries temporelles

Season plot : Données `growthofmoney`

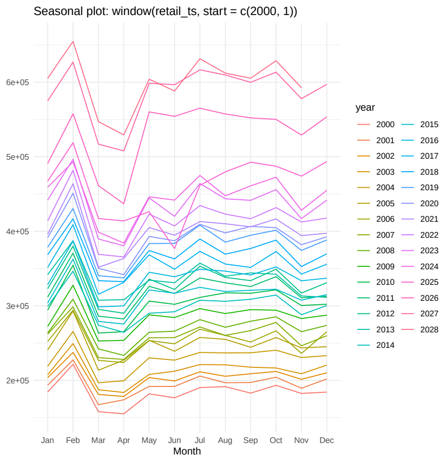
```r
library(forecast)
ggseasonplot(growthofmoney[,"TG1.TG0"])
```



Représentations graphiques de séries temporelles

Season plot : Données `retail`

```
ggseasonplot(window(retail_ts, start=c(2000,1)))
```

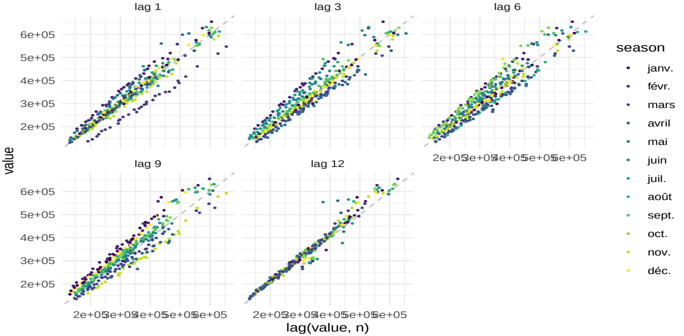


Représentations graphiques de séries temporelles

Lag plot : Données `retail`

- Le **lag plot** représente la série temporelle et ses valeurs précédentes

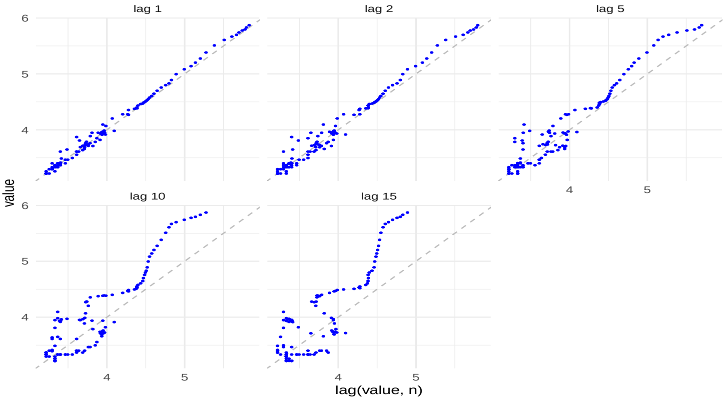
```
retail_tsbl %>% gg_lag(y=value, geom="point", size=0.5, lags=c(1,3,6,9,12))
```



Représentations graphiques de séries temporelles

Lag plot : Données Nelson-Plosser (série cpi)

```
nelplo_tsbl %>% filter(key=='cpi') %>%
  gg_lag(y=value, geom="point", size=0.5, colour="blue", lags=c(1,2,5,10,15))
```



Exercice

- Représentez les séries des données PIB (chronogramme, fonction d'autocorrélation, lag plot)
- Représentez la série du taux de chômage (chronogramme, fonction d'autocorrélation, lag plot)

Section 6

Régression Linéaire

Le modèle de régression linéaire simple

- Modèle de régression linéaire simple (une seule variable indépendante) :

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + \epsilon_i$$

  - Les observations sont indicées par i, $(i = 1, \ldots, N)$
  - y_i est la variable **expliquée** (dépendante)
  - x_i est la variable **explicative** (indépendante)
  - β_1 et β_2 sont les **paramètres** (à estimer)
  - ϵ_i est le **résidu** (écart aléatoire, erreur)
- L'équation de la droite de régression est déterminée par la pente (slope) (β_0) et l'intercept (β_1) :

$$E(y|x) = \beta_1 + \beta_2 \cdot x$$

Hypothèses de base du modèle linéaire

- On parle de Moindres Carrés Ordinaires (MCO) ou Ordinary Least Square model (OLS) car l'objectif lors de l'estimation est de minimiser la somme des erreurs au carré $\sum_i \epsilon_i^2$
- Les hypothèses de base concernent la distribution de probabilité des résidus ϵ_i :
  - Hypothèse 1 : ϵ_i suit une distribution normale $N(\mu, \sigma^2)$
  - Hypothèse 2 : l'espérance de ϵ_i est nulle : $\forall i, E(\epsilon_i) = 0$
  - Hypothèse 3 : la variance de ϵ_i est constante (homoscédasticité) : $\forall i, V(\epsilon_i) = \sigma^2$
  - Hypothèse 4 : la covariance entre deux observations est nulle : $\forall i \neq j, Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$, il n'y a pas d'autocorrélation des résidus, ils sont sériellement indépendants

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser

- On considère les données Nelson-Plosser à partir de l'année 1909 (toutes les séries complètes)
- On utilise la fonction `spread` pour passer du format "long" au format "large"

```
nelplo1909 <- nelplo_tsbl %>%
  filter(index>=1909) %>%
  spread(key = key, value=value)
head(nelplo1909)
```

```
## # A tsibble: 6 x 15 [1Y]
##   index   cpi   emp gnp.capita gnp.def gnp.nom gnp.real int.rate    ip
##   <dbl> <dbl> <dbl>      <dbl>   <dbl>   <dbl>    <dbl>    <dbl> <dbl>
## 1  1909  3.33  10.5       7.16    3.37    10.4     4.76     3.77  2.30
## 2  1910  3.37  10.5       7.17    3.40    10.5     4.79     3.8   2.36
## 3  1911  3.37  10.5       7.18    3.39    10.5     4.81     3.9   2.32
## 4  1912  3.40  10.5       7.22    3.43    10.6     4.87     3.9   2.46
## 5  1913  3.39  10.6       7.21    3.44    10.6     4.88     4     2.53
## 6  1914  3.40  10.5       7.14    3.45    10.6     4.83     4.1   2.46
## # i 6 more variables: money.stock <dbl>, nom.wages <dbl>, real.wages <dbl>,
## #   stock.prices <dbl>, unemp <dbl>, vel <dbl>
```

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Modèle

- Modèle bivarié sur les données Nelson-Plosser :
  - variable expliquée $y =$ gnp.nom (PNB, millions de dollars)
  - variable explicative $x =$ index (année)

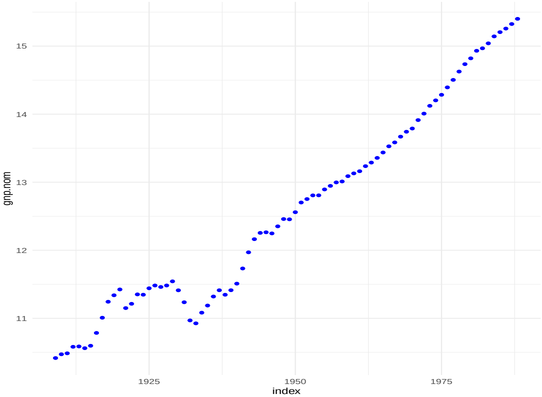
```
nelplo1909 %>% select(index, gnp.nom, emp)
```

```
## # A tsibble: 80 x 3 [1Y]
##    index gnp.nom   emp
##    <dbl>   <dbl> <dbl>
##  1  1909    10.4  10.5
##  2  1910    10.5  10.5
##  3  1911    10.5  10.5
##  4  1912    10.6  10.5
##  5  1913    10.6  10.6
##  6  1914    10.6  10.5
##  7  1915    10.6  10.5
##  8  1916    10.8  10.6
##  9  1917    11.0  10.6
## 10  1918    11.2  10.7
## # i 70 more rows
```

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Visualisation

```
nelplo1909 %>%
  ggplot(aes(index, gnp.nom)) +
    geom_point(colour="blue")
```



Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Estimation

- L'estimation des paramètres se fait avec la fonction `lm` (Linear Models)

```r
mod1 <- lm(gnp.nom ~ index, data=nelplo1909)
summary(mod1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = gnp.nom ~ index, data = nelplo1909)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.70453 -0.16422 -0.04624  0.26225  0.59689
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1.078e+02  2.840e+00  -37.96   <2e-16 ***
## index        6.179e-02  1.458e-03   42.39   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.301 on 78 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9584,Adjusted R-squared:  0.9579
## F-statistic:  1797 on 1 and 78 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Résultats

- Un test avec H0 : $\beta = 0$ est réalisé pour chacun des coefficients

```
summary(mod1)$coefficients
```

```
##                  Estimate  Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -107.81083108 2.840221275 -37.95860 4.766536e-52
## index          0.06179065 0.001457543  42.39371 1.276677e-55
```

- Le coefficient associé à la variable explicative `index` (année) est statistiquement significatif (p-valeur < 0.001)
- La valeur de R^2 (variance expliquée) est élevée

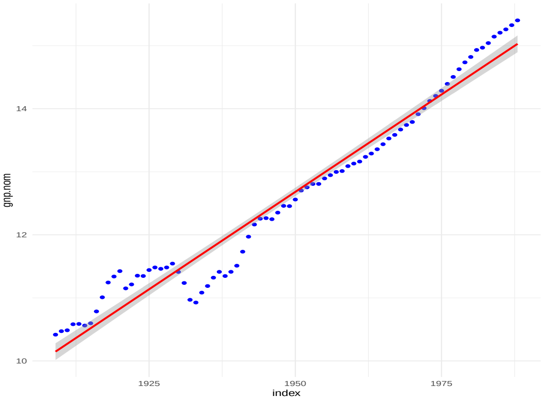
```
summary(mod1)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.9578718
```

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Droite de régression

```
ggplot(nelplo1909, aes(x=index, y=gnp.nom)) +
  geom_point(colour="blue") +
  geom_smooth(method='lm', color="red")
```



Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Valeurs observées, valeurs prédites, résidus

- Les valeurs prédites par le modèle se trouvent dans l'attribut `fitted.values`
- Les résidus représentent la différence valeur observée-valeur prédite, ils se trouvent dans l'attribut `residuals`

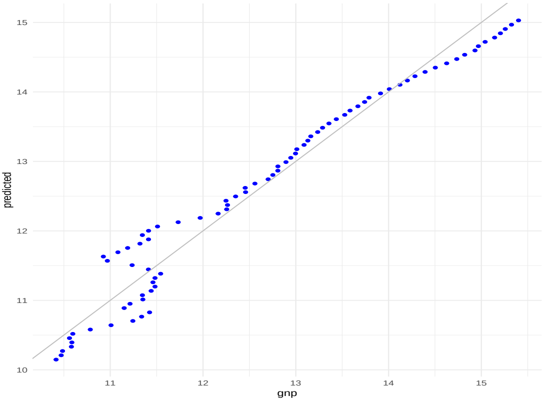
```
mod1_diag <- tibble(gnp=nelplo1909$gnp.nom, predicted=mod1$fitted.values,
                    residual=mod1$residuals)
mod1_diag
```

```
## # A tibble: 80 x 3
##      gnp predicted residual
##    <dbl>     <dbl>    <dbl>
##  1  10.4      10.1   0.269
##  2  10.5      10.2   0.262
##  3  10.5      10.3   0.215
##  4  10.6      10.3   0.249
##  5  10.6      10.4   0.192
##  6  10.6      10.5   0.105
##  7  10.6      10.5   0.0784
##  8  10.8      10.6   0.205
##  9  11.0      10.6   0.367
## 10  11.2      10.7   0.540
## # i 70 more rows
```

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Valeurs prédites x observées

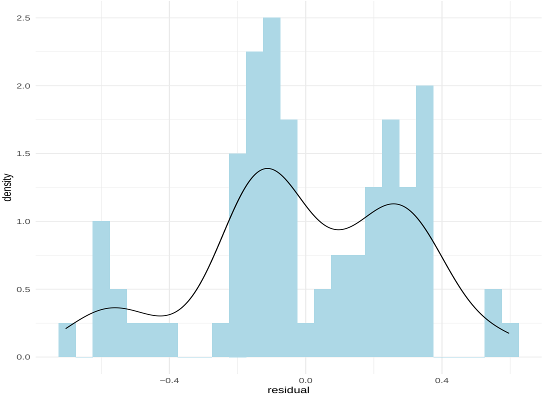
```r
ggplot(mod1_diag) +
  geom_point(aes(x=gnp, y=predicted), colour="blue") +
  geom_abline(colour="grey")
```



Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Distribution des résidus

```r
ggplot(mod1_diag, aes(x=residual)) +
  geom_histogram(aes(y = after_stat(density)), fill="lightblue", binwidth = 0.05) +
  geom_density(aes(x=residual))
```



Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Normalité des résidus

- Pour tester la normalité des résidus on utilise le test de **Shapiro-Wilk**
- Hypothèse H0 : les résidus suivent une distribution normale
- La p-valeur est inférieure à 0.05, on rejette H0 : les résidus ne sont pas distribués normalement

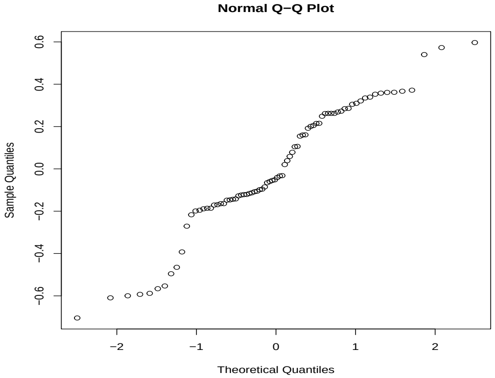
```
shapiro.test(mod1_diag$residual)

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  mod1_diag$residual
## W = 0.95726, p-value = 0.009177
```

Régression linéaire simple

Normalité des résidus - Quantile-Quantile plot

- Le quantile-quantile plot permet de comparer les quantiles des résidus à ceux d'une loi normale

```
qqnorm(mod1_diag$residual)
```



Régression linéaire simple

Homoscédasticité des résidus

- L'homoscédasticité des résidus est une des hypothèses fondamentales du modèle OLS/MCO
- **Homoscédasticité** = la variance des résidus est constante (sur la plage des valeurs prédites par le modèle) :

$$Var(\epsilon_i) = \sigma^2$$

- **Hétéroscédasticité** = la variance des résidus n'est pas constante :

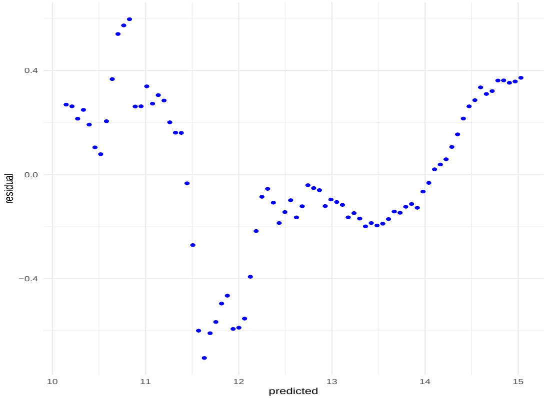
$$Var(\epsilon_i) = \sigma_i^2$$

- Si l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus est violée, les tests d'hypothèse sur les coéfficients β du modèle OLS ne sont plus valides

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Résidus x valeurs prédites

```
ggplot(mod1_diag) +
  geom_point(aes(x=predicted, y=residual), colour="blue")
```



Régression linéaire simple

Homoscédasticité des résidus : Le test de **Breusch-Pagan-Godfrey**

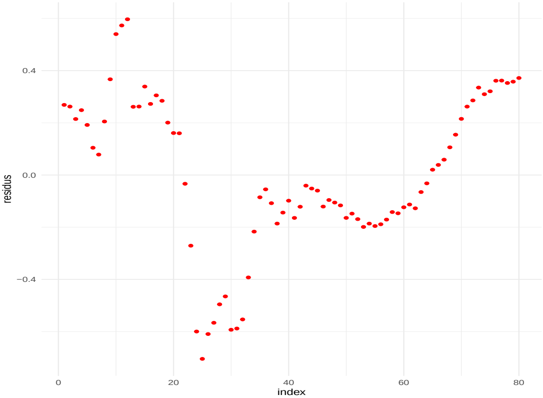
- Le test de **Breusch-Pagan-Godfrey** permet de tester l'homoscédasticité des résidus
- Hypothèse nulle (H0) : homoscédasticité (les résidus ont une variance constante)
- On utilise la function `bptest` de la librairie R `lmtest`
- La p-valeur du test est supérieure à 0.05, on accepte H0

```
library(lmtest)
bptest(mod1)

##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  mod1
## BP = 5.3717, df = 1, p-value = 0.02047
```

Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Autocorrélation des résidus (1)

```
gdata <- tibble(index=1:nrow(mod1_diag), residus=mod1_diag$residual)
gdata %>% ggplot() + geom_point(aes(x=index, y=residus), color="red")
```

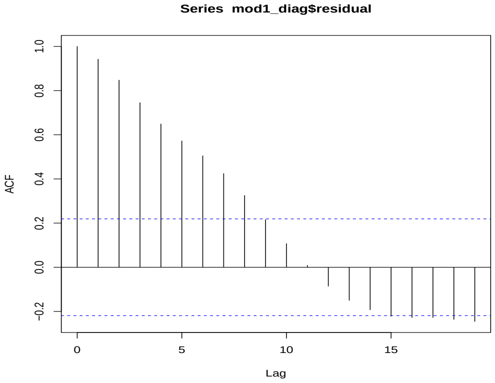


Régression linéaire simple

Données Nelson-Plosser : Autocorrélation des résidus (2)

- Un graphique `acf` permet de visualiser la fonction d'autocorrélation des résidus

```
acf(mod1_diag$residual)
```



Régression linéaire simple

Autocorrélation des résidus : Le test de Durbin-Watson

- Le test de `Durbin-Watson` est un test d'absence d'autocorrélation d'ordre 1 sur les résidus d'une régression linéaire
- On utilise la fonction `dwtest` de la librairie `lmtest`
- Hypothèse nulle (H0) : pas d'autocorrélation des résidus

```
dwtest(mod1)
```

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  mod1
## DW = 0.085604, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

- Ici on rejette l'hypothèse H0, il y a autocorrélation des résidus

Régression linéaire simple

Données `growthofmoney` (1)

- Le modèle de régression utilisé par [2] sur les données `growthofmoney` est décrit par [3] :
  Hetzel argues as follows : If the Federal Open Market Committee had indeed viewed the money supply as its primary intermediate target of policy, it would have provided for operating procedures that would have ensured control of the money supply. This implies a negative value for the coefficient β_2 in the regression

  $$(TG_1 - TG_0) = \beta_1 + \beta_2(AG_0 - TG_0)$$

  where TG_1 is the current target for the growth rate of the money supply, TG_0 is the target of the preceding period, and AG_0 is the actual growth rate of the preceding period.

Régression linéaire simple

Données `growthofmoney` (2)

- Les deux variables utilsées dans le modèle sont :
  - variable dépendante : `TG1.TG0`, difference of current and preceding target for the growth rate of the money supply
  - variable indépendante : `AG0.TG0`, difference of actual growth rate and target growth rate for the preceding period

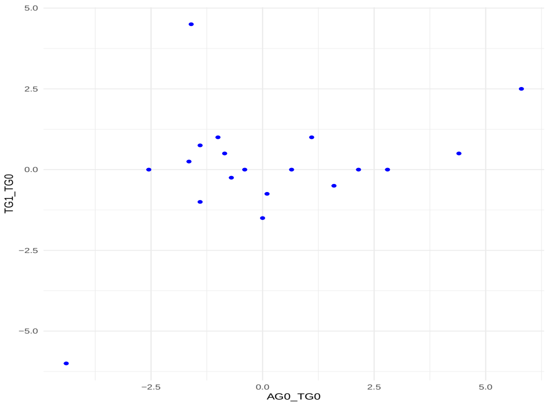
```
data("growthofmoney")
head(growthofmoney)
```

```
##         TG1.TG0 AG0.TG0
## 1970 Q2     0.0    -0.4
## 1970 Q3     1.0    -1.0
## 1970 Q4     1.0     1.1
## 1971 Q1     2.5     5.8
## 1971 Q2    -6.0    -4.4
## 1971 Q3     4.5    -1.6
```

Régression linéaire simple

Données growthofmoney (3)

```
gdata <- tibble(AG0_TG0=growthofmoney[,"AG0.TG0"], TG1_TG0=growthofmoney[,"TG1.TG0"])
ggplot(gdata) + geom_point(aes(x=AG0_TG0, y=TG1_TG0), color="blue")
```



Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Estimation

- Estimation du modèle utilisé par Hetzel dans son article

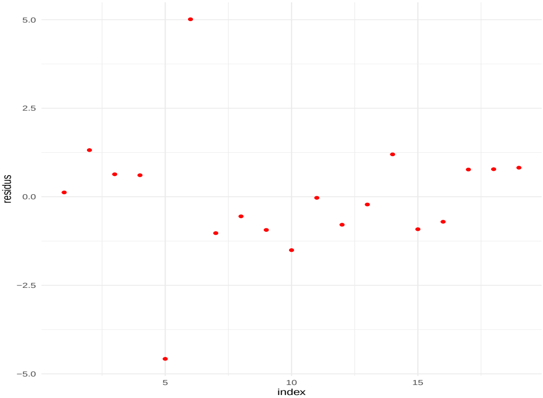
```
modelHetzel <- TG1.TG0 ~ AG0.TG0
gom.mod1 <- lm(modelHetzel, data=growthofmoney)
summary(gom.mod1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = modelHetzel, data = growthofmoney)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -4.5779 -0.8534 -0.0299  0.7737  5.0125
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 0.007322   0.426070   0.017    0.986
## AG0.TG0     0.324858   0.179456   1.810    0.088 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.854 on 17 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1616,Adjusted R-squared:  0.1123
## F-statistic: 3.277 on 1 and 17 DF,  p-value: 0.08797
```

Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Série des résidus

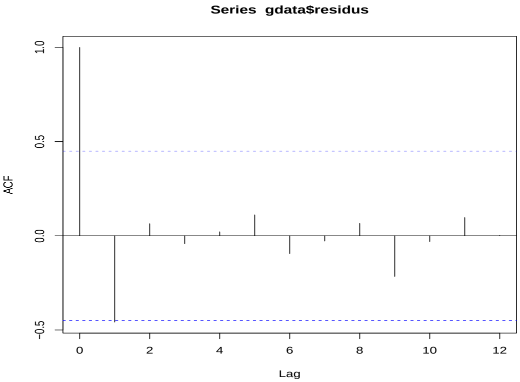
```
gdata <- tibble(index=1:nrow(growthofmoney), residus=gom.mod1$residual)
gdata %>% ggplot() + geom_point(aes(x=index, y=residus), color="red")
```



Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Autocorrélation des résidus (1)

```r
acf(gdata$residus)
```



Régression linéaire simple

Données `growthofmoney` : Autocorrélation des résidus (2)

- La p-valeur du test de **Durbin-Watson** est largement supérieure à 0.05, on accepte H0, il n'y a pas d'autocorrélation des résidus

```
dwtest(modelHetzel, data=growthofmoney)

##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  modelHetzel
## DW = 2.9046, p-value = 0.9839
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

Régression linéaire simple

Données `growthofmoney` : Diagnostic du modèle

- La distance de Cook (Cook's D) est utilsée pour estimer l'influence d'une observation dans un modèle de régression linéaire
- La distance de Cook peut être utilisée :
    - pour indiquer les observations pour lesquelles une vérification de la validité est nécessaire
    - pour indiquer les zones ou il serait utile d'avoir plus d'e données'observations

Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Distance de Cook (1)

- Calcul des distances de Cook avec la fonction `cooks.distance`

```
dcook <- gdata <- data.frame(obs=1:nrow(growthofmoney), dcook=cooks.distance(gom.mod1))
head(dcook)
```

```
##   obs        dcook
## 1   1 0.0001356853
## 2   2 0.0187077141
## 3   3 0.0040829364
## 4   4 0.0453754681
## 5   5 1.3164884600
## 6   6 0.3504193583
```

- On peut utiliser un seuil pour identifier les observations influentes :
  - $D > 1$
  - $D > 4/N$ ou $D > 4/(Nk1)$, ou N est le nombre d'observations et k le nombre de variables indépendantes

```
tcook <- 4/nrow(growthofmoney)
tcook
```

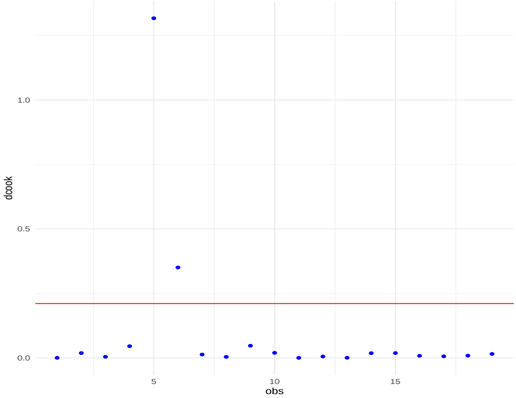
```
## [1] 0.2105263
```

Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Distance de Cook (2)

- Les observations particulièrement influentes sont celles dont la distance de Cook est au dessus du seuil matérialisé par la ligne rouge

```
ggplot(dcook, aes(x=obs, y=dcook)) +
  geom_point(color="blue") +
  geom_hline(aes(yintercept=tcook), color="red")
```



Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Résidus studentisés

- Les résidus studentisés sont calculés en divisant les résidus par leur écart type

```
stres <- data.frame(obs=1:nrow(growthofmoney), stres=rstudent(gom.mod1))
head(stres)
```

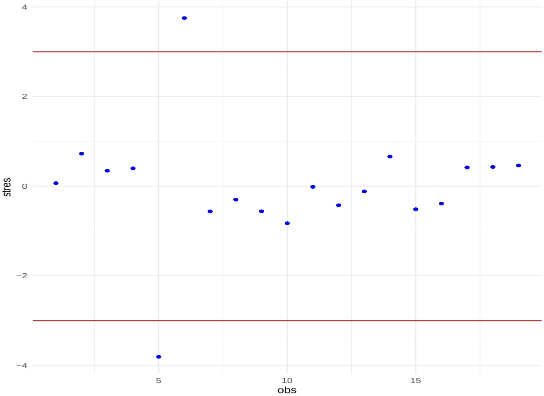
```
##   obs      stres
## 1   1  0.0660265
## 2   2  0.7245157
## 3   3  0.3444020
## 4   4  0.3977586
## 5   5 -3.8084498
## 6   6  3.7506138
```

- Un résidu studentisé supérieur à 3 (2) est considéré comme une valeur aberrante

Régression linéaire simple

Données growthofmoney : Résidus studentisés

```
ggplot(stres, aes(x=obs, y=stres)) +
  geom_point(color="blue") +
  geom_hline(aes(yintercept=3), color="red") +
  geom_hline(aes(yintercept=-3), color="red")
```



Modèle de régression multivarié

- Modèle de régression multivarié = plusieurs variables indépendantes :

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \cdots + \beta_k \cdot x_k + \epsilon$$

Modèle de régression multivarié

Données Nelson-Plosser

- On souhaite prédire le PNB (`gnp.nom`, millions de dollars) par le taux de chômage, l'indice des prix et l'année
- On utilise la fonction `spread` pour passer du format "long" au format "large"

```
nelplo1909 <- nelplo_tsbl %>%
  filter(index>=1909) %>%
  spread(key = key, value=value)
regdata <- nelplo1909 %>%
  select(index, gnp.capita, unemp, cpi)
```

Modèle de régression multivarié

Données Nelson-Plosser : Estimation

```
mod2 <- lm(gnp.capita ~ index+unemp+cpi, data=regdata)
summary(mod2)

##
## Call:
## lm(formula = gnp.capita ~ index + unemp + cpi, data = regdata)
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.178391 -0.034936 -0.001147  0.033163  0.181541
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -2.679e+01  1.719e+00 -15.583   <2e-16 ***
## index        1.775e-02  9.505e-04  18.680   <2e-16 ***
## unemp       -1.489e-01  1.231e-02 -12.095   <2e-16 ***
## cpi          4.099e-02  3.198e-02   1.282    0.204
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.06824 on 76 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9779,Adjusted R-squared:  0.977
## F-statistic:  1119 on 3 and 76 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Modèle de régression multivarié

Données Nelson-Plosser : Sélection du modèle (1)

- On élimine les variables dont le coefficient n'est pas significativement différent de 0 (p-valeur $>$ 0.05)

```
mod3 <- lm(gnp.capita ~ index+unemp, data=regdata)
summary(mod3)

##
## Call:
## lm(formula = gnp.capita ~ index + unemp, data = regdata)
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.184686 -0.035709 -0.007246  0.032664  0.184953
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -2.883e+01  6.466e-01  -44.59   <2e-16 ***
## index        1.890e-02  3.322e-04   56.88   <2e-16 ***
## unemp       -1.516e-01  1.219e-02  -12.44   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.06852 on 77 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9774,Adjusted R-squared:  0.9768
## F-statistic:  1663 on 2 and 77 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Modèle de régression multivarié

Données Nelson-Plosser : Sélection du modèle (2)

- Pour comparer des modèles imbriqués, on peut utiliser un critère d'information (AIC ou BIC)

```
AIC(mod1, mod2, mod3)
```

```
##      df        AIC
## mod1  3   38.92556
## mod2  5 -196.63615
## mod3  4 -196.92493
```

- On retient le modèle ayant le plus faible AIC, ici le modèle 3

Modèle de régression linéaire

Test de changement structurel

- Soit le modèle de régression linéaire standard :

$$y_i = x_i^T \beta_i + u_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

  où y_i est l'observation de la variable dépendante et le vecteur $x_i = (1, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ l'obsevation des variables indépendantes au temps i

- Les tests de changement structurel proposent de tester l'hypothèse

$$H0 : \beta_i = \beta_0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

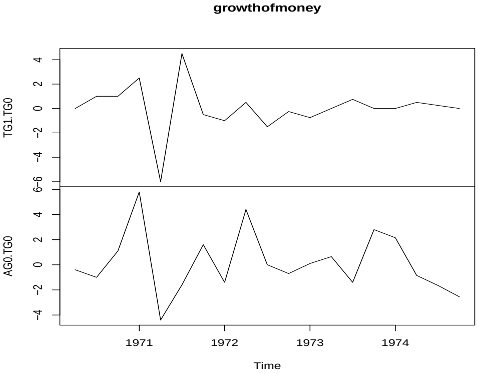
- Le test de **Chow** permet d'identifier un éventuel changement structurel dans les données au point fourni **a priori** par l'utilisateur
- Le rejet de l'hypotèse H0 signifie qu'un meilleur ajustement peut être obtenu avec deux droites de régression (i.e. les paramètres du modèle ne sont pas stables)

Modèle de régression linéaire

Test de changement structurel : Données `growthofmoney` (1)

- On utilise la librairie `strucchange` (voir article)
- On reproduit ici l'exemple de [3] : test de changement structurel au premier trimestre 1974
- Voici pour rappel le chronogramme des deux séries

```
plot(growthofmoney)
```



Modèle de régression linéaire

Test de changement structurel : Données `growthofmoney` (2)

- La formule de la régression est contenue dans l'objet `modelHetzel`

```
modelHetzel

## TG1.TG0 ~ AG0.TG0
```

- Le test est réalisé avec la fonction `sctest`

```
sctest(modelHetzel, point=c(1973,4), data=growthofmoney, type="Chow")

##
##  Chow test
##
## data:  modelHetzel
## F = 0.37876, p-value = 0.6911
```

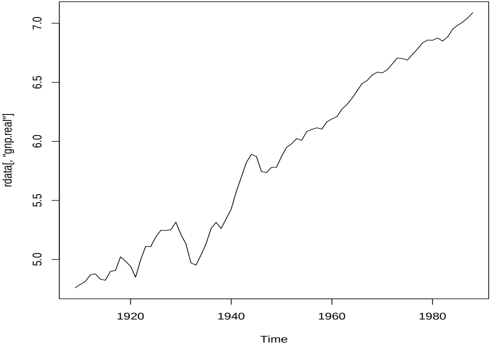
- La p-valeur est supérieure à 0.05, on accepte H0, il n'y a pas de changement structurel au premier trimestre 1974

Modèle de régression linéaire

Test de changement structurel : Données Nelson-Plossser (1)

- Pour la série du PNB des USA (log) on teste un changement structurel en 1933

```
rdata <- Nelson_Plosser[,c("year", "gnp.real")]
rdata <- rdata[rdata$year>=1909,]
rdata <- ts(rdata, start=1909)
plot(rdata[,"gnp.real"])
```



Modèle de régression linéaire

Test de changement structurel : Données Nelson-Plossser (2)

- La p-valeur du test est inférieure à 0.01, on rejette H0 : il y a un changement structurel en 1933

```
library(strucchange)
model <- gnp.real ~ year
sctest(model, point=c(1933,1), data=rdata, type="Chow")
```

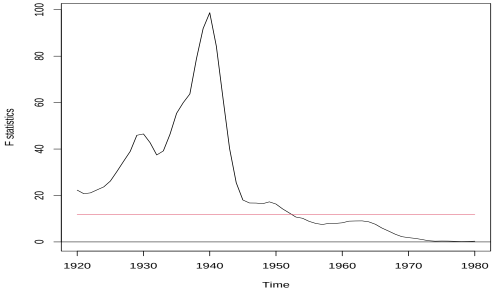
```
##
##  Chow test
##
## data:  model
## F = 19.598, p-value = 1.369e-07
```

Modèle de régression linéaire

Test de changement structurel - Extension

- La librairie strucchange propose une extension du test de Chow : le changement structurel est recherché sur un intervalle
- La statistique F est calculée pour chacun des points de l'intervalle
- On rejette H0 pour des valeurs élevées de F (supérieure au seuil représenté par la ligne rouge)

```
fs <- Fstats(model, from = c(1920,1), to = c(1980,1), data = rdata)
plot(fs)
```



Modèle de régression linéaire

Exercice

- Utilisez les données `fr_macro` :
  1. Ajustez un modèle $gnp = \beta_0 + \beta_1 * index$,
  2. Ajustez un modèle $gnp = \beta_0 + \beta_1 * index + \beta_2 * unemp + \beta_3 * cpi$
- Vérifiez les hypothèses de base pour ces modèles :
  - Les résidus sont-ils normalement distribués ?
  - Sont-ils autocorrélés ?
  - Leur variance est-elle constante ?
- Réalisez un test de changement structurel sur le modèle 1

Section 7

Décomposition d'une série temporelle

Composants d'une série temporelle

- Une série temporelle peut être décomposée en trois éléments :
  - Tendence
  - Saisonnalité
  - Résidus
- La méthode classique de décomposition (voir la fonction `decompose`) utilise un filtre basé sur les moyennes mobiles

Décomposition avec la librairie feasts (1)

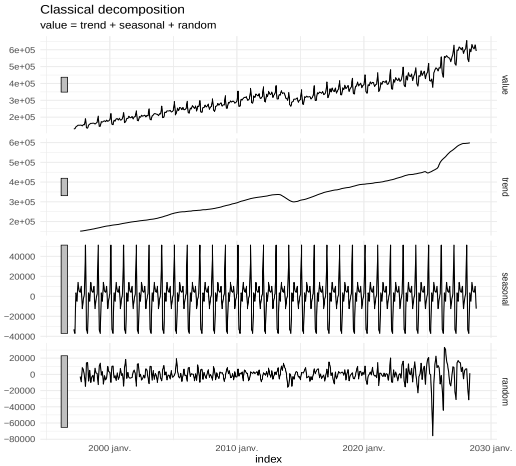
- La librarie feast propose deux méthodes de décomposition (classique et STL)
- La décomposition classique utilise les moyennes mobiles, la saisonalité peut être additive ou multiplicative

```
dcmp <- retail_tsbl %>%
  model(classical_decomposition(value))
components(dcmp)

## # A dable: 381 x 7 [1M]
## # Key:     .model [1]
## # :         value = trend + seasonal + random
##    .model                     index  value   trend seasonal random season_adjust
##    <chr>                      <mth>  <dbl>   <dbl>    <dbl>  <dbl>         <dbl>
##  1 classical_decomposit~  1997 mars 130683      NA   -33112.    NA        163795.
##  2 classical_decomposit~ 1997 avril 131244      NA   -37134.    NA        168378.
##  3 classical_decomposit~   1997 mai 142488      NA     3459.    NA        139029.
##  4 classical_decomposit~  1997 juin 147175      NA    -4965.    NA        152140.
##  5 classical_decomposit~ 1997 juil. 152420      NA    13966.    NA        138454.
##  6 classical_decomposit~  1997 août 151849      NA     5222.    NA        146627.
##  7 classical_decomposit~ 1997 sept. 152586 151200.    4004. -2619.        148582.
##  8 classical_decomposit~  1997 oct. 152476 151599.   10017. -9140.        142459.
##  9 classical_decomposit~  1997 nov. 148158 152172.  -12342.  8329.        160500.
## 10 classical_decomposit~  1997 déc. 155987 153087.   -2997.  5897.        158984.
## # i 371 more rows
```

Décomposition avec la librairie feasts (2)

- On obtient une représentation graphique de la décomposition avec la méthode générique autoplot

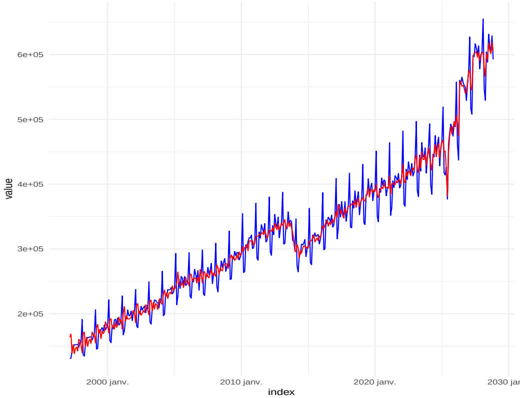
```
components(dcmp) %>% autoplot()
```



Décomposition avec la librairie feasts (3)

- La colonne season_adjust de l'objet renvoyé par components contient les données CVS

```
components(dcmp) %>% ggplot() +
  geom_line(aes(x=index,y=value), colour="blue") +
  geom_line(aes(x=index,y=season_adjust), colour="red")
```



Section 8

Transformation des données et stabilisation de la variance

Tendance linéaire

- Une série temporelle dont l'évolution est une fonction **déterministe** du temps est non-stationnaire
- Une série dont l'évolution autour d'une fonction déterministe du temps est stationnaire est dite stationnaire à une tendance près (trend stationary)
- On peut décrire une tendance linéaire par le modèle

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \epsilon_t$$

- y_t est non-stationnaire si $\beta 1 \neq 0$, la moyenne de y_t est

$$\mu_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t$$

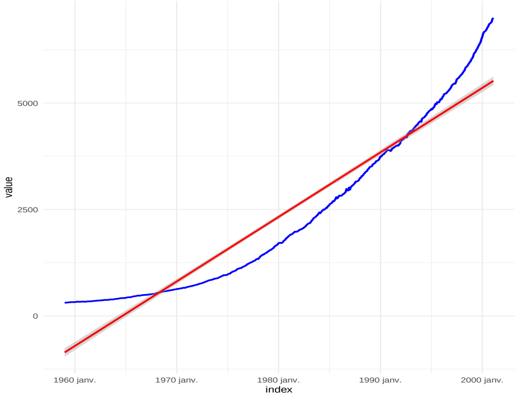
- On peut tester l'hypothèse $\beta 1 \neq 0$ (existence d'une tendance) en ajustant un modèle MCO sur les données (cette approche est valide si les erreurs ϵ_t sont un bruit blanc non corrélé)
- On peut ajuster un modèle pour estimer β_0 et β_1 puis analyser les résidus comme un processus stationnaire $\epsilon_t = y_t - \beta_0 - \beta_1 \cdot t$

Tendance linéaire

Données USIncExp

- Données USIncExp, dépenses aggrégées de consommation en millions de dollars

```
USIncExp %>% as_tsibble() %>% filter(key=='expenditure') %>%
  ggplot(aes(x = index, y = value)) +
  geom_line(color = "blue", size = 1) +
  geom_smooth(method='lm', color="red")
```



Tendance linéaire

Données `USIncExp` : Estimation du modèle

- Estimation du modèle par MCO

```
regdata <- USIncExp %>% as_tsibble() %>% filter(key=='expenditure')
summary(lm(value ~ index, data=regdata))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = value ~ index, data = regdata)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -688.01 -507.37  -97.57  411.41 1480.36
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 8.101e+02  3.277e+01   24.72   <2e-16 ***
## index       4.151e-01  5.686e-03   73.00   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 568.7 on 504 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9136,Adjusted R-squared:  0.9134
## F-statistic:  5329 on 1 and 504 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Le coefficient associé au temps (index) est significativement différent de 0 (p-valeur < 0.05)

Transformation logarithmique (1)

- On utilise souvent le logarithme (naturel) d'une série temporelle pour l'analyse
- Par exemple dans l'article original de Nelson et Plosser, toutes les séries à l'exception de la série `stock.price` (prix des actions) sont transformées en log :
  The tendency of economic time series to exhibit variation that increases in mean and dispersion in proportion to absolute level motivates the transformation to natural logs and the assumption that trends are linear in the transformed data.
- L'utilisation du log d'une série :
  - diminue l'hétéroscédasticité (stabilisation de la variance) (cf. par ex. [4], p. 15)
  - transforme une tendance exponentielle en tendance linéaire

Transformation logarithmique (2)

- *Many economic time series (such as consumption, national income and expenditure, or the price level) do grow over time, but the amount by which they grow in each period also tends to rise.* [5]
- However, $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ will be stationary only if the absolute amount of growth is stationary, in which case for $\mu > 0$, σ / x_t will tend to zero.
- Percentage growth, by contrast, often displays no obvious tendency to rise or fall, making it a more likely candidate for stationarity.
- Percentage growth, by contrast, often displays no obvious tendency to rise or fall, making it a more likely candidate for stationarity.
- Since the levels of many economic variables are initially positive, and recalling that

$$\Delta log(x_t) = log(x_t) - log(x_{t-1}) = log(x_t / x_{t-1})$$

  we see that stationarity of the rate of growth implies stationarity of $\Delta log(x_t)$
- Changes in the logarithms of economic data series such as those just mentioned, therefore, seem more likely to be stationary than changes in the levels.

Tendance exponentielle

- Si la tendance est exponentielle, on peut ramener à une tendance linéaire en utilisant le log :

$$\log(y_t) = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \epsilon_t$$

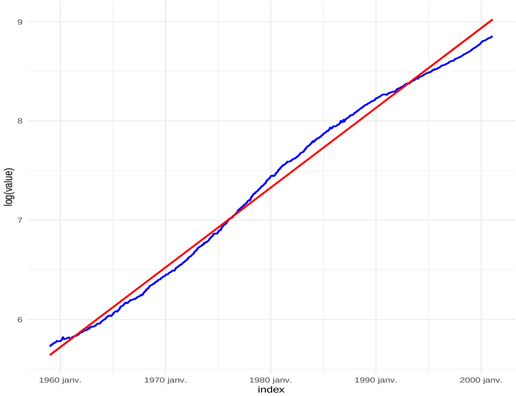
- Note : β_1 dans le modèle à tendance exponentielle est le taux de croissance annuel moyen (si t est exprimé en années)

Tendance exponentielle

Transformation logarithmique

- L'utilisation du logarithme de la série `USIncExp` transforme la tendance

```
USIncExp %>% as_tsibble() %>% filter(key=='expenditure') %>%
  ggplot(aes(x = index, y = log(value))) +
  geom_line(color = "blue", size = 1) +
  geom_smooth(method='lm', color="red")
```



Tendance exponentielle - Modèle linéaire

- La valeur de R^2 est nettement plus élevée que pour le modèle précédent sur la série brute

```
regdata <- USIncExp %>% as_tsibble() %>%
  filter(key=='expenditure') %>%
  mutate(value=log(value))
summary(lm(value ~ index, data=regdata))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = value ~ index, data = regdata)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.16858 -0.07288 -0.01324  0.09148  0.15056
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 6.525e+00  5.134e-03    1271   <2e-16 ***
## index       2.200e-04  8.908e-07     247   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.08909 on 504 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9918,Adjusted R-squared:  0.9918
## F-statistic: 6.099e+04 on 1 and 504 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Désaisonnalisation

- De nombreuses séries économiques présentent des comportements périodiques, rendant difficile la comparaison de deux instants successifs
- Cela peut être le cas particulièrement lorsque la série est trimestrielle ou mensuelle (par exemple données `retail`)
- Le recours à une `désaisonnalisation` permet d'obtenir des séries dites corrigées des variations saisonnières (CVS)

Désaisonnalisation

Régression linéaire

- On inclus la saisonnalité dans un modèle linéaire tendenciel avec des variables ‘dummy‘ (0 ou 1) représentant les mois, trimestres, etc ...
- Par exemple pour des trimestres on ajoute $4 - 1 = 3$ variables ‘dummy‘ (modèle avec constante) :

$$y_t = \beta_0 + \delta_1 \cdot Q1_t + \delta_2 \cdot Q2_t + \delta_3 \cdot Q3_t + \beta_1 \cdot t + \epsilon_t$$

Désaisonnalisation

Données `retail` (1)

- Données `retail` sur le commerce de détail
- On créé une variable catégorielle (factor) pour le mois
- Le temps est un index t de 1 à 381 (nombre de mois dans la série)

```
retail$mois <- factor(month(retail$DATE), labels=month(1:12, label=TRUE))
retail$t <- c(1:nrow(retail))
head(retail)
```

```
##         DATE RSXFSN  mois t
## 1 1992-01-01 130683  janv 1
## 2 1992-02-01 131244  févr 2
## 3 1992-03-01 142488  mars 3
## 4 1992-04-01 147175 avril 4
## 5 1992-05-01 152420   mai 5
## 6 1992-06-01 151849  juin 6
```

- Dans la formule, on ajoute -1 pour un modèle sans constante (intercept)

```
modst <- lm(RSXFSN ~ t+ mois-1, data=retail)
```

Désaisonnalisation

Données retail (2)

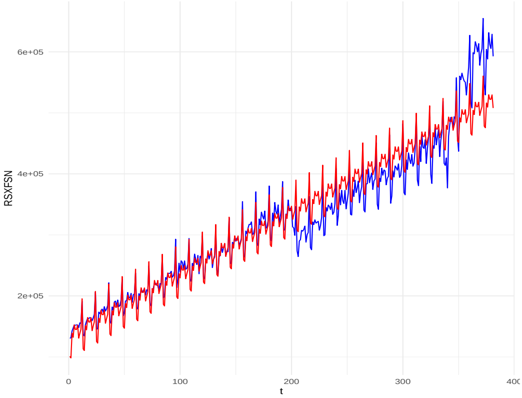
```
summary(modst)

##
## Call:
## lm(formula = RSXFSN ~ t + mois - 1, data = retail)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -95922 -22769    753  10775 101781
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## t             1013.92      14.43   70.25   <2e-16 ***
## moisjanv     99954.45    6105.34   16.37   <2e-16 ***
## moisfévr     96272.09    6111.74   15.75   <2e-16 ***
## moismars    136132.45    6118.16   22.25   <2e-16 ***
## moisavril   128055.40    6124.61   20.91   <2e-16 ***
## moismai     147466.57    6131.09   24.05   <2e-16 ***
## moisjuin    138825.03    6137.59   22.62   <2e-16 ***
## moisjuil    137696.67    6144.12   22.41   <2e-16 ***
## moisaoût    144302.31    6150.68   23.46   <2e-16 ***
## moissept    121614.92    6157.26   19.75   <2e-16 ***
## moisoct     128425.61    6203.09   20.70   <2e-16 ***
## moisnov     134270.91    6209.48   21.62   <2e-16 ***
## moisdéc     183151.15    6215.90   29.46   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 30980 on 368 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9923,Adjusted R-squared:  0.992
## F-statistic:  3652 on 13 and 368 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Désaisonnalisation

Données `retail` (3)

- Données originales (bleu) et valeurs prédites par le modèle (rouge)

```
retail$prediction <- predict.lm(modst)
ggplot(retail)+
  geom_line(mapping=aes(x=t,y=RSXFSN),color="blue")+
  geom_line(mapping=aes(x=t,y=prediction), color="red")
```



Désaisonnalisation

Données retail : Série CVS (1)

- Creation des variables indicatrices pour le mois (‘dummies‘)

```
retail_1992_2022 <- retail %>% filter(year(DATE)<2023)
annees = nrow(retail_1992_2022)/12
t=1:annees

for (i in 1:12)
{
  su=rep(0,times=12)
  su[i]=1
  s=rep(su,times=annees)
  assign(paste("s",i,sep=""),s)
}
cbind(retail_1992_2022[,"RSXFSN"],s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,s10,s11,s12)[1:12,]
```

```
##              s1 s2 s3 s4 s5 s6 s7 s8 s9 s10 s11 s12
##  [1,] 130683  1  0  0  0  0  0  0  0  0   0   0   0
##  [2,] 131244  0  1  0  0  0  0  0  0  0   0   0   0
##  [3,] 142488  0  0  1  0  0  0  0  0  0   0   0   0
##  [4,] 147175  0  0  0  1  0  0  0  0  0   0   0   0
##  [5,] 152420  0  0  0  0  1  0  0  0  0   0   0   0
##  [6,] 151849  0  0  0  0  0  1  0  0  0   0   0   0
##  [7,] 152586  0  0  0  0  0  0  1  0  0   0   0   0
##  [8,] 152476  0  0  0  0  0  0  0  1  0   0   0   0
##  [9,] 148158  0  0  0  0  0  0  0  0  1   0   0   0
## [10,] 155987  0  0  0  0  0  0  0  0  0   1   0   0
## [11,] 154824  0  0  0  0  0  0  0  0  0   0   1   0
## [12,] 191347  0  0  0  0  0  0  0  0  0   0   0   1
```

Désaisonnalisation

Données `retail` : Série CVS (1)

- Pour obtenir les données CVS on extrait les coefficients

```
coefst <- modst$coefficients
coefst
```

```
##          t   moisjanv   moisfévr   moismars  moisavril    moismai   moisjuin
##   1013.922  99954.447  96272.087 136132.447 128055.400 147466.572 138825.026
##   moisjuil   moisaoût   moissept    moisoct    moisnov    moisdéc
## 137696.666 144302.307 121614.917 128425.611 134270.915 183151.155
```

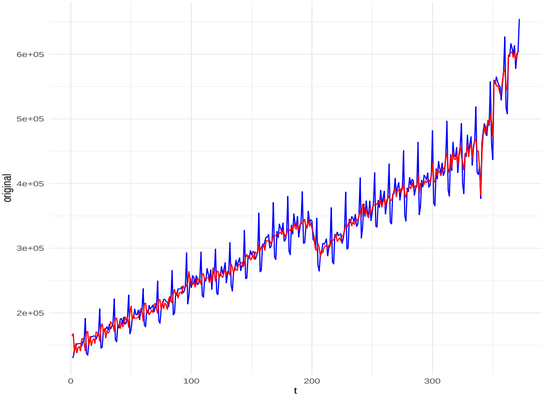
- On soustrait ensuite les coefficients saisonniers à la série originale

```
a <- mean(coefst[2:13])
b <- coefst[1]
c <- coefst[2:13]-mean(coefst[2:13])
y_cvs <- retail_1992_2022$RSXFSN-(c[1]*s1+c[2]*s2+c[3]*s3+c[4]*s4+c[5]*s5+c[6]*s6+
                                    c[7]*s7+c[8]*s8+c[9]*s9+c[10]*s10+c[11]*s11+c[12]*s12)
```

Désaisonnalisation

Données retail : Série CVS (2)

```
gdata <- tibble(t=retail_1992_2022$t,
                original=retail_1992_2022$RSXFSN, cvs = y_cvs)

ggplot(gdata)+
  geom_line(mapping=aes(x=t,y=original),color="blue")+
  geom_line(mapping=aes(x=t,y=cvs), color="red")
```



Désaisonnalisation

La fonction tslm (1)

- On peut également utiliser la fonction `tslm` de la librairie `forecast`
- Cette fonction ajuste un modèle linéaire incluant la saisonalité et la tendance (et éventuellement la tendance au carré)
- Modèle linéaire avec saisonnalité et tendance - données ‘retail‘

```
library(forecast)
bhat = tslm(retail_ts~trend+I(trend^2)+season)
```

Désaisonnalisation

La fonction tslm (2)

```
summary(bhat)

##
## Call:
## tslm(formula = retail_ts ~ trend + I(trend^2) + season)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -111154  -19147   -5324   17916   72473
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.726e+05  6.052e+03  28.517  < 2e-16 ***
## trend        4.276e+02  4.859e+01   8.799  < 2e-16 ***
## I(trend^2)   1.535e+00  1.232e-01  12.459  < 2e-16 ***
## season2      4.888e+04  6.605e+03   7.400 9.38e-13 ***
## season3     -3.550e+04  6.554e+03  -5.416 1.10e-07 ***
## season4     -3.917e+04  6.554e+03  -5.977 5.39e-09 ***
## season5      6.950e+02  6.554e+03   0.106   0.9156
## season6     -7.377e+03  6.554e+03  -1.126   0.2611
## season7      1.204e+04  6.554e+03   1.836   0.0671 .
## season8      3.392e+03  6.554e+03   0.518   0.6051
## season9      2.259e+03  6.554e+03   0.345   0.7305
## season10     8.857e+03  6.554e+03   1.351   0.1774
## season11    -1.384e+04  6.554e+03  -2.112   0.0354 *
## season12    -5.847e+03  6.605e+03  -0.885   0.3766
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 26010 on 367 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.953,Adjusted R-squared:  0.9514
## F-statistic: 572.9 on 13 and 367 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Section 9

Séries temporelles non-stationnaires

Stationarité des séries macroéconomiques

- De nombreuses séries temporelles macroéconomiques ne sont pas stationnaires
- Il existe différents types de non-stationnarité
- C'est l'objet notamment de l'article de [1], qui arguent que les séries temporelles macroéconomiques sont plus souvent caractétisées par une non-stationarité de type stochastique (unit-root nonstationarity) que par une tendance déterministe [6, p. 164]

Tendance déterministe et tendance stochastique (1)

- On consière le processus y_t comme la réalisation d'une tendance déterministe et d'un composant stochastique

$$y_t = TD_t + z_t$$

  où TD_t désigne la tendance déterministe $TD_t = \beta_1 + \beta_2 t$ et z_t désigne le composant stochastique sous la forme d'un processus ARMA
- On distingue deux cas :
  1. Le polynome autorégressif ne comporte pas de racine unitaire : y_t est stationnaire autour d'une tendance déterministe (trend-stationary), on peut éliminer la tendance de la série originale et ajuster un modèle $ARMA(p, q)$ sur les résidus
  2. Le polynome autorégressif comporte une racine unitaire : $\Delta z_t = (1 - L)z_t$ est stationnaire autour d'une moyenne constante, la série y_t est stationnaire par différence (difference-stationary)

Tendance déterministe et tendance stochastique (2)

- Différence entre un processus stationnaire à une tendance près (trend stationnary) et un processus stationnaire par différence :

$$y_t = y_{t-1} + \mu = y_0 + \mu t \quad (1)$$

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t = y_0 + \sum_{s=1}^{t} \epsilon_s \quad (2)$$

où μ est une constante et ϵ_t un bruit blanc

- Dans l'equation (1), y_t est representé par une tendance **déterministe**
- Dans l'équation (2) la série est expliquée par ses chocs passés, i.e. une tendance **stochastique**

Tendance déterministe et tendance stochastique

Tendance déterministe : Simulation (1)

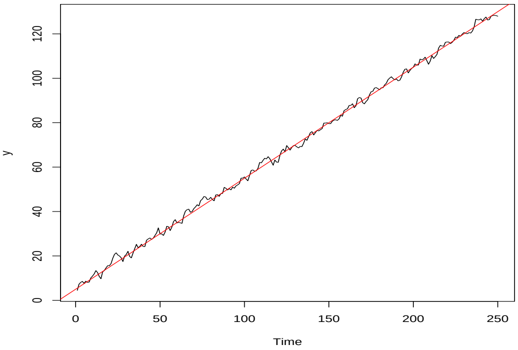
- Simulation d'une série présentant une **tendance déterministe** (trend stationary time series, exemple tiré de [4])
- La série est la combinaison d'une fonction déterministe du temps et d'un processus stationnaire (auto-régressif)

```
set.seed(12345)
y.tsar2 <- 5 + 0.5 * seq(250) +
  arima.sim(list(ar = c(0.8, -0.2)), n = 250)
```

Tendance déterministe et tendance stochastique

Tendance déterministe : Simulation (2)

```
plot(y.tsar2, ylab="y", xlab = "Time")
abline(a=5, b=0.5, col = "red")
```



Tendance déterministe et tendance stochastique

Tendance stochastique : Simulation (1)

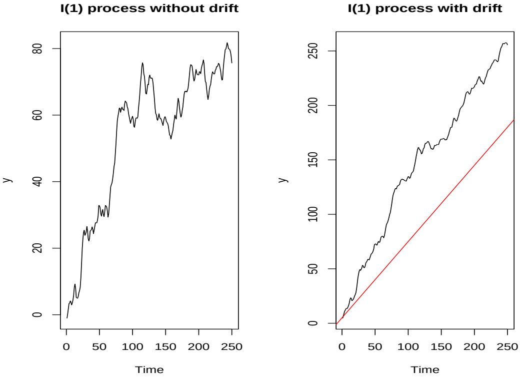
- Simulation d'une série présentant une **tendance stochastique** (difference stationary time series, exemple tiré [4])
- La série `y1` est l'accumulation d'erreurs passées
- La série `y1.d` inclu une **dérive**

```
set.seed(12345)
u.ar2 <- arima.sim(list(ar = c(0.8, -0.2)), n = 250)
y1 <- cumsum(u.ar2)
TD <- 5.0 + 0.7 * seq(250)
y1.d <- y1 + TD
```

Tendance déterministe et tendance stochastique

Tendance stochastique : Simulation (2)

```
layout(matrix(1:2, nrow = 1, ncol = 2))
plot.ts(y1, main = "I(1) process without drift", ylab="y", xlab = "Time")
plot.ts(y1.d, main = "I(1) process with drift", ylab="y", xlab = "Time")
abline(a=5, b=0.7, col = "red")
```



Stationarisation

- Une série présentant une tendance et/ou une saisonnalité ne pourra pas être modélisée par un processus stationnaire
- Soit le processus $(X_t)_{t\in \mathbf{Z}}$ vérifiant :

$$X_t = at + b + \epsilon_t$$

avec $a \neq 0$

- On a :

$$\mathbf{E}(X_t) = \mathbf{E}(at + b + \epsilon_t) = at + b$$

et $Cov(X_t, X_{t-h}) = \sigma^2$ si $h = 0$ et $Cov(X_t, X_{t-h}) = 0$ si $h \neq 0$

- Le processus $(X_t)_{t\in Z}$ n'est pas stationnaire car $E(X_t)$ dépend de t

Stationarisation par différenciation (1)

- Si on considère maintenant le processus $Y_t = X_t - X_{t-1}$, on a :

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t - X_{t-1} \\ Y_t &= at + b + \epsilon_t - a(t-1) + b + \epsilon_{t-1} \\ &= a + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} \end{aligned}$$

  et $\mathbf{E}(Y_t) = a$
- La covariance $Cov(Y_t, Y_{t-h})$ est également constante dans le temps
- On obtient un processus stationnaire Y_t par **différenciation** de X_t
- Une série est dite **intégrée** d'ordre d, notée $I(d)$, s'il faut la différencier d fois pour obtenir une série stationnaire

Stationarisation par différentiation

Données Nelson-Plosser, indice des prix à la consommation (1)

- La fonction `diff` permet d'obtenir la série intégrée, ici la série `cpi` des données Nelson-Plosser
- La série intégrée débute au temps $t + 1$

```
cpi_diff <- diff(NelPlo[,"cpi"],1)
window(cpi_diff, start=1861, end=1900)
```

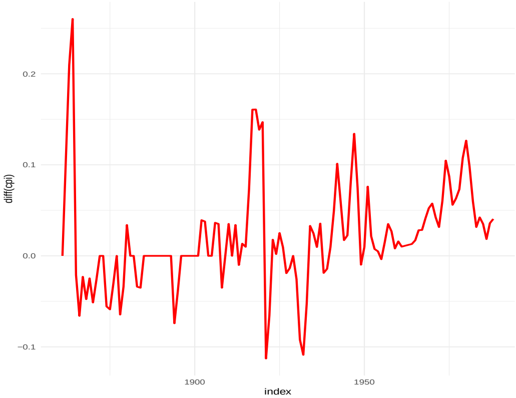
```
## Time Series:
## Start = 1861
## End = 1900
## Frequency = 1
##  [1]  0.0000000  0.1053605  0.2097205  0.2602831 -0.0210534 -0.0659580
##  [7] -0.0229895 -0.0476280 -0.0246926 -0.0512933 -0.0266683  0.0000000
## [13]  0.0000000 -0.0555698 -0.0588405 -0.0307717  0.0000000 -0.0645385
## [19] -0.0339016  0.0339016  0.0000000  0.0000000 -0.0339016 -0.0350913
## [25]  0.0000000  0.0000000  0.0000000  0.0000000  0.0000000  0.0000000
## [31]  0.0000000  0.0000000  0.0000000 -0.0741080 -0.0392207  0.0000000
## [37]  0.0000000  0.0000000  0.0000000  0.0000000
```

Stationarisation par différentiation

Données Nelson-Plosser, indice des prix à la consommation (2)

- Pour représenter la série on la transforme en objet `tsibble`

```
cpi_diff %>% as_tsibble() %>%
  ggplot(aes(x = index, y = value)) +
    geom_line(colour="red", size = 1) + ylab("diff(cpi)")
```



Test de non-stationarité

Deux cas de non-stationarité

- Avant de réaliser un test de non-stationnarité, il faut examiner le **chronogramme** de la série pour voir si la série présente une **tendance**
  - soit stochastique (marche aléatoire avec dérive),
  - soit déterministe (série stationnaire à une tendance déterministe près)
- La série y_t est stationnaire autour d'une tendance déterministe (pas de racine unitaire) : on peut éliminer la tendance de la série originale y_t et ajuster un modèle $ARMA(p, q)$ sur les résidus
- La série y_t est intégrée (d'ordre d) : la série est stationnaire par différence

Test de non-stationarité

Le test ADF (Augmented Dickey-Fuller)

- Les tests de racine unitaire (unit-root tests) permet de tester la non-stationarité d'une série
- Le test ADF (Augmented Dickey-Fuller) est le plus couramment utilisé
- Il est basé sur la régression (cf. [4])

$$y_t = \beta' D_t + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi \Delta y_{t-j} + u_t \quad (1)$$

$$\Delta y_t = \beta' D_t + \pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi \Delta y_{t-j} + u_t \quad (2)$$

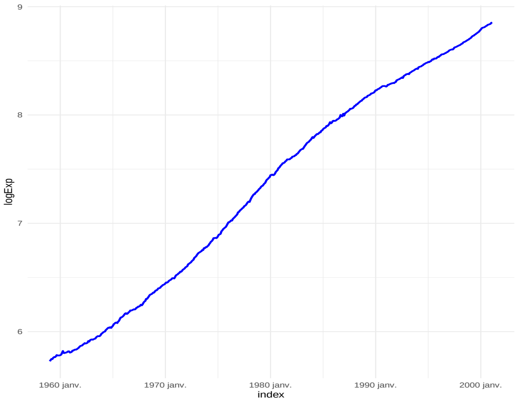
avec $\pi = \phi - 1$

Test de non-stationarité

Dépenses de consommation aux USA

- La série du log des dépenses de consommation aux USA présente une tendance

```
USExp <- USIncExp %>% as_tsibble() %>% filter(key=='expenditure') %>%
  mutate(logExp=log(value))
ggplot(USExp, aes(x = index, y = logExp)) +
  geom_line(color = "blue", size = 1)
```



Test de non-stationarité

Test ADF

- On utilise la fonction `ur.df` (librairie `urca`)
- Nous allons tester les hypothèses :
  - Hypothèse nulle H0 : la série est **non stationnaire avec dérive**
  - Hypothèse alternative H1 : la série est **stationnaire avec trend déterministe**
- Le test considère un modèle autorégressif d'ordre p (p repésenté par le lag est inconnu)
- On choisi pour commencer une valeur de p élevée et on retient la première valeur du lag fortement significative

Test de non-stationarité

Test ADF : Série USExp (1)

- On choisit dans un premier temps p=12
- La fonction `attr` permet d'accéder aux éléments de l'objet `exp.df` contenant le résultat du test (`attributes(exp.df)` renvoie la liste des éléments)

```
library(urca)
exp.df <- ur.df(y=as.data.frame(USExp)[,"logExp"], lags=12, type='trend')
attr(exp.df, "testreg")
```

```
##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##        Min         1Q     Median         3Q        Max
## -0.0208491 -0.0030259 -0.0000296  0.0034857  0.0233391
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   1.130e-02  1.613e-02   0.701 0.483735
## z.lag.1      -1.339e-03  2.901e-03  -0.461 0.644675
## tt            7.074e-06  1.965e-05   0.360 0.719044
## z.diff.lag1  -2.085e-01  4.567e-02  -4.565 6.37e-06 ***
## z.diff.lag2  -4.538e-02  4.627e-02  -0.981 0.327235
## z.diff.lag3  -1.030e-02  4.614e-02  -0.223 0.823428
## z.diff.lag4  -2.322e-03  4.589e-02  -0.051 0.959664
## z.diff.lag5   6.135e-02  4.562e-02   1.345 0.179309
## z.diff.lag6   1.505e-01  4.517e-02   3.332 0.000931 ***
## z.diff.lag7   1.621e-01  4.515e-02   3.590 0.000365 ***
## z.diff.lag8   1.202e-01  4.569e-02   2.631 0.008776 **
## z.diff.lag9   4.947e-02  4.593e-02   1.077 0.281906
## z.diff.lag10  3.670e-02  4.598e-02   0.798 0.425159
## z.diff.lag11  1.181e-01  4.592e-02   2.573 0.010389 *
## z.diff.lag12  4.532e-02  4.521e-02   1.002 0.316631
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Test de non-stationarité

Test ADF : Série USExp (2)

- La première valeur *p* fortement significative est 8, on refait le test avec p=8

```
library(urca)
exp.df <- ur.df(y=as.data.frame(USExp)[,"logExp"], lags=8, type='trend')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(exp.df, "teststat")
```

```
##                  tau3    phi2      phi3
## statistic -0.4287925 7.896003 0.3583672
```

- Valeurs critiques

```
attr(exp.df, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau3 -3.96 -3.41 -3.12
## phi2  6.09  4.68  4.03
## phi3  8.27  6.25  5.34
```

- La valeur de tau3 est supérieure au seuil de 10%, on retient l'hypothèse H0, la série ne présente pas de tendance déterministe et peut être rendue stationaire par différentiation

Test de non-stationarité

Test ADF : Série USExp (2)

- Le modèle de régression utilisé pour le test est contenu dans l'attribut `testreg`

```
attr(exp.df, "testreg")

##
## Call:
## lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
##
## Residuals:
##        Min         1Q     Median         3Q        Max
## -0.0205542 -0.0030498 -0.0001604  0.0036908  0.0222845
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.117e-02  1.609e-02   0.694 0.487809
## z.lag.1     -1.236e-03  2.883e-03  -0.429 0.668264
## tt           7.040e-06  1.949e-05   0.361 0.718134
## z.diff.lag1 -1.886e-01  4.512e-02  -4.180 3.46e-05 ***
## z.diff.lag2 -2.393e-02  4.538e-02  -0.527 0.598191
## z.diff.lag3  2.050e-02  4.467e-02   0.459 0.646565
## z.diff.lag4  2.866e-02  4.455e-02   0.643 0.520301
## z.diff.lag5  8.980e-02  4.455e-02   2.016 0.044395 *
## z.diff.lag6  1.715e-01  4.466e-02   3.841 0.000139 ***
## z.diff.lag7  1.632e-01  4.530e-02   3.604 0.000346 ***
## z.diff.lag8  1.080e-01  4.500e-02   2.399 0.016807 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.005581 on 486 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.08049,Adjusted R-squared:  0.06157
## F-statistic: 4.254 on 10 and 486 DF,  p-value: 1.076e-05
```

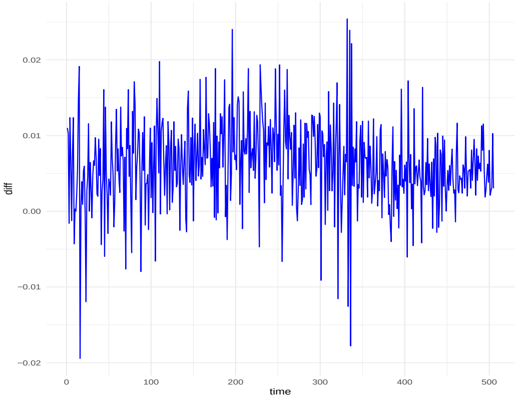
- On peut obtenir plus de détails avec la méthode générique `summary`

Série différenciée

Dépenses de consommation aux USA (série USExp)

- On utilise la fonction diff pour obtenir la série intégrée

```
USExp.diff <- tibble(time=1:(nrow(USExp)-1), diff= diff(as.data.frame(USExp)[, "logExp"]))
ggplot(USExp.diff, aes(x = time, y = diff)) +
  geom_line(color = "blue", size = 0.5)
```



Test de non-stationarité

Dépenses de consommation aux USA (série USExp) : Série différenciée

- On réalise un test ADF sur la série différenciée
  - Hypothèse H0 : la série présente une tendance stochastique (racine unitaire)
  - Hypothèse H1 : la série est stationnaire

```
USExp.diff.df <- ur.df(y=as.data.frame(USExp.diff)[, "diff"], lags=1, type='drift')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(USExp.diff.df, "teststat")
```

```
##                tau2     phi1
## statistic -16.8418 141.8248
```

- Valeurs critiques

```
attr(USExp.diff.df, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.43 -2.86 -2.57
## phi1  6.43  4.59  3.78
```

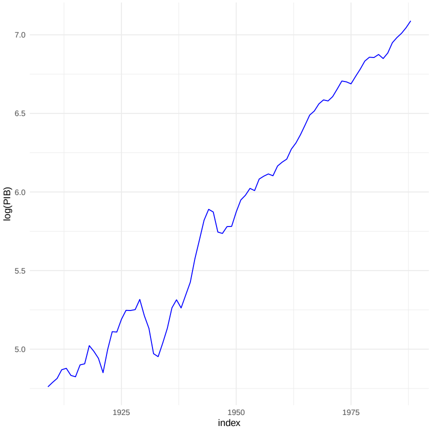
- La valeur de tau2 est inférieure à la valeur critique à 1% donc on rejete H0 et on conclut à la stationarité de la série

Test de non-stationarité

Test ADF : Données nelplo, série gnp.real (1)

- La série du log du PIB des USA en milliards de dollars 1958 présente une tendance

```
nelplo_tsbl %>% filter(key=="gnp.real" & index>=1909) %>%
  ggplot(aes(x = index, y = value)) +
    geom_line(color='blue') + ylab("log(PIB)")
```



Test de non-stationarité

Test ADF : Données `nelplo`, série `gnp.real` (2)

- On réalise un test ADF (on choisit dans un premier temps p=12) :
  - Hypothèse nulle H0 : la série est **non stationnaire avec dérive**
  - Hypothèse alternative H1 : la série est **stationnaire avec trend déterministe**
- La première valeur *p* fortement significative est 1, on refait le test avec p=1

```
gnpreal.df <- ur.df(y=as.data.frame(nelplo1909)[,"gnp.real"], lags=1, type='trend')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(gnpreal.df, "teststat")
```

```
##                 tau3     phi2   phi3
## statistic -3.454521 7.017575 6.0513
```

- Valeurs critiques

```
attr(gnpreal.df , "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau3 -4.04 -3.45 -3.15
## phi2  6.50  4.88  4.16
## phi3  8.73  6.49  5.47
```

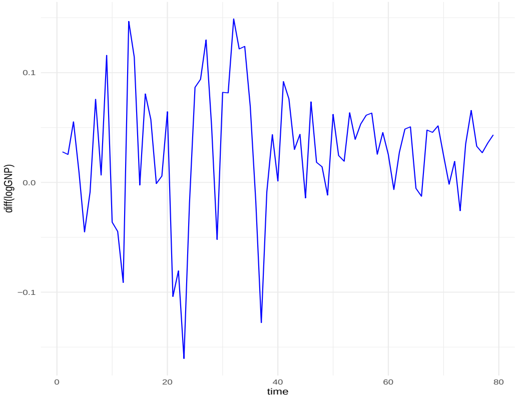
- La valeur de `tau3` est supérieure au seuil de 5%, on retient l'hypothèse H0, la série ne présente pas de tendance déterministe et peut être rendue stationaire par différentiation

Série différenciée

Données nelplo, série gnp.real

- On utilise la fonction diff pour obtenir la série intégrée

```
gnpreal.diff <- tibble(time=1:(nrow(nelplo1909)-1), diff= diff(as.data.frame(nelplo1909)$gnp.real))
ggplot(gnpreal.diff, aes(x = time, y = diff)) +
  geom_line(color = "blue", size = 0.5) + ylab("diff(logGNP)")
```



Test de non-stationarité

Données `nelplo`, série différenciée `gnp.real`

- On réalise un test ADF sur la série différenciée
  - Hypothèse H0 : la série présente une tendance stochastique (racine unitaire)
  - Hypothèse H1 : la série est stationnaire

```
gnpreal.diff.df <- ur.df(y=as.data.frame(gnpreal.diff)[, "diff"], lags=1, type='drift')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(gnpreal.diff.df, "teststat")
```

```
##                tau2    phi1
## statistic -5.471812 14.9712
```

- Valeurs critiques

```
attr(gnpreal.diff.df , "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

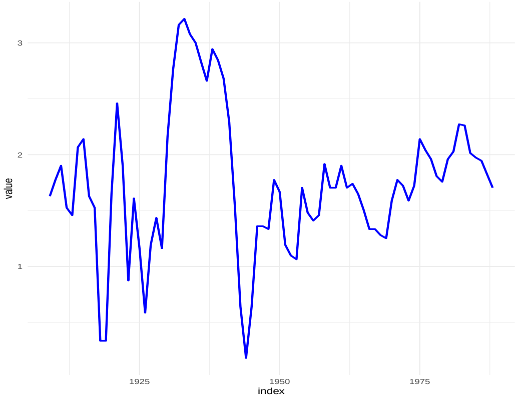
- La valeur de tau2 est inférieure à la valeur critique à 1% donc on rejete H0 et on conclut à la stationarité de la série

Test de non-stationarité

Taux de chômage aux USA

- La série du taux de chômage aux USA ne présente pas de tendance

```
Unemp <- nelplo_tsbl %>% filter(key=='unemp' & index >= 1909)
ggplot(Unemp, aes(x = index, y = value)) +
  geom_line(color = "blue", size = 1)
```



Test de non-stationarité

Taux de chômage aux USA : Test ADF (1)

- Après un premier test avec `lags=6`, le premier lag significatif est 1

```
unemp.df <- ur.df(y=as.data.frame(Unemp)[,"value"], lags=1, type='drift')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(unemp.df, "teststat")
```

```
##                 tau2     phi1
## statistic -3.909361 7.642016
```

- Valeurs critiques

```
attr(unemp.df, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

- La statistique `tau2` est inférieure à la valeur critique à 1% donc on rejete H0 et on conclut à la stationarité de la série

Test de non-stationarité

Taux de chômage aux USA : Test ADF (2)

- On peut également utiliser la fonction `adf.test` de la librairie `tseries`
- H0 : la série a une racine unitaire (unit root)
- La p-valeur est inférieure au seuil critique à 5%, on rejette H0 : la série est stationnaire

```
adf.test(as.data.frame(Unemp)[,"value"], k=1)

##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  as.data.frame(Unemp)[, "value"]
## Dickey-Fuller = -3.8903, Lag order = 1, p-value = 0.01899
## alternative hypothesis: stationary
```

Test de stationarité

Le test KPSS

- Le test KPSS proposé par Kwiatkowski est disponible dans les librairies `urca` et `tseries`
- Hypothèse nulle H0 : la série est stationnaire (soit à une tendance près, soit à une moyenne non nulle près)
- Le test suppose que la série est la somme d'une marche aléatoire R_t, d'un trend déterministe et d'une erreur stationnaire U_t :

$$y_t = R_t + \beta_1 + \beta_2 t + U_t$$

  où $R_t = R_{t-1} + z_t$
- Pour tester que la série y_t est stationnaire à une tendance près, l'hypothèse nulle est $\sigma_z^2 = 0$

Test de stationarité

Le test KPSS : Série USExp (1)

- On teste ici l'hypothèse H0 : la série des dépenses de consommation aux USA est stationaire à une tendance près (option `type="tau"`)

```
ktest <- ur.kpss(USExp$logExp, type="tau", lags="long")
summary(ktest)
```

```
##
## #######################
## # KPSS Unit Root Test #
## #######################
##
## Test is of type: tau with 17 lags.
##
## Value of test-statistic is: 0.488
##
## Critical value for a significance level of:
##                  10pct  5pct 2.5pct  1pct
## critical values 0.119 0.146  0.176 0.216
```

- La valeur de la statistique est nettement supérieure à la valeur critique au seuil de 1%, on rejette H0, la série ne présente pas de tendance linéaire

Test de stationarité

Test KPSS : Série USExp (2)

- On teste maintenant l'hypothèse H0 : la série des dépenses de consommation aux USA est stationaire de moyenne constante (option `type="mu"`)

```
ktest <- ur.kpss(USExp$logExp, type="mu", lags="long")
summary(ktest)
```

```
##
## #######################
## # KPSS Unit Root Test #
## #######################
##
## Test is of type: mu with 17 lags.
##
## Value of test-statistic is: 2.9218
##
## Critical value for a significance level of:
##                  10pct  5pct 2.5pct  1pct
## critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

- La valeur de la statistique est nettement supérieure à la valeur critique au seuil de 1%, on rejette H0, la série n'est pas stationnaire

Test de stationarité

Test KPSS : Série USExp intégrée

- On teste maintenant la stationarité de la série intégrée

```
ktest <- ur.kpss(USExp.diff$diff, type="mu", lags="long")
summary(ktest)
```

```
##
## #######################
## # KPSS Unit Root Test #
## #######################
##
## Test is of type: mu with 17 lags.
##
## Value of test-statistic is: 0.5706
##
## Critical value for a significance level of:
##                  10pct  5pct 2.5pct  1pct
## critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

- La valeur de la statistique se situe entre les valeurs critiques à 2.5% et 5%, on ne peut pas conclure à la stationarité de la série différenciée

Séries temporelles non-stationnaires

Exercices

1. Les séries du PIB français présente-t-elle une tendance ?
    - Cette tendance est-elle déterministe ou stochastique ?
    - Appliquez le test de stationarité approprié
    - Le cas échéant, differenciez la série pour la rendre stationnaire
2. Même question pour la série de l'index des prix à la consommation
3. Même question pour la série du taux de chômage

Section 10

Modélisation de séries temporelles stationnaires

Introduction

- Les modèles AR (AutoRegressive), MA (Moving Average) et ARMA (AutoRegressive Moving Average) sont des modèles fondamentaux pour étudier et décrire le comportement des séries temporelles
- Ces modèles ont été popularisés par George Box et Gwilym Jenkins
- Leur principale limitation est qu'ils ne peuvent modéliser que des séries stationnaires, cependant, on peut transformer des séries non-stationnaires par différenciation pour les étudier avec ce cadre (modèles ARIMA)

Processus autorégressif (AR)

Processus autorégressif AR(1) stationnaire

- Dans un modèle auto régressif, les variables explicatives sont des valeurs passées (lags) de la variable expliquée
- Dans un modèle AR(1) (autorégressif d'ordre 1), y est retardé d'une période

$$y_t = \alpha + \beta_1 \cdot y_{t-1} + \epsilon_t$$

avec $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

- La valeur de $|\beta_1|$ détermine l'évolution du processus
- Si $|\beta_1| < 1$, le processus AR(1) est **stationnaire**
- Si $|\beta_1| \geq 1$, le processus est **non-stationnaire** (les chocs s'accumulent dans le temps)
    - Si $|\beta_1| > 1$ le processus croît sans limite
    - Si $|\beta_1| = 1$ le processus a une **racine unitaire** (unit root), c'est une marche aléatoire

Processus autorégressif (AR)

Processus autorégressif AR(1) stationnaire : Propriétés

- Propriétés d'un processus AR(1) :
  - Moyenne de y_t

$$\mu = \frac{\alpha}{1 - \beta_1}$$

  - Variance :

$$Var(x_t) = \frac{\sigma_w^2}{1 - \beta_1^2}$$

  - Corrélation : $\rho_h = \beta_1^h$
- Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus $AR(p)$ ses **autocorrélations partielles** s'annulent à partir du rang $p + 1$
- Les **autocorrélations simples** décroissent rapidement vers 0 (de manière exponentielle ou sinusoïdale amortie)

Processus autorégressif AR(1)

Simulation (1)

- On utilise la fonction `arima.sim` pour simuler un processus AR(1) avec $\beta_1 = 0.9$ (cf. [4])
- La fonction `set.seed` permet d'initialiser le générateur de nombres aléatoires (la série de 100 nombres aléatoires sera toujours la même)

```
set.seed(123456)
wn <- rnorm(100)
AR1sim <- arima.sim(n = 100, list(ar = 0.9), innov=wn)
```

- Les corrélations partielles s'annulent bien à partir du rang 2

```
pacf(AR1sim, plot=FALSE)

##
## Partial autocorrelations of series 'AR1sim', by lag
##
##      1      2      3      4      5      6      7      8      9     10     11
##  0.937 -0.169  0.109  0.034  0.062 -0.016 -0.069 -0.038  0.096  0.030 -0.181
##     12     13     14     15     16     17     18     19     20
##  0.019  0.098 -0.041 -0.014  0.092 -0.041 -0.138 -0.042  0.005
```

Processus autorégressif AR(1)

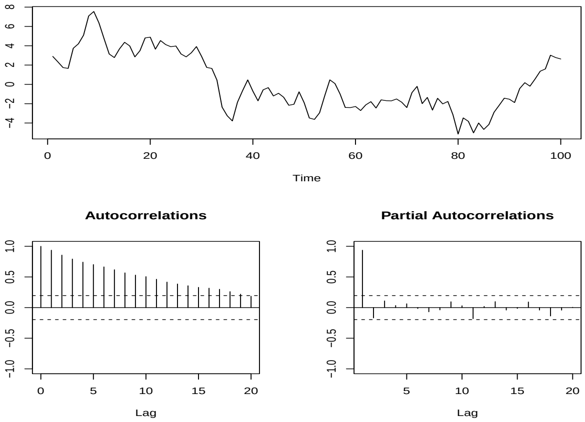
Simulation (2)

- Le code suivant permet de visualiser la série ainsi que ses autocorrélations (partielles)

```
op <- par(no.readonly=TRUE)

layout(matrix(c(1, 1, 2, 3), 2, 2, byrow=TRUE))

plot.ts(AR1sim, ylab="", main="Processus AR(1) avec B1=0.9")

acf(AR1sim, main="Autocorrelations", ylab="",
    ylim=c(-1, 1), ci.col = "black")

pacf(AR1sim, main="Partial Autocorrelations", ylab="",
     ylim=c(-1, 1), ci.col = "black")

par(op)
```

Processus autorégressif AR(1)

Simulation (3)

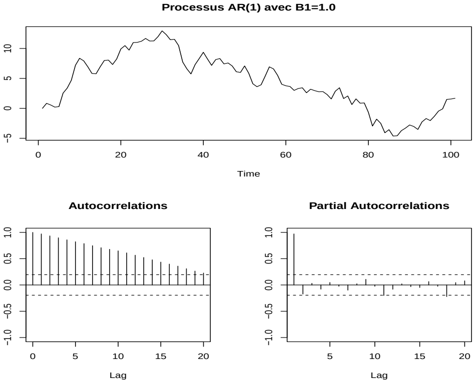


Processus autorégressif AR(1)

Simulation (3)

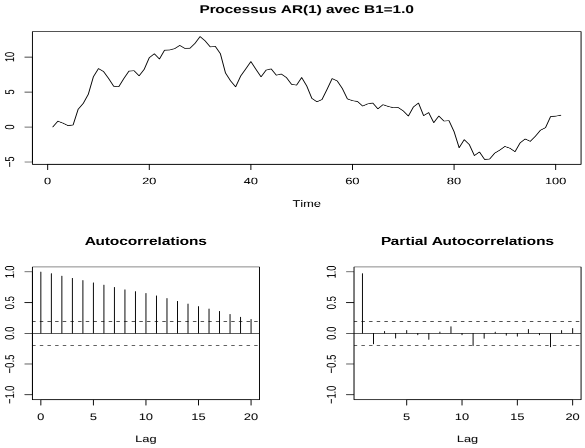
- Lorsque $\beta_1 = 1.0$ il s'agit d'un processus avec racine unitaire, i.e. une marche aléatoire (cf [5])
- La fonction `arima.sim` produit une erreur si le paramètre `ar` est ≥ 1

```
rusim <- 0
for (i in 1:length(wn)) {rusim[i+1] <- rusim[i] + wn[i]}
```



Processus autorégressif AR(1)

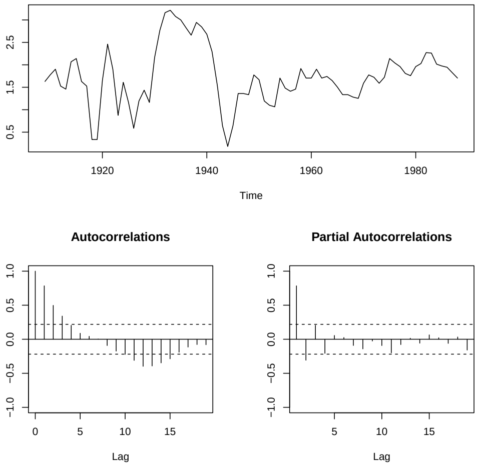
Simulation (3)



Modèle autorégressif

Données Nelson-Plosser : ACF et PACF

- On modélise le taux de chômage aux USA (données Nelson-Plosser)

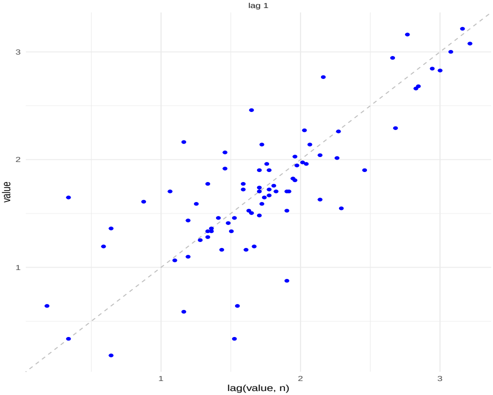


Modèle autorégressif

Données Nelson-Plosser

- On visualise $y \times y_{t-1}$ à l'aide de la fonction gg_lag

```
unemp1909p <- nelplo_tsbl %>% filter(index>1909 & key=='unemp')
unemp1909p %>% gg_lag(y=value, lags=1, geom="point", colour="blue")
```



Modèle autorégressif

Données Nelson-Plosser : Estimation (1)

- On peut estimer le modèle $AR(1)$ avec les fonctions `lm` (linear model) et `lag` :

```
summary(lm(value ~ lag(value), data=unemp1909p))

##
## Call:
## lm(formula = value ~ lag(value), data = unemp1909p)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.23467 -0.16288 -0.01882  0.18815  1.01130
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.37324    0.13168   2.834  0.00588 **
## lag(value)   0.78497    0.07107  11.046  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.4001 on 76 degrees of freedom
##   (1 observation effacée parce que manquante)
## Multiple R-squared:  0.6162,Adjusted R-squared:  0.6111
## F-statistic:   122 on 1 and 76 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Le coefficient associé à y_{t-1} est significatif

Modèle autorégressif

Données Nelson-Plosser : Estimation (2)

- On peut également estimer le modèle $AR(1)$ avec la fonction `arima` :

```
summary(arima(unemp1909p[,"value"], c(1,0,0)))
##
## Call:
## arima(x = unemp1909p[, "value"], order = c(1, 0, 0))
##
## Coefficients:
##          ar1  intercept
##       0.7756     1.7394
## s.e.  0.0680     0.1887
##
## sigma^2 estimated as 0.154:  log likelihood = -38.66,  aic = 83.32
##
## Training set error measures:
##                         ME      RMSE       MAE       MPE     MAPE      MASE
## Training set -0.0004783172 0.3924347 0.2859196 -14.03967 28.36622 0.9722669
##                   ACF1
## Training set 0.2482824
```

- Le coefficient associé à y_{t-1} est significatif

Modèle moyenne mobile
Définition

- y_t est un processus moyenne mobile (Moving Average, MA) d'ordre q noté $MA(q)$ si

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \cdot \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \cdot \epsilon_{t-q}$$

- On considère que le processus est la résultante d'une combinaison linéaire de perturbations decorrélées (un bruit blanc et son passé)
- Un $MA(q)$ est **toujours stationnaire** quelles que soient les valeurs des θ
- Les propriétés d'un modèle MA(1)

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \cdot \epsilon_{t-1}$$

  - $E[y_t] = \mu$
  - $Var(y_t) = \sigma_\epsilon^2(1 + \theta_1^2)$
  - ACF : $\rho_1 = \theta_1/(1 + \theta_1^2)$ et $\rho_h = 0$ pour $h \geq 2$

Modèle moyenne mobile

Fonction d'autocorrélation

- Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus $MA(q)$, sa fonction d'autocorrélation est égale à 0 pour les rangs supérieurs à q
- Les autocorrélations observées sont un bon indicateur de l'ordre du processus
- Les autocorrélations partielles tendent vers 0 exponentiellement lorsque le rang augmente (comme les corrélations simples d'un processus AR) (cf par ex. [7])
- Plus généralement, on peut montrer que les autocorrélations partielles d'un modèle $MA(q)$ se comportent comme les autocorrélations d'un modèle $AR(q)$

Modèle moyenne mobile

Simulation (1)

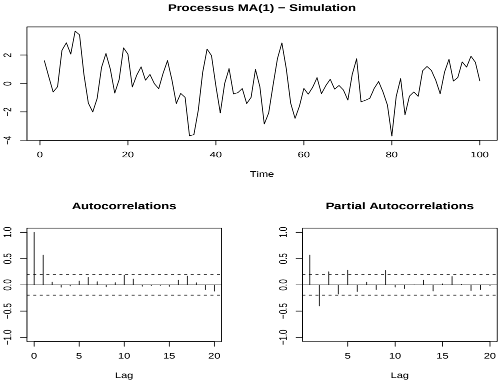
- En utilisant la même série `wn` de nombre aléatoires, on simule un processus $MA(1)$

```
MA1sim <- arima.sim(n = 100, list(ma = 0.9), innov=wn)
```

- Le code suivant permet de visualiser la série ainsi que ses autocorrélations (partielles)

```
op <- par(no.readonly=TRUE)
layout(matrix(c(1, 1, 2, 3), 2, 2, byrow=TRUE))
plot.ts(MA1sim, ylab=") acf(MA1sim, main="Autocorrelations", ylab="", main="Processus MA(1) - Simulation",
ylim=c(-1, 1), ci.col = "black") pacf(MA1sim, main="Partial Autocorrelations", ylab="", ylim=c(-1, 1), ci.
= "black")
par(op)
```

Modèle moyenne mobile
Simulation (2)



Modèle ARMA

- Un processus ARMA (Auto Regressive Moving Average) est une synthèse des processus AR et MA
- y_t obéit à un modèle ARMA(p, q) s'il est stationnaire et vérifie :

$$y_t = c + \phi_1 \cdot y_{t-1} + \ldots + \phi_p \cdot y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \cdot \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \cdot \epsilon_{t-q}$$

Identification d'un modèle ARMA

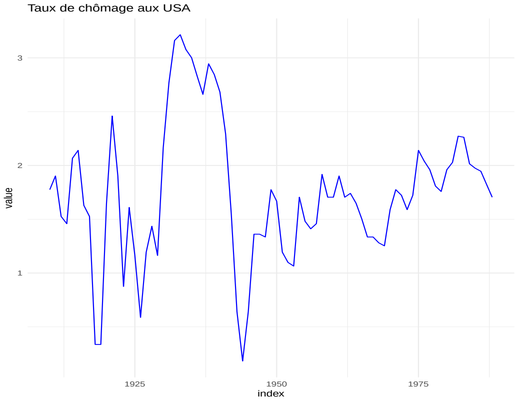
- Soit la trajectoire observée $y_1, \ldots, y_t$ d'une série y_t, éventuellement transformée par passage en log
- Si cette trajectoire peut-être considérée comme stationnaire, on peut lui ajuster un modèle ARMA(p, q) (on ne traite pas ici des séries présentant une saisonnalité)
- La première étape consiste à choisir les ordres p et q
- Le choix de p et q n'est pas unique, il faut comparer plusieurs modèles
- Le premier critère pour juger de la qualité d'un modèle est la blancheur du résidu obtenu (voir la section définitions)

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA

- Nous avons vu que la série des taux de chômage aux USA peut-être considérée comme stationnaire

```
ggplot(data=unemp1909p) + geom_line(aes(x=index, y=value), color="blue") +
  ggtitle("Taux de chômage aux USA")
```

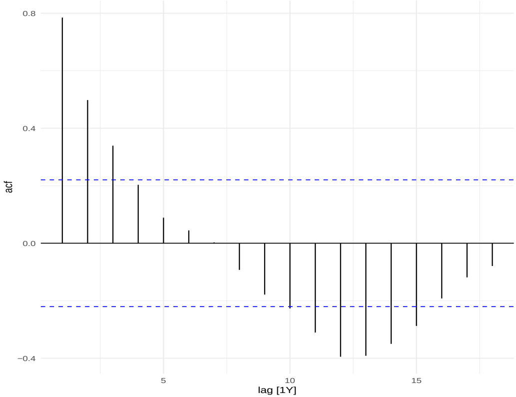


Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Autocorrélation

- On commence par examiner sa fonction d'autocorrélation

```
unemp1909p %>% ACF(value) %>% autoplot()
```

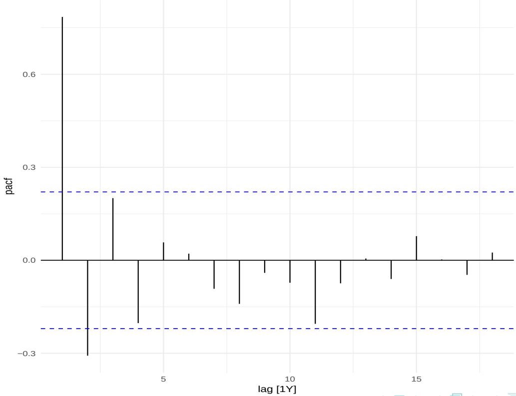


Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Autocorrélation partielle

- Le coefficient d'autocorrélation partielle $\phi k, k$ représente l'apport d'explication de y_{t-k} à y_t, **toutes choses égales par ailleurs**
- La fonction d'autocorrélation partielle permet d'identifier l'ordre p d'un processus $AR(p)$

```
unemp1909p %>% PACF(value) %>% autoplot()
```



Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Estimation du modèle (1)

- On commence par un modèle ARMA(2,2)
- L'erreur standard est élevée par rapport à la valeur du coefficient

```
arma.mod1 <- arima(unemp1909p[,"value"], c(2,0,2))
summary(arma.mod1)

##
## Call:
## arima(x = unemp1909p[, "value"], order = c(2, 0, 2))
##
## Coefficients:
##          ar1      ar2     ma1      ma2  intercept
##       0.7228  -0.0376  0.4009  -0.1253     1.7357
## s.e.  0.9293   0.5663  0.9222   0.5102     0.1598
##
## sigma^2 estimated as 0.1296:  log likelihood = -32.05,  aic = 76.11
##
## Training set error measures:
##                        ME      RMSE       MAE       MPE     MAPE     MASE
## Training set 0.0004553661 0.3599465 0.2635755 -10.65611 24.60626 0.896286
##                    ACF1
## Training set 0.01310071
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Modèle $ARMA(2, 2)$ - significativité des paramètres

- Les p-valeurs ne sont pas fournies directement par les fonctions `arima` et `auto.arima`
- On peut les calculer en utilisant les erreurs standard des coefficients

```
# Extract standard errors
se <- sqrt(diag(vcov(arma.mod1)))

# Calculate the t-values
t_values <- coef(arma.mod1) / se

# Calculate the p-values
p_values <- 2 * (1 - pnorm(abs(t_values)))

# Create a data frame with coefficients, standard errors, t-values, and p-values
results <- data.frame(
  Coefficient = coef(arma.mod1),
  Std_Error = se,
  T_Value = t_values,
  P_Value = p_values
)
print(results)
```

```
##           Coefficient Std_Error     T_Value   P_Value
## ar1        0.72276639 0.9292858  0.77776541 0.4367073
## ar2       -0.03759621 0.5663260 -0.06638616 0.9470704
## ma1        0.40092547 0.9222413  0.43472947 0.6637588
## ma2       -0.12526964 0.5102430 -0.24550974 0.8060618
## intercept  1.73571612 0.1597567 10.86474781 0.0000000
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Estimation du modèle (2)

- On ajuste un modèle ARMA(1,1)
- L'erreur standard des coefficients a diminué fortement

```
arma.mod2 <- arima(unemp1909p[,"value"], c(1,0,1))
summary(arma.mod2)
```

```
##
## Call:
## arima(x = unemp1909p[, "value"], order = c(1, 0, 1))
##
## Coefficients:
##          ar1     ma1  intercept
##       0.5895  0.5555     1.7356
## s.e.  0.1032  0.1103     0.1503
##
## sigma^2 estimated as 0.13:  log likelihood = -32.19,  aic = 72.38
##
## Training set error measures:
##                        ME      RMSE       MAE       MPE     MAPE      MASE
## Training set 0.0005107137 0.3605539 0.2665423 -10.46991 24.69032 0.9063747
##                      ACF1
## Training set -0.006430895
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Sélection du modèle

- On utilise l'AIC (Akaike Information Criterion) pour sélectionner le modèle (la plus petite valeur de l'AIC)
- On retient le second modèle avec moins de paramètres ($p = 1$ et $q = 1$)

```
AIC(arma.mod1, arma.mod2)
```

```
##           df      AIC
## arma.mod1  6 76.10996
## arma.mod2  4 72.37670
```

- NOTE : le calcul de l'AIC requiert la log-vraissemblance (log-likelihood) du modèle, celle ci n'est pas disponible lorque le modèle est estimé par MCO

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Utilisation de la fonction auto.arima

- La fonction auto.arima recherche le meilleur modèle en utilisant un critère d'information
- Le résultat confirme le choix du modèle ARMA(1,1)

```
nelplo.arma <- auto.arima(unemp1909p$value)
nelplo.arma
```

```
## Series: unemp1909p$value
## ARIMA(1,0,1) with non-zero mean
##
## Coefficients:
##          ar1     ma1    mean
##       0.5895  0.5555  1.7356
## s.e.  0.1032  0.1103  0.1503
##
## sigma^2 = 0.1351:  log likelihood = -32.19
## AIC=72.38   AICc=72.92   BIC=81.85
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Significativité des paramètres

- Calcul des p-valeurs en utilisant les erreurs standard des coefficients

```
# Extract standard errors
se <- sqrt(diag(vcov(nelplo.arma)))

# Calculate the t-values
t_values <- coef(nelplo.arma) / se

# Calculate the p-values
p_values <- 2 * (1 - pnorm(abs(t_values)))

# Create a data frame with coefficients, standard errors, t-values, and p-values
results <- data.frame(
  Coefficient = coef(nelplo.arma),
  Std_Error = se,
  T_Value = t_values,
  P_Value = p_values
)
print(results)
```

```
##           Coefficient Std_Error   T_Value      P_Value
## ar1         0.5894997 0.1032109  5.711603 1.119166e-08
## ma1         0.5554587 0.1103101  5.035431 4.767737e-07
## intercept   1.7355500 0.1503400 11.544166 0.000000e+00
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Diagnostic du modèle - Préparation

- Afin de vérifier la validité des modèles estimés, on doit vérifier au minimum la significativité des paramètres et la blancheur du résidu
- On prépare un data frame avec les valeurs observées, les valeurs prédites par le modèle, et les résidus

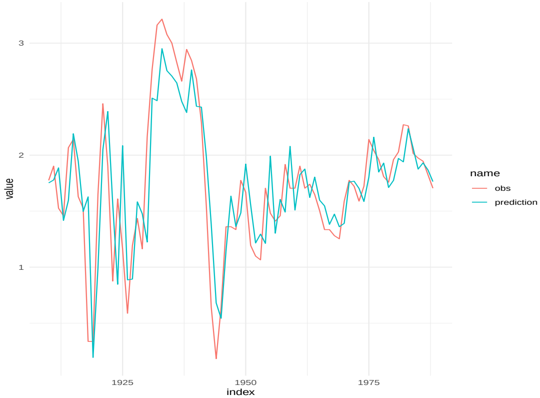
```
nelplo.arma.diag <- data.frame(index=unemp1909p$index, obs=unemp1909p$value,
                               prediction=as.data.frame(nelplo.arma$fitted)$x,
                               residus=as.data.frame(nelplo.arma$residuals)$x)
head(nelplo.arma.diag)
```

```
##   index      obs prediction     residus
## 1  1910 1.774952   1.752238  0.02271448
## 2  1911 1.902108   1.778215  0.12389255
## 3  1912 1.526056   1.887011 -0.36095467
## 4  1913 1.458615   1.416962  0.04165325
## 5  1914 2.066863   1.596360  0.47050309
## 6  1915 2.140066   2.191556 -0.05148945
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Valeurs observées x prédites

```
nelplo.arma.diag %>%
  pivot_longer(cols=2:4) %>%
  filter(name %in% c("prediction", "obs")) %>%
  ggplot() + geom_line(aes(x=index, y=value, color=name))
```

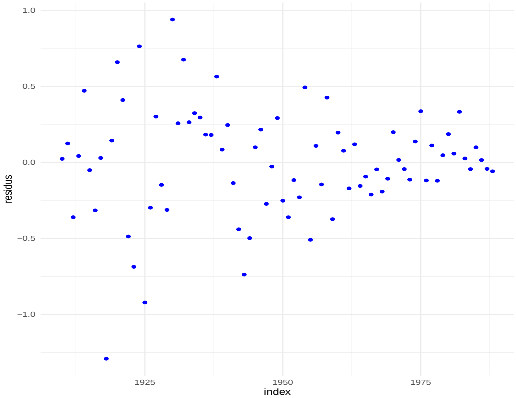


Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Résidus (1)

- Si notre modèle est adéquat, les résidus devraient fluctuer autour de 0, sans tendance

```
nelplo.arma.diag %>% ggplot() +
  geom_point(aes(x=index, y=residus), color="blue")
## Don't know how to automatically pick scale for object of type <ts>. Defaulting
## to continuous.
```

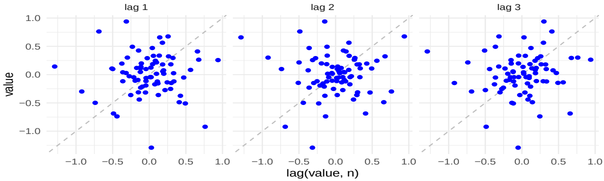


Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Résidus (2)

- On visualise l'autocorrélation des résidus à l'aide de la fonction gg_lag

```
nelplo.arma$residuals %>% as_tsibble() %>%
  gg_lag(y=value, lags=1:3, geom="point", colour="blue")
```



Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Résidus (3)

- On teste la blancheur des résidus aux retards 1 à 3
- Toutes les p-valeur sont largement supérieure à 0.05, on peut conclure à la blancheur des résidus

```
lags <- 1:3
pval <- NULL
for (l in lags) {
  pval <-c(pval, box_pierce(nelplo.arma.diag$residus, lag=l)["bp_pvalue"])
}
res <- data.frame(lags, pval)
res
```

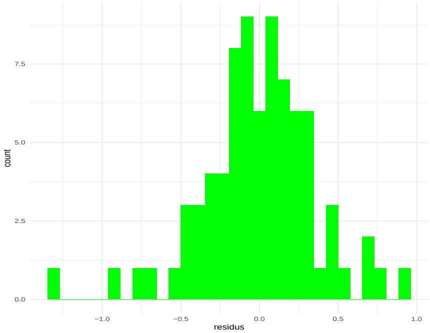
```
##   lags      pval
## 1    1 0.9544185
## 2    2 0.9906342
## 3    3 0.8891629
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Résidus (4)

- L'hypothèse de normalité des résidus (test de Jarque-Bera) est rejettée

```
ggplot(nelplo.arma.diag) + geom_histogram(aes(x=residus), fill='green')
```




```
jarque.bera.test(nelplo.arma.diag$residus)
##
##  Jarque Bera Test
##
## data:  nelplo.arma.diag$residus
## X-squared = 11.985, df = 2, p-value = 0.002498
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Projection (1)

- On peut utiliser la fonction générique `forecast` pour la projection du taux de chômage
- On obtient la prédiction et les intervalles de confiance à 80% et 95%

```
forecast(nelplo.arma, h=10)
```

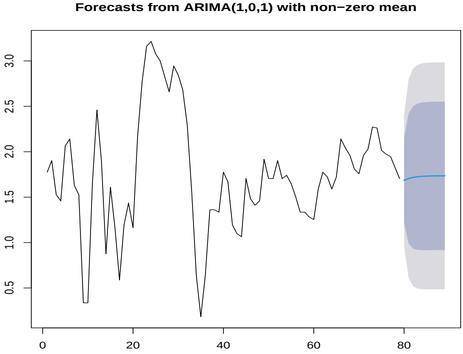
```
##    Point Forecast     Lo 80    Hi 80     Lo 95    Hi 95
## 80       1.684490 1.2133901 2.155590 0.9640049 2.404975
## 81       1.705450 0.9892962 2.421604 0.6101872 2.800713
## 82       1.717806 0.9342365 2.501376 0.5194397 2.916173
## 83       1.725090 0.9194124 2.530768 0.4929124 2.957268
## 84       1.729384 0.9161642 2.542603 0.4856717 2.973096
## 85       1.731915 0.9160908 2.547739 0.4842196 2.979611
## 86       1.733407 0.9166798 2.550135 0.4843304 2.982484
## 87       1.734287 0.9172458 2.551328 0.4847304 2.983843
## 88       1.734805 0.9176554 2.551955 0.4850823 2.984528
## 89       1.735111 0.9179232 2.552299 0.4853301 2.984892
```

Modèle ARMA

Taux de chômage aux USA : Projection (2)

- La méthode générique `plot` permet de visualiser la projection

```
plot(forecast(nelplo.arma, h=10))
```



Section 11

Modèlisation de séries non-stationnaires

Modèle ARIMA

Identification d'un modèle

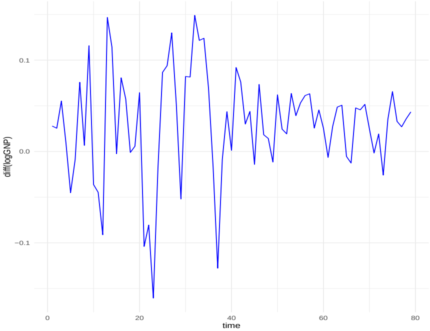
- Un modèle ARIMA(p,d,q) est un modèle ARMA sur la série différenciée, d est l'ordre de différentiation
- Soit la trajectoire observée $y_1, \ldots, y_t$ d'une série y_t , éventuellement obtenue après transformation d'une série initiale par passage en log
- La série n'est pas stationnaire et on veut lui ajuster un modèle ARIMA(p, d, q) (on ne traite pas ici des séries présentant une saisonnalité)
- Une fois d choisis, on est ramené à l'identification d'un ARMA sur la série différenciée
- Pour choisir d, on peut tester l'hypothèse $\mathrm{d} = 1$ contre $\mathrm{d} = 0$ avec un test ADF
- On peut également comparer les modèles avec et sans différenciation à l'aide d'un critère d'information ou de la valeur prédictive

Modèle ARIMA

PIB des USA

- Nous avons vu que cette série (après **transformation logarithmique**) est non stationnaire et qu'elle possède un trend stochastique
- On peut donc la différencier puis ajuster un modèle ARMA
- La série différenciée `gnpreal.diff` a été calculée précédemment

```
ggplot(gnpreal.diff) + geom_line(aes(x=time, y=diff), color="blue") + ylab("diff(logGNP)")
```

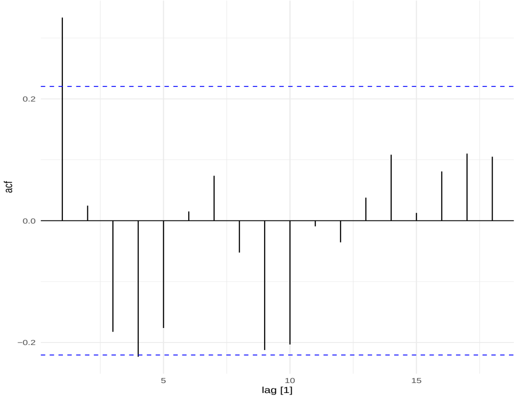


Modèle ARIMA

PIB des USA : Autocorrélation (série différenciée)

- L'autocorrélation est significative uniquement pour le lag 1

```
gnpreal.diff %>% as_tsibble(index=time) %>% ACF(diff) %>% autoplot()
```

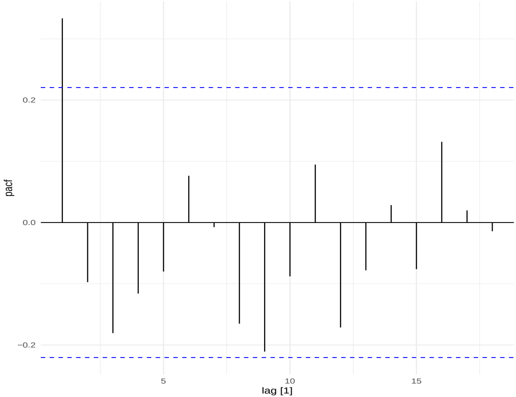


Modèle ARIMA

PIB des USA : Autocorrélation partielle (série différenciée)

- La fonction d'autocorrélation partielle suggère un modèle $AR(1)$

```
gnpreal.diff %>% as_tsibble(index=time) %>% PACF(diff) %>% autoplot()
```



Modèle ARIMA

PIB des USA : Modélisation

- On utilise la fonction `auto.arima`
- Le modèle retenu est $ARIMA(1,1,0)$: un modèle $ARMA(1,0)$ sur la série intégrée $I(1)$

```
regdata <- nelplo1909$gnp.real
gnpreal.arima <- auto.arima(regdata)
gnpreal.arima
```

```
## Series: regdata
## ARIMA(1,1,0) with drift
##
## Coefficients:
##          ar1   drift
##       0.3296  0.0295
## s.e.  0.1052  0.0090
##
## sigma^2 = 0.003015:  log likelihood = 118.12
## AIC=-230.24   AICc=-229.92   BIC=-223.14
```

Modèle ARIMA

PIB des USA : Diagnostics (1)

- Calcul des p-valeurs en utilisant les erreurs standard des coefficients

```r
# Extract standard errors
se <- sqrt(diag(vcov(gnpreal.arima)))

# Calculate the t-values
t_values <- coef(gnpreal.arima) / se

# Calculate the p-values
p_values <- 2 * (1 - pnorm(abs(t_values)))

# Create a data frame with coefficients, standard errors, t-values, and p-values
results <- data.frame(
  Coefficient = coef(gnpreal.arima),
  Std_Error = se,
  T_Value = t_values,
  P_Value = p_values
)
print(results)
```

```
##       Coefficient   Std_Error  T_Value     P_Value
## ar1    0.32961164 0.105246210 3.131815 0.001737294
## drift  0.02954975 0.009042602 3.267837 0.001083726
```

Modèle ARIMA

PIB des USA : Diagnostics (2)

- On prépare un data frame avec les valeurs prédites par le modèle, et les résidus

```
gnpreal.arima.diag <- data.frame(index=nelplo1909$index,
                                 prediction=as.data.frame(gnpreal.arima$fitted)$x,
                                 residus=as.data.frame(gnpreal.arima$residuals)$x)
head(gnpreal.arima.diag)
```

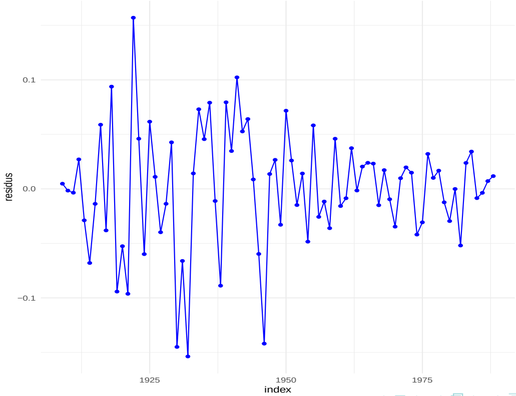
```
##   index prediction      residus
## 1  1909   4.755732  0.004730911
## 2  1910   4.789920 -0.001595465
## 3  1911   4.817318 -0.003508918
## 4  1912   4.842019  0.027052834
## 5  1913   4.907097 -0.028850607
## 6  1914   4.901080 -0.067977600
```

Modèle ARIMA

PIB des USA : Résidus (1)

- Si notre modèle est adéquat, les résidus devraient fluctuer autour de 0, sans tendance

```
gnpreal.arima.diag %>% ggplot(aes(x=index, y=residus)) +
  geom_point(color="blue") +
  geom_line(color="blue")

## Don't know how to automatically pick scale for object of type <ts>. Defaulting
## to continuous.
```

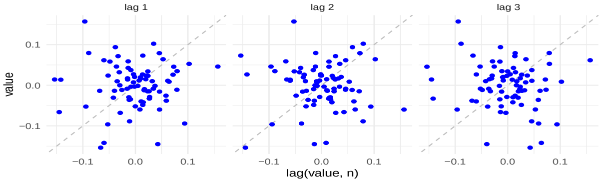


Modèle ARIMA

PIB des USA : Résidus (2)

- On visualise l'autocorrélation des résidus à l'aide de la fonction `gg_lag`

```
gnpreal.arima$residuals %>% as_tsibble() %>%
  gg_lag(y=value, lags=1:3, geom="point", colour="blue")
```



Modèle ARIMA

PIB des USA : Résidus (3)

- On teste la blancheur des résidus aux retards 1 à 3
- Toutes les p-valeur sont largement supérieure à 0.05, on peut conclure à la blancheur des résidus

```
lags <- 1:3
pval <- NULL
for (l in lags) {
  pval <-c(pval, box_pierce(gnpreal.arima.diag$residus, lag=l)["bp_pvalue"])
}
res <- data.frame(lags, pval)
res
```

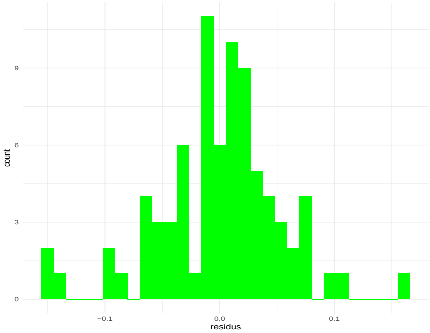
```
##   lags      pval
## 1    1 0.7460147
## 2    2 0.9252396
## 3    3 0.5645515
```

Modèle ARIMA

PIB des USA : Résidus (4)

- L'hypothèse de normalité des résidus (test de Jarque-Bera) est acceptée

```
ggplot(gnpreal.arima.diag) + geom_histogram(aes(x=residus), fill='green')
```




```
jarque.bera.test(gnpreal.arima.diag$residus)
##
##  Jarque Bera Test
##
## data:  gnpreal.arima.diag$residus
## X-squared = 5.7526, df = 2, p-value = 0.05634
```

Modèle ARIMA

PIB des USA : Prédiction (1)

- La fonction `forecast` produit les prédiction à partir du modèle sélectionné, avec un intervalle de confiance
- Les données sont annuelles, on prédit à un horizon de 10 ans

```
forecast(gnpreal.arima, h=10)
```

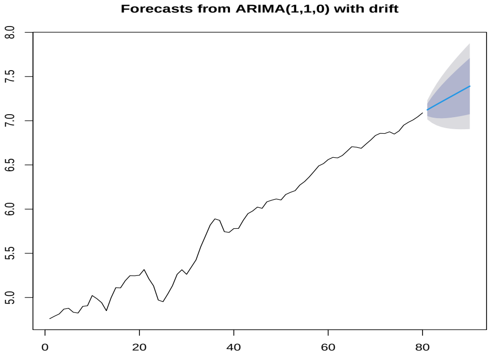
```
##    Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
## 81       7.122980 7.052606 7.193353 7.015353 7.230606
## 82       7.154028 7.036948 7.271107 6.974970 7.333085
## 83       7.184071 7.029307 7.338836 6.947380 7.420763
## 84       7.213784 7.027470 7.400098 6.928841 7.498727
## 85       7.243387 7.029736 7.457039 6.916636 7.570139
## 86       7.272955 7.034967 7.510943 6.908984 7.636926
## 87       7.302510 7.042418 7.562603 6.904733 7.700288
## 88       7.332062 7.051590 7.612535 6.903117 7.761008
## 89       7.361612 7.062141 7.661084 6.903610 7.819615
## 90       7.391162 7.073826 7.708499 6.905838 7.876487
```

Modèle ARIMA

Log du PIB des USA : Prédiction (2)

La méthode générique `plot` produit une représentation graphique de la prédiction

```
plot(forecast(gnpreal.arima, h=10))
```

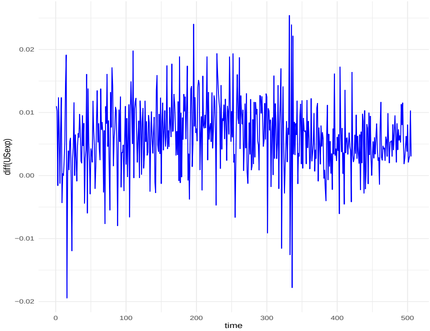


Modèle ARIMA

Dépenses aggégées de consommation aux USA

- Nous avons vu que cette série (après transformation logarithmique) est non stationnaire et qu'elle possède un trend stochastique
- On peut donc la différencier puis ajuster un modèle ARMA
- La série différenciée `USExp_diff` a été calculée précédemment

```
ggplot(USExp.diff) + geom_line(aes(x=time, y=diff), color="blue") + ylab("diff(USexp)")
```

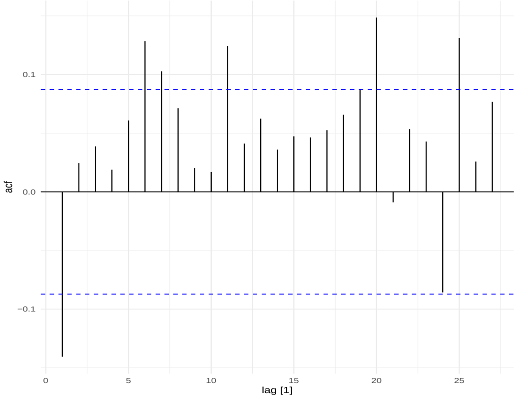


Modèle ARIMA

Dépenses aggégées de consommation aux USA : Fonction d'autocorrélation (série différenciée)

- La fonction d'autocorrélation ne montre pas de tendance

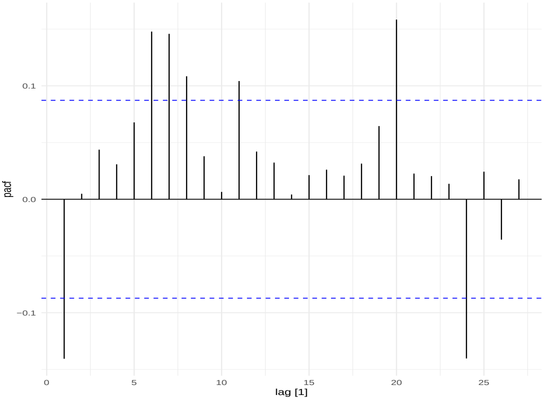
```
USExp.diff %>% as_tsibble(index=time) %>% ACF(diff) %>% autoplot()
```



Modèle ARIMA

Dépenses aggégées de consommation aux USA : Fonction d'autocorrélation partielle

```
USExp.diff %>% as_tsibble(index=time) %>% PACF(diff) %>% autoplot()
```



Modèle ARIMA

Dépenses aggégées de consommation aux USA : Modélisation

- On utilise la fonction `auto.arima`

```
regdata <- USExp[,"logExp"]
arimod <- auto.arima(regdata)
arimod
```

```
## Series: regdata
## ARIMA(2,2,2)
##
## Coefficients:
##          ar1     ar2      ma1     ma2
##       0.3384  0.0158  -1.5509  0.5725
## s.e.  0.1704  0.0679   0.1644  0.1578
##
## sigma^2 = 3.053e-05:  log likelihood = 1906.35
## AIC=-3802.69   AICc=-3802.57   BIC=-3781.58
```

Modèle ARIMA

Dépenses aggégées de consommation aux USA : Prédiction (1)

- La fonction `forecast()` produit les prédiction à partir du modèle sélectionné, avec un intervalle de confiance

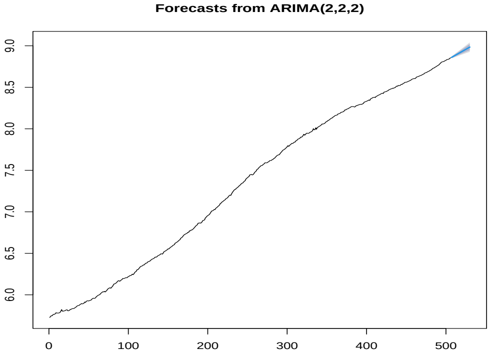
```
forecast(arimod, h=24)
```

```
##     Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
## 507       8.859892 8.852811 8.866972 8.849063 8.870721
## 508       8.865359 8.856346 8.874371 8.851575 8.879142
## 509       8.870780 8.860308 8.881252 8.854765 8.886796
## 510       8.876182 8.864410 8.887955 8.858178 8.894187
## 511       8.881577 8.868565 8.894590 8.861676 8.901478
## 512       8.886969 8.872742 8.901197 8.865210 8.908729
## 513       8.892361 8.876928 8.907794 8.868758 8.915963
## 514       8.897751 8.881115 8.914388 8.872308 8.923195
## 515       8.903142 8.885300 8.920984 8.875854 8.930429
## 516       8.908532 8.889479 8.927586 8.879393 8.937672
## 517       8.913923 8.893652 8.934194 8.882921 8.944925
## 518       8.919313 8.897816 8.940811 8.886435 8.952191
## 519       8.924704 8.901970 8.947438 8.889935 8.959473
## 520       8.930094 8.906114 8.954075 8.893419 8.966770
## 521       8.935485 8.910246 8.960723 8.896886 8.974084
## 522       8.940875 8.914367 8.967383 8.900335 8.981416
## 523       8.946266 8.918476 8.974055 8.903765 8.988766
## 524       8.951656 8.922573 8.980740 8.907177 8.996136
## 525       8.957047 8.926656 8.987437 8.910569 9.003525
## 526       8.962437 8.930727 8.994147 8.913941 9.010934
## 527       8.967828 8.934785 9.000870 8.917293 9.018362
## 528       8.973218 8.938829 9.007607 8.920625 9.025811
## 529       8.978609 8.942861 9.014356 8.923937 9.033280
## 530       8.983999 8.946879 9.021119 8.927229 9.040769
```

Modèle ARIMA

Dépenses aggégées de consommation aux USA : Prédiction (2)

```
plot(forecast(arimod, h=24))
```



Exercice

- Ajustez un modèle ARMA ou ARIMA sur les séries du PIB, de l'IPC et du taux de chômage français (données `fr_macro`)
- Réalisez le diagnostic des modèles
- Prédisez les indicateurs pour les trimestres à venir

Section 12

Modèles multivariés pour l'analyse de séries temporelles stationnaires

Série temporelle multivariée
Introduction

- L'analyse de séries temporelles multivariées permet notamment
  1. D'étudier les relations **dynamiques** entre variables
  2. D'améliorer la précision des prédictions
- Nous allons nous focaliser ici sur l'analyse de séries temporelles multivariées **stationnaires**
- Les modèles VAR (Vector Autoregressive Models) représentent l'instrument principal pour l'études de séries temporelles multivariées stationnaires

Série temporelle multivariée

PIB et taux de chômage aux USA (1)

- La série multivariée $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{kt}, \dots, y_{Kt}), \quad k = 1, \dots, K$ contient K variables
- Par exemple, soit y_{1t} le PIB et y_{2t} le taux de chômage aux USA (exemple tiré de [8] (voir ici)
- Ici, k = 2
- Les données sont disponibles dans le fichier `q-gdpunemp.txt`

```
gdpunemp <- read.csv('../data/q-gdpunemp.txt', sep=' ')
head(gdpunemp)
```

```
##   year mon      gdp     rate
## 1 1948   1 1821.809 3.733333
## 2 1948   4 1855.345 3.666667
## 3 1948   7 1865.320 3.766667
## 4 1948  10 1868.184 3.833333
## 5 1949   1 1842.240 4.666667
## 6 1949   4 1835.512 5.866667
```

- En étudiant conjointement les deux séries, on peut estimer les relations temporelles et simultanées entre le PIB et le taux de chômage

Série temporelle multivariée

PIB et taux de chômage aux USA (2)

- Séries trimestrielles CVS obtenues à partir de données mensuelles (moyenne), de 1948 à 2011
- On considère le logarithme du PIB (en millions de dollars 2005)
- Création d'un index et conversion en objet `mts`

```
gdpunemp$loggdp <- log(gdpunemp$gdp)
gdpunemp <- ts(gdpunemp[, c("loggdp", "rate")], start=1948, frequency = 4)
head(gdpunemp)
```

```
##           loggdp     rate
## 1948 Q1 7.507585 3.733333
## 1948 Q2 7.525826 3.666667
## 1948 Q3 7.531188 3.766667
## 1948 Q4 7.532722 3.833333
## 1949 Q1 7.518738 4.666667
## 1949 Q2 7.515079 5.866667
```

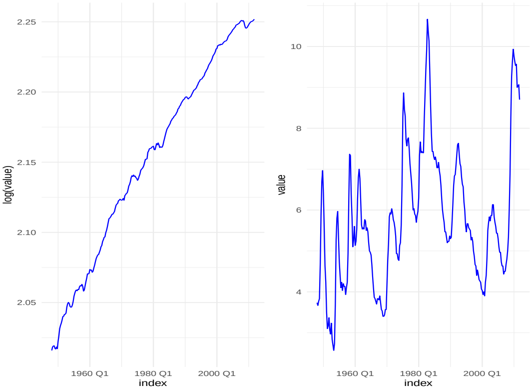
- Création d'un objet `tsibble`

```
gdpunemp_tsbl <- as_tsibble(gdpunemp)
```

Série temporelle multivariée

PIB et taux de chômage aux USA : Chronogramme

```
g1 <- gdpunemp_tsbl %>% filter(key=="loggdp") %>%
  ggplot() + geom_line(aes(x=index, y=log(value)), color="blue")
g2 <- gdpunemp_tsbl %>% filter(key=="rate") %>%
  ggplot() + geom_line(aes(x=index, y=value), color="blue")
g1 + g2
```



Série temporelle multivariée

PIB et taux de chômage aux USA : Variations (1)

- On calcule le taux de croissance du PIB et la variation du taux de chômage en différenciant les séries

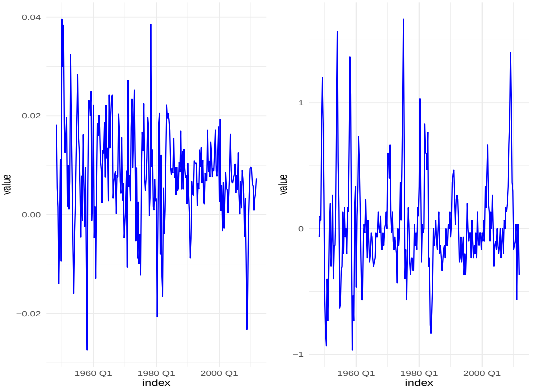
```
gdpunemp_i <- diff(gdpunemp) %>% as_tsibble()
head(gdpunemp_i)
```

```
## # A tsibble: 6 x 3 [1Q]
## # Key:       key [1]
##     index key       value
##     <qtr> <chr>     <dbl>
## 1 1948 Q2 loggdp  0.0182
## 2 1948 Q3 loggdp  0.00536
## 3 1948 Q4 loggdp  0.00153
## 4 1949 Q1 loggdp -0.0140
## 5 1949 Q2 loggdp -0.00366
## 6 1949 Q3 loggdp  0.0112
```

Série temporelle multivariée

PIB et taux de chômage aux USA : Variations (2)

```
g1 <- gdpunemp_i %>% filter(key=="loggdp") %>%
  ggplot() + geom_line(aes(x=index, y=value), color="blue")
g2 <- gdpunemp_i %>% filter(key=="rate") %>%
  ggplot() + geom_line(aes(x=index, y=value), color="blue")
g1 + g2
```

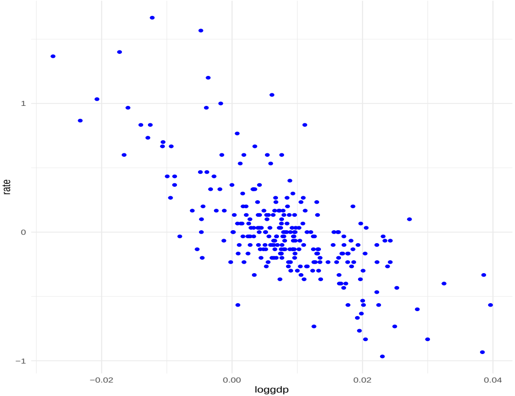


Série temporelle multivariée

PIB et taux de chômage aux USA : Corrélation

- Les deux séries présentent une corrélation instantanée négative

```
diff(gdpunemp) %>% as.data.frame() %>%
  ggplot() + geom_point(aes(x=loggdp, y=rate), color="blue")
```



Série temporelle multivariée

Processus VAR

- Les modèles VAR (Vector Autoregression) sont l'extension des modèles AR à des séries multivariées
- L'évolution d'une série est modélisée par ses valeurs passées et celles des autres séries
- La série multivariée $y_t = (y_{1t}, \ldots, y_{kt}, \ldots, y_{Kt}), \quad k = 1, \ldots, K$ contient K variables
- Un processus $VAR(p)$ est défini par :

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \ldots + A_p y_{t-p} + \mu_t$$

  avec $E(\mu_t) = 0$
- A_i est une matrice de $(K \times K)$ coefficients, $i = 1, \ldots, p$

Série temporelle multivariée

Stationarité

- La série multivariée y_t est stationnaire (covariance stationary) si :
  - Son espérance est constante : $E(y_t) = \mu$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K)^T$
  - La covariance $cov(X_{t_1 i}, X_{t_2 j})$ est fonction uniquement de $t2 - t1$ pour chaque i et j

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) (1)

- Exemple tiré de [8] : taux de croissances trimestriels du PIB, en pourcent, au Royaume-Uni, Canada, et USA du 2ème trimestre 1980 au 2ème trimestre 2011
- Données CVS (données Federal Reserve Bank, St. Louis)
- Le PIB est exprimé en millions (monnaie nationale)

```
varpib <- read.table("../data/q-gdp-ukcaus.txt", header=T)
varpib <- log(varpib[,3:5])
head(varpib)
```

```
##         uk       ca       us
## 1 12.05778 13.34518 15.59190
## 2 12.03978 13.34300 15.57119
## 3 12.03788 13.34265 15.56933
## 4 12.02683 13.35382 15.58766
## 5 12.02006 13.37849 15.60822
## 6 12.02211 13.38773 15.60021
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) (2)

- Les séries intégrées du log(PIB) représentent les taux de croissance

```
varpib_ts <- ts(varpib, start=c(1980,1), frequency=4)
pibgr <- diff(varpib_ts)*100
head(pibgr)
```

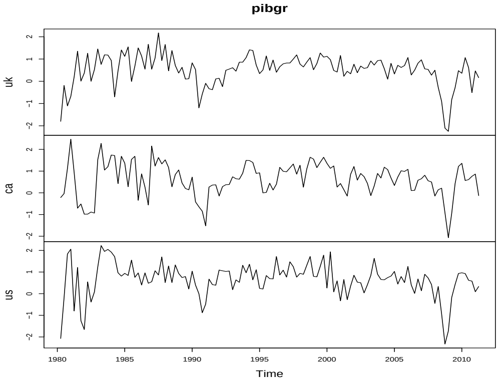
```
##                 uk          ca         us
## 1980 Q2 -1.8005431 -0.21806940 -2.0708851
## 1980 Q3 -0.1897181 -0.03497379 -0.1867866
## 1980 Q4 -1.1052465  1.11694674  1.8336549
## 1981 Q1 -0.6770084  2.46719071  2.0557195
## 1981 Q2  0.2051468  0.92410692 -0.8007733
## 1981 Q3  1.3479031 -0.70853560  1.2078892
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) (3)

- Chronogramme des trois séries intégrées (taux de croissance)

```
plot(pibgr)
```



Modèle VAR

Test de stationarité sur les séries intégrée

- On vérifie que la série est stationnaire après différentiation
  - Hypothèse H0 : la série présente une tendance stochastique (racine unitaire)
  - Hypothèse H1 : la série est stationnaire

```
pibuk.df <- ur.df(pibgr[, "uk"], type = "drift", lags = 1)
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(pibuk.df, "teststat")
```

```
##                tau2     phi1
## statistic -4.588346 10.54152
```

- Valeurs critiques

```
attr(pibuk.df, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.46 -2.88 -2.57
## phi1  6.52  4.63  3.81
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Estimation (1)

- On utilise la librairie `vars` (Pfaff [9], voir l'article ici)

```
library("vars")
pibgr.VAR <- VAR(pibgr, p=2)
pibgr.VAR
```

```
##
## VAR Estimation Results:
## =======================
##
## Estimated coefficients for equation uk:
## =======================================
## Call:
## uk = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + uk.l2 + ca.l2 + us.l2 + const
##
##      uk.l1      ca.l1      us.l1      uk.l2      ca.l2      us.l2      const
## 0.39306691 0.10310572 0.05213660 0.05660120 0.10552241 0.01889462 0.12581630
##
##
## Estimated coefficients for equation ca:
## =======================================
## Call:
## ca = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + uk.l2 + ca.l2 + us.l2 + const
##
##        uk.l1        ca.l1        us.l1        uk.l2        ca.l2        us.l2
##  0.351313628  0.338141505  0.469093555 -0.191350134 -0.174833458 -0.008677767
##        const
##  0.123158083
##
##
## Estimated coefficients for equation us:
## =======================================
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Estimation (2)

- La méthode `summary` permet d'obtenir les estimations pour chaque série
- Pour la série `uk`, seul le paramètre associé à `uk.l1` (lag 1) est significatif

```
summary(pibgr.VAR)$varresult$uk

##
## Call:
## lm(formula = y ~ -1 + ., data = datamat)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.85491 -0.23752  0.05079  0.33566  1.31252
##
## Coefficients:
##        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1   0.39307    0.09342   4.208 5.11e-05 ***
## ca.l1   0.10311    0.09838   1.048    0.297
## us.l1   0.05214    0.09113   0.572    0.568
## uk.l2   0.05660    0.09237   0.613    0.541
## ca.l2   0.10552    0.08756   1.205    0.231
## us.l2   0.01889    0.09382   0.201    0.841
## const   0.12582    0.07266   1.731    0.086 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5473 on 116 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3829,Adjusted R-squared:  0.3509
## F-statistic: 11.99 on 6 and 116 DF,  p-value: 1.907e-10
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Estimation (3)

- Estimations pour l'équation de la série ca

```
summary(pibgr.VAR)$varresult$ca
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ -1 + ., data = datamat)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.51554 -0.31867  0.04956  0.34149  1.57007
##
## Coefficients:
##        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.351314   0.094917   3.701 0.000330 ***
## ca.l1  0.338142   0.099963   3.383 0.000979 ***
## us.l1  0.469094   0.092589   5.066 1.55e-06 ***
## uk.l2 -0.191350   0.093856  -2.039 0.043747 *
## ca.l2 -0.174833   0.088964  -1.965 0.051780 .
## us.l2 -0.008678   0.095326  -0.091 0.927624
## const  0.123158   0.073829   1.668 0.097984 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.556 on 116 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5238,Adjusted R-squared:  0.4992
## F-statistic: 21.27 on 6 and 116 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Estimation (4)

- Estimations pour l'équation de la série us

```
summary(pibgr.VAR)$varresult$us
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ -1 + ., data = datamat)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.18937 -0.27457  0.03623  0.32495  1.56051
##
## Coefficients:
##        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1   0.49070    0.10502   4.672 8.08e-06 ***
## ca.l1   0.24000    0.11060   2.170 0.032053 *
## us.l1   0.23564    0.10245   2.300 0.023226 *
## uk.l2 -0.31196    0.10385  -3.004 0.003265 **
## ca.l2 -0.13118    0.09843  -1.333 0.185259
## us.l2   0.08531    0.10547   0.809 0.420253
## const   0.28956    0.08169   3.545 0.000568 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.6152 on 116 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.3606,Adjusted R-squared:  0.3276
## F-statistic:  10.9 on 6 and 116 DF,  p-value: 1.325e-09
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Selection du modèle (1)

- La fonction `VARselect` propose différents critères pour la sélection du modèle

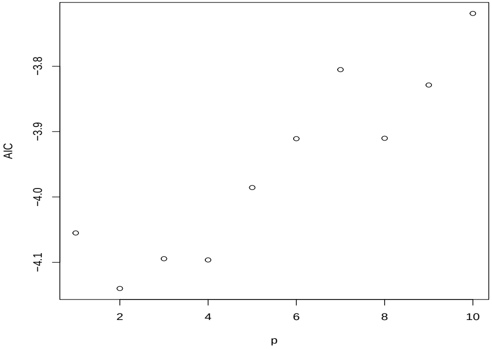
```
VARselect(pibgr, lag.max = 10)

## $selection
## AIC(n)  HQ(n)  SC(n) FPE(n)
##      2      1      1      2
##
## $criteria
##                  1          2           3           4           5           6
## AIC(n) -4.05509087 -4.1400600 -4.09449192 -4.09635510 -3.98562143 -3.91082343
## HQ(n)  -3.93883130 -3.9366058 -3.80384298 -3.71851148 -3.52058313 -3.35859045
## SC(n)  -3.76866317 -3.6388115 -3.37842267 -3.16546507 -2.83991063 -2.55029185
## FPE(n)  0.01733536  0.0159291  0.01668624  0.01668169  0.01868243  0.02020848
##                  7           8           9          10
## AIC(n) -3.80517918 -3.91020870 -3.82872219 -3.71917784
## HQ(n)  -3.16575152 -3.18358636 -3.01490516 -2.81816614
## SC(n)  -2.22982683 -2.12003557 -1.82372828 -1.49936317
## FPE(n)  0.02257616  0.02046461  0.02239803  0.02526843
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Selection du modèle (2)

- Selon l'AIC, la valeur optimale est $p = 2$

```
plot(VARselect(pibgr, lag.max = 10)$criteria[1,], xlab='p', ylab='AIC')
```



Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Diagnostics (1)

- La fonction serial.test de la librairie vars calcul un test de Portmanteau multivarié

```
pibgr.VAR.serial <- serial.test(pibgr.VAR, type="PT.asymptotic")
pibgr.VAR.serial
```

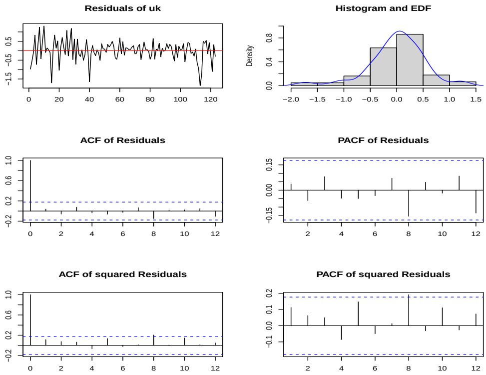
```
##
##  Portmanteau Test (asymptotic)
##
## data:  Residuals of VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 124.51, df = 126, p-value = 0.5207
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Diagnostics (2)

- La méthode générique `plot` pour les objets renvoyés par la fonction `serial.test` permet de visualiser les autocorrélations des résidus

```
plot(pibgr.VAR.serial, names="uk")
```

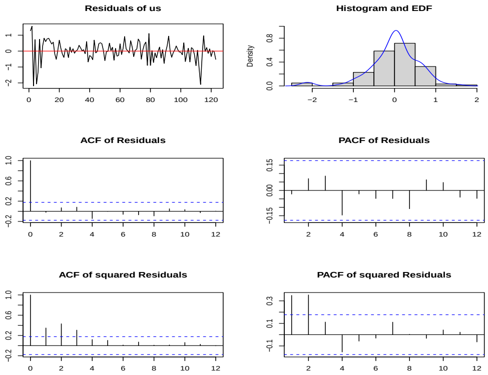


Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Diagnostics (3)

- Résidus pour la série us

```
plot(pibgr.VAR.serial, names="us")
```



Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Diagnostics (4)

- Test de la normalité des résidus

```
pibgr.VAR.norm <- normality.test(pibgr.VAR, multivariate.only = TRUE)
pibgr.VAR.norm
```

```
## $JB
##
##  JB-Test (multivariate)
##
## data:  Residuals of VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 44.251, df = 6, p-value = 6.592e-08
##
##
## $Skewness
##
##  Skewness only (multivariate)
##
## data:  Residuals of VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 17.229, df = 3, p-value = 0.000634
##
##
## $Kurtosis
##
##  Kurtosis only (multivariate)
##
## data:  Residuals of VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 27.021, df = 3, p-value = 5.827e-06
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Diagnostics (5)

- Test de l'homoscédasticité des résidus (test ARCH, Hamilton [10] et Lütkepohl [11])

```
pibgr.VAR.arch <- arch.test(pibgr.VAR, lags.multi = 5, multivariate.only = TRUE)
pibgr.VAR.arch
```

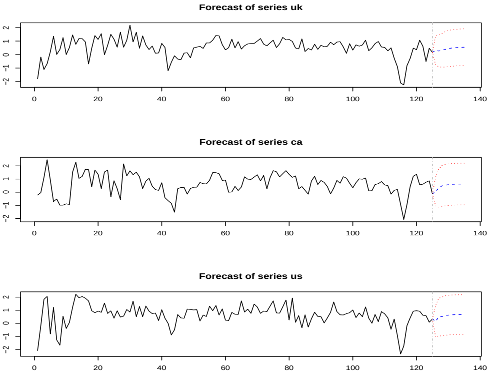
```
##
##  ARCH (multivariate)
##
## data:  Residuals of VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 275.77, df = 180, p-value = 5.661e-06
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Prédiction

- On utilise la méthode générique `predict` pour la projection

```r
plot(predict(pibgr.VAR))
```



Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Test structurel (1)

- La librairie `vars` propose également un test de stabilité structurelle basé sur la fonction `efp` (empirical fluctuation process), librairie `strucchange`, voir ZEILEIS et al. [12])
- La fonction `stability` permet d'appliquer les différents types de test à chacune des équations du modèle VAR

```
reccusum <- stability(pibgr.VAR, type = "OLS-CUSUM")
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Test structurel (2)

- Le test ne détecte aucune instabilité strucuturelle

```
reccusum <- stability(pibgr.VAR, type = "OLS-CUSUM")
```

Modèle VAR

Test de causalité

- Le **test de Granger** est utilisé pour la détection de **causalités** entre variables
- Attention, le test de causalité ne permet pas de conclure à une causalité à proprement parler (voir par exemple Pfaff [4])
- On parle de **causalité au sens de Granger** (Granger causality) si la connaissance du passé d'une série temporelle y_{1t} entraîne une prévision de y_{2t} distincte de celle fondée uniquement sur le passé de y_{2t}, i.e. y_{1t} aide à pédire y_{2t}
- On peut également réaliser un test de causalité instantannée (instantaneous causality test, voir Pfaff [4])

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Test de causalité (1)

- La fonction `causality` de la librairie `vars` permet d'effectuer le test de Granger et le test de causalité immédiate
- On indique la liste des variables de la série dont on veut tester la causalité de Granger

```
causality(pibgr.VAR, cause=c("us", "ca"))
```

```
## $Granger
##
##  Granger causality H0: ca us do not Granger-cause uk
##
## data:  VAR object pibgr.VAR
## F-Test = 2.2372, df1 = 4, df2 = 348, p-value = 0.06467
##
##
## $Instant
##
##  H0: No instantaneous causality between: ca us and uk
##
## data:  VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 6.4042, df = 2, p-value = 0.04068
```

Modèle VAR

Taux de croissance du PIB (UK, Canada, US) : Test de causalité (2)

- Ici on teste la causalité de Granger des séries `uk` et `ca`

```
causality(pibgr.VAR, cause=c("uk", "ca"))
```

```
## $Granger
##
##  Granger causality H0: uk ca do not Granger-cause us
##
## data:  VAR object pibgr.VAR
## F-Test = 6.8066, df1 = 4, df2 = 348, p-value = 2.768e-05
##
##
## $Instant
##
##  H0: No instantaneous causality between: uk ca and us
##
## data:  VAR object pibgr.VAR
## Chi-squared = 22.589, df = 2, p-value = 1.244e-05
```

- Causalité de Granger des séries `uk` et `us`

```
causality(pibgr.VAR, cause=c("uk", "us"))
```

```
## $Granger
##
##  Granger causality H0: uk us do not Granger-cause ca
##
## data:  VAR object pibgr.VAR
## F-Test = 12.21, df1 = 4, df2 = 348, p-value = 2.67e-09
##
##
## $Instant
##
##  H0: No instantaneous causality between: uk us and ca
```

Modèle VAR

Données Canada (1)

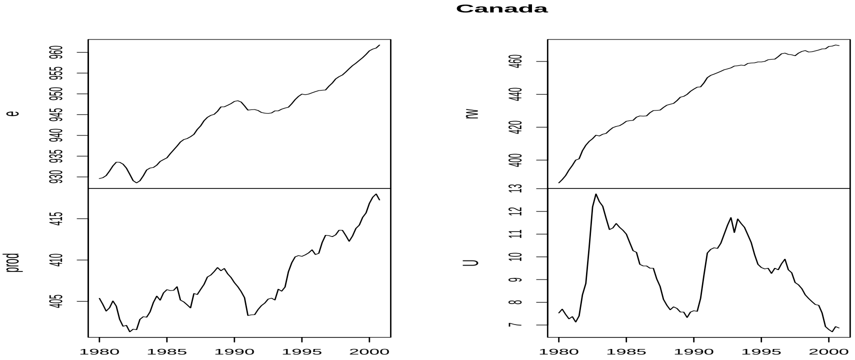
- Les données sont fournies avec la librairie `vars` (voir l'article ici)
- Les séries utilisées représentent des indicateurs macro-économiques du marché du travail au Canada (données OCDE) :
  - `prod` : productivité du travail (log différence entre le GDP et nombre d'actifs)
  - `e` : nombre d'actifs (employment)
  - `U` : taux de chômage (unemployment rate)
  - `rw` : log de l'index des salaires réels (real wage index)
- Les séries s'étendent du premier trimestre 1980 aux quatrième trimestre 2004

```
data("Canada")
window(Canada, start=c(1980,1), end=c(1981,4))

##                e     prod       rw    U
## 1980 Q1 929.6105 405.3665 386.1361 7.53
## 1980 Q2 929.8040 404.6398 388.1358 7.70
## 1980 Q3 930.3184 403.8149 390.5401 7.47
## 1980 Q4 931.4277 404.2158 393.9638 7.27
## 1981 Q1 932.6620 405.0467 396.7647 7.37
## 1981 Q2 933.5509 404.4167 400.0217 7.13
## 1981 Q3 933.5315 402.8191 400.7515 7.40
## 1981 Q4 933.0769 401.9773 405.7335 8.33
```

Modèle VAR

Données Canada (2)

```r
plot(Canada, nc = 2, xlab = "")
```



Modèle VAR

Données Canada (3)

- Le modèle VAR ne permet de modéliser que des séries **stationnaires**
- Un test de stationarité ADF (Augmented Dickey-Fuller) est réalisé sur les 4 séries
- Toutes les séries sont rendues stationnaires avec une intégration d'ordre 1

Modèle VAR

Test de stationarité sur la série prod (1)

- La série `prod` présente une tendance, on utilise `type='trend'`
  - Hypothèse nulle H0 : la série est **non stationnaire avec dérive**
  - Hypothèse alternative H1 : la série est **stationnaire avec trend déterministe**

```
prod.adf1 <- ur.df(Canada[, "prod"], type = 'trend', lags = 2)
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(prod.adf1, "teststat")
```

```
##                tau3     phi2     phi3
## statistic -1.987512 2.300006 2.381689
```

- Valeurs critiques

```
attr(prod.adf1, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau3 -4.04 -3.45 -3.15
## phi2  6.50  4.88  4.16
## phi3  8.73  6.49  5.47
```

- La valeur `tau3` est supérieure à la valeur critique à 10%, on accepte H0, la série peut être rendue stationnaire par différentiation

Modèle VAR

Test de stationarité sur la série prod intégrée (1)

- On vérifie que la série est stationnaire après différentiation

```
prod.diff <- diff(Canada[, "prod"])
prod.diff.adf1 <- ur.df(prod.diff, type = "drift", lags = 1)
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(prod.diff.adf1, "teststat")
```

```
##                 tau2     phi1
## statistic -5.160425 13.31839
```

- Valeurs critiques

```
attr(prod.diff.adf1, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

- La valeur de tau2 est inférieure à la valeur critique à 1%, on rejete H0 et on conclut à la stationarité de la série

Modèle VAR

Test de stationarité sur la série prod intégrée (2)

- Test de stationnarité avec la fonction `adf.test`

```
adf.test(diff(Canada[, "prod"]), k = 1)
## Warning in adf.test(diff(Canada[, "prod"]), k = 1): p-value smaller than printed p-value
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  diff(Canada[, "prod"])
## Dickey-Fuller = -5.1952, Lag order = 1, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

Modèle VAR

Données Canada : Sélection du lag

- La longueur optimale du lag est déterminée avec la fonction `VARselect`
- La valeur optimale selon le critère AIC est de 3

```
VARselect(Canada, lag.max = 8, type = "both")
```

```
## $selection
## AIC(n)  HQ(n)  SC(n) FPE(n)
##      3      2      1      3
##
## $criteria
##                  1           2           3           4           5
## AIC(n) -6.272579064 -6.636669705 -6.771176872 -6.634609210 -6.398132246
## HQ(n)  -5.978429449 -6.146420347 -6.084827770 -5.752160366 -5.319583658
## SC(n)  -5.536558009 -5.409967947 -5.053794411 -4.426546046 -3.699388378
## FPE(n)  0.001889842  0.001319462  0.001166019  0.001363175  0.001782055
##                  6           7           8
## AIC(n) -6.307704843 -6.070727259 -6.06159685
## HQ(n)  -5.033056512 -4.599979185 -4.39474903
## SC(n)  -3.118280272 -2.390621985 -1.89081087
## FPE(n)  0.002044202  0.002768551  0.00306012
```

Modèle VAR

Données canada : Estimation du modèle

- On commence par un modèle d'ordre $p = 1$
- L'argument type = 'both' indique qu'on inclut la constante et la tendance dans le modèle

```
p1ct <- VAR(Canada, p = 1, type = 'both')
```

Modèle VAR

Données canada : Equation pour la série e

- Paramètres de l'équation pour la série e

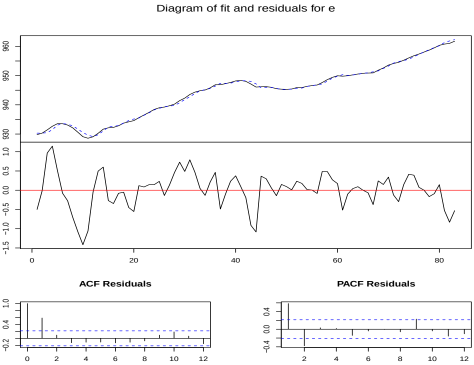
```
summary(p1ct, equation = "e")$varresult

## $e
##
## Call:
## lm(formula = y ~ -1 + ., data = datamat)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.41558 -0.15408  0.04734  0.23819  1.14554
##
## Coefficients:
##           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## e.l1       1.23892    0.08632  14.353  < 2e-16 ***
## prod.l1    0.19465    0.03612   5.389 7.49e-07 ***
## rw.l1     -0.06776    0.02828  -2.396 0.018991 *
## U.l1       0.62301    0.16927   3.681 0.000430 ***
## const   -278.76121   75.18295  -3.708 0.000392 ***
## trend     -0.04066    0.01970  -2.064 0.042378 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.4701 on 77 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9975,Adjusted R-squared:  0.9973
## F-statistic:  6088 on 5 and 77 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Modèle VAR

Données canada, série e : Valeurs prédites et résidus

- Valeurs prédites et résidus pour la série e

```
plot(p1ct, names = "e")
```



Modèle VAR

Données canada : Diagnostics

- Autocorrélation des résidus

```
ser11 <- serial.test(p1ct, lags.pt = 16, type = "PT.asymptotic")
ser11$serial
```

```
##
##  Portmanteau Test (asymptotic)
##
## data:  Residuals of VAR object p1ct
## Chi-squared = 233.5, df = 240, p-value = 0.606
```

Modèle VAR

Exercices

- Modélisez l'évolution conjointe des PIB du Royaume-Uni, du Canada, des USA et de la France à l'aide d'un modèle VAR
- Faires le diagnostic du modèle

Section 13

Cointégration et modèle à correction d’erreur

Cointégration

Introduction

- Nous abordons la modélisation de séries temporelles multivariées lorsque une ou plusieurs séries sont intégrées (d'ordre 1), i.e. non-stationnaires

Régression fallacieuse

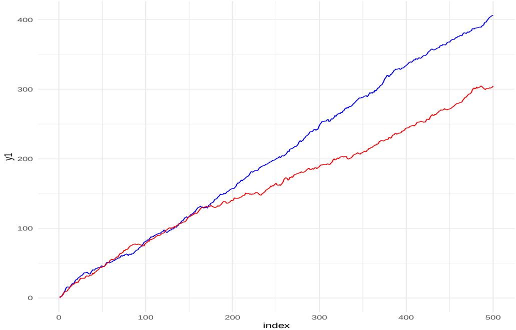
- Un modèle de régression linéaire impliquant des séries non-stationnaires de type stochastique (difference stationary data) produit des résultats erronés (voir par exemple Pfaff [4])
- Le code suivant simule deux marches aléatoires avec dérive

```
library(lmtest)
set.seed(123456)
e1 <- rnorm(500)
e2 <- rnorm(500)
trd <- 1:500
y1 <- 0.8 * trd + cumsum(e1)
y2 <- 0.6 * trd + cumsum(e2)
spdata <- data.frame(index=1:500, y1,y2)
```

Régression fallacieuse

- Chronogramme des deux marches aléatoires

```
ggplot(spdata) +
  geom_line(aes(x=index, y=y1), color="blue") +
  geom_line(aes(x=index, y=y2), color="red")
```



Régression fallacieuse (2)

- Le modèle de régression suivant indique que les coefficients sont significativement différents de 0, et le R^2 est proche de 1

```
sr.reg <- lm(y1 ~ y2)
sr.dw <- dwtest(sr.reg)$statistic
summary(sr.reg)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y1 ~ y2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -30.6541 -11.5262   0.3589  11.1423  31.0058
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -29.326969   1.367155  -21.45   <2e-16 ***
## y2            1.440787   0.007519  191.62   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 13.71 on 498 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9866,Adjusted R-squared:  0.9866
## F-statistic: 3.672e+04 on 1 and 498 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Il s'agit d'un exemple de régression fallacieuse (**spurious regression**)

Cointégration

Introduction

- Pour éviter ce problème, on pourrait utiliser les séries intégrées dans la régression
- Cependant, de nouveaux problèmes apparaissent Pfaff-2008 :
  1. La différenciation atténue les fortes valeurs positives d'autocorrélation des résidus, affectant l'inférence sur les coefficients de la régression
  2. L'analyse des relations d'équilibre à long terme entre niveaux des variables est compliquée si on utilise les séries différenciées

Cointégration

Définition

- Le concept de **cointégration** introduit par Engle-1987 permet l'étude des relations stables à long terme de variables non-stationnaires
- Deux ou plusieurs séries chronologiques cointégrées partagent une dérive stochastique commune, leur combinaison linéaire donne lieu à une série stationnaire
- Les composants du vecteur y_t sont cointégrés d'ordre d, b, noté $y_t \sim CI(d, b)$, si
  1. Tous les composants de y_t sont $I(d)$ (intégrés d'ordre d)
  2. Un vecteur $\alpha (\neq 0)$ existe tel que $z_t = \alpha \prime y_t \sim I(d - b), b > 0$
- Le vecteur α est appelé **vecteur de cointégration**

Cointégration

Test de cointégration

- Si deux séries non-stationnaires paraissent possèder des caractéristiques communes, on peut tester l'hypothèse d'une composante non-stationnaire commune au moyen d'un test de cointégration [cf.]Kleiber-2008
- Pour tester la cointégration, une première méthode en deux étapes a été proposée par Engle-1987 :
  1. Modèle de régression d'une série par l'autre
  2. Test de racine unitaire (ADF) sur les résidus

Cointégration

Test de cointégration : Etape 1

- Estimation du **vecteur de cointégration**

$$z_t = \alpha_1 y_{t,1} + \alpha_2 y_{t,2} + \ldots + \alpha_K y_{t,K} + \epsilon_t$$

  pour $t = 1, \ldots, T$
- ϵ_t représente les résidus
- Cette régression statique permet d'estimer α avec un modèle OLS, bien que, comme dans le cas de la régression fallacieuse, les statistiques t et F ne sont pas applicables Pfaff-2008
- Si il y a cointégration, les résidus ϵ_t sont $I(0)$, i.e. stationnaires
- Ces résidus représentent les déviations de l'équilibre de long terme des variables cointégrées
- On réalise un test de stationnarité ADF sur les résidus
- On peut utiliser en première approche le test de Durbin-Watson (absence d'autocorrélation des résidus)

Cointégration

Test de cointégration : Etape 2 (1)

- Un fois l'hypothèse H0 d'une racine unitaire dans la série ϵ_t rejetée (.i.e. ϵ_t stationnaire), la deuxième étape consiste à estimer un modèle à correction d'erreur (Error-Correction Model, ECM)
- Soit y_t et x_t deux variables $I(1)$ (intégrées d'ordre 1), et $\hat{z}_t$ la série des résidus du modèle statique précédent

$$\Delta y_t = \psi_0 + \gamma_1 \hat{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{K} \psi_{1,i} \Delta x_{t-i} + \sum_{i=1}^{L} \psi_{2,i} \Delta y_{t-i} + \epsilon_{1,t} \quad (3)$$

$$\Delta x_t = \zeta_0 + \gamma_2 \hat{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{K} \zeta_{1,i} \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^{L} \zeta_{2,i} \Delta x_{t-i} + \epsilon_{2,t} \quad (4)$$

Cointégration

Test de cointégration : Etape 2 (2)

- Les changements de y_t sont expliqués par
  - La série des changements précédents de y_t :

$$\sum_{i=1}^{L} \psi_{2,i} \Delta y_{t-i}$$

  - La série des changements précédents de x_t :

$$\sum_{i=1}^{L} \zeta_{2,i} \Delta x_{t-i}$$

  - La déviation de l'équilibre de long terme à la période précédente $t-1$:

$$\psi_0 + \gamma_1 \hat{z}_{t-1}$$

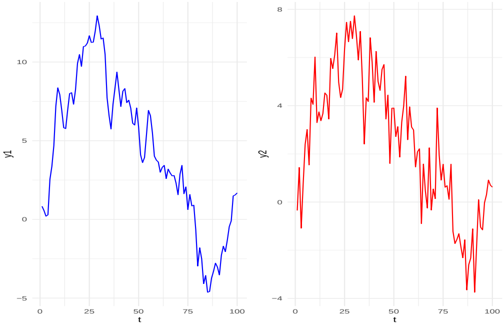
- La valeur de γ_1 détermine la vitesse d'ajustement et son signe doit toujours être négatif (sinon le système diverge de son équilibre de long terme)
- Ces équations impliquent que la causalité au sens de Granger doit exister dans au moins une direction (au moins une variable doit aider à prédire l'autre)

Cointégration

Cointégration : Simulation (1)

- On simule deux marches aléatoires (exemple proposé par Pfaff-2008)

```
set.seed (123456)
e1 <- rnorm(100)
e2 <- rnorm(100)
y1 <- cumsum(e1)
y2 <- 0.6 * y1 + e2

g1 <- ggplot() + geom_line(aes(x=1:100, y=y1), color="blue") + xlab("t")
g2 <- ggplot() + geom_line(aes(x=1:100, y=y2), color='red') + xlab("t")
g1+g2
```



Cointégration

Cointégration : Simulation (2)

- On estime le modèle (long-run equation)

```
lr.reg <- lm(y2 ~ y1)
summary(lr.reg)

##
## Call:
## lm(formula = y2 ~ y1)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.44465 -0.66254  0.03931  0.83827  2.04555
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.03785    0.13477   0.281    0.779
## y1           0.58112    0.02138  27.186   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.985 on 98 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8829,Adjusted R-squared:  0.8817
## F-statistic: 739.1 on 1 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Le vecteur de cointégration est (1,-0.6), l'estimation sur les séries est (1,-0.58)

Cointégration

Cointégration : Simulation (3)

- On réalise un test ADF sur les résidus :
  - Hypothèse H0 : la série présente une tendance stochastique (racine unitaire)
  - Hypothèse H1 : la série est stationnaire

```
errors <- residuals(lr.reg)
errors.df <- ur.df(y=errors, lags=1, type='drift')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(errors.df, "teststat")
```

```
##                tau2     phi1
## statistic -6.592239 21.73528
```

- Valeurs critiques

```
attr(errors.df, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.51 -2.89 -2.58
## phi1  6.70  4.71  3.86
```

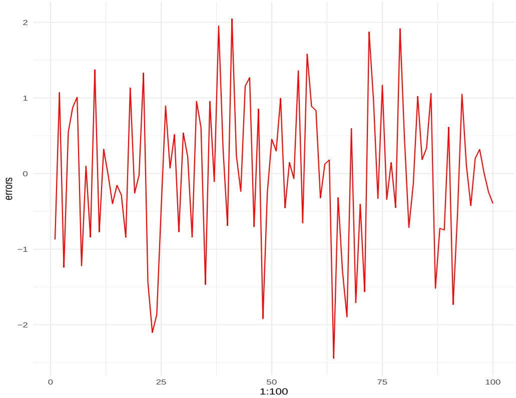
- La valeur de tau2 est inférieure au seuil critique à 1%, la série des résidus est stationnaire

Cointégration

Cointégration : Simulation (4)

- Série des résidus z_t

```r
ggplot() + geom_line(aes(x=1:100, y=errors), color="red")
```



Cointégration

Cointégration : Simulation (5)

- Préparation des données pour le modèle ECM, on utilise la fonction `diff`
- Pour obtenir la série des résidus z_{t-1} on supprime les deux dernières valeurs du vecteur `errors`

```
errors.lagged <- errors[- c(99, 100)]
dy1 <- diff(y1)
dy2 <- diff(y2)
diff.dat <- data.frame(embed(cbind(dy1,dy2) , 2))
colnames(diff.dat) <- c('dy1' , 'dy2' , 'dy1.1' , 'dy2.1')
head(diff.dat)
```

```
##          dy1        dy2       dy1.1      dy2.1
## 1 -0.35500184 -2.5179073 -0.27604777  1.7837118
## 2  0.08748742  1.8407098 -0.35500184 -2.5179073
## 3  2.25225573  1.6331811  0.08748742  1.8407098
## 4  0.83446013  0.6200382  2.25225573  1.6331811
## 5  1.31241551 -1.4668629  0.83446013  0.6200382
## 6  2.50264541  2.7717847  1.31241551 -1.4668629
```

Cointégration

Cointégration : Simulation (6)

- Résultats du modèle ECM : la déviation de la période précédente est annulée (le coefficient associé à z_{t-1} est proche de 1)

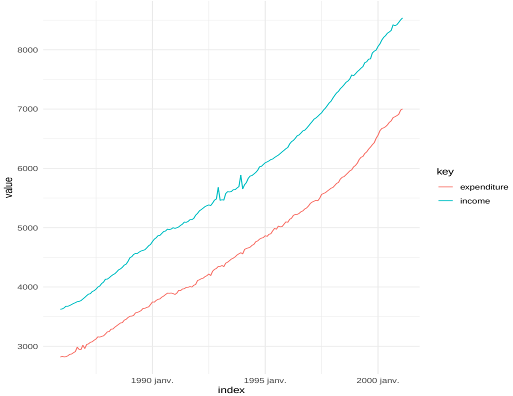
```
ecm.reg <- lm(dy2 ~ errors.lagged + dy1.1 + dy2.1,
  data= diff.dat)
summary(ecm.reg)

##
## Call:
## lm(formula = dy2 ~ errors.lagged + dy1.1 + dy2.1, data = diff.dat)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -2.9588 -0.5439  0.1370  0.7114  2.3065
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    0.003398   0.103611   0.033    0.974
## errors.lagged -0.968796   0.158554  -6.110 2.24e-08 ***
## dy1.1          0.808633   0.112042   7.217 1.35e-10 ***
## dy2.1         -1.058913   0.108375  -9.771 5.64e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.026 on 94 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5464,Adjusted R-squared:  0.5319
## F-statistic: 37.74 on 3 and 94 DF,  p-value: 4.243e-16
```

Modèle ECM

Données USIncExp (1)

- Nous allons utiliser les données USIncExp et suivre l'exemple de l'article présentant la librairie strucchange Zeileis-2002

```
USIncExp2 <- window(USIncExp, start = c(1985,12))
USIncExp2 %>% as_tsibble() %>% ggplot() + geom_line(aes(x=index, y=value, color=key))
```



Modèle ECM

Données USIncExp : Modèle ECM

- La fonction de consommation (consumption function) est modélisée par un modèle ECM (cf. Hansen [13]) :

$$\Delta c_t = \beta_1 + \beta_2 e_{t-1} + \beta_3 \Delta i_t + \mu_t \quad (5)$$

$$e_t = c_t - \alpha_1 - \alpha_2 i_t \quad (6)$$

où c_t représente les dépenses de consommation et i_t le revenu

Modèle ECM

Données USIncExp : Equation de cointégration

- L'équation de cointégration (2) est estimée à l'aide d'un modèle OLS

$$c_t = \alpha_1 + \alpha_2 i_t + e_t$$

```
USIncExp.mod1 <- lm(expenditure ~ income, data = USIncExp2)
summary(USIncExp.mod1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = expenditure ~ income, data = USIncExp2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -160.536  -31.626    2.209   29.106  115.668
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -2.358e+02  1.511e+01   -15.6   <2e-16 ***
## income       8.352e-01  2.538e-03   329.1   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 47.74 on 181 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9983,Adjusted R-squared:  0.9983
## F-statistic: 1.083e+05 on 1 and 181 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Modèle ECM

Données USIncExp : Résidus de cointégration

- Les résidus $\hat{e}_t$ seront utilisés comme variable indépendante dans la modélisation de la fonction de consommation (1)
- On vérifie que la série des résidus est stationnaire avec un test ADF

```
coint.res <- residuals(lm(expenditure ~ income, data = USIncExp2))
coint.res.df <- ur.df(y=coint.res, lags=1, type='drift')
```

- Valeur de la statistique du test

```
attr(coint.res.df, "teststat")
```

```
##                 tau2     phi1
## statistic -2.910746 4.273995
```

- Valeurs critiques

```
attr(coint.res.df, "cval")
```

```
##       1pct  5pct 10pct
## tau2 -3.46 -2.88 -2.57
## phi1  6.52  4.63  3.81
```

- La valeur de tau2 est inférieure au seuil critique à 5%, on conclut que la série des résidus est stationnaire

Modèle ECM

Données USIncExp : Préparation des données (1)

- On utilise la fonction lag car les résidus dans l'équation (1) sont à $t-1$
- On utilise la fonction diff pour intégrer les séries (obtenir Δc_t et Δi_t)

```
coint.res <- stats::lag(ts(coint.res, start = c(1985,12), freq = 12), k = -1)
USIncExp2 <- cbind(USIncExp2, diff(USIncExp2), coint.res)
USIncExp2 <- window(USIncExp2, start = c(1986,1), end = c(2001,2))
colnames(USIncExp2) <- c("income", "expenditure", "diff.income", "diff.expenditure", "coint.res")
window(USIncExp2, start=c(1986,1), end=c(1986,12))
```

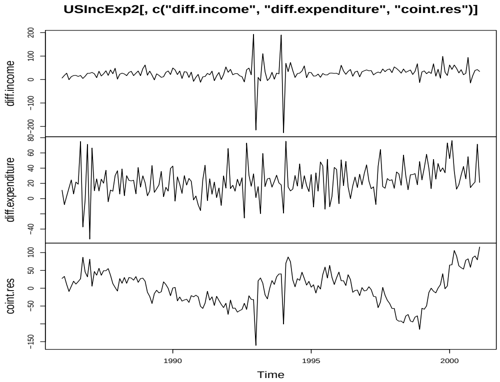
```
##          income expenditure diff.income diff.expenditure coint.res
## Jan 1986 3630.1      2829.3         6.5             11.0 27.510616
## Feb 1986 3647.7      2821.4        17.6             -7.9 33.081616
## Mar 1986 3674.8      2824.6        27.1              3.2 10.481554
## Apr 1986 3674.3      2838.6        -0.5             14.0 -8.953200
## May 1986 3686.6      2863.1        12.3             24.5  5.464415
## Jun 1986 3703.7      2869.3        17.1              6.2 19.691076
## Jul 1986 3721.3      2891.0        17.6             21.7 11.608630
## Aug 1986 3734.6      2909.9        13.3             18.9 18.608568
## Sep 1986 3752.0      2984.8        17.4             74.9 26.399998
## Oct 1986 3756.6      2947.5         4.6            -37.3 86.766982
## Nov 1986 3770.6      2945.6        14.0             -1.9 45.624921
## Dec 1986 3797.0      3016.9        26.4             71.3 32.031690
```

Modèle ECM

Données USIncExp : Préparation des données (2)

- Séries utilisées dans le modèle ECM

```
plot(USIncExp2[,c("diff.income", "diff.expenditure", "coint.res")])
```



Modèle ECM

Données USIncExp : Estimation

- La variable dépendante est l'augmentation des dépenses et les variables indépendantes sont les résidus de cointegration et l'augmentation des revenus (plus une constante)

```
ecm.model <- diff.expenditure ~ coint.res + diff.income
summary(lm(ecm.model, data=USIncExp2))
```

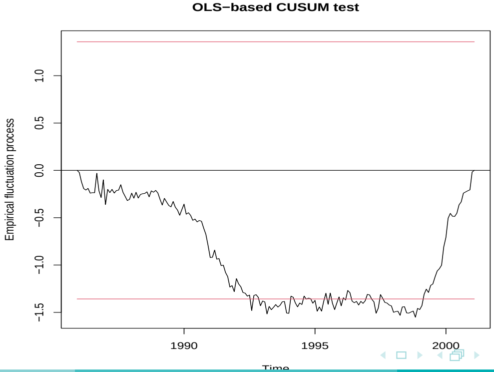
```
##
## Call:
## lm(formula = ecm.model, data = USIncExp2)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -70.555 -11.947  -0.528  10.452  55.576
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 17.82428    1.88918   9.435  < 2e-16 ***
## coint.res   -0.06843    0.03318  -2.063   0.0406 *
## diff.income  0.19001    0.04282   4.438 1.59e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 20.09 on 179 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1021,Adjusted R-squared:  0.09203
## F-statistic: 10.17 on 2 and 179 DF,  p-value: 6.542e-05
```

Modèle ECM

Données USIncExp : Test de changement structurel (1)

- Test de changement structurel avec la fonction efp (empirical fluctuation process), basé sur la somme cumulée des résidus standardizés du modèle de régression (type="OLS-CUSUM")
- Le dépassement de la limite $b(t)$ (ligne rouge) indique la violation de l'hypothèse H0 'pas de changement structurel'

```
ocus <- efp(ecm.model, type="OLS-CUSUM", data=USIncExp2)
plot(ocus)
```

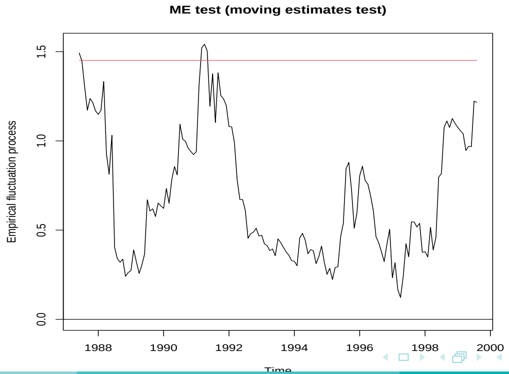


Modèle ECM

Données USIncExp : Test de changement structurel (2)

- Test de changement structurel avec la fonction `efp` (empirical fluctuation process), basé sur la somme mobile des résidus standardizés du modèle de régression (`type="ME"`)
- Le dépassement de la limite $b(t)$ (ligne rouge) indique la violation de l'hypothèse H0 'pas de changement structurel'

```
me <- efp(ecm.model, type="ME", data=USIncExp2, h=0.2)
plot(me)
```



Modèle ECM

Données GermanM1 (1)

- Les données `GermanM1` sont fournies avec la librairie `strucchange`
- Ces données sont utilisées par Lütkepohl, Teräsvirta et Wolters [14] dans leur article *Investigating stability and linearity of a German M1 money demand function*

```
data("GermanM1")
head(GermanM1)
```

```
##          m        p        y     R          dm          dy2     dR    dR1
## 1 7.951792 3.449861 8.374404 0.060 -0.07895470  0.078125000 -0.002 -0.002
## 2 8.020040 3.427157 8.420854 0.057  0.06824780  0.011972427 -0.003 -0.002
## 3 8.002081 3.478868 8.482004 0.060 -0.01795864 -0.102929115  0.003 -0.003
## 4 8.090023 3.473332 8.488274 0.060  0.08794212  0.046449661  0.000  0.003
## 5 8.006645 3.494354 8.387732 0.058 -0.08337784  0.061150551 -0.002  0.000
## 6 8.071870 3.470630 8.461327 0.060  0.06522465  0.006269455  0.002 -0.002
##             dp       m1       y1    R1 season   ecm.res
## 1  0.029972315 8.030746 8.477333 0.062     Q1 0.1353536
## 2 -0.022703170 7.951792 8.374404 0.060     Q2 0.1322408
## 3  0.051710605 8.020040 8.420854 0.057     Q3 0.1321171
## 4 -0.005536079 8.002081 8.482004 0.060     Q4 0.1406767
## 5  0.021021843 8.090023 8.488274 0.060     Q1 0.1309088
## 6 -0.023723603 8.006645 8.387732 0.058     Q2 0.1286516
```

Modèle ECM

Données GermanM1 (2)

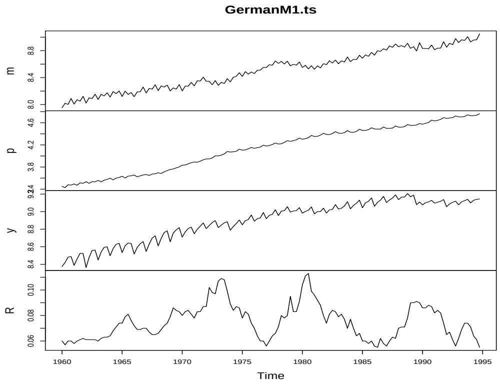
- Les données GermanM1 sont trimestrielles et non-corrigées des variations saisonnières
- Elles contiennent les variables :
  - m : time series. Logarithm of real M1 per capita
  - p : time series. Logarithm of a price index
  - y : time series. Logarithm of real per capita gross national product
  - R : time series. Long-run interest rate
  - dm : time series. First differences of m
  - dy2 : First differences of lag 2 of y
  - dR : time series. First differences of R
  - dR1 : time series. First differences of lag 1 of R
  - dp : time series. First differences of p
  - m1 : time series. Lag 1 of m
  - y1 : time series. Lag 1 of y
  - R1 : time series. Lag 1 of R
  - season : factor coding the seasonality (quarter)
  - ecm.res : vector containing the OLS residuals of the Lütkepohl et al. (1999) model fitted in the history period (up to 1990(2), i.e., the data before the German monetary unification on 1990-06-01).

Modèle ECM

Données GermanM1 (3)

- Séries m (demande de monnaie, log), p (indice des prix, log), y (PIB par habitant, log) et R (taux d'intérêt à long-terme)

```
GermanM1.ts <- ts(GermanM1[, c("m","p", "y", "R")], start=c(1960,1), frequency=4)
plot(GermanM1.ts)
```



Modèle ECM

Données GermanM1 : Modèle ECM

- Le sujet de l'article est la stabilité de la fonction de demande de monnaie en Allemagne, avant et après la réunification
- Les données sont divisées en deux sous-ensembles :
  - `historyM1` : du 1er trimestre 1960 au 2ème trimestre 1990, avant la réunification monétaire du 01/06/1990
  - `monitorM1` : du 3ème trimestre 1990 au 4ème trimestre 1995, après la réunification
- Le modèle ECM estimé par Lütkepohl, Teräsvirta et Wolters [14] sur les données `historyM1` est le suivant :

```
LTW.model <- dm ~ dy2 + dR + dR1 + dp + m1 + y1 + R1 + season
```

Modèle ECM

Données GermanM1 : Modèle ECM original - Estimation

- Tous les coefficients (sauf l'intercept) sont significatifs :

```
LTW.model.res <- summary(lm(LTW.model, data=historyM1))
LTW.model.res$coefficients
```

```
##                Estimate  Std. Error     t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.05025441 0.067425080  -0.7453371 4.577021e-01
## dy2         -0.29729418 0.052162011  -5.6994386 1.072596e-07
## dR          -0.67278600 0.246249673  -2.7321295 7.362950e-03
## dR1         -0.99950033 0.265621540  -3.7628738 2.745855e-04
## dp          -0.52786586 0.077434377  -6.8169446 5.709247e-10
## m1          -0.12068219 0.034484939  -3.4995623 6.804996e-04
## y1           0.13480364 0.039541650   3.4091557 9.198022e-04
## R1          -0.61699509 0.143765400  -4.2916800 3.906345e-05
## seasonQ1    -0.13330148 0.003941372 -33.8210851 5.977754e-59
## seasonQ2    -0.01559447 0.004456409  -3.4993359 6.810179e-04
## seasonQ3    -0.10906796 0.007859376 -13.8774320 1.143802e-25
```

- R^2 ajusté :

```
LTW.model.res$adj.r.squared
```

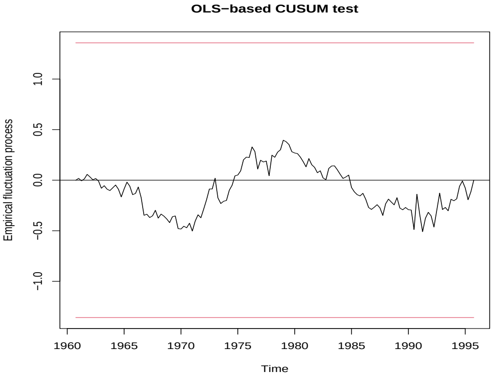
```
## [1] 0.9432524
```

Modèle ECM

Données GermanM1 : Modèle ECM - Test de changement structurel (1)

- Tests de changement structurel utilisant le modèle `LTW.model` sur les données `GermanM1`, basé sur les sommes cumulées des résidus de la régression MCO

```
ols <- efp(LTW.model, data = GermanM1, type = "OLS-CUSUM")
plot(ols)
```

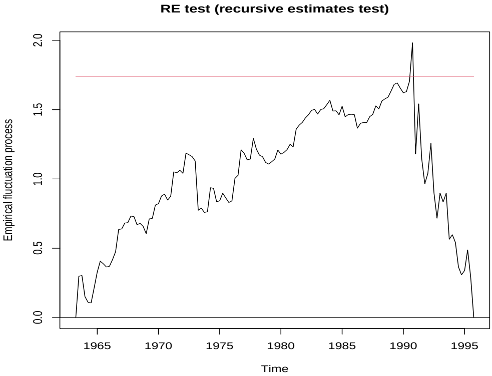


Modèle ECM

Données GermanM1 : Modèle ECM - Test de changement structurel (2)

- Test de changement structurel utilisant le modèle `LTW.model` sur les données `GermanM1`, basé sur l'estimation MCO récursive des coefficients de la régression

```
re <- efp(LTW.model, data = GermanM1, type = "RE")
plot(re)
```

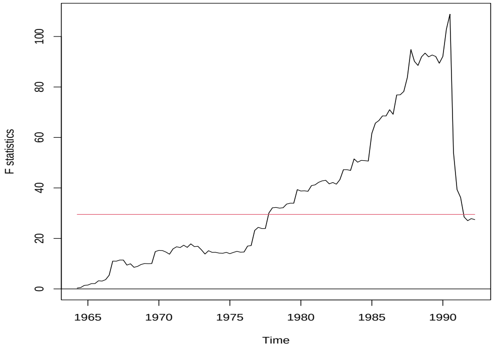


Modèle ECM

Données GermanM1 : Modèle ECM - Test de changement structurel (3)

- Test de Chow utilisant le modèle `LTW.model` sur les données `GermanM1`

```
fs <- Fstats(LTW.model, data = GermanM1, from = 0.1)
plot(fs)
```



Modèle ECM

Données GermanM1 : Modèle ECM

- Le modèle ECM suivant (différent du modèle original) avec `ecm.res` au lieu de `m1`, `y1` et `R1` est utilisé par ZEILEIS et al. [12]

```
M1.model <- dm ~ dy2 + dR + dR1 + dp + ecm.res + season
summary(lm(M1.model, data=historyM1))

##
## Call:
## lm(formula = M1.model, data = historyM1)
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.040770 -0.007048  0.000606  0.008347  0.029352
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.050254   0.029492  -1.704 0.091230 .
## dy2         -0.297294   0.051576  -5.764 7.73e-08 ***
## dR          -0.672786   0.239145  -2.813 0.005818 **
## dR1         -0.999500   0.262608  -3.806 0.000234 ***
## dp          -0.527866   0.075938  -6.951 2.79e-10 ***
## ecm.res      1.000000   0.223619   4.472 1.91e-05 ***
## seasonQ1    -0.133301   0.003900 -34.181  < 2e-16 ***
## seasonQ2    -0.015594   0.004278  -3.646 0.000411 ***
## seasonQ3    -0.109068   0.007761 -14.053  < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.01259 on 109 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9481,Adjusted R-squared:  0.9443
## F-statistic: 248.9 on 8 and 109 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Modèle ECM

Données GermanM1 : Monitoring (1)

- Ici on utilise la fonction mefp (Monitoring of Empirical Fluctuation Processes) sur la période 'historique' (avant réunification), qui sont supposées ne pas contenir de changements structurels

```
M1 <- historyM1
ols.efp <- efp(M1.model, type = "OLS-CUSUM", data = M1)
ols.mefp <- mefp(ols.efp)
```

- On utilise ensuite la fonction monitor, qui réalise un test séquentiel sur les nouvelles données avec H0=pas de changement structurel vs changement dans un ou plusieurs coefficients du modèle de régresion

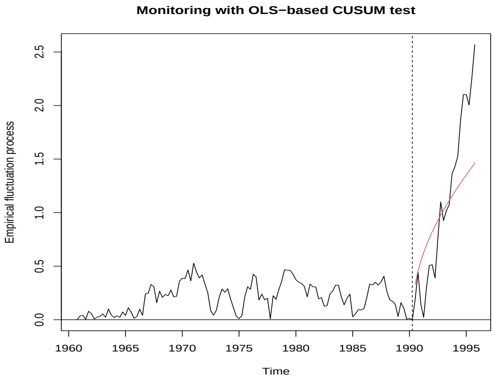
```
M1 <- GermanM1
ols.mon <- monitor(ols.mefp)

## Break detected at observation # 128

ols.mon

## Monitoring with OLS-based CUSUM test
##
## Initial call:
##   mefp.efp(obj = ols.efp)
##
## Last call:
##   monitor(obj = ols.mefp)
##
## Significance level   :  0.05
## Critical value       :  2.795483
## History size         :  118
## Last point evaluated :  140
## Structural break at  :  128
##
```

Modèle ECM

Données `GermanM1` : Monitoring (2

- On utilise la méthode générique `plot` pour la représentation graphique de l'objet `mfep`

```
plot(ols.mon)
```



Section 14

Bibliographie

Bibliographie I

[1] Charles R. Nelson et Charles R. Plosser. “Trends and random walks in macroeconmic time series : Some evidence and implications”. In : *Journal of Monetary Economics* 10.2 (1982), p. 139-162. ISSN : 0304-3932. DOI : https://doi.org/10.1016/0304-3932(82)90012-5. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304393282900125.

[2] Robert L. Hetzel. “The Federal Reserve System and Control of the Money Supply in the 1970s”. In : *Journal of Money, Credit and Banking* 13.1 (fév. 1981), p. 31. ISSN : 0022-2879. DOI : 10.2307/1991806.

[3] Walter Krämer et Harald Sonnberger. *The Linear Regression Model Under Test*. Physica-Verlag HD, 1986. ISBN : 9783642958762. DOI : 10.1007/978-3-642-95876-2.

[4] Bernhard Pfaff. *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*. Springer New York, 2008. ISBN : 9780387759678. DOI : 10.1007/978-0-387-75967-8. URL : https://www.semanticscholar.org/paper/92290935b077d8c917303037d35ce7e205404d9b.

Bibliographie II

[5] Anindya BANERJEE. *Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data*. Anindya Banerjee, Juan J. Dolado, John W. Galbraith, and David F. Hendry. Advanced texts in econometrics. Oxford : Clarendon Press. 329 p. ISBN : 0191521582.

[6] Christian KLEIBER et Achim ZEILEIS. *Applied Econometrics with R*. Use R ! Springer New York, 2008. ISBN : 9780387773186. DOI : 10.1007/978-0-387-77318-6.

[7] Jonathan D. CRYER et Kung-Sik CHAN. *Time Series Analysis : With Applications in R*. Springer New York, 2010. ISBN : 9780387759593. DOI : 10.1007/978-0-387-75959-3.

[8] R. TSAY. *Multivariate Time Series Analysis : With R and Financial Applications*. Willey, 2014. URL : https://www.semanticscholar.org/paper/d4c0cfa6bf6f3a17fad19d48e98781fdc7f4174d.

[9] Bernhard PFAFF. “VAR, SVAR and SVEC Models : Implementation Within R Package vars”. In : *Journal of Statistical Software* 27.4 (2008), p. 1-32. DOI : 10.18637/jss.v027.i04. URL : https://www.jstatsoft.org/index.php/jss/article/view/v027i04.

Bibliographie III

[10] James D. Hamilton. *Time series analysis*. James D. Hamilton. [Nachdr.]09. Princeton, N. J. : Princeton Univ. Press, 1994. 799 p. ISBN : 0691042896.

[11] Helmut Lütkepohl. *New introduction to multiple time series analysis*. English. Berlin : Springer, 2005. ISBN : 3-540-40172-5.

[12] Achim Zeileis et al. “Monitoring structural change in dynamic econometric models”. In : *Journal of Applied Econometrics* 20.1 (jan. 2005), p. 99-121. ISSN : 1099-1255. DOI : 10.1002/jae.776.

[13] B. Hansen. “Testing for parameter instability in linear models”. In : *Journal of Policy Modeling* 14 (1992), p. 517-533. DOI : 10.1016/0161-8938(92)90019-9. URL : https://www.semanticscholar.org/paper/5759d064c7b93412a785d81d13d42e0a4ce70ef6.

[14] Helmut Lütkepohl, Timo Teräsvirta et Jürgen Wolters. “Investigating stability and linearity of a German M1 money demand function”. In : *Journal of Applied Econometrics* 14.5 (sept. 1999), p. 511-525. ISSN : 1099-1255. DOI : 10.1002/(sici)1099-1255(199909/10)14:5<511::aid-jae529>3.0.co;2-c.