Eigenvalores y Eigenvectores: Métodos de Optimización

Eigenvalores y Optimización

Anthony Rusbel Puma Huanca

Universidad Nacional del Altiplano - Puno

Resumen

Este trabajo presenta la teoría de Eigenvalores y Eigenvectores en el contexto de la Programación Numérica. Se define que si una matriz A transforma un vector v solo escalándolo sin cambiar su dirección, se cumple $Av = \lambda v$. Se explora su importancia crucial en la optimización de funciones multivariables, donde los eigenvalores de la matriz Hessiana permiten clasificar puntos críticos como máximos, mínimos o puntos silla.

1. Objetivos

- Definir formalmente los conceptos de Eigenvalor (λ) y Eigenvector (v) como componentes que describen cómo una matriz estira o encoge vectores.
- Explicar el algoritmo numérico para el cálculo de eigenpares mediante la ecuación característica $det(A - \lambda I) = 0$.
- Aplicar la teoría espectral en problemas de optimización para clasificar puntos críticos utilizando la Matriz Hessiana de segundas derivadas.

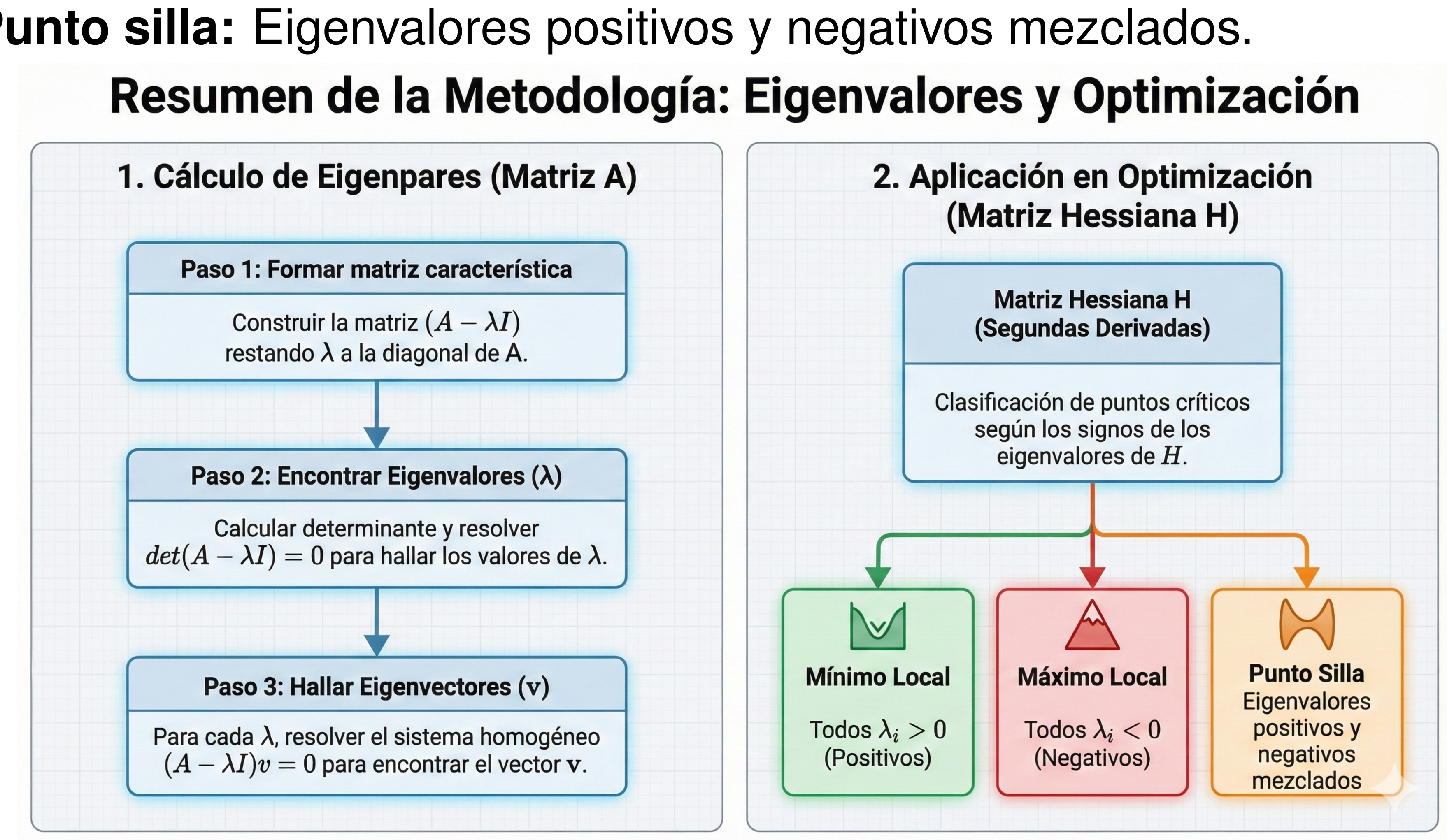
2. Metodología

Para calcular los eigenvalores y eigenvectores de una matriz cuadrada A, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se forma la matriz $(A - \lambda I)$ restando λ a la diagonal principal.
2. Se calcula el determinante y se resuelve la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$ para encontrar los valores de λ.
3. Para cada λ, se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ para hallar el vector v.

Aplicación en Optimización: Para una función $f(x_1, \ldots, x_n)$, se construye la **Matriz Hessiana** H con las segundas derivadas. La clasificación depende de los signos de sus eigenvalores:

- **Mínimo local:** Todos $\lambda_i > 0$.
- **Máximo local:** Todos $\lambda_i < 0$.
- **Punto silla:** Eigenvalores positivos y negativos mezclados.



3. Resultados y Ejemplos

Caso 1: Matriz Diagonal Sea $A = \binom{2\ 0}{0\ 5}$. En matrices diagonales, los eigenvalores son los elementos de la diagonal.

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5$$

Los eigenvectores son los unitarios $v_1 = (1, 0)^T$ y $v_2 = (0, 1)^T$.

Caso 2: Clasificación de Punto Crítico Sea $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$ con punto crítico en $(0, 0)$.

1. Calculamos la Hessiana: $H = \binom{2\ 2}{2\ 6}$.
2. Ecuación característica: $\lambda^2 - 8\lambda + 8 = 0$.
3. Eigenvalores resultantes: $\lambda \approx 6.83$ y $\lambda \approx 1.17$.

Conclusión del caso: Como ambos eigenvalores son positivos, el punto $(0, 0)$ es un **MÍNIMO LOCAL**.

4. Conclusiones

- Los eigenvalores representan el factor de escala de la transformación lineal, mientras que los eigenvectores indican la dirección invariante.
- La matriz Hessiana actúa como el criterio definitivo en optimización multivariable, generalizando el criterio de la segunda derivada de cálculo de una variable.
- Si una matriz es diagonal, sus eigenvalores se obtienen por inspección directa, simplificando el cálculo computacional.

Referencias

- Material de Clase (2025). *Programación Numérica: Eigenvalores y Eigenvectores*. Universidad Nacional del Altiplano - Puno.