



Matemáticas, Control y Comunicación

Un enfoque a las telecomunicaciones y sus aplicaciones

Copyright © 2015 Alberto Acosta Lopez

UNIVERSIDAD DISTRITAL

WWW.UDISTRITAL.EDU.CO

Primera Edición, Marzo 2015



Contents

1	Análisis Complejo
1	Números Complejos
1.1	Introducción
1.2	Formas de representar un número complejo
1.3	Operaciones con números complejos
1.3.1	Suma de complejos
1.3.2	Propiedades de la suma Compleja
1.3.3	Multiplicación de números complejos
1.3.4	Propiedades de la multiplicación Compleja
1.3.5	División de números complejos
1.4	Magnitud y Conjugado de un Complejo
1.4.1	Propiedades del conjugado complejo
1.5	Forma Polar de un número Complejo
1.6	Ejercicios
2	Funciones Complejas
2.1	Límites
2.2	Continuidad
2.3	Derivada de una función compleja
2.4	Condiciones de Cauchy-Riemann
2.5	Exponencial compleja
2.6	Funciones Trigonométricas Complejas

2.7	Logaritmo Complejo	34
2.7.1	Ejemplo	35
2.7.2	Teorema	35
2.7.3	Ejemplo	36
2.7.4	Ejemplo	36
2.8	Potencias	37
2.8.1	Ejemplo	37
2.8.2	Ejemplo	37
2.9	Raíces complejas	38
2.10	Ejercicios	40
3	Integral de una función compleja	41
3.1	Integrales definidas en un intervalo $[a,b]$ de números reales	41
3.1.1	Curvas en el plano	42
3.2	Integrales definidas sobre una curva suave	43
3.2.1	Teorema	47
3.2.2	Demostración	47
3.2.3	Definición	47
3.3	Propiedades de las integrales complejas	48
3.3.1	Teorema	49
3.3.2	Demostración	49
3.3.3	Ejercicios	49
3.4	Teorema fundamental del cálculo	49
3.4.1	Demostración	50
3.4.2	Teorema	52
3.4.3	Demostración	52
3.5	Integrales de series de funciones	53
3.5.1	Teorema de integración término a término	53
3.5.2	Demostración	53
3.6	Teorema de Cauchy para integrales	54
3.6.1	Teorema de la curva de Jordan	56
3.6.2	Teorema de cauchy para integrales	56
3.6.3	Independencia de la trayectoria	58
3.6.4	Formula integral de Cauchy	60
3.7	Teorema del residuo	61
3.8	Ejercicios	66

II

Series

4	Series	69
4.1	Funciones como Series de Potencias	69
4.1.1	Serie de Taylor	69
4.1.2	Teorema	70
4.1.3	Demostración	70

4.2	Ejercicios	72
4.3	Serie de Laurent	73
4.4	Ejercicios	79
5	Series de Fourier	81
5.1	Justificación	81
5.2	Historia	81
5.3	¿Qué son las series de Fourier?	82
5.4	Serie de Fourier de una Función	82
5.5	Funciones Pares e Impares	83
5.6	Convergencia de las series de Fourier	85
5.6.1	Primer teorema de convergencia	85
5.6.2	Segundo teorema de convergencia	86
5.7	Sumas Parciales de la Serie de Fourier	87
5.8	El Fenómeno de Gibbs	89
5.9	Series de Fourier en Senos y Cosenos	89
5.9.1	Las series de Fourier en senos de una función	91
5.10	Serie Trigonométrica	92
5.11	Serie de Fourier Compleja	96
5.11.1	Definición	99
5.11.2	Teorema	99
5.12	Ejercicios	101

III

Transformada Z

6	Transformada Z	105
6.1	Introducción	105
6.2	Transformada Z	105
6.3	Transformada Z Inversa	112
6.3.1	Métodos para desarrollar la Transformada Z Inversa: Fracciones Parciales . . .	112
6.4	Propiedades de la Transformada Z	121
6.5	Región de Convergencia	133
6.5.1	Propiedades de la Región de Convergencia	135
6.6	Función de Transferencia	143
6.6.1	Definición	143
6.7	La Transformada Z unilateral	149
6.7.1	Propiedades de la Transformada Z unilateral	150
6.7.2	Ejercicios Propuestos	151
6.8	Transformada Wavelet Continua	158
6.9	Programa básico para obtener la Transformada Wavelet Discreta de una señal de N muestras empleando multiresolución	159
6.10	Transformada Z - Matlab	160

IV**Aplicaciones**

7	Transformada Wavelet	163
7.1	Introducción a transformada Wavelet:	163
7.2	Wavelets vs Fourier	164
7.3	Eliminación de ruido en señales	165
7.4	Wavelets vs Fourier: Resolución de imágenes	167
7.5	Extracción de Información en imágenes	168
7.6	Programa MATLAB	169
7.6.1	Aproximación Series de Fourier	169
7.7	Serie de Fourier: ejemplo	171
7.8	Temperatura de la tierra a una profundidad X:	175
7.9	Otras Aplicaciones	176
7.9.1	Aplicaciones automotrices:	177
7.9.2	Electrónica de consumo:	177
7.9.3	Medicina:	177
7.9.4	Instrumentación:	177
7.10	Fourier: Series y transformada:	177
7.11	Transformada wavelets	177

V**Anexos**

8	Anexos	181
8.1	Anexo A	182
8.2	Anexo B	188
8.2.1	Tabla de Transformadas de Fourier	188
8.3	Anexo C	189
8.4	Anexo D	190
8.5	¿Para qué sirve Fourier en Matlab?	191
8.5.1	Transformada Fourier triangular	191
8.5.2	Código que diferencia la frecuencia fundamental de dos señales de voz de dos personas diferentes	192
8.5.3	En este ejemplo se utilizan otras instrucciones que permiten ver la señal fundamental a través del espejo este código es más útil que los anteriores	192
8.5.4	Transformada Fourier en la función polar rectangular	192
8.6	Transformada wavelet continua	192
8.7	Programa básico para obtener la transformada wavelet discreta de una señal de N muestras empleando multiresolución.	194
8.8	Transformada z-Matlab	194

9	Bibliografía	199
9.1	Libros	199
9.2	Recursos WEB	199

Análisis Complejo

1	Números Complejos	11
1.1	Introducción	
1.2	Formas de representar un número complejo	
1.3	Operaciones con números complejos	
1.4	Magnitud y Conjugado de un Complejo	
1.5	Forma Polar de un número Complejo	
1.6	Ejercicios	
2	Funciones Complejas	19
2.1	Límites	
2.2	Continuidad	
2.3	Derivada de una función compleja	
2.4	Condiciones de Cauchy-Riemann	
2.5	Exponencial compleja	
2.6	Funciones Trigonométricas Complejas	
2.7	Logaritmo Complejo	
2.8	Potencias	
2.9	Raíces complejas	
2.10	Ejercicios	
3	Integral de una función compleja	41
3.1	Integrales definidas en un intervalo $[a, b]$ de números reales	
3.2	Integrales definidas sobre una curva suave	
3.3	Propiedades de las integrales complejas	
3.4	Teorema fundamental del cálculo	
3.5	Integrales de series de funciones	
3.6	Teorema de Cauchy para integrales	
3.7	Teorema del residuo	
3.8	Ejercicios	



1. Números Complejos

1.1 Introducción

El conjunto de los números complejos se representa con la letra C , y suelen escribirse como la suma de $z = x + iy$ en donde x e y , son números reales y además:

$$i = \sqrt{-1} \text{ entonces } i^2 = -1$$

El conjunto de los números reales, esta contenido dentro de C . Puesto que $x = x + 0i$ es la representación de un número real en forma compleja que tiene su parte imaginaria igual a cero.

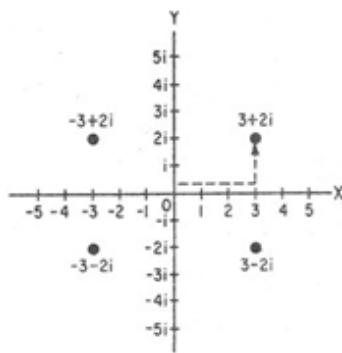


Figure 1.1: Puntos en el plano

Estos números se consideran como puntos de un plano: el plano complejo. La parte superior del plano, contiene a los complejos con parte imaginaria positiva, y la parte inferior cuadrantes 3 y 4 contienen a los complejos con parte imaginaria negativa.

Una propiedad importante de los números complejos es el teorema fundamental del álgebra el cual afirma que cualquier ecuación algebraica de grado n tiene exactamente n soluciones complejas

o raíces.

Los números complejos se utilizan en matemáticas, física e ingeniería, principalmente para representar ondas electromagnéticas y corrientes eléctricas.

1.2 Formas de representar un número complejo

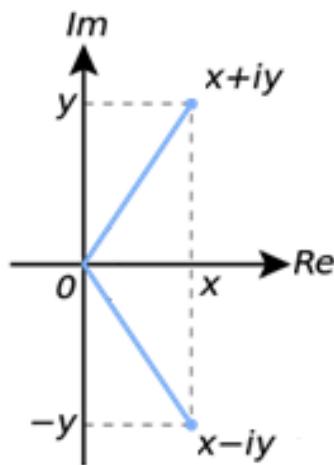


Figure 1.2: forma de representar un numero complejo

Podemos representar un número complejo de varias maneras, según sea necesario trabajar con el de una u otra manera. Como la suma de una parte real más una parte imaginaria de la forma: $z = x + iy$ en donde x e y son números reales, e i sería la unidad imaginaria definida como $\sqrt{-1}$, por lo tanto si elevamos la unidad imaginaria i al cuadrado obtendríamos -1 .

Ejemplo

1. $z_1 = 4 + 3i$
2. $z_2 = -2 + 5i$
3. $z_3 = -604 - 12i$

1.3 Operaciones con números complejos

1.3.1 Suma de complejos

Para sumar dos números complejos sumamos sus partes real e imaginaria correspondientes de manera separada.

Por Ejemplo: Dados dos numeros complejos: $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$; entonces:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Ejemplo:

Sea $Z_1 = 3 + 2i$ y $Z_2 = 6 - 5i$, entonces $Z_1 + Z_2 = (3 + 2i) + (6 - 5i)$. Si sumamos sus partes reales e imaginarias respectivamente tendremos: $Z_1 + Z_2 = (3 + 2i) + (6 - 5i) = (3 + 6) + i(2 - 5) = 9 - 3i$

1.3.2 Propiedades de la suma Compleja

1. Conmutativa

Dados dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$ se tiene que:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Demostración:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1$$

Ejemplo

$$(-3 + i) + (2 - 3i) = (-3 + 2) + i(1 - 3) = -1 - 2i$$

2. Asociativa

Dados tres números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$, se tiene que:

$$[z_1 + z_2] + z_3 = z_1 + [z_2 + z_3]$$

Demostración:

$$[z_1 + z_2] + z_3 = [(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)] + (x_3 + iy_3) = (x_1 + iy_1) + [(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)] = z_1 + [z_2 + z_3]$$

Ejemplo

$$(5 + 2i) + (3 - 4i) + (-9 + 8i) = (8 - 2i) + (-9 + 8i) = -1 + 6i$$

$$(5 + 2i) + [(3 - 4i) + (-9 + 8i)] = (5 + 2i) + (-6 + 4i) = -1 + 6i$$

3. Elemento Neutro

El elemento neutral es $0 + 0i$ y se le escribe como 0 real, puesto que: dado un numero complejo $z = (x + iy)$, entonces $z + (0 + 0i) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z$

4. Elemento Simétrico

El elemento simétrico de un número complejo $z = x + iy$ es $-z = (-x - iy)$ ya que la suma entre estos 2 debe dar el 0 real.

$$(x + iy) + (-x - yi) = 0 + 0i = 0$$

Ejemplo

El simétrico de $2 - 3i$ es $-2 + 3i$ pues $(2 - 3i) + (-2 + 3i) = 0$

1.3.3 Multiplicación de números complejos

Para la multiplicación de números complejos, hacemos exactamente igual que con los polinomios de primer grado; dados 2 numeros complejos $z_1 = (x_1 + iy_1)$ y $z_2 = (x_2 + iy_2)$ entonces:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

Acá podemos además tomar al número i multiplicarlo por si mismo obteniendo

1. $i^1 = i$
2. $i^2 = -1$
3. $i^3 = -i$
4. $i^4 = 1$

Ejemplo

Sean z_1 y z_2 dos números complejos tales que $z_1 = (5 + 2i)$ y $z_2 = (2 - 3i)$.
 Usando: $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$
 Entonces $z_1z_2 = 10 - 15i + 4i - 6i^2 = 10 - 11i + 6 = 16 - 11i$.

1.3.4 Propiedades de la multiplicación Compleja**1. Conmutativa**

Dados dos números complejos $z_1 = (x_1 + iy_1)$ y $z_2 = (x_2 + iy_2)$ se tiene que:

$$z_1z_2 = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2i^2 = x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = z_2z_1$$

2. Asociativa

Dados tres números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ y $z_3 = x_3 + iy_3$, se tiene que:

$$[z_1z_2]z_3 = [z_2z_3]z_1$$

Demostración:

$$\begin{aligned} [z_1z_2]z_3 &= [x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2i^2](x_3 + iy_3) = [x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2)](x_3 + iy_3) \\ &= x_3(x_1(x_2 + iy_2)) + x_3(iy_1(x_2 + iy_2)) + iy_3((x_1(x_2 + iy_2)) + iy_3(iy_1(x_2 + iy_2))) = x_3(z_1z_2) + iy_3(z_1z_2) = [z_2z_3]z_1 \end{aligned}$$

3. Elemento Neutro

El elemento neutral es $1 + 0i$, puesto que: dado $z = x + iy$, entonces $(x + iy)(1 + 0i) = x + iy = z$

El número $1 + 0i$ se escribe como 1 y es llamado uno real.

4. Distributiva

Dados tres números complejos $z_1 = (x_1 + iy_1)$, $z_2 = (x_2 + iy_2)$ y $z_3 = (x_3 + iy_3)$, se tiene que:

$$z_1(z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1)[(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)] = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1)(x_3 + iy_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

5. Elemento Simétrico

El elemento simétrico de un número complejo $z = x + iy$ es $(-x - iy)$:
 $(x + iy) + (-x - iy) = 0 + 0i = 0$

Ejemplo

El simétrico de $2 - 3i$ es $-2 + 3i$ pues $(2 - 3i) + (-2 + 3i) = 0$

1.3.5 División de números complejos

Se quiere formar el cociente z_1/z_2 , donde $z_2 \neq 0$. Este cociente es un número complejo z_3 tal que $z_2z_3 = z_1$. Sin embargo, de esta manera no es muy sencillo encontrar z_3 . Observemos el siguiente procedimiento por el cual podremos encontrar z_3 de una manera sencilla. Si $z_1 = x_1 + iy_1$

y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}\frac{(3-4i)}{(5+2i)} &= \frac{(3-4i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} \\ &= \frac{15-8-(6+20)i}{5^2+2^2} \\ &= \frac{7-26i}{29} \\ &= \frac{7}{29} - \frac{26i}{29}\end{aligned}$$

1.4 Magnitud y Conjugado de un Complejo

La magnitud de un complejo $z = (x + iy)$ es un número real y se denota como $|(x + iy)| = |z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.1)$$

El módulo, magnitud o valor absoluto de un número complejo z viene dado por la siguiente expresión:

$$|z| = \sqrt{z^2} = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)} \quad (1.2)$$

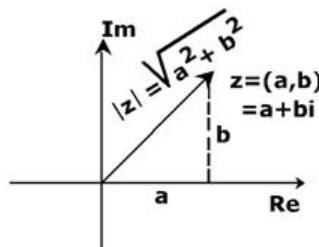


Figure 1.3: modulo de un numero complejo

Si pensamos en el número complejo z como un punto en el plano complejo; podemos ver, por el teorema de Pitágoras, que el valor absoluto de un número complejo coincide con la distancia desde el origen del plano a dicho punto (ver figura 1.3).

Por ejemplo si $Z = 2 + 3i$ entonces su módulo es:
 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

El conjugado de un número complejo $z = (x + iy)$ es el mismo número complejo original pero su parte compleja cambia de signo haciendo que se vea como una reflexión respecto al eje real. Es decir, si tenemos un número complejo $Z = (x + iy)$, entonces \bar{Z} se define como: $\bar{Z} = (x - iy)$.

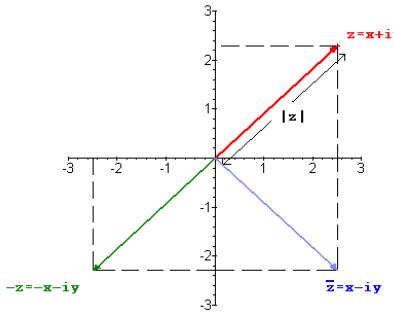


Figure 1.4: Modulo y conjugado de un complejo

Ejemplo

Sea el Complejo $Z = 4 + 2i$, entonces su conjugado sería $\bar{Z} = 4 - 2i$, se refleja respecto al eje real, su parte real $Re(z) = 4$ permanece igual, sin embargo su parte imaginaria $Im(Z)$ cambia de signo de 2 a -2.

1.4.1 Propiedades del conjugado complejo

Estas propiedades se aplican a todos los números complejos Z y W , a menos que se indique lo contrario.

1. $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{(z-w)} = \bar{z} - \bar{w}$
3. $\overline{(zw)} = (\bar{z})(\bar{w})$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, siempre y cuando $w \neq 0$.
5. $\bar{\bar{z}} = z$ si y solo si z es real.
6. $\bar{z^n} = \bar{z}^n$, para todo entero n .
7. $|\bar{z}| = |z|$
8. $|z|^2 = z\bar{z} = \bar{z}z$
9. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ si z es distinto de 0.

$$10. \quad \bar{\bar{z}} = z$$

Demostración

Demostrar que: $\bar{\bar{z}} = z$

Si $z = x + iy$ se tiene que $\bar{z} = x - iy$, de donde, $\bar{\bar{z}} = x + iy = z$

Demostración

Dados dos números complejos z_1 y z_2 , el conjugado de su suma es igual a la suma de sus conjugados.

Tomando: $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$

Se obtiene:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

Demostración

El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de

dichos números:

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$

Se tiene que $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \bar{z}_1\bar{z}_2$

Demostración

La suma y el producto de un complejo y su conjugado son, ambos, números reales, sea $z = x + iy$ entonces $\bar{z} = x - iy$

Demostración:

$$(x + iy) + (x - iy) = 2x$$

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

1.5 Forma Polar de un número Complejo

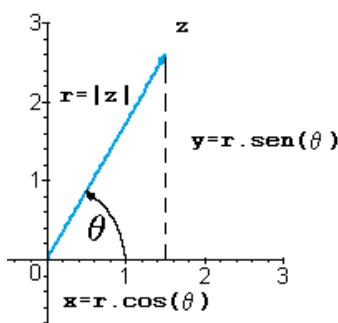


Figure 1.5: Forma polar de un numero complejo

Un número complejo podría ser visto como un punto en un plano, si unimos dicho punto con el origen, es decir con $(0, 0i)$ tendremos un vector, dicho vector puede ser representando mediante su magnitud o radio r y mediante un Ángulo θ medido generalmente en radianes tomando como sentido positivo el sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

Para determinar la magnitud r o $|Z|$ tomamos la parte real de x e y : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ahora para determinar el ángulo del vector sacamos: $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Por lo tanto un número complejo puede ser expresado en su forma binomial como $x + iy$ o en su forma polar como $z = re^{i\theta} = |z|e^{i\theta}$ donde θ es el ángulo en radianes o argumento.

1.6 Ejercicios

1. Usando el plano complejo ubique los siguientes puntos:
 $(1+3i)$, $(2+4i)$, $(6+8i)$, $(-1+i)$, $(2-i)$
2. Halle la magnitud o modulo de los siguientes complejos:
 $(3+4i)$, $(3-4i)$, $(2+2i)$, $(1-i)$, $(1+i)$, $(-1-i)$
3. Encuentre el argumento o ángulo de los siguientes números complejos:
 $(2+2i)$, $(4+4i)$, $(6-3i)$, $(3+12i)$, $(2+4i)$
4. Resuelva:
 $(1+2i) + (3+4i)$
 $(2+4i) + (12+i)$
 $(2+5i) - (6+9i)$
 $(2+6i)(4-8i)$
5. Si $i = \sqrt{-1}$ puede ser visto como un vector de la forma $(0,1)$. Resolver:
 $(2+2i)t^6$
6. Encuentre el resultado de la división compleja
 $* \frac{1+i}{2+3i}$
 $* \frac{1-i}{3-2i}$
 $* \frac{3+4i}{8-3i}$
 $* \frac{3-4i}{3+4i}$
 $* \frac{2+4i}{-7+8i}$
7. Si $i^2 = -1$, entonces $i^3 = -i$, por lo tanto $i^4 = 1$, sabiendo esto, intente determinar el valor de:
 $i^5, i^7, i^{11}, i^{24}, i^{33}, i^{42}$
8. Escriba los siguientes números en su forma polar:
 $(1+i)$, $(2-i)$, $(3+3i)$, $(-10-10i)$, $(6+7i)$, $(-12+6i)$
9. Si un número complejo tiene modulo 25 y ángulo 36 grados, escribalo en forma vectorial
10. Para un complejo con modulo 10 y argumento $\frac{\pi}{4}$ escribalo en forma vectorial



2. Funciones Complejas

Si \mathbb{C} representa al conjunto de los números complejos y f es una función compleja, definida en algún conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$, entonces escribimos $f : S \rightarrow \mathbb{C}$. Esto significa que $f(z)$ es un número complejo para cada z en S . El conjunto S se llama el dominio de f .

Ejemplo $g(z) = \frac{2z - i}{z^2 + 16}$.

esta función está definida para todo complejo z excepto $4i$ y $-4i$.

otros ejemplos al igual que en los números reales son funciones como: exponencial, logarítmica, trigonométricas, etc.

2.1 Límites

La noción de límite para una función compleja está representada a partir de la de funciones con valores reales, reemplazando intervalos por discos.

Si $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja y z_0 un punto límite de S y si L es un número complejo, entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

si, y solo si, dado $\alpha > 0$, existe un número positivo β tal que

$$|f(z) - L| < \alpha$$

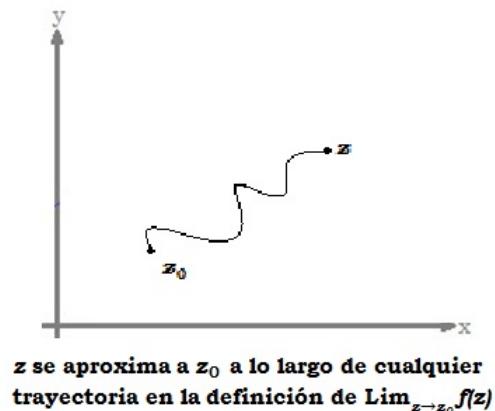
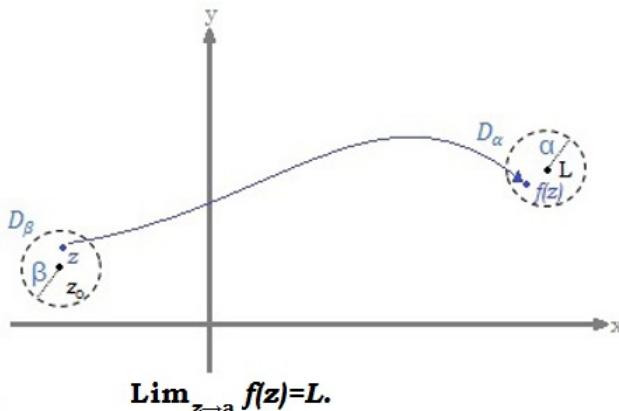
para todo z en S tal que

$$0 < |z - z_0| < \beta$$

Cuando $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$, llamamos a L el límite de $f(z)$ conforme z se acerca a z_0

Esto significa que dado un disco abierto D_α de radio α alrededor de L , podemos encontrar un disco abierto D_β de radio β alrededor de z_0 de manera que cada punto en D_β , excepto el mismo z_0 , que también está en S es dirigido por la función a D_α . Esto se ilustra en la figura 2.1.

Figure 2.1:

**OBSERVACIÓN:**

si $f(z_0)$ no está definida conforme z se acerca a z_0 no tiene sentido hablar de un límite de $f(z_0)$, conforme z sea cerca a z_0 .

Aún si $f(z_0)$ está definida, no se está pidiendo que $f(z_0) = L$.

APLICACIÓN PRACTICA - MATLAB:

En el Anexo D se presenta una guía completa de manejo y uso del programa MatLab, para que el estudiante la consulte y practique y pueda solucionar cualquier ejercicio que se presente en las diferentes secciones de este libro, ya que este programa tiene una gran variedad de herramientas de cálculo científico y técnico, visualización de gráficas, así como un lenguaje de programación de alto nivel.

Ejemplo

sea z un numero complejo, calcular $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 \bar{z}}{|z|^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0, \forall z \neq 0$$

En la figura 2.2 se encuentra este ejercicio desarrollado en Matlab.

En esta caso primero debemos declarar una variable simbólica z , luego declaramos la función $f = (abs(z)^2)/z$ y por ultimo calculamos el límite de f cuando $z \rightarrow 0$ con la declaración $limit(f, z, 0)$

```

Command Window
>> syms z
>> f = (abs(z)^2)/z
f =
abs(z)^2/z
>> limit(f,z,0)
ans =
0

```

Figure 2.2: límite en MatLab

Frecuentemente escribimos

$$f(z) \rightarrow L \text{ conforme } z \rightarrow z_0$$

cuando $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = L$

Es importante tener en cuenta que los teoremas de límite del cálculo real también son válidos para funciones complejas.

Supongamos que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = A$ y $\lim_{z \rightarrow i} g(z) = B$. entonces.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = L + K,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - g(z)] = L - K,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cL \text{ para cualquier numero } c,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = LK,$$

y, si $K \neq 0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{L}{K},$$

2.2 Continuidad

Definición

Una función compleja $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en un número $z_0 \in S$ si, y solo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Y f es continua en un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ si, y solo si f es continua en cada punto de S .

Ejemplos de funciones continuas

Son ejemplos de funciones complejas continuas la función polinomial, función racional, funciones trigonométricas y la función exponencial.

OBSERVACIÓN: al igual que en los números reales, las propiedades y operaciones de la continuidad son también validas en los números complejos.

2.3 Derivada de una función compleja

Definición

Si $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja y suponemos que $S \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, si $z_0 \in S$. Entonces f es diferenciable en z_0 si y solo si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = L$$

En este caso llamamos a L la derivada de f en z_0 y lo representamos por $f'(z_0)$ o $\frac{df}{dz}$ o $D_z f(z)$.

OBSERVACIÓN: Si f es diferenciable en cada punto de un conjunto S , entonces decimos que f es diferenciable en S .

Ejemplo

sea $f(z) = z^2$ para todo complejo z , Entonces.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2z+h) = 2z$$

evaluando en MatLab por límites (figura 2.3) y directamente (figura 2.4) tenemos:

```
Command Window
>> syms z
>> syms h
>> f=z^2

f =
z^2

>> df = ((z+h)^2-z^2)/h
df =
(h + z)^2 - z^2/h

>> limit(df,h,0)
|
ans =
2*z
```

Figure 2.3: evaluada en MatLab por límites

OBSERVACIÓN: Cómo en el caso de las funciones reales, una función compleja diferenciable es continua.

```

Command Window
>> syms z
>> f=z^2
f =
z^2
>> diff(f,z,1)
ans =
2*z

```

Figure 2.4: evaluada en MatLab por derivada directa

Ejemplo

$f(z) = \bar{z}$ para este ejemplo utilizaremos la definición:

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.1)$$

y tomamos $z = x+iy$ y $z_0 = \beta + i\alpha$.

y calculamos el límite por trayectorias cuando $z \rightarrow z_0$

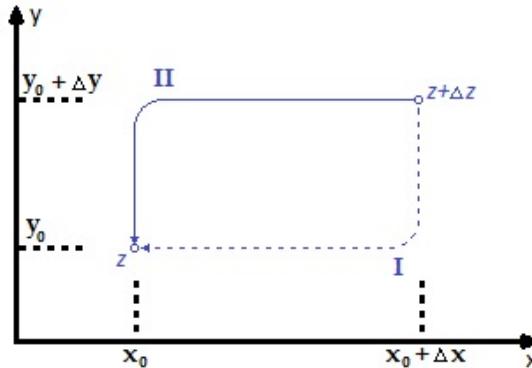


Figure 2.5: trayectorias en (2.1)

Para la trayectoria horizontal tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{\overline{(x+iy)} - \overline{(\beta+iy)}}{(x+iy) - (\beta+iy)} = \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{(x-iy) - (\beta-iy)}{(x+iy) - (\beta+iy)} = \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{x-iy-\beta+iy}{x+iy-\beta-iy} = \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{x-\beta}{x-\beta} = 1$$

Para la trayectoria vertical tenemos:

$$\lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{\overline{(x+iy)} - \overline{(x+i\alpha)}}{(x+iy) - (\beta+i\alpha)} = \lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{(x-iy) - (x-i\alpha)}{(x+iy) - (x+i\alpha)} = \lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{x-iy-x+i\alpha}{x+iy-x-i\alpha} = \lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{-iy+i\alpha}{iy-i\alpha} = -1$$

lo que significa que al acercarnos por la trayectoria horizontal el límite es 1, y por la trayectoria vertical el límite es -1. Como al evaluar por diferentes trayectorias obtenemos diferentes valores demostramos que la derivada no existe

Ejemplo

Demuestre que el límite de la siguiente función no existe.

$$f(z) = |z|^2$$

para $z_0 = 0$, se tiene:

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0$$

Para $z_0 \neq 0$ realizamos el análisis por trayectorias de la siguiente manera : tomamos $z = x+iy$ y $z_0 = x+it$. y calculamos el límite por trayectorias cuando $z \rightarrow z_0$ como en el ejemplo anterior

Para la trayectoria vertical tenemos:

$$\lim_{y \rightarrow t} \frac{(x^2 + y^2) - (x^2 + t^2)}{x + iy - x - it} = \lim_{y \rightarrow t} \frac{x^2 + y^2 - x^2 - t^2}{iy - it} = \lim_{y \rightarrow t} \frac{y^2 - t^2}{i(y - t)} = \lim_{y \rightarrow t} \frac{(y - t)(y + t)}{i(y - t)} = \lim_{y \rightarrow t} \frac{y + t}{i} = -2it$$

Para la trayectoria horizontal tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{|x + iy|^2 - |\beta + iy|^2}{(x + iy) - (\beta + iy)} = \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{x^2 + y^2 - \beta^2 - y^2}{x - \beta} = \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{(x + \beta)(x - \beta)}{(x - \beta)} = \lim_{x \rightarrow \beta} (x + \beta) = 2\beta$$

Podemos observar que el límite es diferente cuando las trayectorias son diferentes, por lo cual podemos concluir que el límite de $f(z) = |z|^2$ no existe.

OBSERVACIÓN: las reglas de derivación aplicadas a las funciones reales, también se aplican a las funciones complejas.

si n es un entero positivo y $f(z) = z^n$, entonces $f'(z) = nz^{n-1}$

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z),$$

$$(cf)'(z) = cf'(z),$$

$$(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad \text{si } g(z) \neq 0$$

así también las trigonométricas como:

$$\text{si } f(z) = \sin(z), f'(z) = \cos(z), \text{etc.}$$

2.4 Condiciones de Cauchy-Riemann

Podemos observar a través de varios ejemplos que las condiciones de Cauchy-Riemann son necesarias pero no suficientes en el cálculo de la derivada de una función. Y se enuncian de la siguiente manera:

Dada una función compleja f , podemos escribirla $f = u + iv$, suponemos también que $z = x + iy$ y que f' existe. Entonces, en (x, y) ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Ejemplo

Tenemos: $f(z) = \bar{z}$, tomando $z = x - iy$ entonces $\bar{z} = x - iy$ se tiene $u = x$, $v = -y$ y se observa que la segunda ecuación de Cauchy-Riemann se cumple

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

pero no así la primera

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

Por lo tanto se dice que la función \bar{z} no es derivable al no cumplir las condiciones de Riemann.

Teorema:

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, con S un conjunto abierto. Escribimos $f = u + iv$. Supongamos que $z = x + iy$ es un punto de S y $f'(z)$ existe. Entonces, $\forall (x, y)$ se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Sabemos que este límite existe, entonces debe tener el mismo valor, $f'(z)$, sin importar cómo se aproxima h a cero. Consideraremos dos trayectorias de aproximación de h al origen.

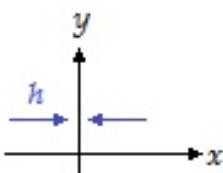


Figure 2.6:

Primero, sea $h \rightarrow 0$ a lo largo del eje real (figura 2.6). Ahora h es real, y $z+h=x+h+iy$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

Ahora, tomamos el límite a lo largo del eje imaginario (figura 2.7). Ponemos $h=ik$ con k real, así $h \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow 0$. Ahora $z=x+i(y+k)$ y

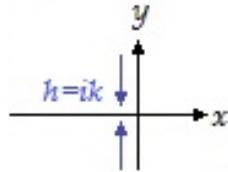


Figure 2.7:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) + iv(x, y+k) - u(x, y) - iv(x, y)}{ik} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{i} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} + \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ejemplo

sea:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Se demostrará que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en $z=0$ pero que f no es diferenciable en 0, por ejemplo:

sea:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{5xy^4 - 10x^3y^2 + x^5}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ v(x, y) &= \frac{y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

y

$$u(0, 0) = v(0, 0) = 0$$

calculando las derivadas parciales en el origen:

$$\frac{du}{dx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^5}{h^4 h} \right) = 1$$

$$\frac{du}{dy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\frac{dv}{dx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\frac{dv}{dy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^5}{h^4 h} \right) = 1$$

Como la ecuación de Cauchy-Riemann dice:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{du}{dy}$$

Por lo tanto el anterior ejemplo se satisface en el origen sin embargo. f no es diferenciable en 0. Si consideramos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^5}{|h|^4 h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^5}{h(\bar{h})^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^2}{\bar{h}^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h}{\bar{h}} \right)^2$$

No tiene límite conforme h tiende a 0, si pasamos de forma polar:

$$h = r e^{i\theta}, \bar{h} = r e^{-(i\theta)}$$

Entonces:

$$\left(\frac{h}{\bar{h}} \right)^2 = e^{4i\theta}$$

El cociente tiene valor constante y así no tiene límite cuando h tiende a 0, ya que se aproxima a diferentes valores en las trayectorias. por lo tanto la función no es derivable.

Ejercicios

En cada uno de los ejercicios, encuentre u y v , de manera que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Utilice las condiciones de Riemann para determinar si la función es diferenciable.

$$1) f(z) = z - i$$

$$2) f(z) = z^2 - iz$$

$$3) f(z) = |z|$$

$$4) f(z) = \frac{2z+1}{z}$$

$$5) f(z) = i|z|^2$$

$$6) f(z) = z + Im(z)$$

$$7) f(z) = \frac{z}{Re(z)}$$

$$8) f(z) = \bar{z}^2$$

$$9) f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$10) f(z) = \frac{z}{|z|}$$

2.5 Exponencial compleja

Definición

Para todo número Z complejo, la función exponencial compleja e^z esta definida como :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} * z^n$$

Si tenemos que :

$$z = x + iy$$

Entonces :

$$e^z = e^{x+iy}$$

Y usando la formula de euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Tenemos que :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x * (\cos(y) + i\sin(y))$$

Teorema (Propiedades de la exponencial compleja)

- Para todo número complejo z, y todo entero positivo n, la n-ésima derivada de e^z es :

$$f^n(z) = e^z$$

- Si $z = (x + iy)$, ($x = 0$) y ($y = 0$) entonces :

$$e^z = e^0 = 1$$

- Si h es derivable en z, entonces $e^{h(z)}$ también lo es y :

$$\frac{d}{dz}(e^{h(z)}) = h'(z) * e^{h(z)}$$

- Si z y w son números complejos entonces :

$$e^{z+w} = e^z * e^w$$

- Para todo número complejo z.

$$e^z \neq 0$$

- Para todo número complejo z

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

- Si Z es real entonces e^z es real y $e^z > 0$
- e^z es periódica con periodo $2n\pi i$ para cualquier entero n
- $e^z = 1$ si, y solo si $z = (2n+1)\pi i$ con n entero.
- Si z y w complejos y $z - w = 2n\pi i$
- Si p es un periodo de e^z , entonces $p = 2n\pi i$ para algún entero n .

DEMOSTRACIÓN:

- e^z es periódica con periodo $2n\pi i$ para cualquier entero n

$$e^{z+2n\pi i} = e^{x+i(2n\pi)} = e^x(\cos(y+2n\pi) + i\sin(y+2n\pi))$$

- $e^z = 1$ si, y solo si $z = 2n\pi$ para n entero

Si suponemos que $e^z = 1$ Entonces $e^z = 1$

$$e^z = 1 = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y)$$

Entonces :

$$e^x \cos(y) = 1, e^x \sin(y) = 0$$

como x es real, y $e^x > 0$, ademas la se requiere que $\sin(y) = 0$. Conociendo todos los ceros de la función seno real podemos concluir que $(y = n\pi)$ para todo n entero.

Remplazando. $e^x \cos(y) = e^x \cos(n\pi) = 1$ Pero como: $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para todo entero n
Entonces:

$$e^x (-1)^n = 1$$

Para que se satisfaga esto, primero necesitamos que $(-1)^n$ sea positivo, entonces n debe ser un entero par, digamos $n = 2k$. Esto nos deja con:

$$e^x = 1$$

entonces

$$x = 0$$

Remplazando, se tiene

$$z = x + iy = 0 + 2n\pi i = 2n\pi i$$

- $e^z = -1$ si, y solo si $z = (2n+1)\pi i$ con n entero.

la demostración es similar a la anterior

- Si z y w complejos y $z - w = 2n\pi i$, entonces :

$$e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w} = e^{2n\pi i} = 1$$

por lo tanto $e^z = e^w$ que seria $e^{-z} * e^w$

Ejemplo

Encontrar todas las z tales que $e^z = 1 + 2i$. Para hacer esto, tomamos $z = x + iy$, igualamos con $1 + 2i$

$$e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = 1 + 2i$$

Entonces tenemos :

$$e^x \cos(y) = 1, e^x \sin(y) = 2$$

Elevamos al cuadrado y sumamos para obtener

$$e^{2x}(\cos^2(y) + \sin^2(y)) = e^{2x} = 2^2 + 1^2 = 5$$

Por lo tanto :

$$x = \frac{1}{2} \ln(5).$$

Luego dividimos:

$$\frac{e^x \sin(y)}{e^x \cos(y)} = \tan(y) = 2$$

Sacando arctan a ambos lados tenemos que

$$y = \tan^{-1}(2)$$

Así, la solución de la ecuación es

$$z = \frac{1}{2} \ln(5) + i \tan^{-1}(2)$$

2.6 Funciones Trigonométricas Complejas

Podemos extender sin dificultad algunas definiciones y propiedades de las funciones: Trigonométricas, Trigonométricas inversas e Hiperbólicas de los números reales, al campo de los números complejos de la siguiente manera:

Partiendo de la formula de Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

podemos definir las siguientes funciones:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad (2.2)$$

como vimos en la sección de continuidad, las funciones trigonométricas son continuas y podemos definir sus derivadas de la siguiente forma:

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} a) \quad & \cos z = \cos x - i \sin x \quad \sinhy \\ b) \quad & \sin z = \sin x \quad \cosh y + i \cos x \quad \sinhy \end{aligned} \tag{2.4}$$

y

$$\begin{aligned} a) \quad & |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \\ b) \quad & |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \end{aligned} \tag{2.5}$$

para solucionarlo debemos utilizar la ecuación (2.2)

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x - \frac{1}{2}i(e^y + e^{-y})\sin x \end{aligned}$$

esto conduce a (2.6a), ya que, como se sabe por cálculo,

$$\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinhy = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}); \tag{2.6}$$

(2.4b) se obtiene de manera semejante. Por (2.4a) y $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ se obtiene

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y$$

como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces se obtiene (2.5a), y (2.5b) se obtiene de manera semejante.

por ejemplo, $\cos(2 + 3i) = \cos 2 \cosh 3 - i \sin 2 \sinh 3 = -4.190 - 9.109i$

por (2.6) se observa que $\cos z$ y $\sin z$ son *periodicas con periodo* 2π , así como en los reales. Luego se concluye la periodicidad de $\tan z$ y $\cot z$ con periodo π .

La formula (2.7) indica una diferencia esencial entre el coseno y el seno reales y los complejos; mientras que $|\cos x| \leq 1$ y $|\sin x| \leq 1$, las funciones complejas coseno seno no están acotadas, sino que tienden a infinito en valor absoluto cuando $y \rightarrow \infty$, ya que en (2.7) se tiene que $\sinhy \rightarrow \infty$

Ejemplo

Obtener la identidad :

$$\sin(2z) = 2\cos z * \sin z$$

Simplemente empleamos :

$$2\sin z \cos z = 2 * \left(\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) * \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \right)$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{2iz} - e^{-2iz} + 1 - 1) = \frac{1}{2i}(e^{2iz} - e^{-2iz}) = \sin(2z)$$

Teorema

- Si $z = x + iy$ entonces:

$$\cos(z) = \cos(x) * \cosh(y) - i \sin(x) * \sinh(y)$$

$$\sin(z) = \sin(x) * \cosh(y) + i \cos(x) * \sinh(y)$$

- $\sin(z) = 0$ si y solo si $z = n\pi$ para n entero
- $\cos(z) = 0$ Si y solo si $z = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con n entero
- $\sin(z)$ y $\cos(z)$ son funciones periódicas y sus períodos son $2n\pi$ siendo n un número entero distinto de cero. Es decir :

$$\cos(z + 2n\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(z + 2n\pi) = \sin(z)$$

para todo complejo z

- $\cos(z + p) = \cos(z)$, entonces $p = (2n\pi)$
es fácil verificar este teorema a partir de los resultados obtenidos en el caso real

Ejemplo

Sea z un número complejo de tal forma que $z = x + iy$, entonces halle los valores de X e Y si $\cos(z) = i$.

Primero :

$$\cos(z) = i$$

Es lo mismo que decir :

$$\cos(x + iy) = i$$

Ahora si sabemos que $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i \sin(x)\sinh(y)$, entonces sustituimos :

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i \sin(x)\sinh(y) = i$$

Como sabemos, para que esta igualdad se cumpla, las partes reales e imaginarias de cada uno de los lados deben ser iguales, por lo tanto las igualamos así :

$$\cos(x)\cosh(y) = 0, \sin(x)\sinh(y) = -1$$

Ademas sabemos que $\cosh(y) > 0$ para todo y real, por lo tanto $\cos(y)$ nunca se hará cero, por lo tanto $\cos(x) = 0$, así que los valores de x que satisfacen plenamente la condición

$$x = \frac{2n+1}{2}\pi$$

Ahora sabiendo esto, reemplazamos en la segunda ecuación x , quedando así :

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) * \sinh(y) = -1$$

Sabiendo esto, tenemos que :

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\frac{2n+1}{2}}\right) = (-1)^n$$

Por lo tanto :

$$\operatorname{senh}(y) = (-1)^{n+1}$$

Entonces para hallar y hacemos :

$$y = \operatorname{senh}^{-1}(-1)^{n+1}$$

Lo cual nos permite ver que las soluciones de $\cos(z) = i$ son números complejos, que dependen del valor del entero n .

Si n es par :

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\operatorname{senh}^{-1}(-1)$$

Si n es impar :

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\operatorname{senh}^{-1}(1)$$

Podemos escribir las soluciones como :

Con n un entero par :

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\ln(-1 + \sqrt{2})$$

y si n es un entero impar :

$$\frac{2n+1}{2}\pi + i\ln(1 + \sqrt{2})$$

2.7 Logaritmo Complejo

Así como en los reales tenemos la función logaritmo natural, el cual es la función inversa de la función exponencial, en los complejos teniendo en cuenta la exponencial complejas podemos aplicar el mismo principio.

Para verlo mas claramente, tomemos dos números complejos w y $z \neq 0$ así :

$$e^w = z$$

Si y solo si $W = \log(z)$ Tomando z en forma polar $z = re^{i\theta}$.

Ademas si el complejo $w = u + iv$ tendremos :

$$z = re^{i\theta} = e^w = e^u e^{iv}$$

Como θ y v son números reales, entonces

$$|e^{i\theta}| = |e^{iv}| = 1$$

Aplicando lo en la ecuación anterior quedaría como $r = |z| = e^u$, en donde $u = \ln(r)$, siendo r un número real y positivo.

Esto implica que $e^{i\theta} = e^{iv}$, por lo tanto implica que $iv = i\theta + 2n\pi i$. Por lo tanto $v = \theta + 2n\pi$, siendo n cualquier número entero real.

Una vez visto esto podemos concluir que si tenemos un complejo $z = re^{i\theta}$ que sea distinto de cero, existen entonces una cantidad infinita de números complejos w , de tal forma que $e^w = z$. De forma mas general dichos números se pueden expresar así :

$$w = \ln(r) + i(\theta + 2n\pi)$$

Y en donde θ es cualquier argumento del número complejo z , estando todos los argumentos de z contenidos en la expresión $\theta + 2n\pi$, siendo n cualquier entero real, básicamente se podría expresar como :

$$w = \ln|z| + i\arg(z)$$

Por lo tanto cada número complejo tiene un número infinito de argumentos y por ende una cantidad infinita de logaritmos.

2.7.1 Ejemplo

Tenemos el número complejo $z = 1 + i$, por lo tanto :

$$z = (\sqrt{2}) * e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$$

Por lo tanto :

$$\log(z) = (\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$$

Con la ecuación anterior podemos ver claramente que alguno de los logaritmos de $z = 1 + i$ son :

$$\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i7\frac{\pi}{4}, \ln(\sqrt{2}) + i9\frac{\pi}{4}$$

Este ejemplo nos muestra algo muy importante y es que $\log(z)$ tiene asociadas un número infinito de respuestas para todo $z \neq 0$, por ende $\log(z)$ no es en si propiamente una función según la definición formal, sin embargo $\log(z)$ tiene muchas de las propiedades de la función logaritmo real.

2.7.2 Teorema

Si z y w son números complejos distintos de cero, cada valor de $\log(zw)$ es la suma de los valores de $\log(z)$ y $\log(w)$

2.7.3 Ejemplo

Hallar el Logaritmo Complejo de $e^z = 1 + 2i$

Utilizamos Logaritmo en ambas partes de la ecuación

$$\log(e^z) = \log(1 + 2i)$$

$$z = \log(1 + 2i)$$

Hallamos el módulo

$$|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2i^2}$$

$$|1 + 2i| = \sqrt{1 - 4}$$

$$|1 + 2i| = \sqrt{3}$$

Hallamos el Argumento

$$\tan \theta = 2$$

$$\theta = \tan^{-1} 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

Por tanto, podemos decir que

$$z = \ln \sqrt{3} + i \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{2} + 2k\pi \right)$$

2.7.4 Ejemplo

Hallar z tal que $e^z = 1 + 2i$:

Primero aplicamos el logaritmo a ambos lados de la igualdad obteniendo

$$z = \log(1 + 2i) = \ln(|1 + 2i|) + i \arg(1 + 2i) = \frac{1}{2} \ln(5) + i(\arctan(2) + 2n\pi)$$

Siendo n cualquier número entero. Sin embargo si necesitamos un logaritmo en particular podemos elegir un argumento en concreto, por ejemplo si $z \neq 0$

$$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i(\theta)$$

Donde θ esta comprendido entre 0 y 2π así :

$$0 < \theta < 2\pi$$

Sin embargo si hacemos esto debemos no confundirnos puesto que

$$\text{Log}(zw) \neq \text{Log}(z) + \text{Log}(w)$$

2.8 Potencias

Si n es un número entero positivo, y z es un número complejo, dado en forma polar:

$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ entonces se tiene que $z^n = r^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$ esta es la llamada Fórmula de De Moivre. Por ejemplo, si $z = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ entonces :

$$\begin{aligned} z^4 &= 2^4(\cos(4 \cdot 60^\circ) + i \sin(4 \cdot 60^\circ)) \\ z^4 &= 16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \end{aligned}$$

Esta es la forma polar de z^4 . Su forma binomial se calcula así:

$$z^4 = 16\left(\frac{-1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -8 - 8\sqrt{3}i$$

Si z y w son números complejos tales que $z \neq 0$, entonces podemos definir :

$$z^w = e^{w \log(z)}$$

Dado que ya habíamos definido $\log(z)$ como :

$$\log(z) == \ln(|z|) + i(2n\pi), n \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto z^w denota un conjunto de números complejos tales que :

$$, n \in \mathbb{C}$$

2.8.1 Ejemplo

Sea $Z = (-i + i)^i$ entonces :

$$Z = (-i + i)^i = e^{i(\log(-1+i) + 2n\pi i)} = e^{-2n\pi} e^{i(\frac{1}{2}\log(2) + \frac{3\pi i}{4})}, (n \in \mathbb{Z})$$

Ademas si $a \neq 0$ cada valor de \log define una función $a^z = e^{z \log a}$

2.8.2 Ejemplo

Evaluar las potencias de $(\sqrt{3} + i)^2$ Para resolver este problema debemos conocer la fórmula de mourie.

Pasos

1. Hallamos el modulo
2. Hallamos el argumento
3. Usamos formula de mourie

Solucion

Modulo

$$\begin{aligned} |(\sqrt{3} + i)| &= (\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}) \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Argumento

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Formula

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^2 &= (2^2) \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} * 2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} * 2\right) \right] \\ &= 4 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} * 2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} * 2\right) \right] \\ &= 4 \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right]\end{aligned}$$

2.9 Raíces complejas

Las funciones como, $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b y c números reales (con a distinto de 0) tienen por gráficos curvas planas llamadas paráboles . Estas curvas se pueden graficar confeccionando una tabla de valores, o bien llegando a la expresión canónica de la misma , $y = a.(x - h) + k = 0$, de la cual se obtienen sus ceros (raíces) y vértices. Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se calculan con la fórmula:

$$\frac{-b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sin embargo, si $b^2 - 4ac > 0$ entonces su solución, existe y esta en los reales. En contra parte si $b^2 - 4ac < 0$ las raíces no existen o no están definidas dentro de los números reales, sin embargo si existen dentro de los números complejos, este es uno de los puntos de partida que dio origen a la definición de números complejos.

Para hallar las raíces de un número complejo se aplica la fórmula de Moivre, teniendo en cuenta que para que dos complejos coincidan han de tener el mismo módulo y la diferencia de sus argumentos ha de ser un múltiplo entero de 360°

Sea Ca un número complejo y considérese otro complejo Cb , tal que $Ca = Cb^n = (B^n)nb$ Esto es equivalente a decir que $Rb = \sqrt[n]{Ra}$

Se ha visto en aritmética elemental que la radicación o extracción de raíces es, una operación inversa de la potenciación. Por lo tanto la raíz cúbica del real 64 es el real 4, porque el 4 es un número que al elevarlo al cubo arroja como resultado 64, ($4 \times 4 \times 4 = 64$). Trataremos ahora de aplicar esta idea a los números complejos . Iniciaremos con un ejemplo sencillo :

ejemplo

sea z un número complejo: Determine la raíz de:

$$i^{\frac{1}{4}}$$

Hallando $|z|$ y $\arg(z)$:

$$|z| = 1 \quad , \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

entonces:

$$w_n^k = e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{n}}$$

entonces:

$$w_4^0 = e^{\frac{\pi}{8}} = (\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)) = 0.92 + i0.38$$

$$w_4^1 = e^{\frac{3\pi}{8}} = (\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)) = 0.38 + i0.92$$

$$w_4^2 = e^{\frac{9\pi}{8}} = (\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)) = -0.92 - i0.38$$

$$w_4^3 = e^{\frac{13\pi}{8}} = (\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)) = 0.38 - i0.92$$

c2_raiz1.jpg

Figure 2.8:

2.10 Ejercicios

1. Demuestre que $e^z = 1$ si $z = 0$ (*Euler puede ayudar)
2. Encuentre todas las z tales que $e^z = 3 + 4i$
3. Halle : $\operatorname{Sen}(2 + 3i)$
4. Halle : $\operatorname{Cos}(4 + 5i)$
5. Halle : $\operatorname{Tan}(i)$ (Recuerde que $\operatorname{Tan}(x) = \operatorname{sen}(x)/\operatorname{cos}(x)$)
6. Encuentre : e^{2+3i}
7. Halle : $\operatorname{sen}^2(3 + 4i)$
8. Halle la o las z para $e^z = 2i$
9. Halle todas las z para $\operatorname{cos}(z) = i$
10. Encuentre : $\log(z)$ si z es :
 - 10.1 $z = (2 + 2i)$
 - 10.2 $z = (3 + 4i)$
 - 10.3 $z = (-4 - 4i)$
11. Halla $w = e^z$ si $z = 1 - i$
12. Cuanto vale i^2 ?
- 12.1 Cuanto vale i^3 , i^4 e i^5 ?
- 12.2 En base a lo anterior, intente hallar i^8 , i^{17}
- 12.3 Existe alguna forma para hallar i^n , sin tener que hacer n multiplicaciones ?
13. Halle z^5 , si $z = (3 + 4i)$, $z = (10 + 10i)$ y $z = (1 - i)$
14. Encuentre z , si $z = (1 + i)^i$, $z = (2 + 3i)2i$, $z = 3 + 4i$
15. Calcular -4^i , i^{-3i} , i^i
16. Encuentre los valores de Z para $z^4 = i$
17. Calcular :

$$(i^2 + i^3)/(i^8 - i^6)$$

$$(i^9 + i^{-3})^3$$

$$((i^4 - i^{32})/(i^{16} - i^8))^{213}$$



3. Integral de una función compleja

3.1 Integrales definidas en un intervalo $[a, b]$ de números reales

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja tal que $f(x) = u(x) + iv(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

Ambas integrales a la derecha de la ecuación son integrales de Riemann, de funciones de valor real en $[a, b]$.

Ejemplo

$$f(t) = 5t - it^2$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 5t dt - i \int_0^1 t^2 dt = \frac{5}{2} - \frac{i}{3}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```
Command Window
>> syms t;
f = 5*t - i*t^2;
int(f, t, 0, 1)

ans =
5/2 - i/3
```

Figure 3.1: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

$$f(t) = \cos(4t) + i \sin(4t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(4t) dt + i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4t) dt = \frac{i}{2}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```
Command Window
>> syms t;
f = cos(4*t) + i*sin(4*t);
int(f, t, 0, pi/4)

ans =
i/2
```

Figure 3.2: Captura de pantalla en MATLAB

3.1.1 Curvas en el plano

Una curva en el plano complejo es una función $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, definida en un intervalo real $[a, b]$ y que toma valores complejos. Para cada número t en $[a, b]$, $\Gamma(t)$ es un número complejo, o un punto en el plano. El lugar geométrico de tales puntos es la gráfica de la curva. Γ tiene una orientación dada por la dirección en la cual un punto $\Gamma(t)$ se mueve a lo largo de la grafica a medida que t aumenta de a hasta b , de esta manera $\Gamma(a)$ se puede llamar el punto inicial de la curva y $\Gamma(b)$ el punto final.

Si $\Gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces la gráfica de Γ es el lugar geométrico de los puntos $(x(t), y(t))$ para $a \leq t \leq b$. El punto inicial de Γ es $(x(a), y(a))$ y el punto final es $(x(b), y(b))$, y $(x(t), y(t))$ se mueve desde el punto inicial al punto final a medida que t varía de a hasta b .

Curva simple

Una curva Γ es *simple* si $\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, lo cual significa que el mismo punto nunca se repite. Se hace una excepción a esto para curvas cerradas, las cuales requieren que $\Gamma(a) = \Gamma(b)$, si este es el único punto para el cual se cumple que $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$, entonces Γ es una *curva cerrada simple*.

Curva suave

Una curva $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es *continua* si cada una de sus componentes es continua en $[a, b]$. Si $x(t)$ e $y(t)$ son diferenciables en $[a, b]$ entonces Γ es una *curva diferenciable*. Si $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas, y no se anulan ambas para el mismo valor de t , llamamos a Γ una *curva suave*.

Se puede formar una curva Γ uniendo varias curvas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ en sucesión, teniendo en cuenta que el punto final de Γ_{j-1} debe ser el mismo que el punto inicial de Γ_j para $j = 2, \dots, n$, tal curva se llama la *unión* de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ y se denota

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n$$

Las curvas Γ_j son las *componentes* de esta unión, si cada componente de una unión es una curva suave, entonces la unión es *suave a trozos*.

3.2 Integrales definidas sobre una curva suave

Sea f una función compleja, sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave en el plano, supongase que f es continua en todos los puntos de Γ , entonces la integral de f sobre Γ se define de la siguiente manera:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\Gamma(t)) \Gamma'(t) dt$$

Para $a \leq t \leq b$. Puesto que $z = \Gamma(t)$ en la curva, esta integral se suele escribir de la siguiente manera:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

Para $a \leq t \leq b$.

Ejemplo

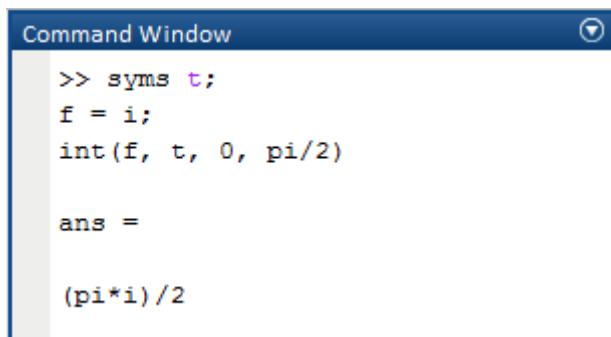
$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz \quad \Gamma = e^{it} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad z(t) = e^{it}$$

$$z'(t) = ie^{it} dt$$

$$f(z(t)) = f(e^{it}) = e^{-it}$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-it} ie^{it} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} i$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms t;
f = i;
int(f, t, 0, pi/2)

ans =
(pi*i)/2
```

Figure 3.3: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

$\int_{\Gamma} zdz$ sobre el segmento de recta de 3 a $2+i$ se tienen los puntos $P(3,0)$ y $Q(2,1)$, entonces $z(t) = P + t(Q - P) = (3,0) + t(-1,1)$, entonces $z(t) = (3-t, t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

$$f(z(t)) = (3-t, t),$$

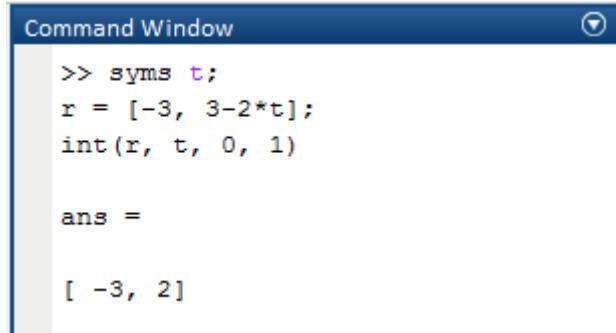
$$f(z(t))z'(t) = (3-t, t)(-1, 1) = (-3, 3-2t)$$

entonces, la integral de $f(z)$ sobre Γ es:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_0^1 (-3, 3-2t) dt = (-3t + i(3t - t^2)) \Big|_0^1$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -3 + 2i$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms t;
r = [-3, 3-2*t];
int(r, t, 0, 1)

ans =
[ -3, 2]
```

Figure 3.4: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

Probar que

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Donde C es la circunferencia unitaria orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj

La circunferencia unitaria C puede representarse de la forma $z(t) = r\cos(t) + ir\sin(t) = re^{it}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, de modo que la integración en sentido contrario a las manecillas del reloj corresponde a un incremento de t desde 0 hasta 2π , por diferenciación se obtiene:

$$z'(t) = -r\sin(t) + ir\cos(t) = ire^{it}$$

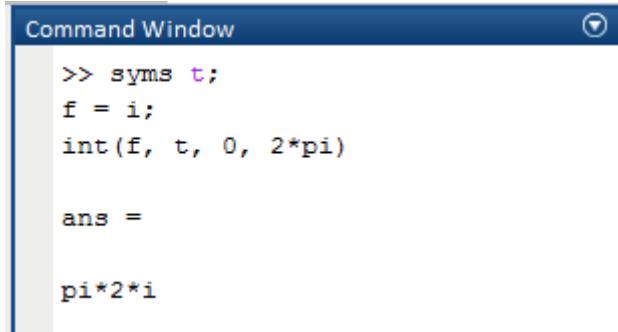
Se tiene que $f(z(t)) = \frac{1}{z(t)}$, por lo tanto:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t) + i\sin(t)} (-\sin(t) + i\cos(t)) dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

La fórmula de Euler es de utilidad para facilitar el cálculo al representar la circunferencia unitaria como $z(t) = re^{it}$, entonces $\frac{1}{z(t)} = re^{-it}$, $dz = ire^{it}dt$, se obtiene el resultado con mayor rapidez:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms t;
f = i;
int(f, t, 0, 2*pi)

ans =
pi^2*i
```

Figure 3.5: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

Evaluar $\int_{\Gamma} f(z) dz$ donde $f(z) = z^4 - z^{-4}$ y Γ es la circunferencia unitaria orientada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj

$$\alpha(t) = e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = ie^{it}$$

$$f(\alpha(t)) = e^{4it} - e^{-4it}$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (e^{4it} - e^{-4it}) ie^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} (e^{5it} - e^{-3it}) dt$$

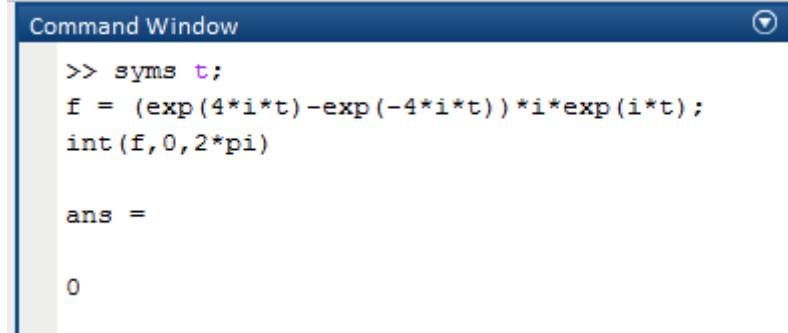
$$= \frac{e^{10\pi i}}{5} + \frac{e^{-6\pi i}}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

Utilizando la fórmula de Euler y evaluando se obtiene

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

$$= 0$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms t;
f = (exp(4*i*t)-exp(-4*i*t))*i*exp(i*t);
int(f,0,2*pi)

ans =
0
```

Figure 3.6: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

Evaluar $\int_{\Gamma} f(z)dz$ donde $f(z) = (z-1)^{-1} + 2(z-1)^{-2}$ y $\Gamma: |z-1| = 4$ orientada positivamente

$$\alpha(t) = 1 + 4e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = 4ie^{it}$$

$$f(\alpha(t)) = (1 + 4e^{it} - 1)^{-1} + 2(1 + 4e^{it} - 1)^{-2}$$

$$f(\alpha(t)) = \frac{e^{-it}}{4} + \frac{e^{-2it}}{8}$$

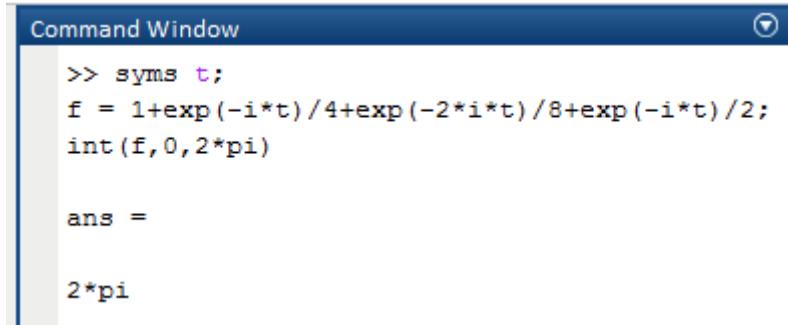
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-it}}{4} + \frac{e^{-2it}}{8} \right) (1 + 4e^{it}) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-it}}{4} + 1 + \frac{e^{-2it}}{8} + \frac{e^{-it}}{2} \right) dt$$

$$= \frac{-1}{4i} + 2\pi - \frac{1}{16i} - \frac{1}{2i} - \left(\frac{1}{4i} - \frac{1}{16i} - \frac{1}{2i} \right)$$

$$= 2\pi$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms t;
f = 1+exp(-i*t)/4+exp(-2*i*t)/8+exp(-i*t)/2;
int(f,0,2*pi)

ans =
2*pi
```

Figure 3.7: Captura de pantalla en MATLAB

3.2.1 Teorema

Sean Γ y Φ curvas equivalentes, y sea f continua en ambas curvas, entonces:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Phi} f(z) dz$$

3.2.2 Demostración

Suponga $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\Phi : [A, B] \rightarrow \mathbb{C}$. Puesto que estas curvas son equivalentes, existe una función continua ϕ con derivada positiva en $[A, B]$ tal que $\phi(A) = a$ y $\phi(B) = b$, y $\Phi(p) = \Gamma(\phi(p))$ para $A \leq p \leq B$. Por la regla de la cadena se obtiene:

$$\Phi'(p) = \Gamma(\phi(p))\phi'(p)$$

Entonces:

$$\int_{\Phi} f(z) dz = \int_A^B f(\Phi(p))\Phi'(p) dp = \int_A^B f(\Gamma(\phi(p)))\Gamma'(\phi(p))\phi'(p) dp$$

Sea $s = \phi(p)$ entonces s varía de a hasta b como p varía de A hasta B , continuando de la última ecuación tenemos:

$$\int_{\Phi} f(z) dz = \int_a^b f(\Gamma(s))\Gamma'(s) ds = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

3.2.3 Definición

Sea $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \cdots \oplus \Gamma_n$ una unión de curvas suaves. Sea f continua en cada Γ_j entonces:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(z) dz$$

Ejemplo

Evaluar $\int_{\Gamma} iz^2 dz$ si $\Gamma(t) = 4\cos(t) + i\sin(t)$ para $0 \leq t \leq \pi/2$

$$z(t) = 4\cos(t) + i\sin(t); \quad z'(t) = -4\sin(t) + i\cos(t)$$

ahora

$$f(z(t)) = iz^2 = 16i\cos^2(t) - 8\cos(t)\sin(t) - i\sin^2(t)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} iz^2 dz &= \int_0^{\pi/2} (-72i\cos^2(t)\sin^2(t) + 33\sin^2(t)\cos(t) + 4i\sin^3(t) - 16\cos^3(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -72i\cos^2(t)\sin^2(t) dt + \int_0^{\pi/2} 33\sin^2(t)\cos(t) dt + \int_0^{\pi/2} 4i\sin^3(t) dt - \int_0^{\pi/2} 16\cos^3(t) dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{64}{3}i \end{aligned}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```

Command Window
>> syms t;
z = 4*cos(t)+i*sin(t);
zp = -4*sin(t) + i*cos(t);
fz = i*z^2;
F = fz*zp;
int(F,0,pi/2)

ans =
1/3 - (64*i)/3

```

Figure 3.8: Captura de pantalla en MATLAB

3.3 Propiedades de las integrales complejas

Se puede pensar en la integral de una función compleja sobre una curva como la suma de las integrales de línea de funciones de dos variables reales sobre la curva. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y sobre la curva Γ , sea $z(t) = x(t) + iy(t)$ para $a \leq t \leq b$, entonces:

$$f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$$

y

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(z(t))z'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] = \\ &u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy.$$

$$\int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz$$

$$\int_{\Gamma} \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(z) dz = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\Gamma} f_j(z) dz$$

- $\int_{\Gamma} K f(z) dz = K \int_{\Gamma} f(z) dz$ con K una constante real o compleja
- $\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$

- $\int_a^b f(z) dz = \int_a^m f(z) dz + \int_m^b f(z) dz$

Sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave, la orientación de esta curva se puede invertir definiendo una nueva curva de la siguiente manera: $\Gamma_2(t) = (a + b - t)$ para $a \leq t \leq b$. Γ_2 tiene la misma gráfica que Γ , sin embargo $\Gamma_2(a) = \Gamma(b)$ y $\Gamma_2(b) = \Gamma(a)$, de este modo Γ_2 comienza donde Γ termina, y Γ_2 termina donde Γ comienza, el hecho de cambiar la orientación invierte el signo de la integral.

3.3.1 Teorema

Sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave y sea f continua en Γ , entonces:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

3.3.2 Demostración

Sea $u = a + b - t$. Por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \Gamma_2(t) = \frac{d}{dt} \Gamma(a + b - t) = \Gamma'(u) u'(t) = -\Gamma'(u) = -\Gamma'(a + b - t).$$

Entonces

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_a^b f(\Gamma_2(t)) \Gamma'_2(t) dt = - \int_a^b f(\Gamma(a + b - t)) \Gamma'(a + b - t) dt$$

Si se hace una sustitución haciendo $s = a + b - t$ se obtiene:

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz = - \int_a^b f(\Gamma(s)) \Gamma'(s) (-1) ds = - \int_a^b f(\Gamma(s)) \Gamma'(s) ds = - \int_{\Gamma} f(z) dz$$

No es necesario definir Γ_2 para invertir la orientación en integrales específicas, se puede integrar de b hasta a en vez de integrar de a hasta b , esto invierte los roles de puntos final e inicial, y por lo tanto la orientación. Otra alternativa es integrar desde a hasta b y tomar el negativo del resultado.

3.3.3 Ejercicios

Calcular el valor de las siguientes integrales en el intervalo indicado.

- $\int_{\Gamma} z^3 dz; \quad \Gamma(t) = t + it; \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\int_{\Gamma} Re(z+4) dz$ Donde Γ es el segmento de recta de $3+i$ a $2-5i$.
- $\int_{\Gamma} (i-z^5)/5; \quad \Gamma(t) = 4-2i; \quad 0 \leq t \leq \pi$
- $\int_{\Gamma} \frac{1+z}{1-z}; \quad \Gamma(t) = t - t^2 i; \quad 1 \leq t \leq 10$
- $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1}; \quad \Gamma(t) = 3 \cos(t) + 5i \sin(t); \quad 0 \leq t \leq \pi$
- $\int_{\Gamma} \frac{2z+1}{z^2+3zi}; \quad \Gamma(t) = 5 \sin(t) - 13i \cos(t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- $\int_{\Gamma} \cos(2z) + i \sin(2z); \quad \Gamma(t) = it^2 - 2t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
- $\int_{\Gamma} \sqrt{5}iz|z|dz; \quad$ Donde Γ es el segmento de recta de $-2i$ a $4i$.

3.4 Teorema fundamental del cálculo

Sea f continua en un conjunto abierto G , y suponga que $F'(z) = f(z)$ para z en G . Sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow G$ una curva suave en G , entonces:

$$\int_a^b f(z) dz = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

3.4.1 Demostración

Sea $\Gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, y sea $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) dt\end{aligned}$$

Ahora, aplicando el teorema fundamental del cálculo en las dos integrales de la derecha de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z) dz &= U(x(b), y(b)) + iV(x(b), y(b)) - [U(x(a), y(a)) + iV(x(a), y(a))] \\ &= F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a)) = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))\end{aligned}$$

Ejemplo

Se puede retomar el ejemplo anterior de integración sobre una curva $\int_{\Gamma} iz^2 dz$ para demostrar el uso de la versión teorema fundamental del cálculo

$$\int_{\Gamma} iz^2 dz; \quad \Gamma(t) = 4 \cos(t) + i \sin(t) \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

Por teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\int_{\Gamma} iz^2 dz = F(\Gamma(\pi/2)) - F(\Gamma(0))$$

Evaluado en $\pi/2$ y 0 en este caso debido al intervalo en que Γ está definida, ahora:

$$\Gamma(\pi/2) = 4 \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$$

$$\Gamma(0) = 4 \cos(0) + i \sin(0) = 4$$

Además

$$\int iz^2 dz = i \frac{z^3}{3} \Big|_0^{\pi/2}$$

Luego

$$F(\Gamma(\pi/2)) - F(\Gamma(0)) = i \left(\frac{i^3}{3} \right) - i \left(\frac{4^3}{3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{64}{3}i$$

Obteniendo el mismo resultado de una manera más sencilla.

Ejemplo

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```
Command Window
>> syms z;
int(z^2, 0, 1+i)

ans =
- 2/3 + (2*i)/3
```

Figure 3.9: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

Se va a calcular $\int_{\Gamma} (z^2 + iz) dz$ si $\Gamma(t) = t^5 - t \cos(t)i$ para $0 \leq t \leq 1$. Se trata de un cálculo elemental pero tedioso si se realiza la integral $\int_0^1 f(z(t))z'(t)dt$. Sin embargo, si se toma a G como el plano complejo entero, entonces G es abierto, y $F(z) = z^3/3 + iz^2/2$ satisface que $F'(z) = f(z)$. El punto inicial de Γ es $\Gamma(0) = 0$ y el punto final es $\Gamma(1) = 1 - \cos(1)i$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (z^2 + iz) dz &= F(\Gamma(1)) - F(\Gamma(0)) = F(1 - \cos(1)i) - F(0) \\ &= \frac{1}{3}(1 - \cos(1)i)^3 + \frac{i}{2}(1 - \cos(1)i)^2 = (1 - \cos(1)i)^2 \left(\frac{1}{3}(1 - \cos(1)i) + \frac{1}{2}i \right)\end{aligned}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```
Command Window
>> syms z t;
f = @(z) z^2+i*z;
F = @(z) z^3/3+i*z^2/2;
r = @(t) t^5 -t*cos(t)*i;
F(r(1))-F(r(0))

ans =
0.5817 - 0.1337i
```

Figure 3.10: Captura de pantalla en MATLAB

Una extensión del teorema anterior es que bajo las condiciones dadas, el valor de $\int_{\Gamma} f(z) dz$ depende únicamente de los puntos inicial y final de la curva. Si Φ también es una curva suave en G y tiene los mismos puntos inicial y final que Γ , entonces:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Phi} f(z) dz$$

A esto se le conoce como *independencia del camino*. Otra consecuencia es que si Γ es una curva cerrada en G , entonces el punto inicial y el punto final coinciden, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

3.4.2 Teorema

Sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave y f una función continua en Γ , entonces:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt.$$

Si además hay un número positivo M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en Γ , entonces:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq ML$$

Donde L es la longitud de Γ .

3.4.3 Demostración

Se escribe el número complejo $\int_{\Gamma} f(z) dz$ en forma polar:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = re^{i\theta}$$

Luego:

$$r = e^{-i\theta} \int_{\Gamma} f(z) dz = e^{-i\theta} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Puesto que r es real, se tiene que:

$$r = Re(r) = Re[e^{-i\theta} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt] = \int_a^b Re[e^{-i\theta} f(z(t)) z'(t)] dt$$

Se tiene que para cualquier número complejo w , $Re(w) \leq |w|$. por lo tanto:

$$Re[e^{-i\theta} f(z(t)) z'(t)] \leq |e^{-i\theta} f(z(t)) z'(t)| = |f(z(t)) z'(t)|$$

Dado que $|e^{-i\theta}| = 1$ para θ real, entonces:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| = r = \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt = \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt$$

Que es lo que se quería demostrar.

Si ahora $|f(z)| \leq M$ sobre Γ , entonces:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt$$

Si $\Gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces:

$$|z'(t)| = |x'(t) + iy'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Por lo tanto

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = ML$$

Ejemplo

Encontrar una cota superior del valor de la integral:

$$\int_C z^2 dz$$

C es el segmento de recta que va desde 0 hasta $1+i$. Con $L = \sqrt{2}$ y $|f(x)| = |z^2| \leq 2$ en C se obtiene:

$$\left| \int_C z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2} = 2.8284$$

El valor absoluto de la integral (realizando la integral) es $|-2/3 + 2/3i| = 2/3\sqrt{2} = 0.9428$

3.5 Integrales de series de funciones

Se buscan condiciones para las cuales se cumpla que

$$\int_{\Gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

Se mostrará que si se puede acotar cada $f_n(z)$ para z en la curva, por una constante positiva M_n tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sea convergente, entonces se puede intercambiar la suma y la integral, e integrar las series término a término.

3.5.1 Teorema de integración término a término

Sea Γ una curva suave, y sea f_n una función continua en Γ para $n = 1, 2, \dots$. Suponga que para cada entero positivo n existe un número M_n tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge y además, para todo z sobre Γ se tiene que:

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absolutamente para todo z en Γ . Además, si denotamos $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = g(z)$, entonces:

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz.$$

3.5.2 Demostración

Para cada z en Γ , la serie real $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge por comparación con las series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Sea L la longitud de Γ y considere la suma parcial

$$F_N(z) = \sum_{n=1}^N f_n(z)$$

Cada F_N es continuo sobre Γ y se tiene que:

$$\left| \int_{\Gamma} g(z) dz - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} f_n(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} [g(z) dz - F_N(z)] dz \right| \leq L (\max_{z \in \Gamma} |g(z) - F_N(z)|)$$

Ahora, para todo z en Γ se cumple que

$$|g(z) - F_n(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \right|$$

Si k es cualquier número positivo, entonces podemos elegir un N suficientemente grande de modo que se cumpla $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \frac{k}{L}$, porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Pero entonces

$$\max_{z \in \Gamma} |g(z) - F_N(z)| < \frac{k}{L}$$

por lo tanto

$$\left| \int_{\Gamma} g(z) dz - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} f_n(z) dz \right| < L \frac{k}{L} = k$$

Para un N suficientemente grande. Esto prueba que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} f_n(z) dz = \int_{\Gamma} g(z) dz$$

como se quería de mostrar. El teorema aplica a una serie de potencias dentro de su círculo de convergencia, con $f_n(z) = c_n(z - z_0)^n$

3.6 Teorema de Cauchy para integrales

La integral de linea de una función $f(z)$ generalmente no depende simplemente de los puntos finales de la trayectoria sobre la que se evalua, mas si depende de la trayectoria misma. Esta dependencia puede complicar la búsqueda de solución a una integral, sin embargo bajo condiciones específicas la trayectoria pierde protagonismo. Para comprender el teorema de cauchy para integrales es necesario tener conocimiento previo de los conceptos que se plantean a continuación

Conjunto abierto

Un conjunto D se dice que es abierto si ningún punto de la frontera pertenece a D . De manera más formal definiendo la frontera de D como $FR(D)$ se tiene que D es abierto si:

Sea K el disco abierto $|z - a| < r$. Todo punto de K es un punto interior ya que alrededor de cualquier punto en K podemos dibujar un disco de radio lo suficientemente pequeño que contenga sólo puntos en K . Así K es un conjunto abierto,

$$FR(D) \cap D = \emptyset$$

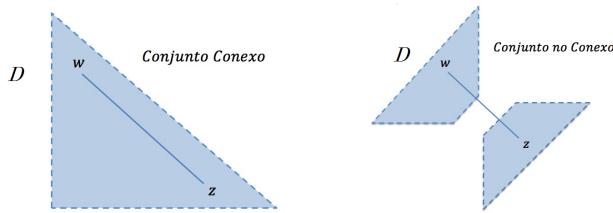
Conjunto cerrado

Un conjunto D se dice que es cerrado todos los puntos de la frontera pertenecen a D . De manera más formal definiendo la frontera de D como $FR(D)$ se tiene que D es cerrado si:

$$FR(D) \cap D = FR(D)$$

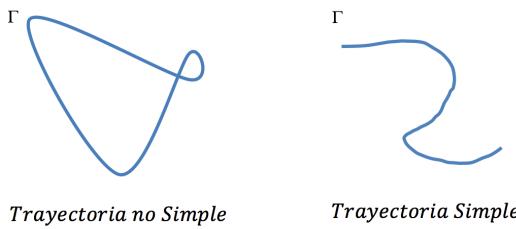
Conjunto conexo

$D \in \mathbb{C}$ es un conjunto conexo si y solo si $\forall z, w \in D$ el segmento \overline{zw} esta contenido en D .

**Trayectoria simple**

Sea $\Gamma \in \mathbb{C}$ una trayectoria, se dice que es simple si y solo si :

$$\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2) \text{ entonces } t_1 \neq t_2$$

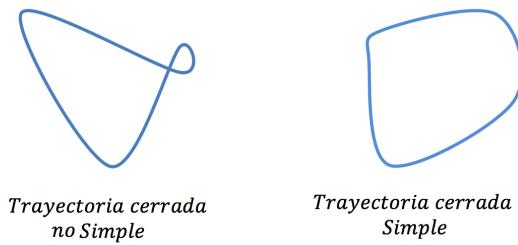
**Trayectoria cerrada**

Sea $\Gamma \in \mathbb{C}$ una trayectoria, se dice que es cerrada si y solo si su punto inicial t_i y su punto final t_f son el mismo, esto es:

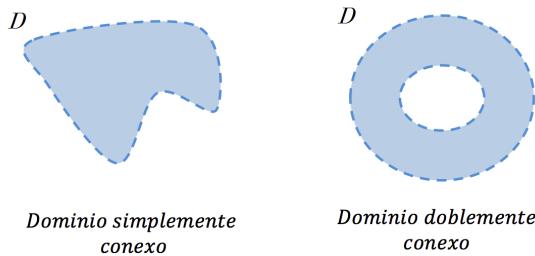
$$\Gamma(t_i) = \Gamma(t_f) \text{ entonces } t_i = t_f$$

Trayectoria cerrada simple

Es una trayectoria cerrada que no se intersecta o toca consigo misma, una elipse es un ejemplo de una trayectoria cerrada simple a diferencia del símbolo de infinito que se intersecta consigo mismo

**Dominio simplemente conexo**

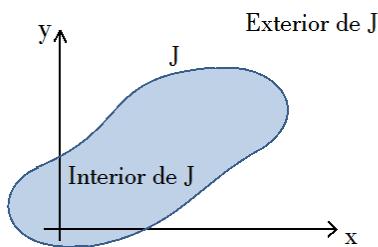
D es un dominio simplemente conexo en un plano complejo tal que toda trayectoria cerrada simple en D encierra únicamente puntos contenidos en D



3.6.1 Teorema de la curva de Jordan

Teorema

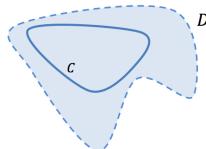
Si J es una curva de Jordan, entonces $\mathbb{R}^2 - J$ divide el espacio en dos componentes conexas, una región interior acotada y una no acotada o exterior , ambas regiones teniendo como borde a J .



3.6.2 Teorema de cauchy para integrales

Sea $W = f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D y C es una trayectoria cerrada simple en D entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



Prueba

Para probar el teorema, Cauchy asume que la derivada de la función $f'(z)$ es continua, tenemos

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dx)$$

Si $f(z)$ es analítica en D , su derivada $f'(z)$ existe en D y como se asume que la derivada es continua implica que u y v tienen derivadas parciales continuas en D . Por lo tanto el teorema de Green es aplicable a u y v y da como resultado

$$\oint_C (u dx - v dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dx$$

Donde R es una region limitada por la curva C . Se afirma por lo visto anteriormente que el integrando de la derecha es cero, y por tanto la integral de la izquierda tambien

Ejemplo

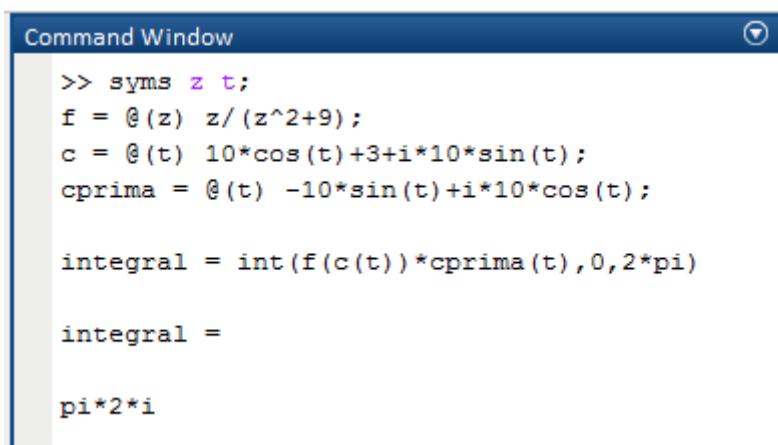
Sea C la trayectoria definida por el circulo de radio 10 y centro en 3, $|Z - 3| = 10$ y

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 9}$$

Se puede afirmar que $f(z)$ es indeterminado para $z = 3$ y $z = -3$, y estos dos valores se encuentran encerrados por la trayectoria C por tanto la función no es analitica en el circulo abierto de radio 10 y centro en 3 con lo que se concluye que el resultado de la integral sobre C de la función $f(z)$ es diferente de cero.

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz \neq 0$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms z t;
f = @(z) z/(z^2+9);
c = @(t) 10*cos(t)+3+i*10*sin(t);
cprima = @(t) -10*sin(t)+i*10*cos(t);

integral = int(f(c(t))*cprima(t),0,2*pi)

integral =
pi*2*i
```

Figure 3.11: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

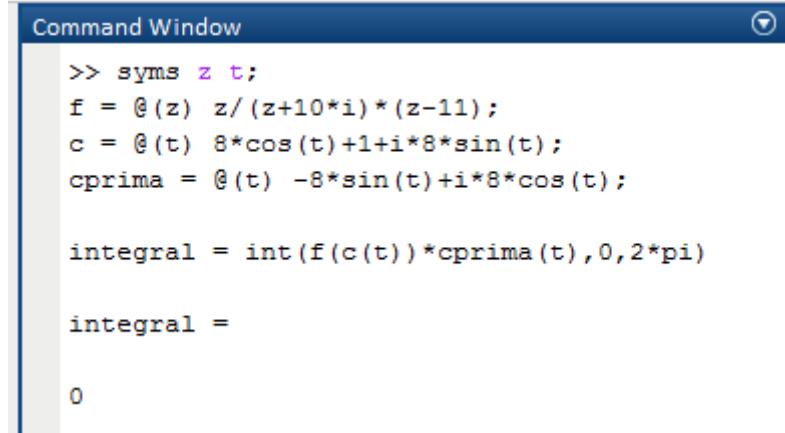
Sea C la trayectoria definida por el circulo de radio 8 y centro en 1, $|Z - 1| = 8$ y

$$f(z) = \frac{z}{(z+10i)(z-11)}$$

se puede decir que $f(z)$ es analitica en un dominio D siempre y cuando D no contenga a los puntos $-10i$ y 11 , el dominio limitado por la trayectoria C es un dominio que no contiene estos puntos y por tanto se puede afirmar que la función $f(z)$ es analitica en el dominio limitado por C , y ya que este dominio es simplemente conexo podemos afirmar que:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{z}{(z+10i)(z-11)} dz = 0$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```
Command Window
>> syms z t;
f = @(z) z/(z+10*i)*(z-11);
c = @(t) 8*cos(t)+1+i*8*sin(t);
cprima = @(t) -8*sin(t)+i*8*cos(t);

integral = int(f(c(t))*cprima(t),0,2*pi)

integral =
0
```

Figure 3.12: Captura de pantalla en MATLAB

3.6.3 Independencia de la trayectoria

De las secciones anteriores se sabe que el valor de una integral de linea, dada una función compleja $f(z)$. Del punto z_0 al punto punto z_1 dependera de la trayectoria C sobre la cual se integrara, y tendran menos importancia los puntos tanto inicial (z_0) como final (z_1) de la trayectoria. Una integral es llamada independiente de la trayectoria en un dominio D si para todo z_0, z_1 en D el valor de la integral solo depende de la función $f(z)$ y de los puntos z_0 y z_1 mas no de la trayectoria como tal.

Teorema

Si $f(z)$ es analitica en un dominio simplemente conexo D , entonces la integral de $f(z)$ es independiente de la trayectoria en D .

Prueba Sean z_0 y z_1 puntos cualesquiera en un dominio D . Considerando dos trayectorias C_0 y C_1 en D desde z_0 a z_1 sin mas puntos en comun (esto quiere decir que ambas trayectorias no se cruzan en un puntos diferentes al inicial y al final) y C_{1*} la misma curva C_1 pero orientada de manera inversa tendremos que si integramos desde z_0 hasta z_1 sobre C_0 y luego integramos de z_1 hasta z_0 sobre C_{1*} estaremos integrando sobre una trayectoria cerrada simple y por el teorema de Cauchy la integral es igual a 0:

$$\oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_{1*}} f(z) dz = 0$$

Por tanto

$$\oint_{C_0} f(z) dz = - \oint_{C_{1*}} f(z) dz$$

Y ahora la integral de la derecha tiene un signo menos que se pude retirar invirtiendo la orientacion de la curva, esto quiere decir que ya no se integrara sobre C_{1*} sino sobre C_1 .

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz$$

Esto demuestra que las integrales de $f(z)$ sobre C_0 y C_1 son iguales, lo que prueba el teorema de **Independencia de la trayectoria**. Para trayectorias con mas puntos en comun que solo el inicial y el final, se encuentran los puntos de intersección entre ellas y se toma cada intervalo de intersección como dos trayectorias separadas y posteriormente se concatenan las integrales.

Ejemplo

Tenemos una función $f(z) = z^3$ y dos trayectorias $C_1 : \Gamma_1(t) = t + it$ y $C_2 : \Gamma_2(t) = t + it^2$ con $0 \leq t \leq 1$ ambas con punto incial $t_i = 0$ y punto final $t_f = 1$ se comprobara que independiente de la trayectoria tendran el mismo resultado.

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^1 (t+it)^3 (1+i) dt = \int_0^1 -4t^3 dt \\ &= [-t^4]_0^1 = -1\end{aligned}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```
Command Window
>> syms t
f = (t+i*t)^3*(1+i)
integral = int(f, 0, 1)

f =
-4*t^3

integral =
-1
```

Figure 3.13: Captura de pantalla en MATLAB

Ahora se integrara sobre C_2 la misma función:

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^1 (t+it^2)^3 (1+i2t) dt \\ &= \int_0^1 t^3 + 5it^4 - 9t^5 - 7it^6 + 2t^7 dt \\ &= \left[\frac{t^8}{4} - it^7 - \frac{3t^6}{2} + it^5 + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - i - \frac{3}{2} + i - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1\end{aligned}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```

Command Window
>> syms t
f = (t+i*t^2)^3*(1+i*2*t)
integral = int(f, 0, 1)

f =
(t^2*i + t)^3*(t*2*i + 1)

integral =
-1

```

Figure 3.14: Captura de pantalla en MATLAB

3.6.4 Formula integral de Cauchy

Sea f diferenciable en un conjunto abierto D . Sea Γ una trayectoria cerrada en el conjunto D que encierra sólo puntos de D . Entonces, para cualquier punto z_0 encerrado por la trayectoria Γ se tiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Reescribiendo lo anterior, multiplicando ambos lados por $2\pi i$

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i$$

De la ecuación anterior podemos concluir que la evaluación de la integral de la derecha sobre una trayectoria cualquiera es un múltiplo de $2\pi i$

Ejemplo

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} dz = \oint_C \frac{z}{(z+3i)(z-3i)} dz, \text{ Utilizando fracciones parciales}$$

$$= \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{(z-3i)} dz + \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{(z+3i)} dz$$

Al tener la integral de la forma que se presenta en la ecuación anterior podemos considerar los siguientes casos:

Caso 1. Si la trayectoria C no encierra a los puntos $3i$ y $-3i$ la integral dara 0, por teorema de integral de Cauchy

Caso 2. Si la trayectoria C encierra a los puntos $3i$ y $-3i$ la integral dara $2\pi i$ por formula de integral de Cauchy

Caso 3. Si la trayectoria C encierra únicamente al punto $3i$ la integral dará πi por fórmula de integral de Cauchy^o

Caso 4. Si la trayectoria C encierra únicamente al punto $-3i$ la integral dará πi por fórmula de integral de Cauchy

En general podemos considerar los siguientes casos para el teorema:

1.

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

si Γ incluye a z_0

0 si Γ no incluye a z_0

2.

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

si Γ incluye a z_0

0 si Γ no incluye a z_0

3.

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

si Γ incluye a z_0

0 si Γ no incluye a z_0

3.7 Teorema del residuo

Si $f(z)$ tiene un polo simple de grado 1 en z_0 , entonces

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$$

Si $f(z)$ tiene un polo de grado M en z_0 entonces

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(M-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}} [f(z)(z - z_0)^M]$$

Ejemplo

Sea $f(z) = \operatorname{sen}(z)/z$, como es evidente tiene un polo simple en 0, y entonces se le calcula el residuo así

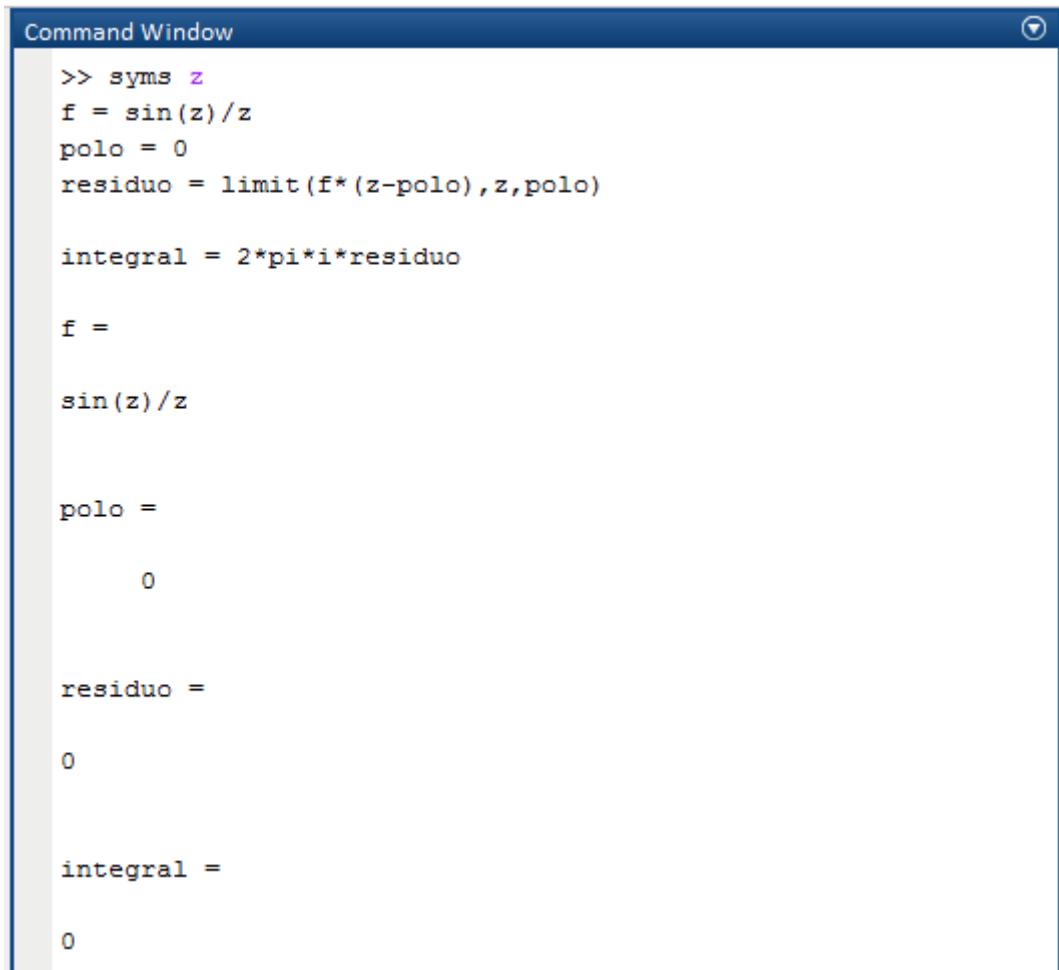
$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} (z - 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} (z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sen}(z) = 0$$

Por tanto para cualquier integral de la siguiente forma el resultado dará 0

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} dz = 2\pi i Res(f, 0) = 0$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:



```

Command Window
>> syms z
f = sin(z)/z
polo = 0
residuo = limit(f*(z-polo),z,polo)

integral = 2*pi*i*residuo

f =

sin(z)/z

polo =

0

residuo =

0

integral =

0

```

Figure 3.15: Captura de pantalla en MATLAB

Ejemplo

Evaluar la siguiente integral donde Γ es la circunferencia unitaria orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin(z)}{4z^2 - 1} dz$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin(z)}{4z^2 - 1} dz = \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin(z)}{z^2 - \frac{1}{4}} dz$$

$$= \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin(z)}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})} dz$$

Singularidades: $z = 1/2, z = -1/2$ $M = 1$

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(M-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}} [f(z)(z - z_0)^M]$$

$$Res(f, 1/2) = \lim_{z \rightarrow 1/2} \left[\frac{z^2 \sin(z)}{(z - 1/2)(z + 1/2)} (z - 1/2) \right] = \frac{1}{4} \sin(1/2)$$

$$\text{Res}(f, -1/2) = \lim_{z \rightarrow -1/2} \left[\frac{z^2 \sin(z)}{(z - 1/2)(z + 1/2)} (z + 1/2) \right] = -\frac{1}{4} \sin(-1/2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin(z)}{z^2 - \frac{1}{4}} dz &= \frac{1}{4} (2\pi i (\text{Res}(f, 1/2) + \text{Res}(f, -1/2))) \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{4} \sin(1/2) - \frac{1}{4} \sin(-1/2) \right) \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(1/2) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 \sin(z)}{4z^2 - 1} dz = \frac{\pi i}{4} (\sin(1/2))$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```

Command Window
(z^2*sin(z))/((z - 1/2)*(z + 1/2))

polo1 =
0.5000

polo2 =
-0.5000

residuo1 =
sin(1/2)/4

residuo2 =
sin(1/2)/4

integral =
(pi*sin(1/2)*i)/4

Command Window
>> syms z
f = (z^2*sin(z))/((z-1/2)*(z+1/2))
polo1 = 1/2
polo2 = -1/2
residuo1 = limit(f*(z-polo1), z, polo1)
residuo2 = limit(f*(z-polo2), z, polo2)
integral = 1/4 * (2*pi*i*residuo1 + 2*pi*i*residuo2)

```

Figure 3.16: Captura de pantalla MATLAB

Ejemplo

Evaluar la siguiente integral donde Γ es la circunferencia unitaria orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z - \frac{\pi}{4})^2} dz$$

Singularidades: polo simple: $z = 0 \rightarrow M = 1$, polo doble: $z = \pi/4 \rightarrow M = 2$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{e^z}{z(z - \pi/4)^2} z \right] = \frac{16}{\pi^2}$$

$$\begin{aligned}
 Res(f, \pi/4) &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z(z - \pi/4)^2} (z - \pi/4)^2 \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \left[\frac{e^z z - e^z}{z^2} \right] = \frac{e^{\pi/4} [\frac{\pi-4}{4}]}{\frac{\pi^2}{16}} \\
 &= \frac{4e^{\pi/4}(\pi-4)}{\pi^2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z - \pi/4)^2} dz &= 2\pi i \left(\frac{16}{\pi^2} + \frac{4e^{\pi/4}(\pi-4)}{\pi^2} \right) \\
 &= \frac{32 + 8e^{\pi/4}(\pi-4)i}{\pi}
 \end{aligned}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene:

```

Command Window
>> syms z
f = exp(z) / (z*(z-(pi/4))^2)

polo1 = 0
polo2 = pi/4

m2 = 2

derivada = diff(f*((z-polo2)^m2),z)

residuo1 = limit(f*(z-polo1), z, polo1)
residuo2 = limit(derivada, z, polo2)

integral = (2*pi*i*residuo1 + 2*pi*i*residuo2)

Command Window
f =
exp(z)/(z*(pi/4-z)^2)

polo1 =
0

polo2 =
0.7854

Command Window
m2 =
2

derivada =
exp(z)/z - exp(z)/z^2

residuo1 =
16/pi^2

residuo2 =
(4*exp(pi/4))/pi - (16*exp(pi/4))/pi^2

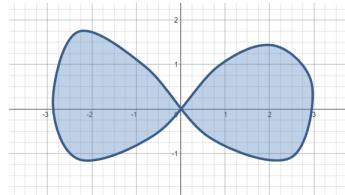
integral =
pi*((4*exp(pi/4))/pi - (16*exp(pi/4))/pi^2)*2*i + (32*i)/pi

```

Figure 3.17: Captura de pantalla MATLAB

Ejemplo

Evaluar la siguiente integral donde Γ es la trayectoria mostrada en la siguiente imagen



$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 1} dz$$

Singularidades: polo simple en: $z = 1, z = -1 \rightarrow M = 1$

$$Res(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(z+1)(z-1)} (z-1) \right] = \frac{1}{2}$$

$$Res(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{1}{(z+1)(z-1)} (z+1) \right] = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 1} dz &= 2\pi i (Res(f, 1) + Res(f, -1)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Verificando con el programa MATLAB se tiene :

```

Command Window
>> syms z
f = 1/(z^2-1)

polo1 = 1
polo2 = -1

residuo1 = limit(f*(z-polo1), z, polo1)
residuo2 = limit(f*(z-polo2), z, polo2)

integral = (2*pi*i*residuo1 + 2*pi*i*residuo2)

f =
1/(z^2 - 1)

polo1 =
1

polo2 =
-1

```

```

Command Window
residuo1 =
1/2

residuo2 =
-1/2

integral =
0

```

Figure 3.18: Captura de pantalla MATLAB

3.8 Ejercicios

Para los siguientes ejercicios halle el valor de r tal que la función cumpla con el teorema de Cauchy, y diga si es posible.

$$1. \oint_C \frac{z+9}{z-3i} dz \quad C : |z - (1+2i)| = r$$

$$2. \oint_C \frac{z+2}{z - \frac{ir}{2}} dz \quad C : |z| = r$$

Halle el resultado por teorema de residuo y teorema de Cauchy para las siguientes integrales considerando cada caso.

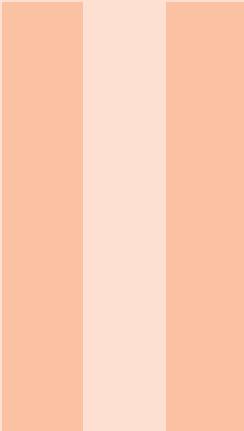
$$3. \oint_C \frac{1}{z} dz$$

$$4. \oint_C \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

$$5. \oint_C \frac{ze^z}{z^2+4} dz$$

$$6. \oint_C \frac{z}{z^3+3} dz$$

$$7. \oint_C \frac{\cos(z)}{z-1} dz$$



Series

4	Series	69
4.1	Funciones como Series de Potencias	
4.2	Ejercicios	
4.3	Serie de Laurent	
4.4	Ejercicios	
5	Series de Fourier	81
5.1	Justificación	
5.2	Historia	
5.3	¿Qué son las series de Fourier?	
5.4	Serie de Fourier de una Función	
5.5	Funciones Pares e Impares	
5.6	Convergencia de las series de Fourier	
5.7	Sumas Parciales de la Serie de Fourier	
5.8	El Fenómeno de Gibbs	
5.9	Series de Fourier en Senos y Cosenos	
5.10	Serie Trigonométrica	
5.11	Serie de Fourier Compleja	
5.12	Ejercicios	



4. Series

4.1 Funciones como Series de Potencias

Una función se puede expresar como una serie de potencias alrededor de un punto, y esto como se vera a continuación tiene muchas aplicaciones y utilidades para conocer diversos aspectos de una función.

4.1.1 Serie de Taylor

La Serie de taylor para una función compleja es análoga al caso real, sea $f(z)$ diferenciable en D

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ siendo } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

También tomando en cuenta la sección anterior y derivando la formula tenemos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Ahora

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(w - z_0)}$$

Puesto que w está en C , y z está encerrada por C , entonces:

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$$

Entonces podemos utilizar una serie geométrica convergente para escribir

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

Entonces

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n.$$

Puesto que f es continua en C , para algún M , $|f(w)| \leq M$ para w sobre C , además, $|w-z_0| = r$, entonces:

$$\left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right| \leq M \frac{1}{r} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n$$

Sea M_n :

$$M_n = M \frac{1}{r} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge (esta serie es una constante multiplicada por una serie geométrica convergente). Por teorema de integración término a término, se obtiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \right) dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \end{aligned}$$

En el cual se usó la fórmula de integración de Cauchy para la n -ésima derivada, con el fin de escribir el coeficiente en la última serie. Esto prueba el teorema.

Función analítica

Una función compleja se llama analítica en z_0 si tiene una expansión en series de potencias en algún disco alrededor de z_0 . Una función que es diferenciable en un disco abierto alrededor de un punto es analítica en ese punto.

4.1.2 Teorema

Suponga, en algún disco $|z-z_0| < r$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} D_n (z-z_0)^n$$

Entonces para $n = 0, 1, 2, \dots, C_n = D_n$

4.1.3 Demostración

Sea $f(z)$ la función definida en este disco por ambas series de potencias, entonces:

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = D_n.$$

Esto significa que independientemente del método que se use para hallar una serie de potencias para $f(z)$ al rededor de z_0 , el resultado final es la serie de Taylor.

Una función se puede expresar como una serie de potencias de esta manera

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

expandiendo se tiene

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n$$

Derivando la expresión se obtiene

$$f'(z) = 0 + a_1 + 2a_2(z - z_0) + \cdots + na_n(z - z_0)^{n-1}$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3(z - z_0) + \cdots + n(n-1)a_n(z - z_0)^{n-2}$$

Entonces se tiene que

$$f(z_0) = a_0$$

$$f'(z_0) = a_1$$

$$f''(z_0) = 2a_2$$

$$f'''(z_0) = 3!a_3$$

$$f^{(4)}(z_0) = 4!a_4$$

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

por lo tanto la serie de Taylor es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Ejemplo

Hallar el polinomio de Taylor $P_{2,5}$ (hasta $n = 2$ en $z_0 = 5$ para $f(z) = z^2 - 5z + 7$ se tiene que

$$f'(z) = 2z - 5$$

$$f''(z) = 2$$

Ahora

$$\begin{aligned} P_{2,5}(f(z)) &= \sum_{n=0}^2 \frac{f^{(n)}(5)}{n!} (z - 5)^n \\ &= \frac{f(0)(5)}{0!} (z - 5)^0 + \frac{f'(5)}{1!} (z - 5) + \frac{f''(5)}{2!} (z - 5)^2 \\ &= 7(z - 5)^0 + 5(z - 5) + \frac{2(z - 5)^2}{2!} \end{aligned}$$

`syms z; f = z^2 - 5*z + 7; taylor(f, 'Order', 3, 'ExpansionPoint', 5)`

```
Command Window
>> syms z;
f = z^2-5*z+7;
taylor(f, 'Order', 3, 'ExpansionPoint', 5)

ans =
5*z + (z - 5)^2 - 18
```

Ejemplo

Consideré la función $\frac{1}{1-z}$, la serie de Taylor en $z = 0$ está dada por

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

La función tiene una singularidad en $z = 1$. La distancia máxima desde $z = 0$ a la singularidad más cercana es uno, de modo que el radio de convergencia es uno. El radio de convergencia se puede hallar por medio de la prueba del cociente, donde:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

```
syms z; f = 1/(1-z); taylor(f, 'Order',5,'ExpansionPoint',0)
```

```
Command Window
>> syms z;
f = 1/(1-z);
taylor(f, 'Order',5,'ExpansionPoint',0)

ans =
z^4 + z^3 + z^2 + z + 1
```

Ejemplo

Encontrar la serie de Taylor de e^z al rededor de i . Sabemos que para todo z se cumple que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Para una expansión al rededor de i , la serie de potencias debe estar en términos de potencias de $z - i$. Por lo tanto escribimos:

$$e^z = e^{z-i+i} = e^i e^{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} e^i \frac{1}{n!} (z - i)^n.$$

Esta serie converge para todo z . En este ejemplo hubiese sido sencillo calcular los coeficientes de Taylor directamente:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!} = \frac{e^i}{n!}.$$

```
syms z; f = exp(z); taylor(f, 'Order',5,'ExpansionPoint',i)
```

```
Command Window
>> syms z;
f = exp(z);
taylor(f, 'Order',5,'ExpansionPoint',i)

ans =
exp(i) + exp(i)*(z - i) + (exp(i)*(z - i)^2)/2 + (exp(i)*(z - i)^3)/6 + (exp(i)*(z - i)^4)/24
```

4.2 Ejercicios

Encuentre el desarrollo de Taylor para las siguientes funciones alrededor del punto dado.

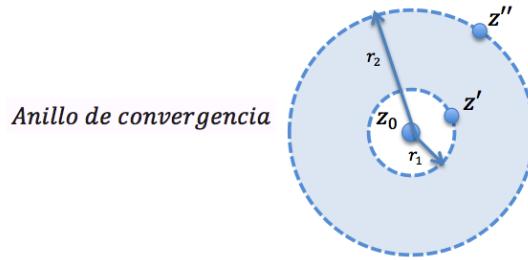
- $\cos(2z); \quad z = 0$

- $\frac{1}{1-z}; \quad z = 3i$
- $e^{-z}; \quad z = i$
- $\sin(z^2); \quad z = 0$
- $(z - 5)^2; \quad z = i + 3$
- $\frac{1}{z^2 - 2}; \quad z = i$
- $\frac{\cos(z)}{z+i}; \quad z = 5 + 2i$
- $\frac{\cos(z)}{e^z} \quad z = 0.$

4.3 Serie de Laurent

Una serie de Laurent se puede ver como la representación de una función alrededor de un punto al igual que la serie de Taylor, pero a diferencia de esta última la serie de Laurent incluye potencias negativas de $(z - z_0)$, por tanto se puede ver como una generalización de la serie de la misma; y como veremos mas adelante efectivamente la serie de Taylor es un caso particular de la serie de Laurent.

Siendo C_1, C_2 dos trayectorias circulares concéntricas, con centro en z_0 y existiendo un punto z' y z'' sobre C_1 y C_2 respectivamente se tiene que $|z' - z_0| = r_1$ $|z'' - z_0| = r_2$ siendo $r_1 < r_2$, se dice que $f(z)$ se puede representar como una serie de potencias de orden positivo y negativo si $f(z)$ es analítica en el anillo de la siguiente imagen y que fue descrito anteriormente.



La serie de Laurent se puede representar como la suma de una serie de taylor de la función mas la suma de la serie que contiene los coeficientes negativos de $(z - z_0)$, teniendo así.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

Y como sabemos en la serie de Taylor

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Y análoga a la misma para los coeficientes negativos se tiene que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$$

Por tanto tenemos que la serie de Laurent es de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

Donde

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

La serie de Laurent puede incluir por tanto potencias negativas de $z - z_0$, expandiendo la serie se vera

$$\dots \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^{-2}} + \frac{C_{-1}}{(z - z_0)^{-1}} + C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 \dots$$

La serie de Laurent tiene un comportamiento especial cuando f es diferenciable en z_0 , si $n < 0$ se tiene que:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0 \text{ por Cauchy}$$

Y si $n \geq 0$ se tiene que:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z) \right]_{z=z_0}$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

Se puede concluir que la serie de Laurent si f es diferenciable en z_0 concuerda con la serie de Taylor si $n \geq 0$ y 0 si $n < 0$.

Ejemplo

Encontrar el desarrollo en serie de Laurent para $\operatorname{sen}(z)/z^2$ alrededor de $z_0 = 0$

De toda la función solo $\operatorname{sen}(z)$ esta definida en $z_0 = 0$, por tanto se desarrolla la serie de taylor para $\operatorname{sen}(z)$ y se multiplica por z^2 . Aprovechando el previo desarrollo de la función $\operatorname{sen}(z)$ en serie de taylor tenemos que

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Expresando $1/z^2$ de manera distinta y haciéndolo parte de la serie nos resulta la serie de Laurent de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}(z) = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$$

Ejemplo

Encontrar el desarrollo en serie de Laurent para $1/[z^2(z+1)^3]$ alrededor de $z_0 = -1$

Tenemos que expresar la serie en términos de $(z+1)$ por tanto el término $(z+1)^{-3}$ se dejara de esa manea para multiplicarlo posteriormente por el desarrollo en serie de $1/z^2$.

$$\left[\frac{1}{(z+1)^3} \right] \frac{1}{z^2}$$

Omitiendo $1/(z+1)^3$ con el objetivo de enfocarnos en el desarrollo de Laurent de $1/z^2$ tenemos que esto se puede expresar como

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(z+1-1)^2} = \frac{1}{[1-(z+1)]^2}$$

La ecuación anterior es de la forma $1/(1-U)^2$ por lo que se buscara a partir de la serie geométrica llegar a este resultado, siendo la serie geométrica de esta forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} U^n = \frac{1}{(1-U)} \quad \text{para } |U| < 1$$

Derivando la igualdad a ambos lados

$$\frac{d}{dU} \left[\sum_{n=0}^{\infty} U^n \right] = \frac{d}{dU} \left[\frac{1}{(1-U)} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nU^{n-1} = \frac{1}{(1-U)^2}$$

Ahora volviendo a la ecuación (33) podemos verificar que presenta la misma forma de la derivada de la serie geométrica siendo $U = (z+1)$ y reemplazando en la ecuación anterior tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1} = \frac{1}{[1-(z+1)]^2}$$

Para simplificar la serie podemos decir que $k+1 = n$ y reemplazando

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z+1)^k = \frac{1}{[1-(z+1)]^2}$$

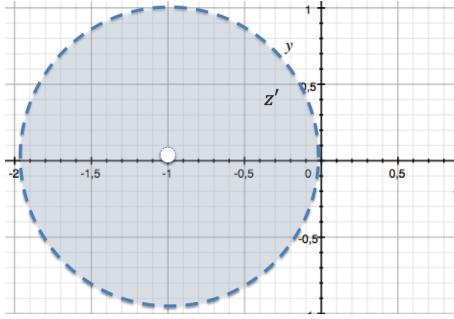
Ahora retomando la ecuación (32) y reemplazando $1/z^2$ por la serie geométrica que hallamos

$$\frac{1}{(z+1)^3} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z+1)^k \right] = (z+1)^{-3} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z+1)^k \right]$$

Finalmente Introduciendo el factor $(z+1)^{-3}$ dentro de la serie queda que la función dada tiene el siguiente desarrollo en serie de Laurent

$$\frac{1}{z^2(z+1)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(z+1)^{k-3}$$

Recordando la serie geométrica (ecuación 34) se sabe que el desarrollo es valido para $|U| < 1$ siendo en este caso $U = (z+1)$ se tiene que el desarrollo es valido para $|z+1| < 1$ pero como la función no es analítica en -1 se concluye que el anillo donde el desarrollo es valido es $-1 < |z+1| < 1$



Ejemplo

Encuentre el desarrollo de Laurent para la siguiente función tal que sea valido para las regiones dadas.

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 3} ; \text{ para : } a) 1 < |z| < 3 \quad b) 0 < |z+1| < 2 \quad c) |z| > 3$$

Para encontrar el desarrollo de Laurent se puede factorizar el denominador

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{(z+3)(z+1)}$$

a) Para realizar el punto se realizan fracciones parciales

$$A(z+1) + B(z+3) = 1 \quad \text{tenemos que} \quad A = \frac{-1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2(z+3)} - \frac{1}{2(z+1)}$$

Desarrollando por aparte cada fracción iniciando con $-1/(z+3)$ omitiendo el $1/2$ para facilitar el desarrollo

$$\frac{-1}{(z+3)} = \frac{1}{3[\frac{z}{3} + 1]} = \frac{1}{3(1 - [-\frac{z}{3}])}$$

Siendo $U = -z/3$ se puede llevar a la serie geométrica que es valida para $|U| < 1$

$$\frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

Valida para $|z| < 1$ pasando el 3 a multiplicar se tiene que la serie es valida para $|z| < 3$
Ahora desarrollando la serie para $1/(z+1)$ se tiene

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{z[1 + \frac{1}{z}]} = \frac{1}{z(1 - [-\frac{1}{z}])}$$

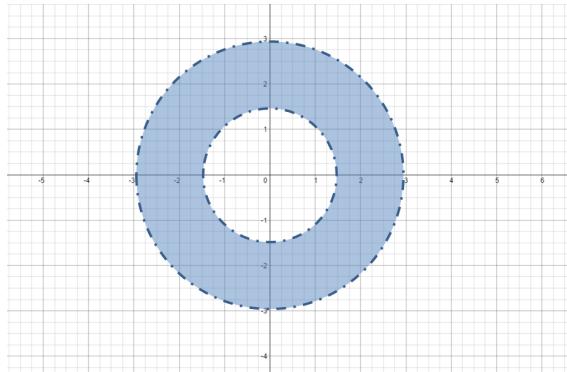
Al igual que antes utilizando la serie geométrica con $U = -1/z$

$$\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z)^{(-n-1)}$$

Valida para $|\frac{1}{z}| < 1$ pasando z a multiplicar se tiene que la serie es valida para $|z| > 1$
Por ultimo multiplicando cada serie por el 1/2 inicial se tiene que la serie para la función es

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z)^{-(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

Esta serie es valida para la region mostrada en la siguiente imagen



b) Como $(z+1)^{-1}$ es una potencia de $(z-z_0)$ no es necesario realizar fracciones parciales, se desarrolla únicamente $(z+3)^{-1}$ y se multiplicara posteriormente.

$$\frac{1}{(z+3)} = \frac{1}{(z+3-1+1)} = \frac{1}{(z+2+1)} = \frac{1}{2 - [-(z+2)]}$$

Factorizando el 2 para conducirlo a la forma de la serie geométrica siendo $U = (z+1)/2$ se tiene.

$$\frac{1}{2(1 - [-\frac{(z+1)}{2}])} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{2^{n+1}}$$

Siendo la anterior serie valida para $|\frac{z+1}{2}| < 1$ y pasando 2 a multiplicar queda $|z+1| < 2$

Ahora multiplicando la serie por $1/(z+1)$ queda

$$\frac{1}{(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

Al multiplicarlo por $1/(z+1)$ la serie no puede ser valida en el punto $z = -1$ y como la serie se desarrolla alrededor de este punto queda que la serie es valida para $0 < |z+1| < 2$

c) Retomando la función expresada en fracciones parciales y desarrollando primero $1/2(z+1)$ se tiene que

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{z[1 + \frac{1}{z}]} = \frac{1}{z(1 - [-\frac{1}{z}])}$$

Al igual que antes utilizando la serie geométrica con $U = -1/z$

$$\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z)^{(-n-1)}$$

Valida para $|\frac{1}{z}| < 1$ pasando z a multiplicar se tiene que la serie es valida para $|z| > 1$
Ahora desarrollando la serie para $1/(z+3)$ se tiene

$$\frac{1}{(z+3)} = \frac{1}{z[1 + \frac{3}{z}]} = \frac{1}{z(1 - [-\frac{3}{z}])}$$

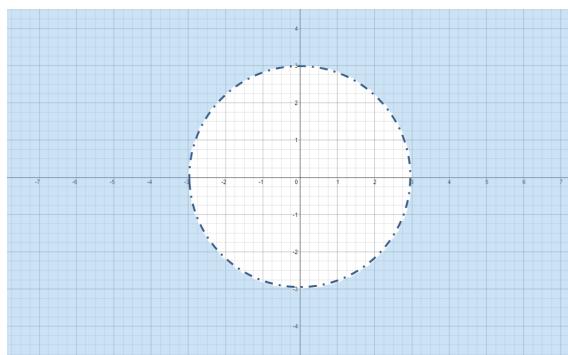
Al igual que antes utilizando la serie geométrica con $U = -3/z$

$$\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n (z)^{(-n-1)}$$

Valida para $|\frac{3}{z}| < 1$ pasando z a multiplicar se tiene que la serie es valida para $|z| > 3$
Por ultimo multiplicando cada serie por el $1/2$ inicial se tiene que la serie para la función es

$$\frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z)^{-(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n (z)^{-(n+1)}$$

La serie anterior es valida para $|z| > 3$ y $|z| > 1$ para ambas condiciones, por tanto lo que significa que la serie es valida para la intersección entre esas dos regiones, y esta intersección es $|z| > 3$, como se ve en la siguiente imagen.



4.4 Ejercicios

Encuentre el desarrollo de Laurent para las siguientes funciones alrededor del punto dado.

1. $\frac{1}{(z+2)(z-1)^2}$; $z = 1$

2. $e^{(1/z)}$; $z = 0$

Encuentre el desarrollo de Laurent para la siguiente función tal que sea valido para las regiones dadas.

3. $\frac{1}{z^2 + 4z + 3}$; para :

a) $1 < |z| < 3$

b) $0 < |z+1| < 2$

c) $|z| > 3$



5. Series de Fourier

5.1 Justificación

En las telecomunicaciones y electrónica es necesario analizar y pronosticar el comportamiento de las señales, este procedimiento se conoce como análisis de señales.

La base del análisis de señales son las ondas senoidales y cosenoidales ya que cualquier onda puede ser representada como una combinación de las mismas, haciendo de este tipo de ondas un aspecto fuerte en las comunicaciones

5.2 Historia

Las Series de trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (21 de Marzo de 1768 en Auterre - 16 de Mayo de 1830 en París).

El contexto de las series de Fourier se desarrolla a partir del análisis de Fourier, el cual tiene más de 200 años. Sus orígenes se remontan unos años antes de la publicación del trabajo sobre la teoría de la conducción del calor a la academia de París en 1807, por Jean Baptiste Joseph Fourier; tiempo en el cual los físicos y matemáticos concentraban sus esfuerzos en dos problemas principales: el problema de la cuerda vibrante y la determinación de las órbitas de los planetas a partir de mediciones. Posteriormente estos problemas formarían las bases de lo que se conocería como análisis de Fourier, luego en 1804 Fourier comenzó sus estudios sobre la conducción del calor en sólidos, descubriendo las ecuaciones básicas en tan solo tres años, además de desarrollar nuevos métodos para resolverlas y solucionar varios problemas prácticos.

Finalmente en 1822 publicó su famosa *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoría Analítica Del Calor), la cual se convirtió en su obra cumbre y que en realidad no fue tanto su estudio del calor lo que lo hizo famoso, sino el descubrir un recurso matemático que hoy en día es usado en Electricidad, en el Análisis Espectral de una Señal para corriente alterna, y en muchas áreas mas de la ciencia moderna , y que en su época fue rechazado por un grupo conformado por Laplace, Monge, Lagrange y Lacroit Porque no contenía nada nuevo y nada interesante. Sin embargo, Fourier es uno de los

pocos afortunados matemáticos: su nombre ha arraigado en todos los idiomas civilizados como un adjetivo que es bien conocido por los físicos y los matemáticos de todas las partes del mundo. Fourier, al proponer a la comunidad mundial, su libro usando las series infinitas trigonométricas, significó gran polémica en el ambiente intelectual ya que tuvo una profunda conexión con la evolución del concepto de función.

5.3 ¿Qué son las series de Fourier?

La idea que subyace en las series de Fourier es la descomposición de una señal periódica en términos de señales periódicas básicas (senos y cosenos) cuyas frecuencias son múltiplos de la señal original. La idea de descomposición es un proceso fundamental en el área científica en general. La descomposición permite el análisis de las propiedades y la síntesis de los objetos o fenómenos.

5.4 Serie de Fourier de una Función

La serie de Fourier de una función periódica $f(t)$ de periodo T , también conocida como señal, definida en un intervalo $[-L, L]$ esta dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nW_0 T + b_n \sin nW_0 T) \quad (5.1)$$

Si $T = 2L$, tenemos que $W_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$

Se Tiene:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nW_0 t + b_n \sin nW_0 t) \quad (5.2)$$

Donde:

Los coeficientes de Fourier en $[-L, L]$ son:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) dt.$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) dt.$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ejemplo

Para $f(x) = x$, Encontrar los coeficientes y escribir la serie en $[-\pi, \pi]$.
Hallando a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

Hallando a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \left[\frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{x}{nx} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Hallando b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \left[\frac{1}{n^2 \pi} \sin nx - \frac{x}{n\pi} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \cos nx = \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\cos nx = (-1)^n$ si n es un entero, la serie de Fourier de T en $[-\pi, \pi]$ es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{2}{5} \sin 5x - \dots$$

5.5 Funciones Pares e Impares

Algunas veces es posible ahorrar el cálculo de los coeficientes de Fourier, observando algunas propiedades especiales que puede tener $f(t)$, por ejemplo las funciones pares o impares.

Función Par: Una función $f(t)$ es par en $[-L, L]$ si $f(t) = f(-t)$ para $-L \leq t \leq L$.

Función impar: $f(t)$ es una función impar en $[-L, L]$ si $f(-t) = -f(t)$ para $-L \leq t \leq L$

Bajo la multiplicación las funciones pares e impares de comportan de manera similar que los enteros:

$$Par * Par = Par$$

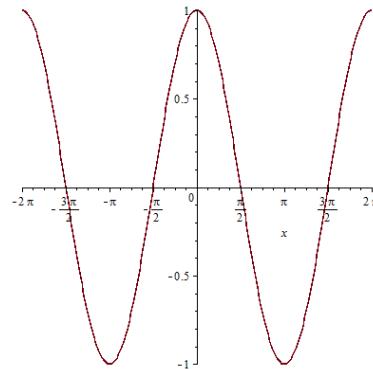
$$Impar * Impar = Par$$

$$Par * Impar = Impar$$

$$Impar * Par = Impar$$

Por ejemplo la función $\cos t$ en cualquier intervalo $[-L, L]$, como se describe en la siguiente figura.

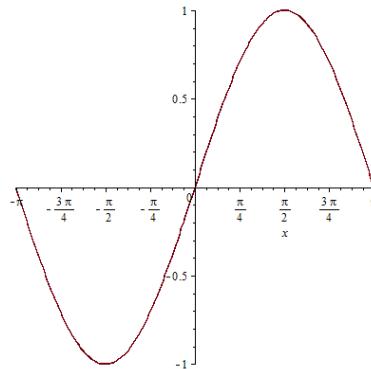
Figura 1



La gráfica de este tipo de funciones para $4 - L \leq t \leq 0$ es la reflexión a lo largo del eje y de la gráfica para $0 \leq t \leq L$.

La función $\sin t$ en cambio, es una función impar en cualquier intervalo $[-L, L]$, como se describe en la siguiente figura.

Figura 2



Sin embargo la mayoría de las funciones no son par ni impar, un ejemplo de esto es $f(t) = e^t$ ya que no es ni par ni impar en ningún intervalo $[-L, L]$.

Utilizando las propiedades de las funciones pares e impares se puede anticipar que algunos coeficientes tendrán el valor de 0 y por lo tanto no será necesario realizar el cálculo de la integral para encontrar su valor.

Ejemplarizando, si $f(t)$ es impar en $[-L, L]$:

$$\int_{-L}^L f(t) dt = 0$$

o, si $f(t)$ es par en $[-L, L]$:

$$\int_{-L}^L f(t) dt = 2 \int_0^L f(t) dt$$

Ejemplo

Sea $f(t) = t$ para $0 \leq t \leq \pi$, Los coeficientes de la serie de Fourier son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt dt = \left[\frac{1}{n^2 \pi} \cos nt + \frac{t}{n\pi} \sin nt \right]_0^\pi = \frac{-2}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin nt dt = \left[\frac{1}{n^2 \pi} \sin nt - \frac{t}{n\pi} \cos nt \right]_0^\pi = \frac{-1^{n+1}}{n}$$

Entonces la serie de Fourier está dada por:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n+1} \sin nt}{n}$$

En este ejemplo, el término constante y los coeficientes de los cosenos son todos cero y la serie de Fourier tiene solo términos en senos, ya que f es una función impar.

Ejemplo

Encontrar la serie de Fourier de la función $f(t) = t^2$ en $[-\pi, \pi]$. f es una función par, por lo cual se deduce que los coeficientes de seno b_n , van a ser 0. Entonces solo se calcularán los otros coeficientes.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos 2n\pi dt = \left[\frac{\pi}{2n} \cos 2nt + \frac{\pi}{2n} \cos -2nt \right] = \frac{1}{n}$$

5.6 Convergencia de las series de Fourier

5.6.1 Primer teorema de convergencia

Si $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas a trozos en $[-L, L]$, entonces para todo t en este intervalo se verifica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L}) = \frac{1}{2}[f(-t^+) + f(t^-)]$$

Para $t = \pm L$ la serie converge a:

$$\frac{1}{2}[f(-L^+) + f(L^-)]$$

Sea f suave a pedazos en $[-L, L]$. Entonces, para $-L < t < L$. La serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge a

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$$

Lo cual nos indica que cada punto entre L y $-L$, la función converge al promedio de sus límites izquierdo y derecho. Si f es continua en t , los límites izquierdo y derecho serán iguales a $f(t)$ y la serie de Fourier converge al valor que toma la función en t . si f tiene una discontinuidad de salto en t , la serie de Fourier no convergerá a $f(t)$, pero convergerá al punto medio entre los extremos del vacío en la gráfica en t .

5.6.2 Segundo teorema de convergencia

El segundo teorema parte en términos de las derivadas laterales. Por lo cual sea f continua a pedazos en $[-L, L]$. Entonces

1. Si $-L < t < L$ y f tiene derivada izquierda y derecha en t , entonces la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge en t a:

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$$

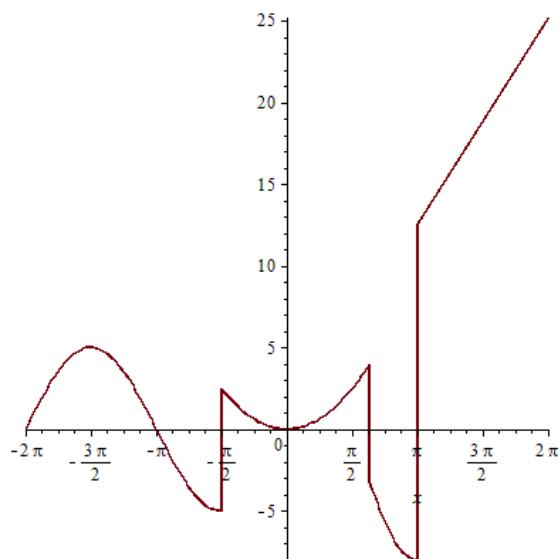
2. Si la derivada derecha en $-L$ y la derivada izquierda en L existen, entonces en los dos límites la serie converge a:

$$\frac{1}{2}[f(-L^+) + f(L^-)]$$

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 5 \sin t, & -2\pi < t < -\frac{\pi}{2} \\ 4, & t = -\frac{\pi}{2} \\ t^2, & -\frac{\pi}{2} \leq t < 2 \\ 8 \cos t, & 2 \leq t < \pi \\ 4t, & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

IMAGEN



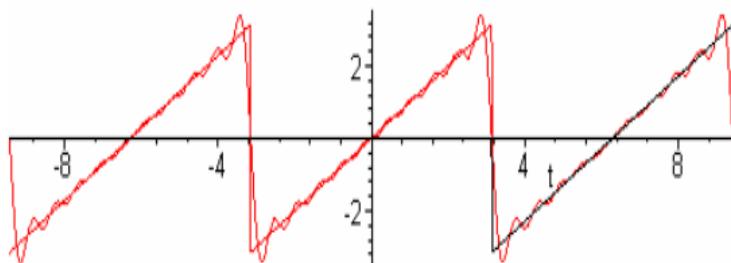
Con Sage Math:

```
sage : f1 = lambda t : 2
sage : f2 = lambda t : 0
sage : f3 = lambda t : -1
sage : f = Piecewise([ [(-3,0),f3], [(0,3/2),f2], [(3/2,3),f1] ])
sage : P = f.plot_fourier_series_partial_sum(10,3,-5,5)
sage : f.fourier_series_partial_sum(5,3)?0+((-2/pi)*cos(1*pi*t/3)+(4/pi)*sin(1*pi*t/3))+
(0*cos(2*pi*t/3)+(-2/pi)*sin(2*pi*t/3))+((2/(3*pi))*cos(3*pi*t/3)+(4/(3*pi))*sin(3*pi*t/3))+(0*cos(4*pi*t/3)+0*sin(4*pi*t/3))?
```

Ejemplo

Para la función conocida como "diente de sierra", se tiene:

IMAGEN

**5.7 Sumas Parciales de la Serie de Fourier**

Las sumas parciales de las series de Fourier consisten en realizar una sumatoria en un intervalo definido distinto al infinito para poder comprobar el comportamiento de la serie con un numero de coeficientes creciente por medio de sus gráficas.

Para la serie de Fourier de una función $f(t)$ periódica definida en un intervalo de longitud $[-L, L]$ la k -ésima suma parcial, representada por $S_k(t)$ esta dada por:

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t)$$

El objetivo de las sumas parciales es que ellas convergen al valor de la función.

Ejemplo

Para la función $f(t) = t^2 e^{-t}$ las gráficas con 5, 10 y 20 coeficientes son las siguientes:

Se Puede Observar como a medida que se utilizan mas coeficientes la gráfica de la función se ajusta mas a la gráfica de la función original.

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } -\pi \leq t < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Con Sage Math:

```
sage : f1 = lambda t : 2
sage : f2 = lambda t : 0
sage : f3 = lambda t : -1
sage : f = Piecewise([[(−3, 0), f3], [(0, 3/2), f2], [(3/2, 3), f1]])
sage : P = f.plot(fourier_series_partial_sum(10, 3, −5, 5)
sage : f.fourier_series_partial_sum(5, π)?0 + ((t^2)
sage : f.fourier_series_partial_sum(5, π)?0 + ((t^2)
```

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -4 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Con Sage Math:

```
sage : n, t = var('nt')
sage : from sage.symbolic.integration import integral
sage : (1/pi) * definite_integral(t^3, t, -pi, pi)
```

5.8 El Fenómeno de Gibbs

Recibe su nombre gracias al matemático de Yale, Josiah Willard Gibbs, quien aproximadamente en el año 1899 definió y explicó de manera satisfactoria el comportamiento que tiene la serie de Fourier en las discontinuidades de salto de una función.

Este fenómeno consiste en que cuando una función se approxima mediante sumas parciales de la serie de Fourier a una discontinuidad, esta presentará un error o una oscilación sin importar cuantos términos se utilicen.

El fenómeno de Gibbs se produce siempre que se trunca una serie de Fourier, y es de especial importancia para sistemas lineales, como filtros digitales, Josian Gibbs mostró que las oscilaciones no decaen, sino que el sobreímbolo tiende a un número constante. Para ilustrar el fenómeno de Gibbs, consideraremos la función definida por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-\pi}{4} & \text{para } -\pi \leq t < 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{para } 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

La serie de Fourier correspondiente a esta función es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)t)$$

por cualquiera de los dos teoremas de convergencia, esta serie converge a $f(t)$ para $-\pi < t < \pi$. Hay una discontinuidad de salto en 0, pero

$$\frac{1}{2}(f(0+) + f(0-)) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 = f(0)$$

La N-ésima suma parcial de esta serie de Fourier es:

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)t)$$

Ejemplo

Para la función impulso se muestra a continuación su gráfica junto a la de la serie de Fourier a medida que se calculan más coeficientes, se puede observar que las oscilaciones no desaparecen a medida que estos aumentan pero si se atenuan un poco.

Para 3 Coeficientes.

Para 5 Coeficientes:

Para 50 Coeficientes.

5.9 Series de Fourier en Senos y Cosenos

Si $f(t)$ está definida en $[-L, L]$, podemos escribir su serie de Fourier. Los coeficientes de esta serie están completamente determinados por la función y el intervalo.

Ahora probaremos que si $f(t)$ está definida en el semiintervalo $[0, L]$, entonces, tenemos una lección y podemos escribir una serie que tenga solo cosenos o solo senos para representar a $f(t)$ en este

semiintervalo.

Serie de Fourier en cosenos de una función

Sea f integrable en $[0, L]$. Queremos desarrollar a $f(t)$ en una serie de funciones cosenos. Ya tenemos los medios para hacerlo. La figura 5 muestra una gráfica de una f típica. doblamos esta gráfica a lo largo del eje y para obtener una función f_e definida para $-L \leq t \leq L$:

$$f_e(t) = \begin{cases} f(t) & \text{para } 0 \leq t < L \\ f(-t) & \text{para } -L \leq t < 0 \end{cases}$$

f_e es una función par

$$f_e(-t) = f(t)$$

y coincide con: f en $[0, L]$,

$$f_e(t) = f(t) \text{ para } 0 \leq t \leq L$$

Se llama a f_e la extensión par de f para $[-L, L]$

Ejemplo

Sea $f(t) = e^t$ para $0 \leq t \leq 2$. Entonces:

$$f_e(t) = \begin{cases} e^t & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ e^{-t} & \text{para } -2 \leq t < 0 \end{cases}$$

Aquí ponemos $f_e(t) = f(t) = e^t$ para $2 \leq t \leq 0$. En la figura se da la gráfica de f_e . Extension par de f para $[-L, L]$.

Debido a que f_e es una función par en $[-L, L]$, su serie de Fourier es:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}$$

Donde:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_e(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad (5.3)$$

como $f_e(t) = f(t)$ para $0 \leq t \leq L$. Llamamos a esta serie la serie de Fourier en cosenos de f en $[0, L]$. Los coeficientes (1.0) son los coeficientes de Fourier en cosenos de f en $[0, L]$.

Se introdujo la extensión par f_e solo para poder utilizar el trabajo previo para obtener una serie que contenga solo cosenos. Para encontrar la serie de Fourier en cosenos, solo usamos la ecuación (1.0) para calcular los coeficientes sin definir f_e .

5.9.1 Las series de Fourier en senos de una función

Para definir la serie de Fourier en términos de senos se sigue el mismo método que se usó para escribir la serie en cosenos, excepto que ahora se extiende f a una función impar f_0 sobre $[-L, L]$, podemos escribir una serie de Fourier en senos para $f(t)$ en $[0, L]$. En particular, si $f(t)$ está definida en $[0, L]$.

Sea:

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) \text{ para } 0 \leq t < L \\ -f(-t) \text{ para } -L \leq t < 0 \end{cases}$$

Entonces f_0 es una función impar, y $f_0(t) = f(t)$ para $0 \leq t \leq L$. Esta es la extensión impar de f en $[-L, L]$.

Ejemplo

Si $f(t) = e^{2t}$ para $0 \leq t \leq 1$,

sea:

$$f_0(t) = \begin{cases} e^{2t} \text{ para } 0 \leq t < 1 \\ -e^{-2t} \text{ para } -1 \leq t < 0 \end{cases}$$

Esto corresponde a doblar la gráfica de f sobre el eje vertical y después sobre el eje horizontal.

Extensión impar de f en $[-L, L]$

Ahora se escribe la serie de Fourier de $f_0(t)$ en $[-L, L]$. Por la ecuación que representa los coeficientes b_n , la serie de Fourier de f_0 es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \quad (5.4)$$

Con coeficientes:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

Llamamos a la serie (3) la serie de Fourier en senos de f en $[0, L]$. Los coeficientes dados por la ecuación anterior son los coeficientes de Fourier en senos de f en $[0, L]$. Como con la serie en cosenos, no necesitamos hacer la extensión explícita a f_0 para escribir la serie de Fourier en senos para f en $[0, L]$.

5.10 Serie Trigonométrica

Teniendo el siguiente triángulo:

Se pueden definir las funciones trigonométricas como:

$$\sin \theta_n = \frac{b_n}{C_n}, b_n = C_n \sin \theta_n$$

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{C_n}, a_n = C_n \cos \theta_n$$

Y partiendo de la definición de la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nW_0 t + b_n \sin nW_0 t$$

Se sustituye:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \theta_n \cos nW_0 t + C_n \sin \theta_n \sin nW_0 t$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\cos \theta_n \cos nW_0 t + \sin \theta_n \sin nW_0 t)$$

$$C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\cos nW_0 t - \theta_n) \tag{5.5}$$

De la definición anterior se tiene que:

C_n se conoce como Espectro de Amplitud.

nW_0 se conoce como Espectro de frecuencia

θ_n se conoce como Espectro de fase.

La forma de ángulo fase de la serie de Fourier Una función es periódica con periodo p si $f(t+np) = f(t)$ para todo real t. Si una función tiene un periodo, dicha función tiene muchos periodos. Por ejemplo, $\cos t$ tiene periodos $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2n\pi$, y de hecho, $2n\pi$ para cualquier entero n. El periodo positivo mínimo de una función se llama periodo fundamental. El periodo fundamental de $\sin t$ y $\cos t$ es 2π . Si f tiene periodo p, entonces para cualquier t, y cualquier entero n,

$$f(t+np) = f(t)$$

Por ejemplo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 6\pi\right) = \dots$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + -2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + -4\pi\right) = \dots$$

La gráfica de f(t) periódica se repite sobre todo intervalo de longitud p. Esto significa que solo necesitamos especificar f(t) en un intervalo de longitud p, digamos en $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$

, para determinar f(t) para todo t. Estas especificaciones de los valores de la función pueden hacerse en cualquier intervalo $[\alpha, \alpha + p]$ de longitud p. Como $f(\alpha + p) = f(\alpha)$, la función debe tener el mismo valor en los extremos de este intervalo. Esta es la razón por la cual especificamos los valores en el intervalo semiabierto $(\alpha, \alpha + p]$, ya que $f(\alpha + p)$ está determinada una vez que $f(\alpha)$ está definida.

Ejemplo

Sea $g(t) = 2t$ para $0 < t < 1$, y supongamos que g tiene periodo 2. Entonces, la gráfica de g en $[1, 1)$ se repite para cubrir toda la recta real.

Basta conocer el periodo y los valores de la función en $[1, 1)$, para determinar la función para todo t. Como un ejemplo específico, supongamos que queremos conocer $g(\frac{7}{2})$. Como g tiene periodo 2, $g(t + 2n) = g(t)$ para cualquier t y cualquier entero n.

Entonces,

$$g\left(\frac{7}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2} + 4\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Análogamente,

$$g(48.3) = g(0.3 + 2(24)) = g(0.3) = 0.6$$

Si f tiene periodo p y es integrable, entonces podemos calcular sus coeficientes de Fourier en $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$, y escribimos la serie de Fourier:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{2n\pi t}{p}) + b_n \sin(\frac{2n\pi t}{p}))$$

Aquí $L = \frac{p}{2}$, entonces $\frac{n\pi t}{L} = \frac{2n\pi t}{p}$ p en la discusión anterior de la serie de Fourier en $[-L, L]$. Los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{p} dt, \text{Paran} = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{p} dt, \text{Paran} = 0, 1, 2, \dots$$

De hecho, debido a la periodicidad, podríamos escoger cualquier numero conveniente a y escribimos

$$a_n = \frac{2}{p} \int_a^{a+p} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{p} dt, \text{Paran} = 0, 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

y

$$a_n = \frac{2}{p} \int_a^{a+p} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{p} dt, \text{Paran} = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Una vez calculados los coeficientes, podemos usar un teorema de convergencia para determinar en donde esta serie representa $f(t)$.

DEFINICION: Fórmula de ángulo fase

Sea f con periodo fundamental p . Entonces la forma de ángulo fase de la serie de Fourier de f es

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nW_0 t + d_n$$

en donde $W_0 = \frac{2\pi}{p}$, $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $d_n = \tan(-\frac{b_n}{a_n})$ para $n = 1, 2, \dots$

La forma de ángulo fase de la serie de Fourier también es llamada forma armónica. Esta expresión exhibe la composición de una función periódica (que satisface ciertas condiciones de continuidad) como una superposición de ondas coseno. El término $\cos nW_0 t + d_n$ es la n -ésima armónica de f , C_n es la n -ésima amplitud armónica, y d_n es el n -ésimo ángulo fase de f .

Ejemplo

Supongamos que f tiene periodo fundamental $p = 3$, y

$$f(t) = t^2, \text{ para } 0 \leq t < 3.$$

Como f tiene periodo fundamental 3, definiendo $f(t)$ en cualquier intervalo $[a,b]$ de longitud 3 determina $f(t)$ para todo t . Por ejemplo:

$$f(1) = f(1+3) = f(2) = 4;$$

$$f(5) = f(2+3) = f(2) = 2^2 = 4$$

observamos que $f(5) = f(-1 + 6) = f(-1 + 2*3) = f(-1) = 4$; y

$$f(7) = f(1+6) = f(1) = 1.$$

Gráfica de $f(t) = t^2$ para $0 \leq t < 3$, con $f(t+3) = f(t)$ para todo t .

Hay que tener cuidado si queremos escribir una expresión algebraica para $f(t)$ en un intervalo diferente. Por ejemplo, en el intervalo simétrico $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ alrededor del origen.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } 0 \leq t < \frac{3}{2} \\ (t+3)^2 & \text{para } -\frac{3}{2} \leq t < 0 \end{cases}$$

Para encontrar los coeficientes de Fourier de f , es conveniente usar las ecuaciones con $\alpha=0$, como f está dada explícitamente $[0,3]$ Calculamos:

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^3 t^2 dt = 6$$

$$a_n = \frac{0}{3} t^2 \cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt = \frac{9}{n^2 \pi^2}$$

y

$$b_n = \frac{0}{3} t^2 \sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt = \frac{9}{nt}$$

La serie de Fourier de f es:

$$3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n\pi} \left(\frac{1}{n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) \right)$$

Podemos tomar esta como la serie de Fourier de f en el intervalo simétrico $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ alrededor del origen. Por el teorema de convergencia de Fourier, esta serie converge a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{9}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{9}{4}, \text{ para } t \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \\ \frac{9}{2}, \text{ para } t = 0 \\ (t+3)^2, \text{ para } -\frac{3}{2} < t < 0 \\ t^2, \text{ para } 0 < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Para la formula de ángulo fase o forma armónica de esta serie de Fourier, calculamos

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{9}{n^2\pi^2} \sqrt{1+n^2\pi^2} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

y

$$\partial n = \tan\left(-\frac{\frac{9}{n\pi}}{\frac{9}{n^2\pi^2}}\right)^{-1} = \tan n\pi^{-1}$$

Como $W_0 = \frac{2\pi}{3}$, la forma de ángulo fase de la serie es:

$$3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2\pi^2} \sqrt{1+n^2\pi^2} \cos\left(\frac{2n\pi t}{3} + \tan n\pi^{-1}\right)$$

El espectro de amplitud de una función periódica f es una gráfica de los valores de nW_0 en el eje horizontal versus $\frac{C_n}{2}$ en el eje vertical, para $n = 1, 2, \dots$. También es usual incluir el punto $(0, |a_0|)$ en el eje vertical. La siguiente gráfica muestra el espectro de amplitud para la función.

consiste en los puntos $(0, 3)$ y, para $n = 1, 2, \dots$

$$\left(\frac{2n\pi}{3}, \frac{9}{2n^2\pi^2}\right)$$

Esta gráfica nos permite visualizar la magnitud de las armónicas de las cuales esta compuesta la función periódica y esclarecer cuáles armónicas dominan en la función. Esto es útil en el análisis de señales, en donde la función es la señal.

5.11 Serie de Fourier Compleja

El uso de series de Fourier complejas muchas veces facilita diferentes cálculos, aun si las cantidades que se quieren obtener son reales. También se puede adelantar que la serie de Fourier compleja y sus coeficientes darán un punto de partida para el desarrollo de la transformada de Fourier discreta.

Sea f una función de variable real, periódica con periodo fundamental p . Supongamos que f es integrable en $[\frac{?p}{2}, \frac{p}{2}]$. Como se hizo con la forma del ángulo fase de una serie de Fourier, escribimos

la serie de Fourier de $f(t)$ en este intervalo partiendo de la definición de seno y coseno como exponencial.

$$\cos nW_0 t = \frac{e^{inW_0 t} + e^{-inW_0 t}}{2}$$

$$\sin nW_0 t = \frac{e^{inW_0 t} - e^{-inW_0 t}}{2i}$$

y partiendo de la definicion de la serie de fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nW_0 t + b_n \sin nW_0 t$$

Sustituyendo Resulta:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \left(\frac{e^{inW_0 t} + e^{-inW_0 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inW_0 t} - e^{-inW_0 t}}{2i} \right)] \quad (5.8)$$

con $W_0 = \frac{2\pi}{p}$. Conociendo y dando uso de las siguientes ecuaciones,

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

$$\text{ysint} = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

Escribimos la serie como

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2}(e^{inW_0 t} + e^{-inW_0 t}) + b_n \frac{1}{2i}(e^{inW_0 t} - e^{-inW_0 t}) \right]$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inW_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inW_0 t} \right]$$

En esta serie

$$d_0 = \frac{1}{2}a_0$$

y para cada entero positivo n ,

$$d_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

entonces la serie llega a ser

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [d_n e^{inW_0 t} + d_n e^{-inW_0 t}] = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{inW_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-inW_0 t}$$

Ahora consideramos los coeficientes. Primero,

$$d_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) dt$$

Y, para $n = 1, 2, \dots$,

$$d_n = \frac{1}{2} t (a_n - i b_n)$$

$$= \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} f(t) \cos n w_0 t dt - \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} f(t) \sin n w_0 t dt$$

$$\frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) [\cos n w_0 t - i \sin n w_0 t] dt$$

$$= \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) e^{-inw_0 t} dt$$

Entonces:

$$d_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) e^{-inw_0 t} dt = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) e^{-inw_0 t} dt = d_{-n}$$

Se ponen estos resultados en la serie para obtener

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{inw_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} -d_n e^{-inw_0 t}$$

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{inw_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} -d_{-n} e^{-inw_0 t}$$

$$d_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inw_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} -d_{-n} e^{-inw_0 t}$$

Hemos encontrado esta expresión rearrreglando los términos en la serie de Fourier de una función periódica f . Esto sugiere la siguiente definición.

5.11.1 Definición

Serie de Fourier compleja: Sea f con periodo fundamental p . Sea $W_0 = 2\pi p$. Entonces la serie de Fourier compleja de f es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inw_0 t}$$

Donde

$$C_n \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) e^{-inw_0 t} dt$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Los números d_n son los coeficientes de Fourier complejos de f . En la fórmula para d_n , la integración se puede llevar a cabo sobre cualquier intervalo de longitud p , debido a la periodicidad de f . Así, para cualquier número real α ,

$$C_n = \frac{1}{p} \int_a^{a+p} f(t) e^{-inw_0 t} dt$$

Como la serie de Fourier compleja es solo otra forma de escribir la serie de Fourier, los teoremas de convergencia se aplican sin necesidad de ninguna adaptación.

5.11.2 Teorema

Sea f periódica con periodo fundamental p .

Sea f suave a pedazos en $[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}]$. Entonces, en cada t la serie de Fourier compleja converge a $\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$.

El espectro de amplitud de la serie de Fourier compleja de una función periódica es la gráfica de los puntos $(nW_0, |c_n|)$, en donde $|c_n|$ es la magnitud del coeficiente complejo C_n .

Algunas veces este espectro de amplitud es llamado también espectro de frecuencia.

Ejemplo

Sea $f(t) = \frac{3t}{4}$ para $0 \leq t < 8$, y $f(t+8) = f(t)$ para todo t . Entonces f es periódica con periodo fundamental 8.

En la gráfica de f encontraremos la serie de Fourier compleja y el espectro de amplitud de f .

Gráfico de $f(t) = \frac{3t}{4}$ para $0 \leq t < 8$, si $f(t+8) = f(t)$ para todo real t .

—————GRAFICA

Aquí $p = 8$ y $W_0 = \frac{\pi}{4}$. Recordemos que las formulas para los coeficientes se puede realizar la integración sobre cualquier intervalo de longitud 8. Aquí es conveniente usar $[0,8]$ en lugar de $[-4,4]$, debido a como esta definida $f(t)$. Entonces:

$$d_0 = \frac{1}{8} \int_0^8 \frac{3}{4} t dt = 3$$

Si usamos el intervalo $[-4,4]$, entonces podemos calcular

$$d_0 = \frac{1}{8} \int_{-4}^0 \frac{3}{4} (t+8) dt + \frac{1}{8} \int_0^4 \frac{3}{4} t dt$$

Ahora,

$$d_n = \frac{1}{8} \int_0^8 \frac{3}{4} t e^{-n\pi i \frac{t}{4}} dt = \frac{3i}{n\pi}$$

la serie de Fourier compleja es

$$3 + \frac{3i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{ni\pi \frac{t}{4}}$$

Esta serie converge a $f(t)$ para $0 < t < 8$, $8 < t < 16$, $16 < t < 24, \dots$, $?8 < t < 0$, $?16 < t < ?8, \dots$
Para trazar el espectro de amplitud, calculamos

$$d_0 = 3, d_n = \frac{3}{n\pi}$$

Como $nW_0 = \frac{n\pi}{4}$, el espectro de amplitud es un trazo de los puntos

$$\left(\frac{n\pi}{4}, \frac{3}{\pi|n|} \right)$$

para $n = + - 1, + - 2, \dots$, junto con el punto $(0,3)$. En la siguiente figura se muestra ese trazo.
\pagebreak

5.12 Ejercicios

Determinar la serie de Fourier de las siguientes funciones en el intervalo dado.

1. $f(t) = t + 1$, para $-1 \leq t \leq 1$
2. $f(t) = t^2 + 2t + 4$, para $0 \leq t \leq 5$
3. $f(t) = \operatorname{sen}(-t)$, para $-\pi \leq t \leq \pi$
4. $f(t) = \cos(5t)$, para $-\pi \leq t \leq \pi$

Determinar la convergencia de las siguientes funciones:

5. $f(t) = t^2 e^{-t}$

6.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{para } -\pi \leq t < 0 \\ 2 & \text{para } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

7.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -4 \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{para } 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

8. $f(t) = e^{-|t|}$, para $-\pi \leq t \leq \pi$

Escriba la serie de Fourier en senos y coseno de las siguientes funciones

9. $f(t) = 1 - t^2 + t$, para $0 \leq t \leq 5$
10. $f(t) = e^t + 3t^2$, para $-2 \leq t \leq 2$
11. $f(t) = t^3 + 5t^2 - 5$, para $0 \leq t \leq 4$
12. $f(t) = e^{-|t|}$, para $-5 \leq t \leq 5$

Transformada Z

6	Transformada Z	105
6.1	Introducción	
6.2	Transformada Z	
6.3	Transformada Z Inversa	
6.4	Propiedades de la Transformada Z	
6.5	Región de Convergencia	
6.6	Función de Transferencia	
6.7	La Transformada Z unilateral	
6.8	Transformada Wavelet Continua	
6.9	Programa básico para obtener la Transformada Wavelet Discreta de una señal de N muestras empleando multiresolución	
6.10	Transformada Z - Matlab	



6. Transformada Z

6.1 Introducción

Usamos la Transformada Z para funciones en el caso discreto. Se utiliza en señales para las cuales la transformada de Fourier no converge. Se asemeja a la transformada de Laplace.

6.2 Transformada Z

La Transformada Z de una señal discreta general $Fx[n]$, se puede definir como:

$$Fx[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (6.1)$$

donde Z es una función de Variable Compleja.

Observación: $x(n)$ es par transformado de $x(z)$

Ejemplo 1

Dada una señal $x[n] = a^n u[n]$. Después, a partir de la ecuación (6.1),

$$\text{Como } u[n] = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Para la convergencia de $X(z)$ requerimos que

$$|az^{-1}|^n < 1$$

o, de manera equivalente, a $|z| > |a|$. Entonces

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad (6.2)$$

Observación: Podemos ver que si $a = 1$, entonces:

$$F\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

converge si $|z| < 1$

Y converge a

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \Rightarrow u(n) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

si y solo si $|z| < 1$

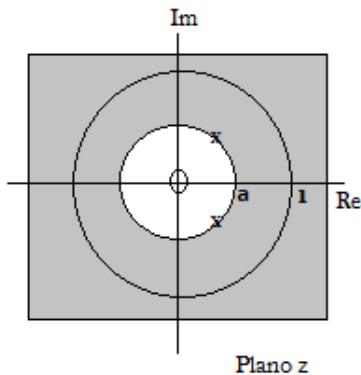
De este modo, la transformada Z para esta señal está bien definida para cualquier valor de a con una Región de Convergencia (en adelante denominada como ROC) determinada por la magnitud de a de acuerdo con la ecuación 6.2. Por ejemplo, para $a = 1$, $x[n]$ es la secuencia de escalón unitario con transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1$$

Vemos que la transformada Z en la ecuación 6.2 es una función racional. Como consecuencia, al igual que con las transformadas racionales de Laplace, esta puede ser caracterizada por sus ceros (las raíces del polinomio del numerador) y sus polos (las raíces del polinomio del denominador).

Para el ejemplo 6.1, existe un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$. El diagrama de polos y ceros y la región de convergencia de este ejemplo se muestra en la Figura 1 para un valor de a entre 0 y 1.

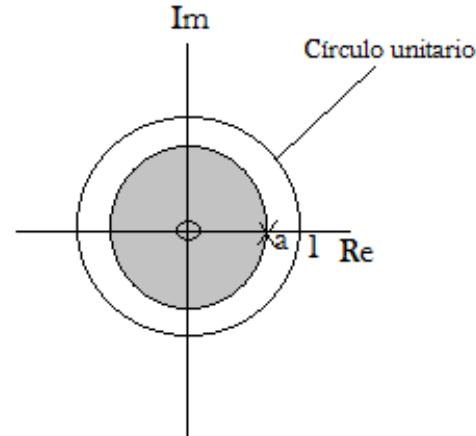
Para $|a| > 1$, la ROC no incluye el círculo unitario, lo cual concuerda con el hecho de que para estos valores de a , su transformada de Fourier no converge.

**Ejemplo 2**

Ahora sea $x[n] = -a^n u[-n-1]$, entonces,

$$\begin{aligned} nonumber X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum (a^{-1} z)^n \quad (6.4) \end{aligned}$$

Si $|a^{-1}z| < 1$ o, de forma equivalente, $|z| < |a|$, la suma en la ecuación 6.3 converge y



$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| < |a|. \quad (6.5)$$

```
>> syms x a z;
>> x = 1 - (1 / (1-a^-1*z))
x =
1/(z/a - 1) + 1
>> pretty(x)

      1
      -----
      z
      - - 1
      a
```

Ahora se desarrolla la transformada Z de la señal. Para esto se declara la variable y , y con el comando “**ztrans(“señal”)**” se obtiene el resultado.

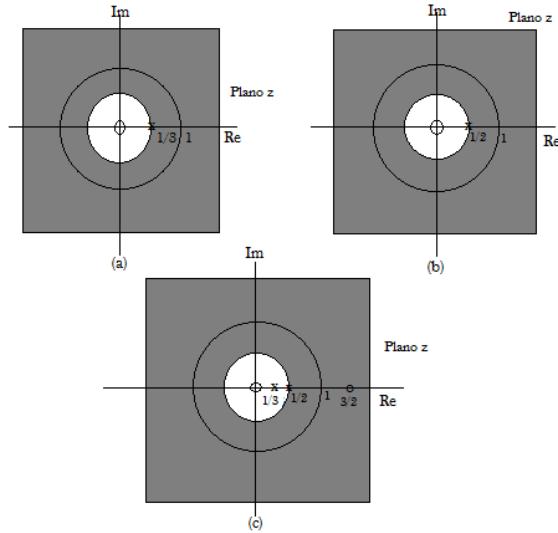
Ejemplo 3

Consideré una señal que es la suma de dos exponenciales reales:

$$x[z] = 7 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

La transformada Z es entonces

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[7 \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right] z^{-n} \\ &= 7 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} - 6 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[n] z^{-n} \\ &= 7 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \\ &= \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{z\left(z - \frac{3}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$



Para la convergencia de $X(z)$, ambas sumas en la ecuación deben converger, lo cual requiere que tanto $|(1/3)z^{-1}| < 1$ como $|(1/2)z^{-1}| < 1$ o, de manera equivalente, $|z| > 1/3$ y $|z| > 1/2$.

Por lo tanto, la región de convergencia es $|z| > 1/2$.

Matlab

Definición de variables y señal.

```

>> syms x y n;
>> x = 7*(1/3)^n - 6*(1/2)^n
x =
7*(1/3)^n - 6*(1/2)^n
>> pretty(x)
      n           n
    7 (1/3) - 6 (1/2)          >> symsxyn;
>> x = 7*(1/3)^n - 6*(1/2)^n
x =
7*(1/3)^n - 6*(1/2)^n

```

Salida.

```

>> y = ztrans(x)
y =
(7*z)/(z - 1/3) - (6*z)/(z - 1/2)
>> pretty(y)
      7 z      6 z
----- - -----
z - 1/3     z - 1/2

```

Consideré la señal

$$\begin{aligned}
x[n] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n u[n]
\end{aligned}$$

La transformada Z de esta señal es

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n \right] z^{-n} \\
&= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}z^{-1}}\right)^n - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}z^{-1}}\right)^n \\
&= \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}z^{-1}}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}z^{-1}}}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

o de manera equivalente,

$$X(z) = \frac{\sqrt{2}z}{\left(z - \frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

Para la convergencia de $X(z)$, ambas sumas de la ecuación (5) deben converger, lo cual requiere que $|\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}| < 1$ y $|\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}| < 1$ o , de manera equivalente, $|z| < 1/3$.

Matlab

Para desarrollar esta transformada seguimos los mismos pasos. Como es costumbre, primero se declaran las variables. Luego de esto se define la señal, pero hay que tener cuidado con el tratamiento de los paréntesis, pues esto puede dar como resultado que la señal se defina de manera incorrecta.

```
>> syms x y n j;
>> x = (1/(2*j)) * ((1/3)*exp((j)*(pi/4)))^n - (1/(2*j)) * ((1/3)*exp((-j)*(pi/4)))^n
x =
(exp((pi*j)/4)/3)^n/(2*j) - (exp(-(pi*j)/4)/3)^n/(2*j)
```

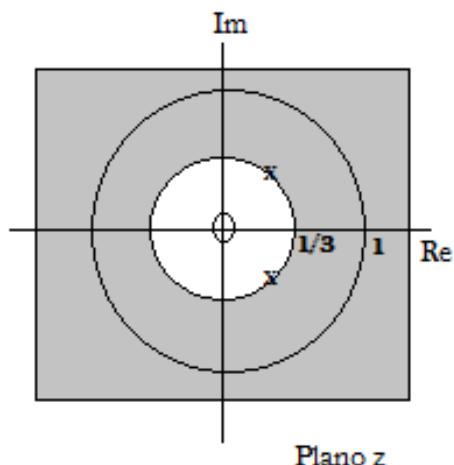
Luego de esto desarrolla la transformada.

```
>> y = ztrans(x)
y =
z/(2*j*(z - exp((pi*j)/4)/3)) - z/(2*j*(z - exp(-(pi*j)/4)/3))
```

El resultado que se obtiene se puede ver de manera mas clara usando *pretty*.

```
>> pretty (y)
```

$$\frac{z}{\frac{z - \frac{\exp(\frac{j\pi}{4})}{3}}{2j}} - \frac{z}{\frac{z - \frac{\exp(-\frac{j\pi}{4})}{3}}{2j}}$$



Plano z

DEFINICIÓN

Definimos:

$$f\{xn\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} xnz^n = X(z)$$

$$x(t) \longleftrightarrow x(z)$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$f[\mu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Convergente a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\mu(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$f^{-1}\left\{\frac{1}{1 - z^{-1}}\right\} = \mu(n)$$

$$x(n) = -\mu(-n-1) = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n \leq 0 \end{cases}$$

$$x(n) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ converge si } |z| < 1$$

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 - \frac{1}{1-z} = \frac{-z}{1-z}$$

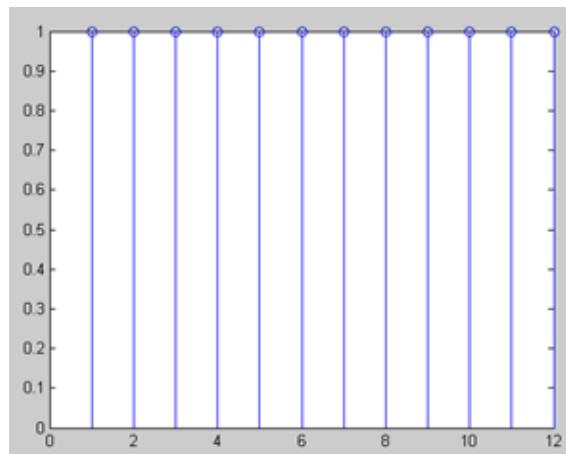
$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Asi:

$$\mathbf{f}^{-1}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}}\right\} = \mu(\mathbf{n}) \text{ con } |z| > 1$$

$$\mathbf{f}^{-1}\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}}\right\} = \mu - (-\mathbf{n} - \mathbf{1}) \text{ con } |z| < 1$$

Matlab



La gráfica anterior corresponde a la función escalón unitario, correspondiente al ejemplo número 5.

El código de resolución es el siguiente.

```
num = [1 0];
den = [1 -1];
n = 0:10;
x = [1 zeros(1,length(n))];
% zi = [-1.5*2-0.5*1, -0.5*2]
y = filter(num,den,x);
stem(y)
```

6.3 Transformada Z Inversa

6.3.1 Métodos para desarrollar la Transformada Z Inversa: Fracciones Parciales

En la mayoría de las aplicaciones el problema consiste en determinar la transformada Z inversa de una función racional $X(z)$, es decir, de la división entre dos polinomios. El método de Fracciones Parciales la expresión se convierte en una combinación lineal de transformadas de funciones básicas como $\delta(n)$, $a^n u(n)$ y $na^n u(n)$. De ser posible tal descomposición, entonces es sencillo encontrar la transformada inversa mediante la aplicación de una tabla. En muchos casos, será mas conveniente primero desarrollar $\frac{X(z)}{z}$ en fracciones parciales y después despejar $X(z)$ multiplicando por z.

Método de Fracciones Parciales I

Es práctico que recuerde el método rápido para el cálculo de fracciones parciales en el caso de términos lineales NO REPETIDOS: En el desarrollo de fracciones parciales cuando $z = a$ NO es un cero de $Q(z)$

$$\frac{P(z)}{(z-a)Q(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

el valor de A puede calcularse en forma independiente de $R(z)$ mediante la fórmula

$$A = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Método de Fracciones Parciales II

Es también práctico que recuerde el método rápido para el cálculo de fracciones parciales en el caso de términos lineales REPETIDOS: En el desarrollo de fracciones parciales cuando $z = a$ NO es un cero de $Q(z)$

$$\frac{P(z)}{(z-a)^2 Q(z)} = \frac{A}{(z-a)^2} + \frac{B}{(z-a)} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

el valor de A puede calcularse en forma independiente de $R(z)$ mediante la fórmula

$$A = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

mientras que el valor de B se calcula como

$$B = \frac{P'(a) - A Q'(a)}{Q(a)}$$

Método de Fracciones Parciales III

Cuando en el denominador se tiene un cero de orden tres:

$$\frac{P(z)}{(z-a)^3 Q(z)} = \frac{A}{(z-a)^3} + \frac{B}{(z-a)^2} + \frac{C}{(z-a)} + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

(Se supone que $Q(a) \neq 0$). Entonces los coeficientes pueden calcularse por las fórmulas:

$$\begin{aligned} A &= \frac{P(a)}{Q(a)} \\ B &= \frac{P'(a) - A Q'(a)}{Q(a)} \\ C &= \frac{P''(a) - A Q''(a) - 2B Q'(a)}{2! Q(a)} \end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular la transformada inversa de

$$F^{-1} \left\{ \frac{36z^2 - 10z}{12z^2 - 7z + 1} \right\} \longleftrightarrow X(n) \frac{3 - \frac{5}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}; |z| > \frac{1}{3}$$

Solución

Hay 2 polos (es decir, la cantidad de ceros en el denominador), que son $z = 1/4$ y $z = 1/3$.

La Región de Convergencia cae fuera del polo más externo. ($z = 1/3$)

Para resolverlo utilizamos el método de Fracciones Parciales, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \\ A \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) + B \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) &= 3 - \frac{5}{6}z^{-1} \end{aligned}$$

Al despejar estas variables, tenemos que

$A = 1$ y $B = 2$, por lo cual, reemplazando en la ecuación inicial, obtenemos

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Como

$$\left| \frac{1}{4}z^{-1} \right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{4}; |z| > \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow X(n) = (X)_1(n) + (X)_2(n)$$

Entonces,

$$X_1(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n); |z| > \frac{1}{4}$$

$$X_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^n u(n); |z| > \frac{1}{3}$$

Por lo cual, finalmente obtenemos

$$X(n) = \left(\frac{1}{4} \right)^n u(n) + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n u(n)$$

Ejemplo

Tomando como base parte del enunciado del ejemplo anterior, es decir

$$X(Z) = \frac{3 - 56z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Cambiando la Región de Convergencia a:

a)

$$\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

b)

$$|z| < \frac{1}{4}$$

Solución

a) En este caso, la región de convergencia está dentro del polo en $z = 1/3$, el cual debe caer dentro de este. Los Pares transformados de Z serán

$$x_1(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

y

$$x_2(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{3}$$

Por lo cual tenemos:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

y

$$x_2(n) = -2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

De manera que

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

b) En este caso, la Región de Convergencia está dentro de los dos polos

$$x_1(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{4}$$

Por lo cual tenemos

$$x_1(n) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1)$$

De modo que

$$x(n) = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1) - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

Observación: Este procedimiento en Fracciones Parciales para determinar la Transformada Z Inversa, se basa en expresar la F(z) como una combinación lineal de términos más simples.

Ejemplo

Hallar la Transformada Z de:

a)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \quad a > 0 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

b)

$$X(n) = b^{|n|}$$

Solución

a)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

$$X(z) = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

Como $x[n]$ es de longitud finita, podemos decir que esta es cero para $n < 0$, y su ROC se extenderá hasta infinito, pero no incluirá el origen, con base en la ecuación inicial, con la cual deducimos que hay un polo de orden $N-1$ en $z = 0$. Las raíces del numerador se encuentran en

$$z_k = ae^{j(2\pi kN)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

La raíz para $k = 0$ cancela el polo en $z = a$. Por tanto, el resto de polos se encuentran en

$$z_k = ae^{j(2\pi kN)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

b) La transformada de esta secuencia se puede obtener si se expresa como la suma de una secuencia derecha, y una izquierda, por lo que obtenemos

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

Por definiciones vistas anteriormente tenemos

$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

y

$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{b}$$

Por tanto, la transformada z para la secuencia compuesta es

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

O de manera equivalente

$$X(z) = \frac{b^2 - 1}{b} - \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

Ejemplo

Calcular la transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{z}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{1}{4})}$$

Solución

$$X(z) = \frac{z}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{1}{4})} = \frac{A}{(z - \frac{1}{5})} + \frac{B}{(z - \frac{1}{4})} = \frac{-20}{(z - \frac{1}{5})} + \frac{20}{(z - \frac{1}{4})}$$

Para $a = \frac{1}{5}$:

$P(z) = 1$,

$$Q(z) = z - \frac{1}{4}$$

, $P(a) = 1$,

$$Q(a) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{120}$$

y así $A = -20$.

Para $a = \frac{1}{4}$:

$P(z)=1$,

$$Q(z) = z - \frac{1}{5}$$

, $P(a)=1$,

$$Q(a) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

y así $B = 20$.

Así

$$X(z) = -20 \frac{z}{z - \frac{1}{5}} + 20 \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

:

$$X(n) = \left(20 \frac{1}{5^n} + 20 \frac{1}{4^n} \right) u(n)$$

Entrada.

```
>> x = z / (z - (1/5)) * (z - (1/4))
x =
((3*(1/3)^n + 4*5^n)*(3*(1/3)^n + 4*5^n - 1/4)) / (3*(1/3)^n + 4*5^n - 1/5)
```

Salida.

```
>> y = iztrans(x)
>> pretty (y)

      /   n      \
      | (1/3)   |
      /   n   n      \  3 iztrans| -----, n, k |
      | (1/3)  5      | \ #1   /   /   n      \
24 iztrans| -----, n, k | - ----- - iztrans| --, n, k | +
      \ #1   /   4   \ #1   /   | 5      |

      /   2 n      \
      | (1/3)   |
      9 iztrans| -----, n, k | + 16 iztrans| ----, n, k |
      \ #1   /   \ #1   /   | 5      |

where

      n      n
#1 == 3 (1/3) + 4 5 - 1/5
```

Ejemplo

Calcula la transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}$$

Solución

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})} = \frac{A}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{B}{(z + \frac{1}{3})} = \frac{\frac{3}{5}}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{\frac{2}{5}}{(z + \frac{1}{3})}$$

Así

$$X(z) = \frac{3}{5} * \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{5} \frac{z}{z - (-\frac{1}{3})}$$

$$X(n) = \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Matlab

Entrada.

```
>> x = (z^2)/(z - (1/2)*(z + (1/3)))
x =
(3*(1/3)^n + 4*5^n)^2/((3*(1/3)^n)/2 + 2*5^n - 1/6)
```

Salida.

```
>> y = iztrans(x)
>> pretty(y)

      /   n   n      \           /   2   n      \           /   2   n      \
  24 iztrans| -----, n, k | + 9 iztrans| -----, n, k | + 16 iztrans| -----, n, k |
      \   #1      /           \   #1      /           \   #1      /
where

      n
      3 (1/3)   n
#1 == ----- + 2 5   - 1/6
      2
```

Ejemplo 3

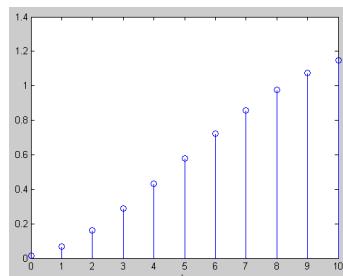
Para la función $G(z) = Y(z)/X(z)$, hallar la transformada inversa z mediante el método Matlab (comando filter) hasta $k = 10$. Graficar la secuencia (comando stem).

$$Y(z) = 0.01409z^3 + 0.028z^2 + 0.01409z$$

$$X(z) = z^3 + 2.7624z^2 + 2.5811z - 0.8187$$

Con el siguiente programa graficamos los 10 primeros elementos de la secuencia de $Y(z)/x(z)$.

```
num=[0.01409 0.028 0.01409 0];
den=[1 -2.7624 2.5811 -0.8187];
Xz=[1 zeros(1,10)];
Yz=filter(num,den,Xz);
n=0:1:10;
stem(n,Yz);
 xlabel('k');
```



6.4 Propiedades de la Transformada Z

1. Linealidad

Si

$$x_1(n) \longrightarrow X_1(z) \quad ROC X_1(z) = R_1$$

$$x_2(n) \longrightarrow X_2(z) \quad ROC X_2(z) = R_2$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{con } ROC \text{ contenido } R_1 \cap R_2.$$

Ejemplo Si

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mu(n) \text{ y } x_2(n) = (5)^n \mu(n)$$

Hallar Z =

$$3x_1(n) + 4x_2(n)$$

Especifique la región de convergencia

Solución Esto es igual a

$$\frac{3}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}} + \frac{4}{1 - (5)z^{-1}}$$

$$= \frac{3}{1 - \frac{1}{3z}} + \frac{4}{1 - \frac{5}{z}}$$

$$ROC(x_1(z)) = |z| > \frac{1}{3}$$

$$ROC(x_2(z)) = |z| > 5$$

$$= \frac{9z}{(3z-1)} + \frac{4z}{(z-5)}$$

$$= \frac{9z^2 - 45z + 12z^2 - 4z}{(3z-1)(z-5)}$$

Siendo el ROC

$$(3x_1(z) + 4x_2(z)) = |z| > 5$$

Matlab

En este caso declaramos primero las dos señales. Como las variables ya fueron declaradas anteriormente, no es necesario volver a hacerlo.

```
>> x = (1/3)^n
x =
(1/3)^n
>> y = (5)^n
y =
5^n
```

Luego de esto como la señal está declarada mas adelante multiplicada por constantes, llevamos a cabo este procedimiento.

```
z =
3*(1/3)^n + 4*5^n
```

Por último desarrollamos la transformada Z.

```
>> n = ztrans(z)
n =
(3*z) / (z - 1/3) + (4*z) / (z - 5)

>> pretty (n)

 3 z      4 z
----- + -----
z - 1/3    z - 5
```

En este caso, no se necesita declarar las variables nuevamente, dado que en el workspace de Matlab ya lo están.

Workspace	
Name	Value
b	<1x1 sym>
n	<1x1 sym>
x	<1x1 sym>
y	<1x1 sym>
z	<1x1 sym>

2. Avance en el Tiempo

$$f\{y(k+k_0)\}$$

Demostración

$$f\{yk+k_0\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(k+k_0)z^{-k}$$

$$\text{Sea } n = k+k_0 \rightarrow k = n-k_0$$

$$\begin{cases} \text{Si } n = 0 \rightarrow k = k_0 \\ \text{Si } n = \infty \rightarrow k = \infty \end{cases}$$

$$\sum_{k=-k_0}^{\infty} y(n)z^{-(n-k_0)} \text{ si } k_0 = 2$$

$$n = k + 2 \text{ si } k = 0 \text{ } n = 2$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} y(n)z^{-(n-2)} = z^2 \left[\sum_{n=2}^{\infty} y(n)z^{-n} \right]$$

$$z^2 \left[-y(-1)z^{-1} - y(0) + \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} \right]$$

$$-y(1)z - y(0)z^2 + z^2 y(z)$$

$$f\{y(k+2)\} = z^2 Y(z) - Y(0)z^2 - Y(1)z$$

3. Retroceso en el Tiempo

$$f\{y(k-k_0)\}$$

Demostración

$$Si k_0 = 2$$

$$f\{y(k-2)\} = \sum_{n=-2}^{\infty} y(n)z^{-n}z^{-2}$$

$$z^{-2} \sum_{n=-2}^{\infty} y(n)z^{-n} = z^{-2} [y(-2)z^2 + y(-1)z + \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n}]$$

$$y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}y(z)$$

$$f\{y(k-2)\} = z^{-2}y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)$$

4. Corrimiento en el Tiempo

Si

$$x[n] \longrightarrow X(z) \text{ y } n_0 \text{ E Z con } ROC X(z) = R$$

$$x[n-n_0] \xrightarrow{Z} Z^{-n_0}X(z). \text{ Con } ROC = R$$

El ROC de $Z[x(n - n_0)]$ es el mismo de $X(z)$, excepto posiblemente bajo la adición o eliminación del origen o del infinito.

$$\begin{aligned} Z[x(n - n_0)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n - n_0)}{z^n} \quad \text{hacemos } m = n - n_0 \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x(m)}{z^{m+n_0}} &= \frac{1}{z^{n_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x(m)}{z^m} \\ \frac{1}{z^{n_0}} X(z) &= z^{-n_0} X(z) \end{aligned}$$

Ejemplo Calcular la transformada Z, si $x(n) = 2^{n-4}\mu(n-4)$
Especificar el ROC **Solución**

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{1}{z^4} * \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z^{-4}}{1-2z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{z^4}}{1-\frac{2}{z}} = \frac{\frac{1}{z^4}}{\frac{z-2}{z}} = \frac{z}{z^4(z-2)} = \frac{1}{z^3(z-2)} \\ \text{Ahora } 2^n \mu(n) \rightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}} &= \frac{z}{z-2} \text{ con ROC } |z| > 2 \\ \text{Así } Z[2^{n-4}\mu(n-4)] &= \frac{z^{-4}}{1-2z^{-1}} \text{ con ROC } |z| > 2 \end{aligned}$$

Matlab Como es usual, se declaran las variables y posteriormente la señal, la cual será transformada.

```
>> x = 2^(n-4)
x =
2^( (3*z)/(z - 1/3) + (4*z)/(z - 5) - 4)
>> y = ztrans(x)
y =
ztrans(2^( (3*z)/(z - 1/3) + (4*z)/(z - 5) - 4), z, w)
>> pretty (y)

      /   3 z     4 z
      | ----- + ----- - 4
      | z - 1/3    z - 5
ztrans\ 2                               , z, w /
```

5. Escalamiento en el Dominio Z

Si

$x[n] \longrightarrow X(z)$ y $z_0 \in C$, entonces siendo ROC $X(z) = R$ se tiene

$$z^{n_0}x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \text{ Con } \text{ROC} = |z_0|R$$

El ROC de $X\left(\frac{z}{z_0}\right) = |z_0|R$, entendiéndose que si $z \in \text{ROC } X(z)$, $|z_0| \in \text{ROC } X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

Si $z_0 = e^{i\theta}$ se obtiene que $e^{in\theta}x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{e^{i\theta}}\right) = X(e^{-i\theta}z)$ en tal caso el ROC $Z[e^{in\theta}x(n)] = \text{ROC } Z^*[x(n)]$

Demostración

$$\begin{aligned} Z[z_0^n x(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Z_0^n x(n)}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n x(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{\left(\frac{z}{z_0}\right)^n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right) \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n} \end{aligned}$$

Ejemplo Hallar la transformada Z de

$$\left[\left(\frac{1}{2+i} \right)^n \mu(n) \right]$$

Solución Como

$$Z[\mu(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ con ROC } |Z| > 1$$

Entonces

$$\left[\left(\frac{1}{2+i} \right)^n \mu(n) \right]$$

$$= \frac{1}{1 - ((2+i)z)^{-1}} \text{ siendo } z = (2+i)z$$

$$\text{El ROC } Z \left[\left(\frac{1}{2+i} \right)^n \mu(n) \right] = R$$

Matlab La transformada Z utilizando Matlab.

```
>> x = (1/(2+i))^n
x =
(2/5 - i/5)^((3*z)/(z - 1/3) + (4*z)/(z - 5))
y =
ztrans((2/5 - i/5)^((3*z)/(z - 1/3) + (4*z)/(z - 5)), z, w)
```

6. Inversión en el Dominio del Tiempo

Si $x[n] \longleftrightarrow X(z)$, con ROC $X(z)=R$

entonces

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right), \text{ con } ROC = X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{R}.$$

Demostración

$$Z[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(-n)}{z^n} \text{ hacemos } m = -n$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x(k)}{z^{-k}} = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$\frac{1}{R}$ entendiendo que si Z E ROC $X(z)$ el punto $\frac{1}{z}$ E ROC $X\left(\frac{1}{z}\right)$

7. Expansión en el Tiempo

Si $X(n)$ es una señal discreta tal que $X(n)$ tiene $\longleftrightarrow X(z)$ y ROC de $X(z)=R$, entonces $X_k(n)$ denota la señal tal que

$$X_k(n) = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } k \end{cases}$$

Se tiene que

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k), \text{ con } ROC = R^{1/k}.$$

Esto es, si z esta en la ROC de $X(z)$, entonces el punto $Z^{1/k}$ esta en la ROC de $X(z^k)$. Asimismo, si $X(z)$ tiene un polo o cero en $z=a$, entonces $X(z^k)$ tiene un polo o cero en $z=a^{1/k}$.

Esto surge de la forma de serie potencias de la transformada Z, a partir de la cual vemos que el coeficiente de término z^{-n} es igual al valor de la señal en tiempo n . Esto es, con

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]Z^{-n},$$

Se tiene que

$$X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n](Z^k)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n](Z^{-kn})$$

Los únicos términos que aparecen tienen la forma z^{-kn} . El coeficiente del término Z^{-m} en la serie de potencias es igual a 0 si m no es múltiplo de k y es igual a $x[m/k]$ si m es múltiplo de k , así la transformada inversa de la serie es $x_{(k)}[n]$.

Análogamente se tiene

$$Z[x_k(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x_k(n/k)}{z^n} \quad \text{Siendo } n \text{ múltiplo de } k$$

Si $n/k=m$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{X(m)}{Z^{mk}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{X(m)}{(Z^k)^m} = X(Z^k)$$

8. Conjugación

Si $X(n)$ es una señal discreta tal que $X(n) \longleftrightarrow X(z)$ y ROC de $X(z)=R$, entonces

$$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*), \quad \text{con } ROC = R.$$

En general si $X[n]$ es real, podemos concluir que

$$X(z) = X^*(z^*)$$

Por lo tanto si $X(z)$ tiene un polo o cero en $z = z_0$, también debe tener un polo o cero en el punto conjugado complejo $z = z_0^*$

9. Convolución

Si

$$X[n] \xleftrightarrow{z} X[z] \text{ ROC } X(z) = R_1$$

$$Y[n] \xleftrightarrow{z} Y[z] \text{ ROC } Y(z) = R_2$$

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{z} X(z)Y(z), \text{ con ROC conteniendo } R_1 \cap R_2.$$

La ROC de $X(z)Y(z)$ puede ser más grande si la cancelación de polo cero ocurre en el producto.

Ejemplo 1

Hallar la transformada $Z[x(n) * y(n)]$

Solución

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n) * y(n)}{z^n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{y(n-k)}{z^n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{y(m)}{z^{m+k}} \quad m = n - k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X(k)}{z^k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{y(m)}{z^m} \\ &= X(z)Y(z) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $x(n)^*\mu(n)$ y expresar su transformada Z.

Solución

$$Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Z[\mu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

$$x(n) * \mu(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k) \quad \text{si } m = n - k$$

$$= \sum_{m=n}^{-\infty} x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)$$

$$= x(n) * \mu(n)$$

10. Diferenciación en el Dominio Z

Si $x(n) \longleftrightarrow X(z)$ y $\text{ROC } X(z) = R$

Entonces

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{con ROC} = R.$$

como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1}$$

Eso decir

$$\frac{-dX(z)}{dz} = \frac{1}{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nx(n)}{z^n}$$

Así

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nx(n)}{z^n}$$

Esto es

$$nx(n) \longleftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Ejemplo 1

Hallar $Z[n 5^n \mu(n)]$

$$= -z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - 5z^{-1}}$$

$$ROC Z [n x(n)] = |z| > 5$$

Matlab

Entradas.

```
>> x = (n*5^n*n)
x =
5^((3*z)/(z - 1/3) + (4*z)/(z - 5)) * ((3*z)/(z - 1/3) + (4*z)/(z - 5))
```

Salidas.

```
>> y = ztrans (x)
>> pretty (y)

      /   /   4 z   9 z   \   \
      |   |   ----- -----   |   |
      |   |   z - 5   3 z - 1   |   |
      |   |   5       5   |   |
- 9 w diff| ztrans| -----, z, w |, w | -
      \   \   3 z - 1   /   /
                               /   /   4 z   9 z   \   \
                               |   |   ----- -----   |   |
                               |   |   z - 5   3 z - 1   |   |
                               |   |   5       5   |   |
4 w diff| ztrans| -----, z, w |, w | -
      \   \   z - 5   /   /
```

Ejemplo 2

Obtenga la transformada Z de la siguiente función donde a es una constante. Grafique y compare en Matlab la función en tiempo continuo y la función en tiempo discreto.

$$x(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{at})$$

Distribuyendo tenemos

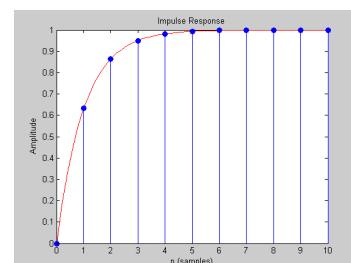
$$x(t) = \frac{1}{a} - \frac{e^{at}}{a}$$

Luego, por la transformada del escalón y la propiedad lineal de la transformada Z,

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{1}{a(1-z^1)} - \frac{1}{a(1-e^{ak}z^1)} \\ &= \frac{1-e^{ak}z^1 - 1+z^1}{a(1-z^1)(1-e^{ak}z^1)} \\ &= \frac{1}{a} \left[\frac{z^1(1-e^{ak})}{1-z^1(1+e^{ak}) + z^2e^{ak}} \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

En Matlab comparamos la respuesta del sistema continuo (en rojo) con la del sistema discreto (azul):

```
num=[0 1-exp(-1) 0];
den=[1 -1-exp(-1) exp(-1)];
t=0:0.2:10;
xt=(1-exp(-t));
plot(t,xt,'r')
hold;
impz(num,den)
```



En este caso la salida es la imagen de la derecha.

6.5 Región de Convergencia

Más conocida como ROC (Por sus siglas en inglés, provenientes de *Region of Convergence*), la podríamos definir como el rango de valores de la variable compleja z para los cuales la transformada converge.

Ejemplo 1

Tenemos la señal:

$$X(n) = 2^n \mu(n)$$

Resolvemos

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2^n \mu(n)}{Z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{Z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{Z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - 2Z^{-1}} = \left|\frac{2}{Z}\right| < 1 \end{aligned}$$

Es decir, que si

$$X(n) = 2^n \mu(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2Z^{-1}}$$

Siendo $Z \in C$, tal que $|Z| > 2$ es la región de convergencia de la transformada Z de $X(n) = 2^n \mu(n)$

Esto equivale a tener

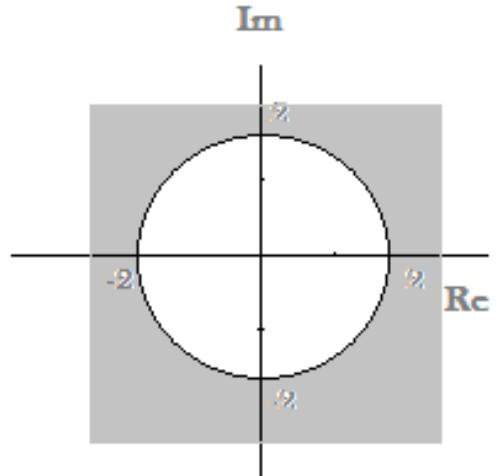
$$\frac{Z}{Z-2}$$

Siendo $Z \in C$, tal que $|Z| > 2$

Ya vimos un primer ejemplo para entrar en contexto. Ahora procedemos a realizar otro ejemplo un poco más general.

Matlab

```
>> syms x y n;
>> x = 2^n
x =
2^n
>> y = ztrans(x)
y =
z/(z - 2)
>> pretty(y)
```

$$\frac{z}{z - 2}$$
**Ejemplo 2**

Tenemos la señal $X(n) = 2^n \mu(-n-1)$ señal anti causal

La transformada Z, $X(z)$ de $X(n)$ será:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2^n \mu(-n-1)}{z^n} \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2^n}{z^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \text{ haciendo } n = -k \\ &= \frac{\frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \quad \text{siendo } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \\ &= \frac{\frac{z}{2}}{\frac{2-z}{2}} \quad \text{siendo } |z| < 2 \\ &= \frac{z}{2-z} \quad \text{siendo } |z| < 2 \end{aligned}$$

Así,

$$x(n) = 2^n \mu(n) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \rightarrow |z| > 2$$

$$x(n) = 2^n \mu(-n-1) \rightarrow X(z) = \frac{1}{2z^{-1} - 1} \rightarrow |z| < 2$$

Matlab

Para esta señal necesitamos hacer una sumatoria. Para ello utilizamos el ciclo **for**, pero dado que esta señal puede ir hasta infinito, tomamos solamente una muestra de la misma.

```

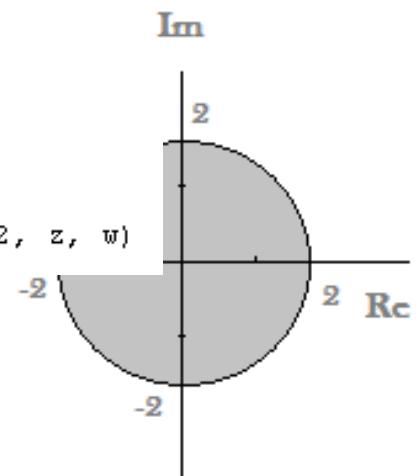
>> sum=0;
>> for n = 0:2
sum=sum+(2^n)/(z^n);
end

```

dando como resultado

y =

w/(w - 1) + 2*ztrans(1/z, z, w) + 4*ztrans(1/z^2, z, w)



6.5.1 Propiedades de la Región de Convergencia

Exploraremos varias de las propiedades de la región de convergencia para la transformada Z.

Propiedad 1:

La ROC de X(z) consiste de un anillo en el plano z centrado alrededor del origen.

Esto se da debido a que la ROC son aquellos valores de $z = re^{iw}$ para los cuales $x[n]r^{-1}$ tiene una transformada de Fourier convergente. Esto es, la ROC de la transformada Z de X[n] consiste de los valores de z para los cuales $x[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty$$

La ROC como un anillo en el plano z. En algunos casos el límite inferior puede extenderse hasta el origen, en cuyo caso la ROC llega a ser un disco. En otros casos, el límite exterior se puede extender hacia afuera hasta el infinito.

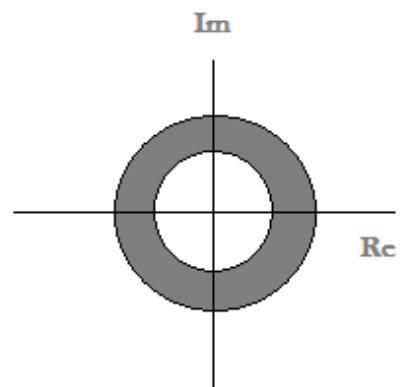
Así la convergencia depende de $r = |z|$ y no de w . De esta forma, si un valor específico de z está en la ROC, entonces los valores de z en el mismo círculo estarán en la ROC. En diversos casos, el límite exterior puede extenderse hacia fuera hasta el infinito y en algunos casos el límite interior de la ROC puede extenderse hasta el origen.

Propiedad 2:

La ROC no tiene ningún polo. Esto se da debido a que en un polo, $X(z)$ es infinita, por lo cual, por definición no converge.

Propiedad 3:

Si $X[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es el plano z completo, excepto posiblemente en $z = 0$ y/o $z = \infty$.



Una secuencia de duración finita tiene sólo un número infinito de valores diferentes de cero que se extienden, de $n=N_1$ a $n=N_2$ donde N_1 y N_2 son finitos. La transformada Z es:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$$

Para z diferente de cero o infinito cada término, en la suma será infinito y en consecuencia $X(z)$ convergerá.

Si N_1 es negativo y N_2 positivo, lo que supone que $X[n]$ tenga valores diversos de cero tanto para $n < 0$ como para $n > 0$, la sumatoria incluirá términos con potencias positivas y negativas de z . Para N_1 negativo y N_2 positivo la ROC no incluye a $z=0$ o $z=\infty$, cuando $N_1=0$ o positivo, hay únicamente potencias negativas en la sumatoria por lo cual ROC $z=\infty$. Cuando $N_2=0$ o negativo, hay únicamente potencias positivas en la sumatoria por lo cual ROC $z=0$.

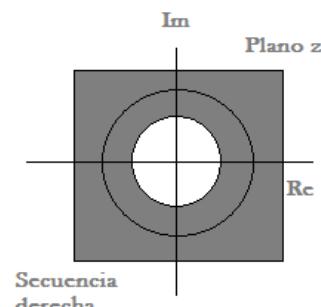
Propiedad 4:

Si $x[n]$ es una secuencia derecha y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de z para los cuales $|z| > r_0$ también estarán en la ROC.

La ROC de la componente derecha es una región limitada en el interior por un círculo y se extiende hacia afuera al infinito (posiblemente lo incluye).

Una secuencia derecha es cero antes de algún valor de n (N_1), si $|z| = r_0$ está en la ROC, por lo cual $x[n]r_0^{-n}$ es absolutamente sumable. Si $|z| = r_1$ siendo $r_1 > r_0$, de modo que r_0^{-n} decrece conforme r_1^{-n} se incrementa.

Para secuencias derechas:



$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Donde N_1 puede ser finito o puede ser positivo o negativo.

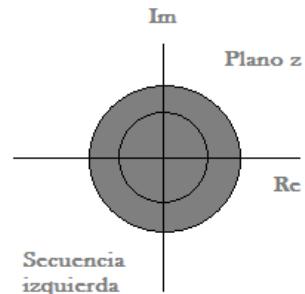
Propiedad 5:

Si $x[n]$ es una secuencia izquierda y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de z para los cuales $0 < |z| < r_0$ también estarán en la ROC. La ROC de la componente izquierda es una región limitada en el exterior por un círculo y se extiende hacia adentro hacia el origen (posiblemente lo incluye).

La sumatoria de la transformada Z para una secuencia izquierda es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

N_2 puede ser negativo o positivo. Cuando N_2 es positivo la ecuación incluye potencias negativas de z y deja de estar limitada a medida que $|z| \rightarrow 0$. Para secuencias izquierdas, por lo general la ROC no incluirá a $z=0$. Si $N_2 \leq 0$ la ROC incluirá a $z=0$.



Propiedad 6:

Si $x[n]$ es bilateral y si el círculo $|z| = r_0$ está en la ROC, entonces ésta consistirá de un anillo en el plano z que incluya al círculo $|z| = r_0$.

La ROC para un señal bilateral puede verse como la suma de una señal derecha con una izquierda. La ROC para una señal compuesta se comprenderá como la intersección de las dos componentes: izquierda y derecha.

Propiedad 7:

Si la transformada Z $X(z)$ de $x[n]$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

Ejemplo 1

Sea $X(z) =$

$$\frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}$$

Determinar todas las posibles señales X(n), tales que $Z[X(n)] = X(z)$ Solución

$$\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})} = \frac{A}{(1-2z^{-1})} + \frac{B}{(1-3z^{-1})}$$

Hacemos fracciones parciales

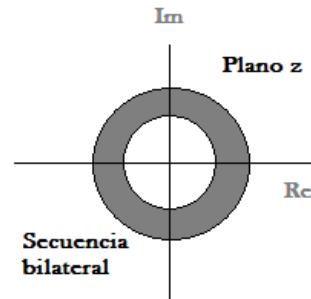
$$1 = A(1-3z^{-1}) + B(1-2z^{-1})$$

$$1 = A - 3Az^{-1} + B - 2Bz^{-1}$$

Igualamos exponentes:

$$(1 = A + B) \rightarrow * (3)$$

$$(0 = -3A - 2B)$$



Es igual a:

$$(3 = 3A + 3B)$$

$$(0 = -3A - 2B)$$

Sumamos las dos ecuaciones y obtenemos

$$3 = 0 + B$$

Es decir:

$$B = 0$$

Para A:

$$1 = A + B \quad 1 = A + (3) \quad A = 1 - 3$$

Es decir:

$$A = -2$$

Como:

$$\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})} = \frac{-2}{(1-2z^{-1})} + \frac{3}{(1-3z^{-1})}$$

Y del hecho que:

$$Z[a^n \mu(n)] = Z[-a^n \mu(-n-1)]$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} \text{ La igualdad es valida salvo las regiones de convergencia}$$

Se tiene que las señales X(n) cuya transformada Z es x(z) pueden ser:

1. $X(n) = -2(2)^n\mu(n) + 3(3)^n\mu(n)$ Señal derecha
2. $X(n) = 2(2)^n\mu(-n-1) - 3(3)^n\mu(-n-1)$ Señal izquierda
3. $X(n) = -3(3)^n\mu(-n-1) - 2(2)^n\mu(n)$ Señal bilateral

Matlab

Como es usual, se definen las variables, para luego hacer el desarrollo de la transformada.

```
>> syms x y n z
x = (1)/((1)-(2*z^(-1)))*((1)-(3*z^(-1)))
>> y = ztrans(x)
y =
3*ztrans(1/(z*(2/z - 1)), z, w) - ztrans(1/(2/z - 1), z, w)
```

Ejemplo 2

Considere la siguiente señal

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0 & \text{Con otro valor} \end{cases}$$

Entonces

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

$$\frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

Puesto que $X[n]$ es de longitud finita, de la propiedad 3 se desprende que la ROC incluye el plano z completo, excepto posiblemente en el origen y/o el infinito. De hecho, a partir de nuestro análisis de la propiedad 3, ya que $x[n]$ es diferente de cero para $n < 0$, la ROC se extiende hacia el infinito. Sin embargo, ya que $x[n]$ es diferente de cero para algunos valores positivos de n , la ROC no incluirá el origen. Esto es evidente gracias a la ecuación

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

donde vemos que hay un polo de orden N-1 en $z=0$. Las N raíces del polinomio numerador están en

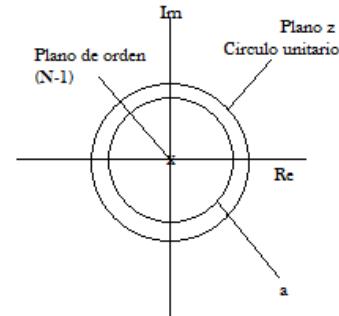
$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

La raíz para $k=0$ cancela el polo en $z=a$. En consecuencia no hay otros polos aparte del localizado en el origen. El resto de los ceros están en

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N-1$$

El patrón de polos y ceros se muestra en la figura

Patrón de polos y ceros con $N=16$ y $0 < a < 1$. La región de convergencia para este ejemplo consta de todos los valores de z excepto $z=0$.



Ejemplo 3

sea

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$

La transformada Z para esta secuencia se puede obtener expresándola como la suma de una secuencia derecha y una izquierda. Tenemos,

$$x[n] = b^n \mu[n] + b^{-n} \mu[-n-1]$$

Esto es

$$b^n \mu[n] \rightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

y

$$b^{-n} \mu[-n-1] \rightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

En las figuras anteriores mostramos el patrón de polos y ceros y la ROC de las dos ecuaciones anteriores, tanto para $b > 1$ como para $0 < b < 1$. Para $b > 1$ no hay ROC común y por tanto la secuencia en la ecuación no transformada Z, aun cuando las componentes derecha e izquierda la tengan individualmente. Para $b < 1$ las ROC de las ecuaciones se traslanan y por consiguiente las transformadas Z para la secuencia compuesta es

$$X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

o de manera equivalente,

$$X(z) = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

Matlab

Se definen las variables y, como en este caso una de ellas no está especificada, entonces la transformada queda de la forma

```
|>> pretty (x)
    | n|
    b
>> y = ztrans (x)
y =
ztrans(b^abs(n), n, z)
>> pretty (y)
    | n|
ztrans(b      , n, z)
```

Ejemplo 4

Para la función $Y(z)$, determinar los polos y ceros y ubicarlos dentro del plano z. Los teoremas de valor inicial y final son aplicables en dicha función.

$$Y(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)}$$

Para hallar los polos y ceros de $Y(z)$, introducimos los comandos:

```
z = tf('z');
Yz = .792*z^2/((z-1)*(z^2 - 0.416*z + .208))
[ceros, polos, K] = zpkdata(Yz, 'v')
```

vemos que hay un cero doble en el origen, un polo real en 1 y un par de polos complejos conjugados:

ceros =
0
0

polos =
1.000
0.2080 + 0.4059i
0.2080 -0.4059i

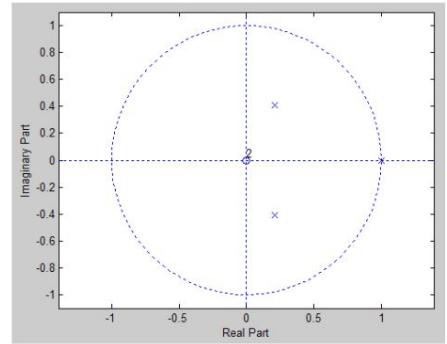
k =

0.7920

ahora, graficamos el plano z con los ceros y polos obtenidos

```
[num,den]=tfdata(Yz,'v');
zplane(num,den)
zgrid
```

Por el teorema del valor inicial:



$$\begin{aligned} y(t-0) = \lim_{z \rightarrow \infty} y(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.792z^2}{z^3 - 1.416z + 0.624z - 0.208} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.792/z}{1 - 1.416/z + 0.624/z^2 - 0.208/z^3} = 0 \end{aligned}$$

Por el teorema del valor final:

$$\begin{aligned} y(t \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [1 - z^1 Y(z)] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)} \end{aligned}$$

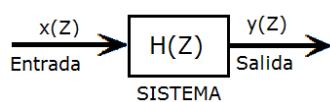
Estos teoremas son aplicables porque, por definición, existen los límites calculados.

6.6 Función de Transferencia

6.6.1 Definición

Podemos definir la función de transferencia como

$$H(n) = \frac{Y(n)}{X(n)}$$



Siendo

$$h(n) = f^{-1} \left(\frac{y(n)}{x(n)} \right)$$

La función de transferencia $H(z)$ es una propiedad del sistema que caracteriza la forma en que este modifica una secuencia de entrada para producir una secuencia de salida. Una vez tenemos $H(z)$ es posible encontrar la transformada Z de la secuencia de salida para una entrada dada.

Es la relación constante que existe entre las transformadas Z de la entrada y la salida, para condiciones iniciales nulas.

SISTEMA CAUSAL: Cuando el grado del polinomio del numerador es menor o igual al grado del polinomio del denominador.

SISTEMA ESTABLE: Cuando las condiciones iniciales del sistema son iguales a 0, o cuando la región de convergencia se encuentra sobre el círculo unitario, es decir, si la Transformada Z de la respuesta al impulso tiene todos los polos dentro de la circunferencia de radio unidad (cualquiera que sea su orden de multiplicidad). Es aquel cuya salida es acotada, es decir no diverge. A entrada acotada le corresponde una salida acotada.

Ejemplo 1

Halle la función de transferencia de $y(-n-1) - \frac{5}{2}y(n) + y(n+1)$

Solución

$$f\{x(n)\} = f\{y(n-1)\} - \frac{5}{2}f\{y(n)\} + f\{y(n+1)\}$$

$$f\{y(n-1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n}$$

$$\text{Sea } k = n-1$$

$$\begin{cases} & \text{si } n=0 \quad k=-1 \\ & \text{si } n=\infty \quad k=\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\{y(n-1)\} &= \sum_{k=-1}^{\infty} y(k)z^{-(k+1)} \\ &= Z^{-1}y(-1)z + \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} \\ &= y(n-1) + z^{-1}Y(z) \\ f\{y(n)\} &= Y(z) \end{aligned}$$

Ahora

$$f\{y(n+1)\} = \sum_{k=1}^{\infty} y(k)z^{-(k-1)} \quad \text{Sea } k = n+1$$

$$\begin{cases} & \text{si } n=0 \quad k=1 \\ & \text{si } n=\infty \quad k=\infty \end{cases}$$

$$f\{y(n+1)\} = Z[-y(0) + \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^k]$$

$$= -zY(0) + zY(z)$$

$$\begin{aligned} X(z) &= y(-1)z^{-1}Y(z) - \frac{5}{2}Y(z) + zY(z) - zY(0) \\ X(z) &= Y(z)[z^{-1} - \frac{5}{2} + z] \\ X(z) &= Y(z)[\frac{2-5z-2z^2}{2z}] \end{aligned}$$

$\frac{Y(z)}{X(z)} \left[\frac{2-5z-2z^2}{2z} \right] = 0$ La función de transferencia es

$$H(z) = \left[\frac{2z}{2z^2 - 5z + 2} \right]$$

Ahora

$$h(n) = f^{-1} \left[\frac{2z}{2z^2 - 5z + 2} \right]$$

$$2z^2 - 5z + 2 = \frac{(2z)^2 - 5(2z) + 4}{2} \frac{2(z-2)(2z-2)}{2} = 0$$

$$f^{-1} \left[\frac{2z}{(z-2)(2z-1)} \right] = f^{-1} \left[\frac{2z}{z(z-2z^{-1})2z(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \right]$$

$$f^{-1} \left[\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \right]$$

$$f^{-1} \left[\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \right]$$

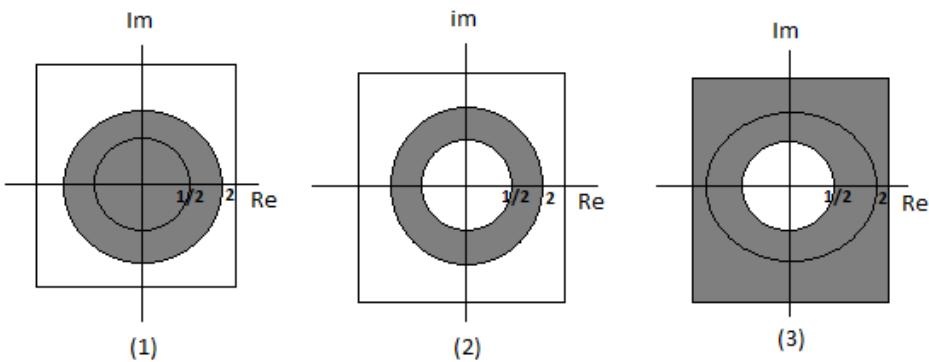
$$z^{-1} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Resolviendo fracciones parciales tenemos que $A=\frac{2}{3}$ $B=-\frac{2}{3}$

$$h(n) = \frac{2}{3} f^{-1} \left[\frac{1}{1-2z^{-1}} \right] - \frac{2}{3} f^{-1} \left[\frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \right]$$

Posibles soluciones

1. Si $|z| < \frac{1}{2}$ $h_1(n) = \frac{2}{3} \left\{ -2^n \mu(-n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(-n-1) \right\}$
2. Si $\frac{1}{2} < |z| < 2$ $h_2(n) = \frac{2}{3} \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) - 2^n \mu(-n-1) \right\}$
3. Si $|z| > 2$ $h_3(n) = \frac{2}{3} \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \mu(n) - 2^n \mu(n) \right\}$



Matlab

Matlab es una potente herramienta que permite el análisis de sistemas descritos por funciones de transferencia.

La función de transferencia de un sistema, relaciona la entrada con la salida en dicho sistema. En forma genérica se representa de la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

Para crear funciones de transferencia en Matlab necesitamos los siguientes comandos:

1. `h=tf(num,den)`

`num`=Vector que contiene a los coeficientes del numerador de $H(s)$ ordenado respecto a las potencias de s donde el primer elemento es el coeficiente que acompaña a la mayor potencia de s .

`den`=Vector que contiene los coeficientes del polinomio del denominador $H(s)$ ordenamos de igual manera que en el numerador.

Tenemos:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Introducimos la función de transferencia:

```
num=[1,2,3];
den=[1,3,3,1];
H=tf(num,den)
```

Transfer function:

```

H =

```

$$\frac{s^2 + 3s + 4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}$$

Continuous-time transfer function.

2. h=zpk(z,p,k)

Para obtener los ceros y los polos de una función de transferencia utilizaremos la expresión:

```
>>[z,p,K] = tf2zp(num,den)
```

z=Vector que contienen los ceros del numerador de $H(s)$

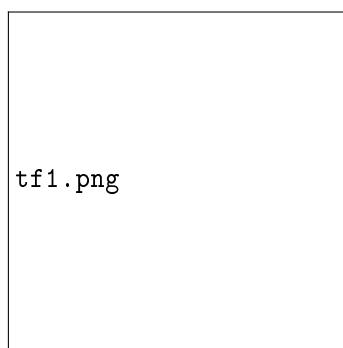
p=Vector que contiene los polos de $H(s)$

k=Ganancia estática

En caso de tener los ceros, polos y la ganancia del sistema obtendremos la función de transferencia de la siguiente manera:

```
>>[num, den] = zp2tf(z,p,K)
>>H= tf(num,den)
```

Realizar en Matlab un $H(s)$ que tenga ceros en -2 y -4, polos en -12, -4+5i, -4-5i. Considerar $k=5$.



$$H(s) = \frac{5(s+2)(s+4)}{(s+12)(s^2 + 8s + 41)}$$

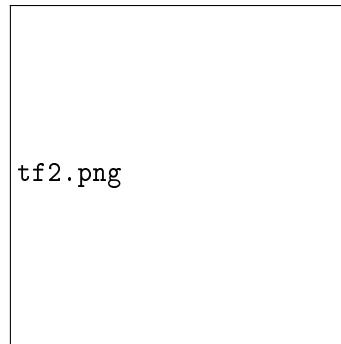
3. s=tf('s')

A partir de esta instrucción se puede utilizar la "s" en expresiones polinómicas de $H(s)$ para que el programa las interprete como funciones de transferencias.

Tenemos:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s^3 + 4s^2 + 5s + 1}$$

Introducir una función de transferencia polinómica



4. Función de transferencia descompuesta en fracciones parciales simples.

Una función de transferencia se puede descomponer en fracciones parciales simples. En Matlab lo haremos con la instrucción "**residue**". Si existen polos complejos, la instrucción devuelve los residuos que corresponden a cada uno de los polos.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} = \frac{r(1)}{s - p(1)} + \frac{r(2)}{s - p(2)} + \dots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s)$$

```
>> n=[1 2];
>> d=[1 4 2 6];
>> [r,p,k]=residue(n,d)
```

r =

```
-0.1165 + 0.0000i
0.0582 - 0.2233i
0.0582 + 0.2233i
```

p =

```
-3.8829 + 0.0000i
-0.0586 + 1.2417i
-0.0586 - 1.2417i
```

k =

```
[]
```

Tenemos:

$$H(s) = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 2s + 6}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

```
>> n=[1 2];
>> d=[1 4 2 6];
>> [r,p,k]=residue(n,d)

r =
-0.1165 + 0.0000i
0.0582 - 0.2233i
0.0582 + 0.2233i

p =
-3.8829 + 0.0000i
-0.0586 + 1.2417i
-0.0586 - 1.2417i

k =
[]
```

La instrucción inversa es

```
>>[num, den] = residue (r,p,k)
```

6.7 La Transformada Z unilateral

Se define como:

$$X_u(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} X[n]Z^{-n} \quad (6.8)$$

Se utiliza principalmente para el análisis de sistemas causales descritos por ecuaciones de diferencia lineales con coeficientes constantes y condiciones iniciales.

La transformada Z unilateral difiere de la transformada bilateral en que la sumatoria es llevada a cabo sólo sobre valores no negativos de n , sin importar si $x[n]$ es cero o no cero para $n < 0$.

Si $x[n]$ es cero para $n < 0$ entonces:

$$X_u(Z) = X_\beta(Z)$$

$X[n]u[n]$ siempre es una secuencia derecha, por tanto la ROC de $X_u(Z)$ es siempre el exterior de un círculo.

La evaluación de la transformada inversa es idéntica en ambos casos con la limitación que la ROC de la transformada unilateral es siempre el exterior de un círculo.

Ejemplo 1

Considera la señal $x[n] = a^n u[n]$.

Ya que $X[n] = 0$ para $n < 0$, las transformadas unilateral y bilateral son iguales para este ejemplo y entonces, en particular,

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$$

Matlab

Entrada.

```
>> x = a^n
x =
a^n
```

Salida.

```
>> y = ztrans (x)
y =
-z/(a - z)
>> pretty (y)

      z
      -
      a - z
```

6.7.1 Propiedades de la Transformada Z unilateral

La región de convergencia es siempre el exterior de un círculo. Es decir, afuera del polo más externo.

La propiedad de inversión en el tiempo no tiene sentido en la transformada Z unilateral.

Propiedad de Desplazamiento

- * Si $y[n] = x[n - 1]$, entonces un retardo en el tiempo:
 $x[n] \rightarrow: Z^{-1}X(z) + X[-1]$
- * Esta propiedad se puede aplicar en forma repetida, es decir:
 $x[n-2] = y[n-1]$
y por tanto
 $x[n - 2] \rightarrow: Z^{-2}X(z) + X[-1]Z^{-1} + x[-2]$

Propiedad de Convolución

- * Tiene la restricción que
 $X_1(n) = X_2(n) = 0$ para $n < 0$. Si esta restricción se cumple:
 $X_1(n) * X_2(n) \rightarrow: X_1(Z)X_2(n)$

6.7.2 Ejercicios Propuestos

1) Sea

$$x[n] = (-1)^n(u[n]^n) + a^n u(-n - n_0)$$

Determine las restricciones en el número complejo a y el entero n_0 , dado que la ROC de $x(z)$ es $1 < |z| < 3$

2) Considere la señal

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{4})^n \cos(\frac{\pi}{4}) & , n \leq 0, \\ 0 & n > 0. \end{cases}$$

Determine los polos y la ROC para $x(z)$.

3) Examine la señal

$$x(n) = (\frac{1}{2})^n(u(n - 3))$$

Especifique la region de convergencia correspondiente.

4) Sea $x(n)$ una señal cuya transformada Z racional $x(z)$ contiene un polo en $z = \frac{1}{3}$.

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)x(n)$$

es absolutamente sumable y

$$X_2(n) = \left(\frac{1}{8}\right)^n X(n)$$

no es absolutamente sumable, determine si $x[n]$ es izquierda, derecha o bilateral.

5) Considere la siguiente expresión algebráica para la transformada Z $x(z)$ de una señal $x[n]$:

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}$$

6) Determine la transformada Z de las siguientes Secuencias. Exprese todas las sumas en forma cerrada. Trace el diagrama de polos y ceros e indique al régión de convergencia. Indique si existe la transformada de Fourier de la secuencia.

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)u[n+4] - u[n-5]$
- b) $n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

7) Determine la transformada Z inversa usando tanto el método basado en la expansión en fracciones parciales como el método de la serie de Taylor que se basa en el uso de la división larga.

$$X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

8) Usando el método indicado, determine la secuencia asociada para la siguiente transformada Z:

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

9) Se nos han dado los siguientes cinco datos acerca de la señal $x[n]$ discreta con transformada Z $X(z)$:

1. $x[n]$ es real y derecha.
2. $X(z)$ tiene exactamente dos polos.
3. $X(z)$ tiene dos ceros en el origen.
4. $X(z)$ tiene un polo en $z = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$.
5. $X(1) = \frac{8}{3}$.

Determine $X(z)$ y especifique su región de convergencia.

10) Considere un sistema cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionados mediante

$$y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

- a) Determine la respuesta a entrada cero de este sistema si $y[-1] = 2$.
- b) Determine la respuesta a entrada cero de este sistema a la entrada $x[n] = (1/4)^n u[n]$.

11) Determine la restricción que debe haber en $r = |z|$ para que cada una de las siguientes sumas converja:

a).

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} z^{-n}$$

B)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^n$$

12) Para la siguiente expresión algebráica para la transformada Z de una señal, determine el número de ceros en el plano z infinito y el número de ceros en el infinito.

$$\frac{z^{-1}(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}$$

13) sea $x[n]$ una señal absolutamente sumable con transformada Z racional $X(z)$. Si sabemos que $X(z)$ tiene un polo en $Z = 1/2$, ¿podría ser

- a)una señal de duración infinita?
- b)una señal izquierda?
- c)una señal derecha?

14) Suponga que la expresión algebráica para la transformada Z de $X[n]$ es

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

15) Valiéndose de la expansión en fracciones parciales y del hecho de que

$$a^n u[n] \iff \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

,

determine la transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}, \quad |z| > 2$$

16) Considere la siguiente expresión algebráica para la transformada Z $X(z)$ de una señal $x[n]$:

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Suponiendo que la ROC es $|z| > 1/3$, use la división larga para determinar los valores de $x[0]$, $x[-1]$ y $x[-2]$.

17) Determina la transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1024} \left[\frac{1024 - z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right]$$

16) Considerando la interpretación geométrica de la magnitud de la transformada de Fourier del diagrama de polos y ceros, determine si la señal correspondiente tiene una característica aproximada paso bajas, paso banda o paso altas:

c)

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{64}{81}z^{-1}}$$

18) Sea

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Determine una señal tal que cada una tenga una transformada Z $X(z)$ que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. $[X(z) + X(-z)]/2 = Y(z^2)$.
2. $X(z)$ tiene sólo un cero y sólo un polo en el plano Z.

19) Determine la transformada Z unilateral de la siguiente señal, y especifique las regiones de convergencia correspondientes:

$$X_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

20) Determine la transformada Z de cada una de las siguientes secuencias. Trace el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique si existe o no la transformada de Fourier de la secuencia.

- a) $\delta[n+5]$.
- b) $\delta[n-5]$.

21) Considere una secuencia $X[n]$ derecha con transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Realice una expansión por fracciones parciales para ecuación expresada como una razón de polinomios en z^{-1} y, a partir de dicha expansión, determine $x[n]$.

22) Considere una secuencia $X[n]$ izquierda con transformada Z

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Escriba $X(z)$ como una razón de polinomios en z en lugar de z^{-1} .

23) Una secuencia derecha $x[n]$ tiene transformada Z

$$X(z) = \frac{z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

Determine $x[n]$ para $n < 0$.

24) Determine la transformada Z de la secuencia

$$x[n] = \delta[n] - 0.95\delta[n-6]$$

25) Considere una señal $y[n]$ que está relacionada con dos señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ mediante

$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1]$$

donde

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

y

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

dado que

$$a^n u[n] \iff \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

use las propiedades de la transformada Z para determinar la transformada Z $Y(z)$ de $y[n]$.

26) Considere las siguientes dos señales

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$

,

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n u[n]$$

Sean $\chi_1(z)$ y $X_1(z)$ respectivamente las transformadas Z unilateral y bilateral de $x_1[n]$ y sean $\chi_2(z)$ y $X_2(z)$ respectivamente las transformadas Z unilateral y bilateral de $x_2[n]$.

Tome la transformada Z bilateral inversa de $X_1(z)X_2(z)$ para determinar $g[n] = x_1[n] * x_2[n]$.

27) Para la siguiente ecuación de diferencias, y para la entrada y la condición inicial asociadas, determine las respuestas a entrada cero y estado cero, usando la transformada Z unilateral.

$$\begin{aligned} y[n] + 3y[n-1] &= x[n] \\ X[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ y[-1] &= 1 \end{aligned}$$

28) Considere una secuencia par $x[n]$ (es decir, $x[n] = x[-n]$) con transformada racional $X(z)$.

A partir de la definición de la transformada Z demuestre que

$$X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

29) Sea $x[n]$ una señal discreta con transformada Z $X(z)$. Para la siguiente señal, determine la transformada Z en términos de $X(z)$:

$$x_1[n] = x_2[n]$$

30) Considere una secuencia real $x[n]$ con transformada Z racional $X(z)$.

A partir de la definición de la transformada Z, demuestre que

$$X(z) = X^*(z^*)$$

- $fuction[y] = seriefourierpolar(l, m, n, u)$

- el primer armónico fundamental de la señal cuadrada en azul
- $t=l:m:n$
- $y = u * \sin(t) / pi;$
- $\text{plot}(t,y)$
- hold on
- el segundo en verde
- $y = (u/pi) * [\sin(3*t)/3];$
- hold on
- $\text{plot}(t,y, 'g')$
- el tercer armónico en +++++
- $y = (u/pi) * [\sin(5*t)/5];$
- hold on
- $\text{plot}(t,y, '+')$
- el resultante en rojo, al sumar las armónicas, de la señal cuadrada. Siga sumando hasta 10 armónicos y observe que la resultante que se aparece mas a la señal cuadrada

6.8 Transformada Wavelet Continua

- Ejemplo de la forma de cálculo de la Transformada Wavelet Continua (CWT)
 1. Se utiliza la función wavelet gaussiana
 2. El parámetro to indica el término de traslación
 3. El parámetro s indica la escala, o ancho de la wavelet madre
- close all
- clear all
- $\text{npuntos}=1000;$
- $\text{t}=0:1/\text{npuntos}:1;$
- $\text{to}=0.25;$
- $\text{s}=10000;$
- $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$
- $\text{tiempo}=t*1000;$
- $\text{subplot}(2,2,1)$
- $\text{plot}(\text{tiempo},a,'r')$
- $\text{fill}(\text{tiempo},a,'r');$
- $\text{title}('s = 250 \text{ to} = 250');$
- hold on
- $x=-8*pi:12*pi/1000:8*pi;$
- $\text{senal} = 60 * \cos(x)^5 * \sin(x)^7 ./ (\sin(x)^5 + x + eps);$
- $\text{plot}(\text{senal})$
- $\text{axis}([0,1100,-0.5,1])$
- grid on
- $\text{xlabel}('Tiempo [ms]');$
- $\text{to}=0.45;$
- $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$
- $\text{subplot}(2,2,2)$
- $\text{plot}(\text{tiempo},a,'r')$
- $\text{fill}(\text{tiempo},a,'r');$
- $\text{title}('s = 250 \text{ to} = 450');$
- hold on

- $x = -8 * pi : 12 * pi / 1000 : 8 * pi;$
- $senal = 60 * \cos(x)^5 * \sin(x)^7 / (\sin(x)^5 + x + eps);$
- plot(senal)
- axis([0,1100,-0.5,1])
- grid on
- xlabel('Tiempo [ms]');
- to=0.65;
- $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$
- subplot(2,2,3)
- plot(tiempo,a,'r')
- fill(tiempo,a,'r');
- title('s = 250 to = 650');
- hold on
- $x = -8 * pi : 12 * pi / 1000 : 8 * pi;$
- $senal = 60 * \cos(x)^5 * \sin(x)^7 / (\sin(x)^5 + x + eps);$
- plot(senal)
- axis([0,1100,-0.5,1])
- grid on
- xlabel('Tiempo [ms]');
- to = 0.75;
- $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$
- subplot(2,2,4)
- plot(tiempo,a,'r')
- fill(tiempo,a,'r');
- title('s = 250 to = 750');
- hold on
- $x = -8 * pi : 12 * pi / 1000 : 8 * pi;$
- $senal = 60 * \cos(x)^5 * \sin(x)^7 / (\sin(x)^5 + x + eps);$
- plot(senal)
- axis([0,1100,-0.5,1])
- grid on
- xlabel('Tiempo [ms]');

6.9 Programa básico para obtener la Transformada Wavelet Discreta de una señal de N muestras empleando multiresolución

- clear all;
- close all;
- load S;
- L=length(S);
- $[LD,HD] = wfilters('db8','d');$
- $con_LD = conv(S,LD);$
- $a1 = con_LD(2 : 2 : length(con_LD));$
- $con_HD = conv(S,HD);$
- $d1 = con_HD(2 : 2 : length(con_HD));$
- LR,HR =wfilters('db8','r');
- $ups = [zeros(1,length(a1));a1];$
- $ups = ups(:)';$

- $ups = ups(1 : 2 * length(a1));$
- $con_L R = conv(ups, LR);$
- $ar1 = con_L R((length(HR)):(L+length(HR))-1);$
- $ups = [zeros(1,length(d1));d1];$
- $ups = ups(:)';$
- $ups = ups(1 : 2 * length(d1));$
- $con_H R = conv(ups, HR);$
- $dr1 = con_H R((length(HR)):(L+length(HR))-1);$
- $sr = ar1 + dr1;$
- $[mod1, mod11] = wavedec(S, 1, 'db8');$
- $ac = wrcoef('a', mod1, mod11, 'db8', 1);$
- $[mod1, mod11] = wavedec(S, 1, 'db8');$
- $dc = wrcoef('d', mod1, mod11, 'db8', 1);$
- $plot(ar1);$
- $hold;$
- $plot(ac, 'r');$

6.10 Transformada Z - Matlab

- TRANSFORMADA Z

Syntax:

$ztrans(f, trans_index, eval_point)$

- ejemplo 1: Syntax:Entrada
- syms a n x
- $f = a^n;$
- $ztrans(f, x)$ Syntax:Salida
- $ans = -x/(a - x)$
- ejemplo 2: Syntax:Entrada
- syms a b c d w x y z
- $ztrans([exp(x), 1; sin(y), i*z], [w, x; y, z], [a, b; c, d])$
Syntax:Salida
- $ans = [(a*exp(x))/(a - 1), b/(b - 1)] (c * sin(1))/(c^2 - 2 * cos(1) * c + 1), (d * i)/(d - 1)^2]$

Aplicaciones

V

7	Transformada Wavelet	163
7.1	Introducción a transformada Wavelet:	
7.2	Wavelets vs Fourier	
7.3	Eliminación de ruido en señales	
7.4	Wavelets vs Fourier: Resolución de imágenes	
7.5	Extracción de información en imágenes	
7.6	Programa MATLAB	
7.7	Serie de Fourier: ejemplo	
7.8	Temperatura de la tierra a una profundidad X:	
7.9	Otras Aplicaciones	
7.10	Fourier: Series y transformada:	
7.11	Transformada wavelets	



7. Transformada Wavelet

7.1 Introducción a transformada Wavelet:

También llamada transformada ondícula es una transformada especial que representa las señales en versiones trasladadas y/o dilatadas de una onda inicial(finita). La transformada wavelet es una herramienta matemática que promete no solo tener múltiples aplicaciones en el procesamiento de señales sino que ademas está siendo usada en el control de procesos y detección de anomalías sintomáticas en medicina e ingeniería. Existen 3 principales o mas conocidas familias wavelets, estas son: La daubechies, la coiflet, y la symlet.

- Familia Coiflet

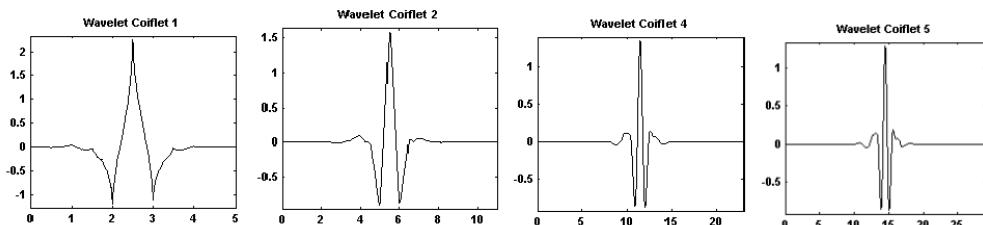


Figure 7.1: Familia Coiflet

- Familia symlet

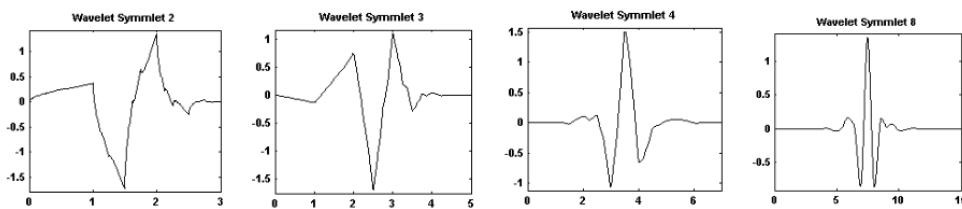


Figure 7.2: Familia symlet

- Familia Daubechies

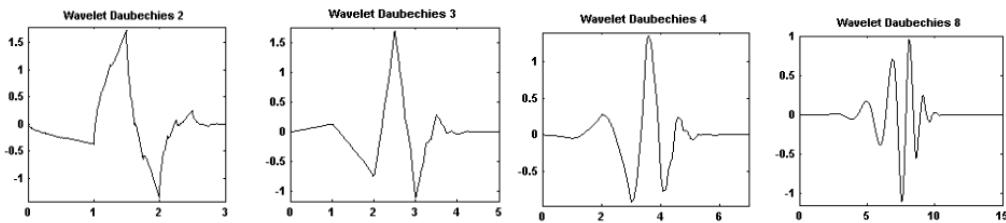


Figure 7.3: Familia Daubechies

7.2 Wavelets vs Fourier

- El análisis de wavelets está especialmente indicado para señales con intermitencias: sucesos que ocurren de manera no periódica. Para estas señales, Fourier brinda poco tratamiento al perderse casi toda la información.
- Fourier es inestable frente a señales intermitentes: si se añade un impulso en el tiempo a una señal, todo el espectro de Fourier se vera afectado, mientras que solo algunos coeficientes de wavelets se modificarían.
- Cuando un sistema es lineal y los modos de vibración son modos propios del sistema, el análisis de Fourier proporciona mucha información sobre los mismos. Pero si no es así, la descomposición en modos propios no da información interesante, ya que mezcla la información de varios modos de oscilación.
- La transformada wavelet muestra claras ventajas sobre la de fourier en su $t(n)$: La transformada Wavelet posee un comportamiento del tipo $O(n)$, mientras que la transformada de fourier posee un comportamiento $O(n \log(n))$, lo que significa que la transformada wavelet es mas rápida.
- La transformada Wavelet no permite realizar cálculos sobre convoluciones o modulaciones de las señales, es una técnica relativamente nueva.

7.3 Eliminación de ruido en señales

Una aplicación interesante de la transformada Wavelet es la eliminación de ruido en señales. En este caso se procesaron dos señales con características definidas. La primera es una señal continua sin cambios abruptos de una sinusoides creciente en amplitud. Para realizar el filtrado de la señal se utilizó un filtrado por thresholding porque que de esta forma se logra representar mejor las discontinuidades de las señales. Para la señal simp se procedió a añadirle ruido y se creó una serie de imágenes en un rango de threshold y se graficó el error con respecto a la señal original.

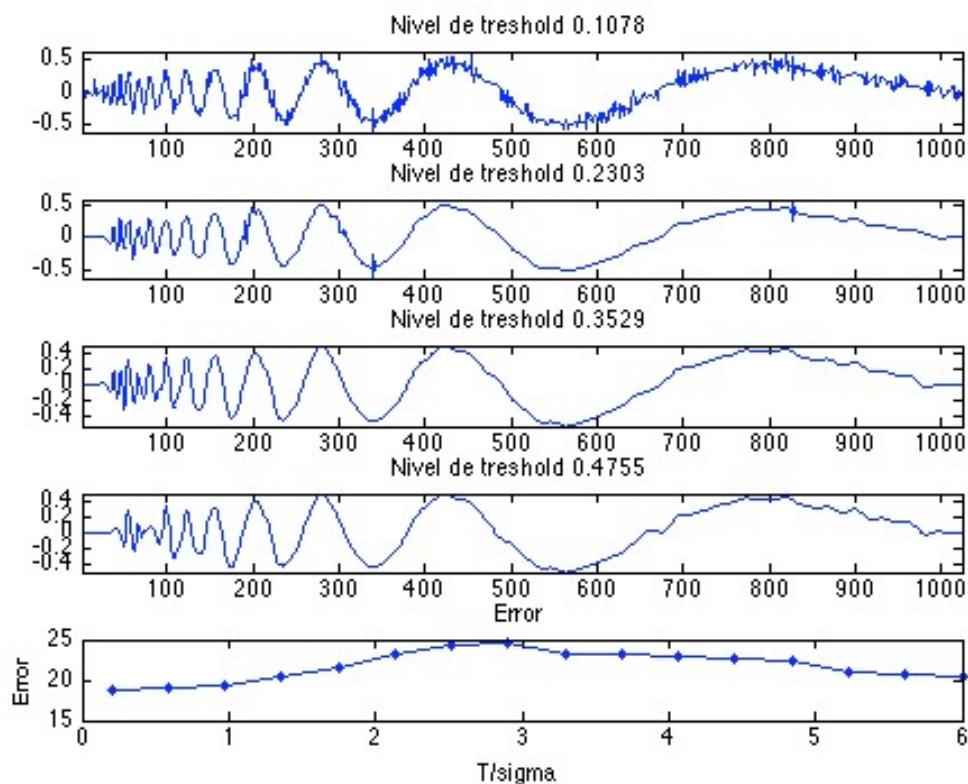


Figure 7.4: Rango de Thresholds para el filtrado de la señal simp

Con esta gráfica se puede obtener el valor correcto del threshold. Una vez teniendo este valor se procede a hacer el filtrado y la gráfica de la señal que se aprecia en la figura anterior.

Se utilizó la wavelet de soporte compacto de Ingrid Daubechies de 4 taps (D4), ya que esta señal es continua y casi no tiene cambios abruptos. A pesar de que las wavelet no filtran muy bien las señales continuas, se puede lograr un buen filtrado. Para la señal compuesta "Y" se utilizó la wavelet de Harr, debido a que la señal presenta dos cambios abruptos muy notables.

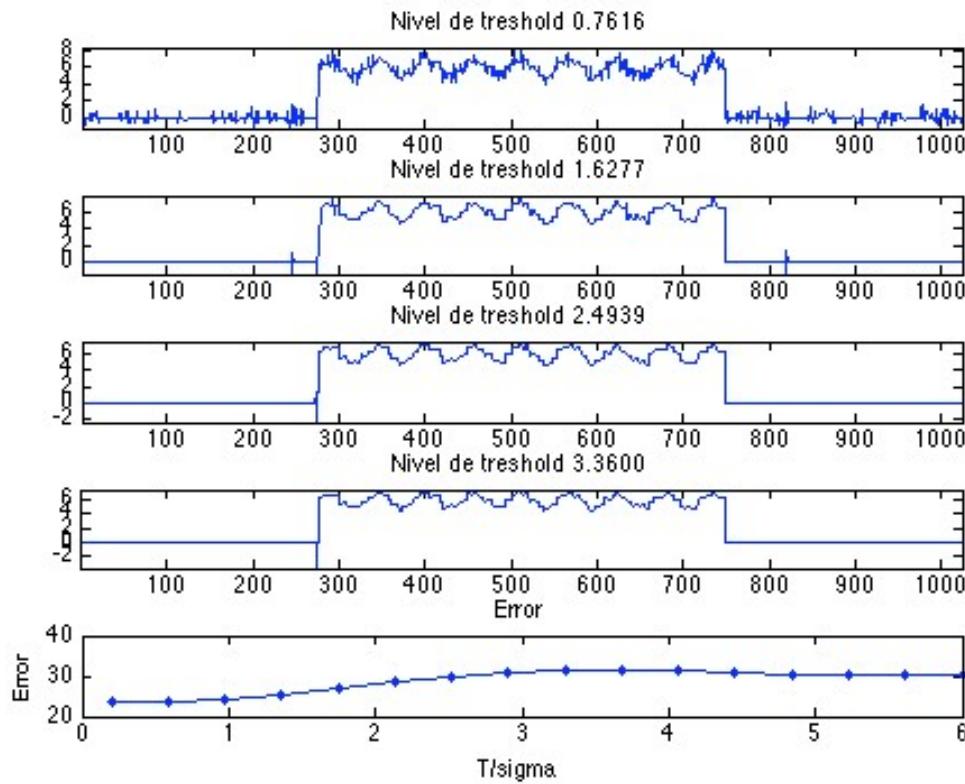


Figure 7.5: Rango de Thresholds para el filtrado de la señal Y

Se procede también con una secuencia en la búsqueda del threshold . Con esto se logra lo que no se puede con Weiner Fourier: una muy eficiente eliminación del ruido en la parte plana de la señal. En la imagen siguiente se puede ver el detalle:

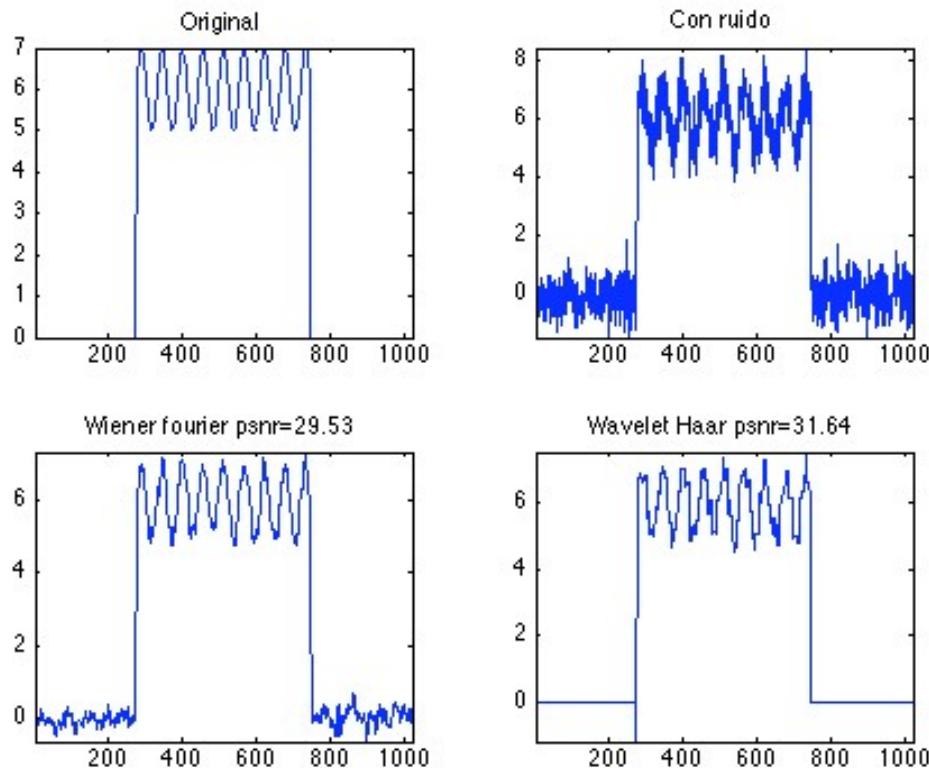


Figure 7.6: Comparativo de filtrado de la señal compuesta Y para wavelets y Wiener Fourier.

7.4 Wavelets vs fourier: Resolución de imágenes

- Esta es una de las aplicaciones más comunes e importantes tanto de la transformada wavelet como de Fourier. En este caso se muestra los resultados al eliminar ruido usando ambas transformadas. La transformada Wavelet tiene muchas ventajas en lo que respecta a filtros de dominio, como es una transformada de dominio frecuencial se comporta mejor en la gran mayoría de casos ante los filtros que usan la transformada de Fourier como base.

El ruido es un problema propio de la naturaleza y está asociado a cualquier toma de datos de la realidad. El problema de su eliminación es muy común, tanto en la adquisición de señales, como en el de imágenes. El ruido en las señales electrónicas es ocasionado por diversas causas, las cuales muchas veces no se pueden evitar. Así mismo en el tratamiento de imágenes, se presenta como una fluctuación aleatoria de los valores en los píxeles que componen dicha imagen.

En este ejemplo de filtrado de imágenes se utilizaron dos imágenes de 256 x 256 píxeles con 256 tonos de grises. La conocida imagen Lena, se les agrega ruido gausiano y se procedió al



Figure 7.7: Filtrado de imágenes

filtrado. En este caso se hizo filtrado por threshold.

Para la imagen de Lena, se utilizó la wavelet de soporte compacto de Ingrid Daubechies, de 4 taps (D4). Utilizando esta wavelet, la cual funciona perfectamente para imágenes de contrastes suaves, se logró una excelente eliminación del ruido, minimizando los ringing artifact y por lo tanto logrando la mejor calidad de filtrado.

En comparación con el filtro Wiener basado en la transformada de Fourier, los wavelets ganan por mucha diferencia. Es posible ver observar se logró una excelente calidad en el filtrado del ruido agregado a la imagen original. En todo proceso de filtrado se tienen algunas pérdidas de la imagen original; en la figura se aprecia el efecto de blurring de la imagen y un ligero pixelizado, el cual es menor con Wavelets que con Wiener Fourier.

Como los filtros usados con la transformada de Fourier eliminan las frecuencias altas, la imagen resultado no tendrá una buena calidad (se le dificulta eliminar grandes cantidades de ruido), mientras que con la transformada Wavelet se eliminan los coeficientes más bajos de las señales permitiendo una eliminación de ruido muy efectiva, cosa que Fourier no logra hacer.

7.5 Extracción de Información en imágenes

La transformada Wavelet resulta especialmente eficiente para extraer información de señales no periódicas, ya que se caracteriza por estar localizada en tiempo y frecuencia, a diferencia de la clásica transformada de Fourier, que únicamente lo está en frecuencia.

La transformada Wavelet permite dividir la señal de partida en dos sub señales, donde la primera de ellas puede entenderse como una copia de la original a menor resolución y la segunda contiene los detalles necesarios para recuperar la señal original.

Esta idea puede iterarse aplicando de nuevo la transformada a la primera sub señal. Si la señal es suave, dichos detalles (coeficientes de altas frecuencias) son de pequeña magnitud y podemos eliminarlos sin pérdida de información, obteniendo así una gran capacidad de compresión.

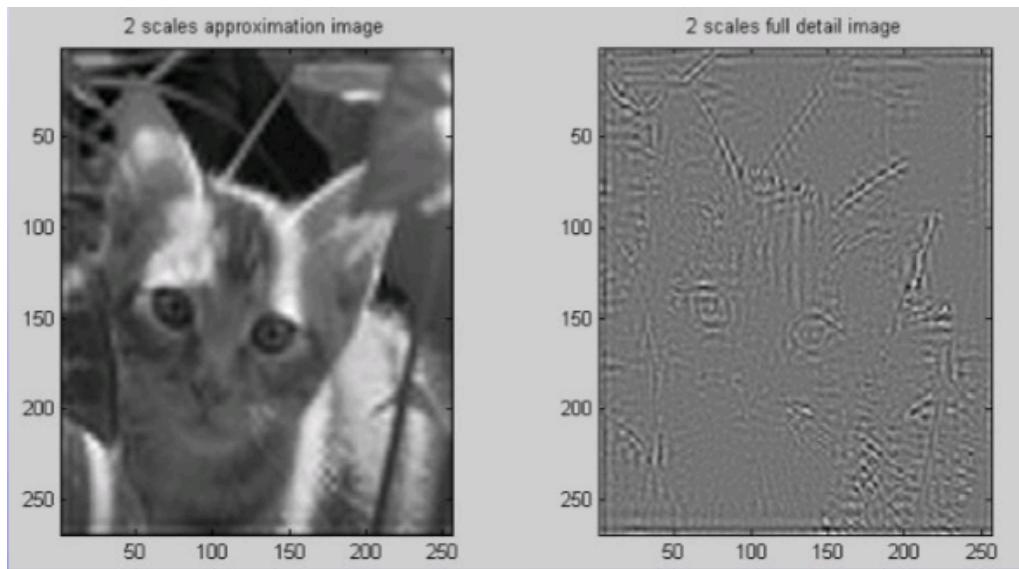


Figure 7.8: Extracción de información

En esta imagen se puede apreciar la aplicación de extracción de información. Luego de tratar la imagen con la transformada Wavelet se puede lograr lograr una "particion" de la imagen en 2 como se puede ver la imagen de la izquierda es una copia a menor resolución y la de la derecha posee los datos y pequeñas características de la imagen (la información esencial de la imagen).

7.6 Programa MATLAB

7.6.1 Aproximación Series de Fourier

En este ejemplo se halla la serie de fourier de la señal rectangular:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < t < 2 \\ -1 & ; \quad -2 < t < 0 \end{cases}$$

Al realizar las operaciones correspondientes encontramos que a_n y a_0 son iguales a 0 y b_n tendrá un valor de 0 cuando $n=par$ y $\frac{4}{n\pi}$ para n impares. Luego la graficamos en matlab y se realiza con el siguiente algoritmo (Este ejemplo permite al estudiante experimentar el código porque puede cambiar el número de armónicos, el intervalo y valores de $f(t)$):

- disp('serie de fourier');
- N= Numero de armónicos deseados;
- t=-2:0.01:2; % denota los intervalos en los que se trabajará
- sum=0; %
- for k=1:N;
- b(k)= 4/(k*pi)% valor de un B_n
- sum=sum+b(k)*sin(k*pi*t/4); % Expresión de la serie total
- end;

- $f=(t<0).*(-1)+(t>=0).*1;$
- $\text{plot}(t,f,'g',t,sum,'b');$ % Representa las series de datos de la función en el plano
- grid
- $\text{title}('aproximación por series de fourier')$ % título que tendrá la gráfica

En este caso se usó los armónicos 1, 5, 50 y los resultados fueron los siguientes:

Con N=1:

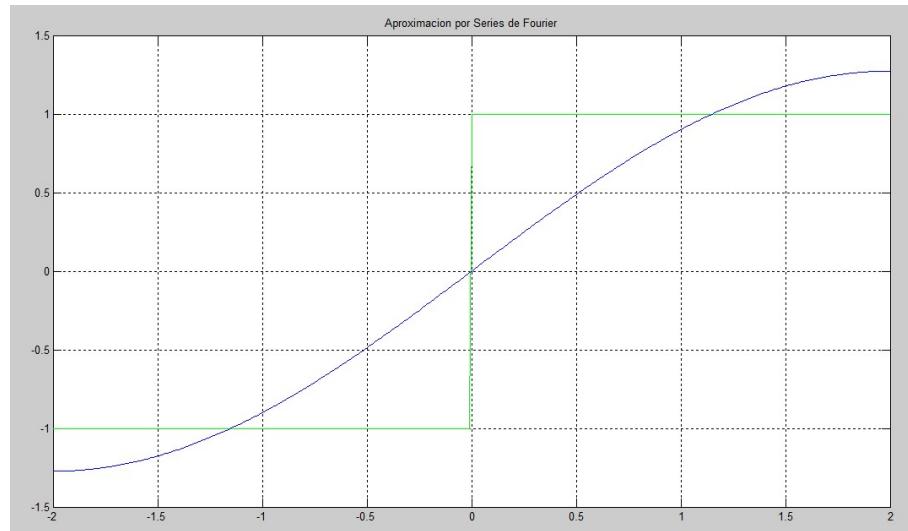


Figure 7.9: Aproximación por series de Fourier

con N=5:

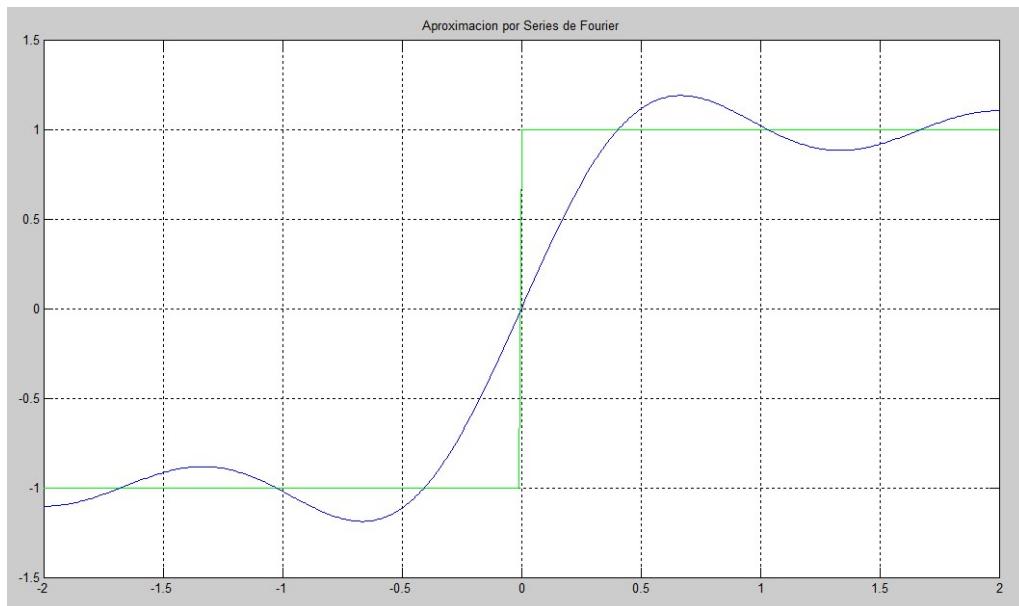


Figure 7.10: Aproximación por series de Fourier

con N=50:

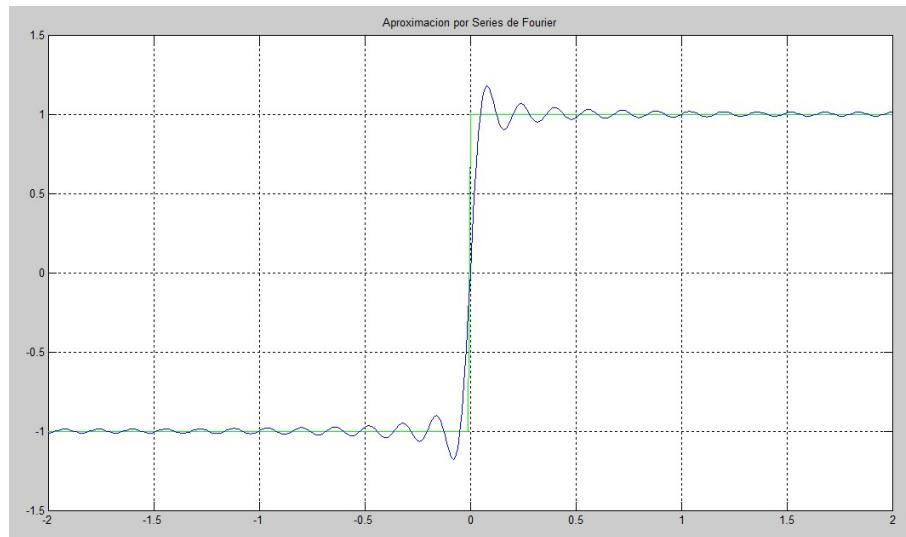


Figure 7.11: Aproximación por series de Fourier

Tomando un n mayor el estudiante puede verificar facilmente que la transformada de Fourier tiende a la señal.

7.7 Serie de Fourier: ejemplo

Este ejemplo proporciona los coeficientes de Fourier de una señal cuadrada de período 0.2 s (frecuencia 5 Hz) y amplitud igual a 1 V (Este ejemplo permite al estudiante manipular el código porque puede cambiar: El número de armónicos, el intervalo y valores de $f(t)$, lo que le permitirá aprender, entender y practicar este tipo de ejercicios):

- Algoritmo:
- clear; % frecuencia de la señal cuadrada ($=1/T$)
- $f = 5;$
- $T = 1/f;$ % acá se determinan los Indices de los coeficientes
- $n = 1:10;$ % Se declaran los Coeficientes de Fourier
- $t = 1:0.01:10;$ % Se declaran los vectores de tiempos
- $cn = 2*(cos(n*pi)-1)./(-2*j*n*pi);$ % Esta es la función para determinar el C_n
- $ct = 2*(cos(t*pi)-1)./(-2*j*t*pi);$ % Esta es la función para determinar el C_t
- $c0 = 1;$ % $c0$ inicia en un valor fijo en este caso en 1
- subplot(2,2,1); % se declara la función para graficar en matlab y el rango que va a tener
- stem(n,abs(cn)); % esta función determina el color que va a tener la gráfica
- ylabel('Magnitud de C_n '); % Añade una etiqueta al eje de la ventana activa,en este caso la magnitud que tomara C_n
- subplot(2,2,2); % se declara la función para graficar en matlab y el rango que va a tener
- plot(t,abs(ct)) % Representa las series de datos de la función en el plano
- ylabel('Envolvente de C_n ') % Añade una etiqueta al eje de la ventana activa,en este caso El

envolvente de Cn

- subplot(2,2,3); % se declara la función para graficar en matlab y el rango que va a tener
- stem(n,angle(cn)); % esta función determina el color que va a tener la gráfica
- ylabel('Fase de Cn');% Añade un etiqueta en el eje y: Fase de Cn

Esta es la gráfica resultado de espectro magnitud y envolvente respectivamente:

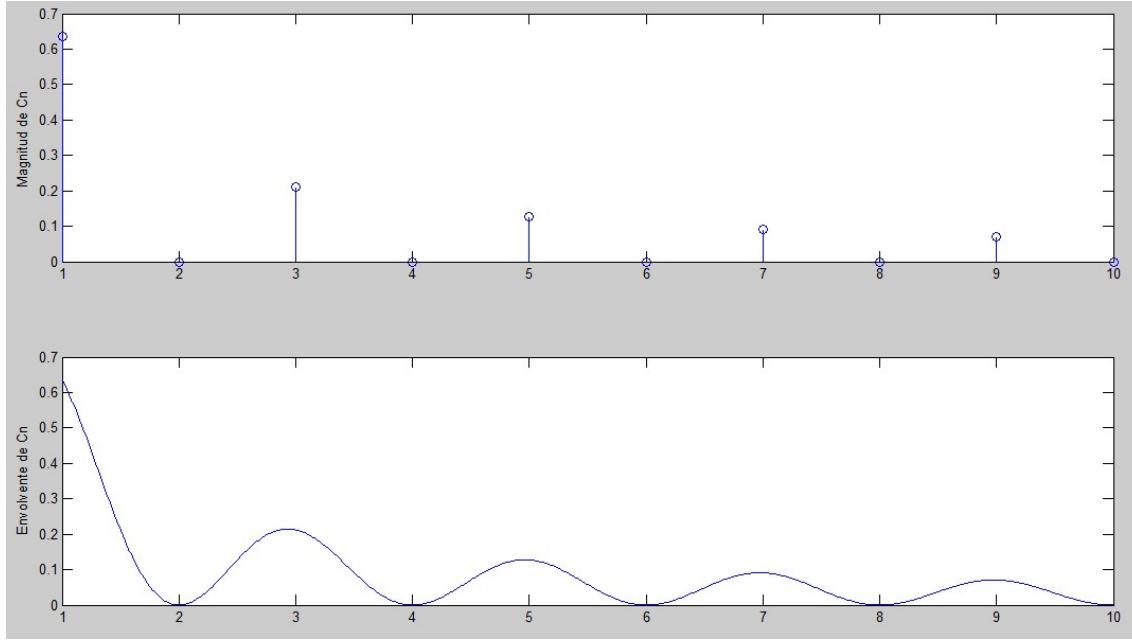


Figure 7.12: Espectro magnitud y envolvente

Esta es la gráfica resultado de espectro fase:

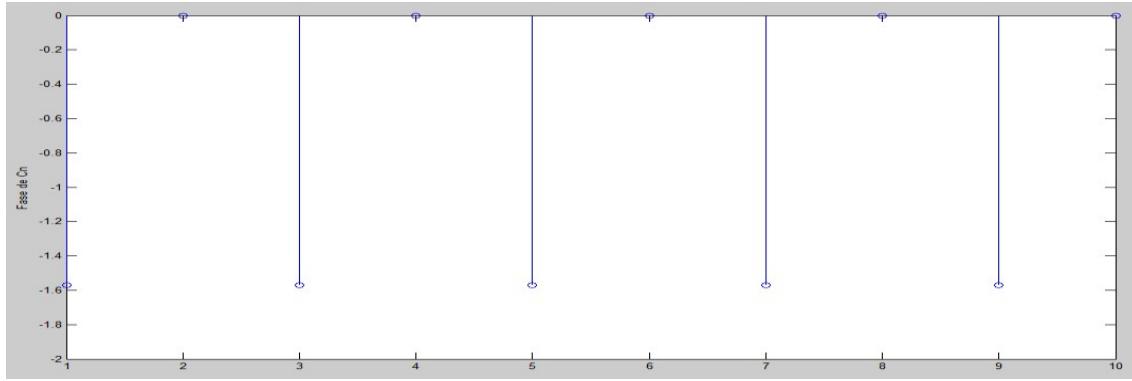


Figure 7.13: Espectro fase

Luego se puede reconstruir para hacer las aproximaciones de fourier con N=5, N=50, N=200.(Recordando que N= al número de armónicos que tendrá la serie), solo se realiza con el N=50 para que el estudiante realice el código y compruebe que las graficas corresponden en N=100 Y N=200.

- clear;
- N = 50; % número de armónicos que tendrá la serie
- f = 5; % Frecuencia
- T = 1/f; % acá se determinan los Indices de los coeficientes
- x = 0:0.001:0.2;
- c0 = 1;
- sum = 0;
- for n=1:1:N
- b(n) = abs((cos(n*pi)-1)./(-j*n*pi)); % función Bn
- a(n)=angle((cos(n*pi)-1)./(-j*n*pi)); % función An
- sum = sum + b(n)*cos(n*2*pi*f*x + a(n)); % Función completa (suma de An+Bn)
- end
- plot(x,sum,'b');% Representa las series de datos de la función en el plano
- title('Aproximación por series de Fourier'); % titulo que tendrá la imagen

Gráfica con N=50:

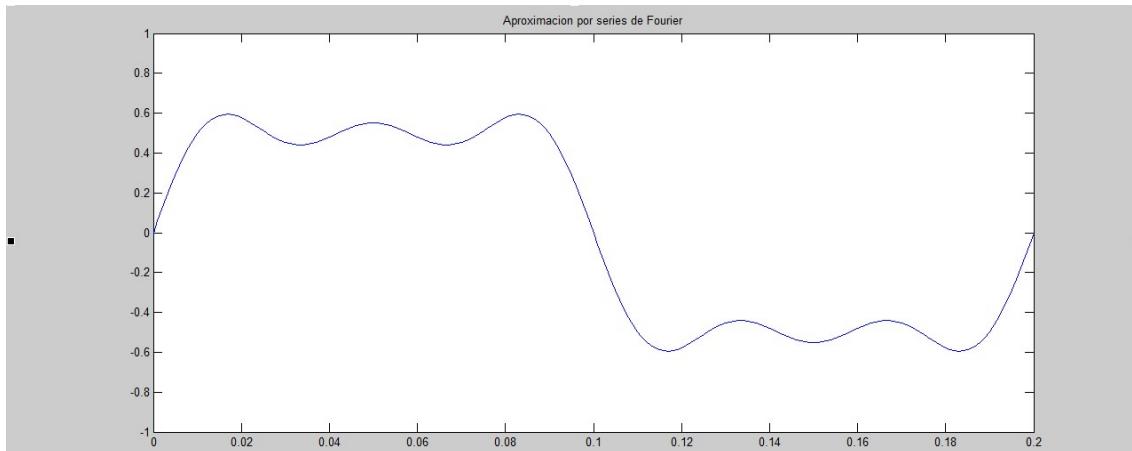


Figure 7.14: Aproximación por series de Fourier

Gráfica con N=100:

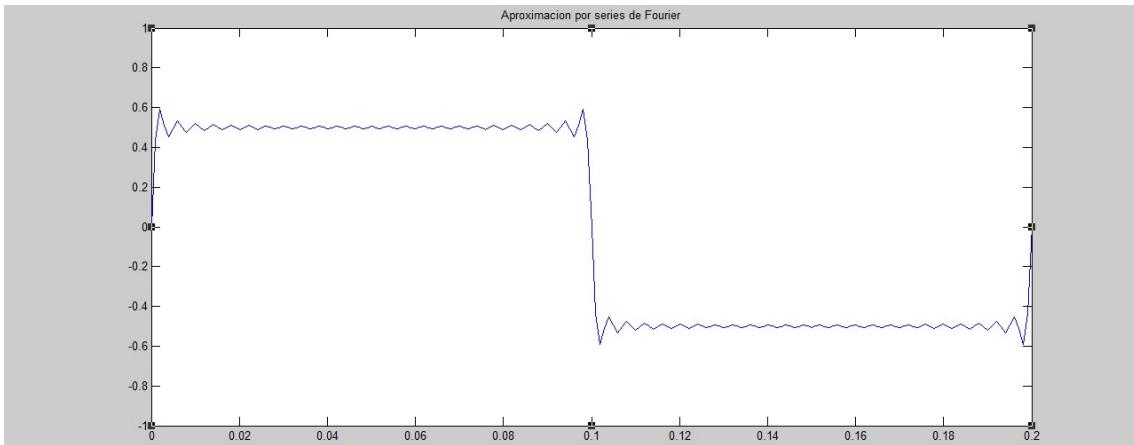


Figure 7.15: Aproximación por series de Fourier

Gráfica con N=200:

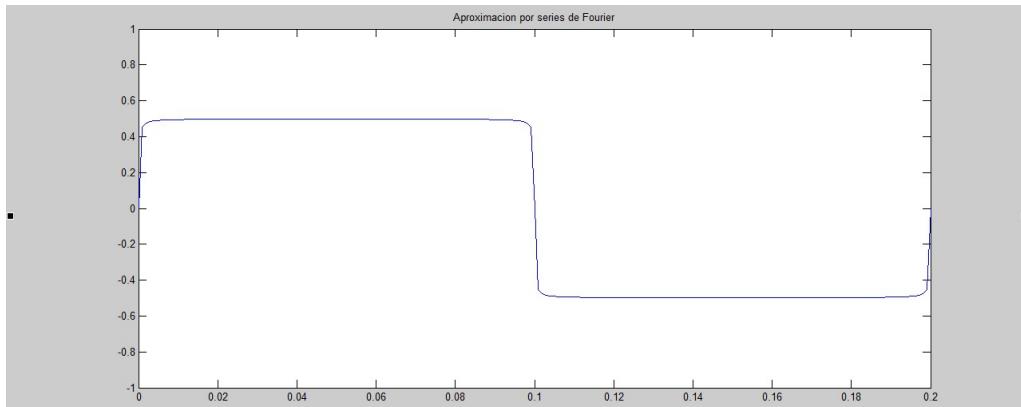


Figure 7.16: Aproximación por series de Fourier

Describe un fichero para dibujar n armónicos de una señal cuadrada de periodo 0.2 y amplitud 1(si se llega a tener dudas sobre el código revisar los ejemplos anteriores en los que se encuentra las funciones de cada linea):

- clear;
- f=5;
- T=1/f;
- n=1:10;
- t0:0.01:1;
- for i=1:50
- for k=1:size (t,2)
- s(i,k)= (2*(1-cos(pi*i))/(pi*i)) * sin(2*pi*i*f*t(k));
- end
- end

```

■ for k=1:size (t,2)
■ st(k)=sum(s(:,k));
■ end
■ st(1)=st(1)+1;
■ plot (t,st,'r');
■ hold on;
■  $f_{cuadrada} = square(2 * pi * f * t, 50);$ 
■ plot(t, f_cuadrada);
■ xlabel ('tiempo');
■ ylabel ('amplitud');

```

Este ejemplo nuevamente permite al estudiante manipular el código, porque puede: Cambiar el número de armónicos, el intervalo y valores de $f(t)$.

En la gráfica se puede apreciar los diferentes armónicos en un solo plano:

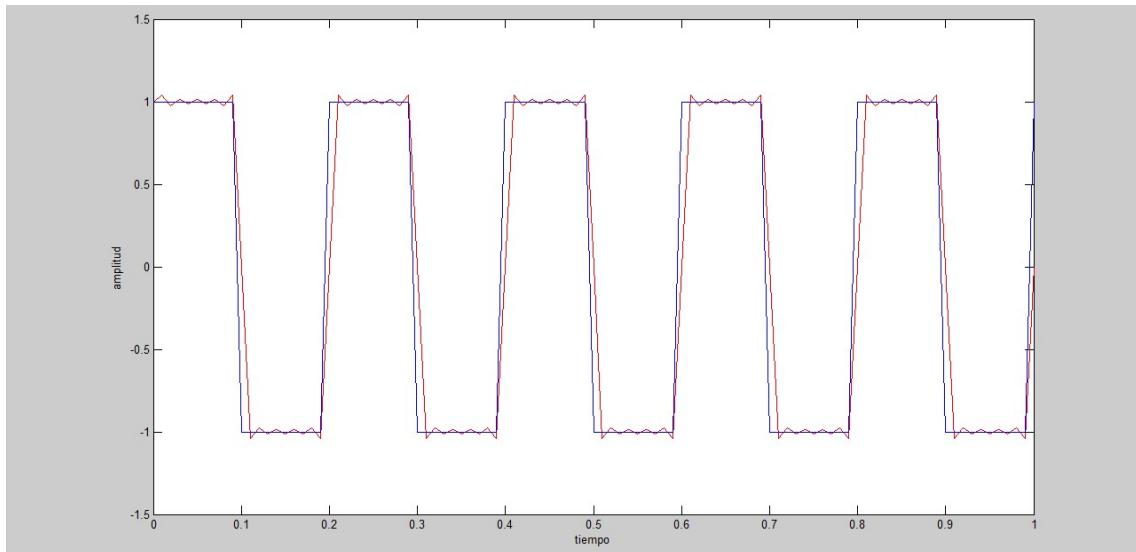


Figure 7.17: Armónicos

7.8 Temperatura de la tierra a una profundidad X:

En este ejemplo se pretende describir la temperatura de la superficie terrestre como una función $f(t)$ periódica en tiempo t y periodo 1 (un año). La temperatura $u(t,x)$ en tiempo $t \geq 0$ y la profundidad $x \geq 0$ es tambien periódica en t y es natural asumir que $|u| \leq \|f\|_\infty$. Bajo esto $u(t,x)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada x en el intervalo $[0, \infty)$, de esto se parte que:

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(x) e^{2\pi i n t}$$

Aplicando los coeficientes de Fourier se llega a que:

$$C_n(x) = \int_0^1 u(t, x) e^{-2\pi i n t} dt$$

Se sabe que la función u satisface la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)$$

La anterior ecuación es la Ecuación del calor. Por lo tanto:

$$C_n'' = \int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) e^{-2\pi i n t} dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{du}{dt} \right) e^{-2\pi i n t} dt = 4\pi i n C_n$$

Los coeficientes C_n satisfacen la ecuación:

$$C_n'' = [\sqrt{(2\pi|n|)}(1 \pm i)]^2 C_n$$

Tomando el signo positivo o negativo de acuerdo a si $n > 0$ ó si $n < 0$. Por otra parte, se sabe que $C_n(0) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \hat{f}(n)$. Resolviendo la ecuación se obtiene que:

$$C_n(x) = \hat{f}(n) e^{(-\sqrt{2\pi|n|}(1 \pm i)x)}$$

Por lo tanto resulta finalmente que:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{(-\sqrt{2\pi|n|}x)} e^{(2\pi i n t \pm \sqrt{2\pi|n|}ix)}$$

Supongamos por ejemplo que la temperatura de la superficie está dada por una función sinusoidal simple $f(t) = \sin(2\pi t)$ (esto significa que la temperatura anual media $\hat{f}(0) = \int_0^1 f = 0$). En este caso, la función u estará dada por:

$$u(t, x) = e^{(-\sqrt{2\pi}x)} \sin(2\pi t - \sqrt{2\pi}x)$$

Esta fórmula muestra que la temperatura a la profundidad $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ queda afectado por el factor $e^{-\pi}$ y está completamente fuera de fase con respecto a las estaciones como lo indica la siguiente figura.

Figure 7.18: Estaciones

7.9 Otras Aplicaciones

Uno de los sistemas de procesado digital de señales más utilizados es el promediador móvil. Se puede demostrar que este sistema es el óptimo cuando queremos recuperar una señal de valor constante que se ve afectada por una serie de interferencias variables con el tiempo.

Se utiliza en el procesamiento de imágenes digitales, como por ejemplo los televisores de alta definición y las cámaras digitales.

El tratamiento de señales acústicas, en el almacenamiento y transmisión eficiente del sonido digital, como por ejemplo, el manejo de señales de ultrasonido para elaboraron de imágenes médicas

7.9.1 Aplicaciones automotrices:

- Sistema anti bloqueo
- Análisis de vibración
- Control motor

7.9.2 Electrónica de consumo:

- Instrumentos musicales electrónicos
- sistemas de impresión y despegue
- juguetes

7.9.3 Medicina:

- Equipos de Diagnóstico, monitorización, prótesis (auditiva, visuales y mecánicas)
- Vídeo conferencia
- Repetidores de señal
- Telefonía celular

7.9.4 Instrumentación:

- Procesamiento sísmico
- Análisis Espectral
- Generación de funciones

7.10 Fourier: Series y transformada:

- Problema isoperimétrico
- Evaluación de series no triviales
- Solución de ecuaciones diferenciales
- Flujos de Calor
- Ecuación de ondas

7.11 Transformada wavelets

- Estudio de discontinuidades (superficies)
- Información frecuencia-tiempo
- Extracción de información en fotografías
- Eliminación de ruido

En el recorrido de este libro se usaron múltiples funciones y/o sintaxis de matlab para realizar los

ejemplos de cada tema, imágenes y aplicaciones pero no se usaron todas las funciones por lo tanto el estudiante puede explorar más funciones y ejemplos de este programa, para ello se recomienda seguir la página web <http://www.mathworks.com/products/matlab/examples.html> la cual tiene una buena documentación y ejemplos sobre diversos temas.

Como también en próximas ediciones el objetivo es facilitar al estudiante la utilización no solamente de MATLAB como software privado sino permitir la opción y selección de un software libre utilizando el programa OCTAVE.

V

Anexos

8	Anexos	181
8.1	Anexo A	
8.2	Anexo B	
8.3	Anexo C	
8.4	Anexo D	
8.5	¿Para que sirve fourier en matlab?	
8.6	Transformada wavelet continua	
8.7	Programa básico para obtener la transformada wavelet discreta de una señal de N muestras empleando multiresolución.	
8.8	Transformada z-Matlab	



8. Anexos

8.1 Anexo A

Integrales con logaritmos

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$$

$$\int \ln(ax + b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax + b) - x, a \neq 0$$

$$\int \ln(x^2 + a^2) dx = x \ln(x^2 + a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x$$

$$\int \ln(x^2 - a^2) dx = x \ln(x^2 - a^2) + a \ln \frac{x + a}{x - a} - 2x$$

$$\begin{aligned} \int \ln(ax^2 + bx + c) dx &= \frac{1}{a} \sqrt{4ac - b^2} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \\ &\quad - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2 + bx + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \ln(ax + b) dx &= \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \ln(a^2 - b^2 x^2) dx &= -\frac{1}{2}x^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2 - b^2 x^2) \end{aligned}$$

Integrales con exponentiales

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}),$$

where $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

$$\int x e^x dx = (x - 1) e^x$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax],$$

where $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(ix\sqrt{a})$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a})$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2}$$

Integrales con funciones trigonométricas

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right]$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right]$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a}$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 ax \cos bxdx &= -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} \\ &\quad + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 ax \sin bxdx &= \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} \\ &\quad - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 ax \cos^2 bxdx &= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} \\ &\quad + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \end{aligned}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax$$

$$\begin{aligned} \int \tan^n ax dx &= \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times \\ &\quad {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \end{aligned}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln |\cos ax| + \frac{1}{2a} \sec^2 ax$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x|$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x|$$

Monomios y funciones trigonométricas

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$$

$$\begin{aligned} \int x^n \cos x dx &= -\frac{1}{2}(i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) \\ &\quad + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^n \cos ax dx &= \frac{1}{2}(ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) \\ &\quad - \Gamma(n+1, ixa)] \end{aligned}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)]$$

Formas Basicas

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

8.2 Anexo B

8.2.1 Tabla de Transformadas de Fourier

Convenciones:

- $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- $u(t)$ es la función paso
- $\delta(t)$ es la función Delta de Dirac

Dominio del Tiempo	Dominio de la Frecuencia
$x(t) = F^{-1}X(w)$	$X(w) = Fx(t)$
$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt} dt$	$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt} dw$
1	$2\pi\delta(w)$
$-0,5 + u(t)$	$\frac{1}{jw}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-c)$	e^{-jwc}
$u(t)$	$\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$
$e^{-bt}u(t)(b > 0)$	$\frac{1}{jw+b}$
$\cos w_0 t$	$\pi[\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)]$
$\cos(w_0 t + \theta)$	$\pi[e^{-j\theta}\delta(w+w_0) + e^{j\theta}\delta(w-w_0)]$
$\sin w_0 t$	$j\pi[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)]$
$\sin(w_0 t + \theta)$	$j\pi[e^{-j\theta}\delta(w+w_0) - e^{j\theta}\delta(w-w_0)]$
$\text{rect}(\frac{t}{\tau})$	$\tau \text{sinc}(\frac{\tau w}{2\pi})$
$e^{-a t }, Ra > 0$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$

8.3 Anexo C

PROPIEDAD	SEÑAL	TRANSFORMADA Z UNILATERAL
—	$x[n]$	$X(z)$
—	$x_1[n]$	$X_1(z)$
—	$x_2[n]$	$X_2(z)$
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Avance en el tiempo	$x[n-1]$	$z^{-1}X(z) + x[-1]$
Retardo en el tiempo	$x[n+1]$	$zX(z) - zx[0]$
Escalamiento en el dominio z	$e^{i\theta n}$	$X(e^{-1\theta}z)$
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
	$a_0^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
Expansion en el tiempo	$x_k[n] = \begin{cases} x[m], & n = mk \\ 0, & n = \text{otro valor para una } m \end{cases}$	$X(z^k)$
Conjugación	$x^*[n]$	$x^*(z^*)$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Acumulación	$\sum_{k=0}^n x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$
Diferenciación en el dominio z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$

PROPIEDAD	Secuencia	Transformada z	ROC
Linealidad	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$\{R_{x_1} \cap R_{x_2}\} \subset ROC$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_o]$	$z^{-n_o}X(z)$	$ROC = R_x$
Escalado en frecuencia	$z_o^n x[n]$	$X(z/z_o)$	$ROC = z_o R_x$
Reflexión temporal	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$ROC = 1/R_x$
Diferenciación de $X(z)$	$n \cdot x[n]$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$ROC = R_x$
Convolución de secuencias	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	$\{R_{x_1} \cap R_{x_2}\} \subset ROC$
Teorema del valor inicial	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	

Funciones de Matlab útiles

- Toolbox de matemática simbólica.
- syms** define los símbolos:

$$\text{syms } n \ k \ z$$
- ztrans** devuelve la transformada Z de la expresión:

$$\text{ztrans}(-9*(0.9)^k + 10) \rightarrow -10z/(10/9z - 1) + 10z/(z - 1)$$
- iztrans** devuelve la transformada Z inversa de la expresión:

$$\text{iztrans}(-10z/(10/9z - 1) + 10z/(z - 1)) \rightarrow -9(9/10)^n + 10$$
- Las expresiones no coinciden con las encontradas en las tablas, pero son equivalentes.
- simplify** simplifica la expresión:

$$\text{simplify}(-10z/(10/9z - 1) + 10z/(z - 1)) \rightarrow 10z^2/(10z - 9)(z - 1)$$
- Tambien se cuenta con la función **residue**:

$[R, P, K] = \text{residue}([1 \ 0 \ 0], [1 \ -1.9 \ 0.9])$

$$\frac{z^2}{z^2 - 1.9z + 0.9} \rightarrow \frac{10}{z - 1} + \frac{-8.1}{z - 0.9} + 1$$

8.4 Anexo D

En esta sección se encontraran códigos para que el estudiante pueda apreciar la importancia de las transformadas y como se hace en matlab,ademas el código le permite probar el funcionamiento de dichos programas y entender mejor lo que se esta haciendo.

8.5 ¿Para que sirve fourier en matlab?

Una de la mas importante aplicaciones es para las DSP donde podemos observar la frecuencia fundamental de una señal en especial.

- TRANSFORMADA CONVENCIONAL DE FOURIER

Syntax:

fourier(f,transvar,evalpoint)

- TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Syntax:

- $Y = \text{fft}(x)$
- $Y = \text{fft}(X,n)$

- TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

Syntax:

- $y = \text{ifft}(X)$
- $y = \text{ifft}(X,n)$

Los siguientes 3 códigos son ejemplos del uso de matlab en algunas aplicaciones que usan la transformada de fourier,no son ejemplos para probar directamente en matlab, solo son para ilustrar la forma en la que se hace y las cosas que se pueden hacer en matlab

8.5.1 Transformada Fourier triangular

- *fuction[y] = seriefouriertriangular(l,m,n,u)*
- *t=l:m:n*
- *y = u * sin(t) / pi;*
- *plot(t,y, 'g')*
- *hold on*
- *y = n - sin(2 * t) / (2 * pi);*
- *plot(t,y, 'b')*
- *hold on*
- *y = n - sin(3 * t) / (3 * pi);*
- *plot(t,y, 'r')*
- *hold on*
- *y = n - sin(4 * t) / (4 * pi);*
- *plot(t,y, 'g')*
- *hold on*
- *y = n - sin(t) / pi - sin(2 * t) / (2 * pi) - sin(3 * t) / (3 * pi) - sin(4 * t) / (4 * pi);*
- *plot(t,y, 'b')*

8.5.2 Código que diferencia la frecuencia fundamental de dos señales de voz de dos personas diferentes

- v = wavread ('vozocar.wav');
- f = wavread ('vozcarlos2');
- sound(v)
- sound(f)
- espv=abs(fft(v));
- espf=abs(fft(f));
- subplot(2,1,1), plot(espv), grid on, zoom, title('espectrofrecuencia de oscar')
- subplot(2,1,1), plot(espf), grid on, zoom, title('espectrofrecuencia de carlos')

8.5.3 En este ejemplo se utilizan otras instrucciones que permiten ver la señal fundamental a través del espejo este código es mas útil que los anteriores

- Fs = 1000;
- T = 1/Fs;
- L = 1000;
- t = (0:L-1) =T;
- X = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);
- y = x + 2*randn(size(t));
- plot(Fs*t(1:50), y(1:50))
- title('signal corrupted with zero-mean random noise xlabel ('time (milliseconds)')

8.5.4 Transformada Fourier en la función polar rectangular

- $fuction[y] = seriefourierpolar(l,m,n,u)$
- el primer armónico fundamental de la señal cuadrada en azul
- $t=l:m:n$
- $y = u * \sin(t) / pi;$
- plott(t,y)
- hold on
- el segundo en verde
- $y = (u / pi) * [\sin(3 * t) / 3];$
- hold on
- plot (t,y, 'g')
- el tercer armónico en ++++
- $y = (u / pi) * [\sin(5 * t) / 5];$
- hold on
- plot (t,y,'+')
- el resultante en rojo, al sumar las armónicas, de la señal cuadrada.siga sumando hasta 10 armónicos y observe que la resultante que se aparece mas a la señal cuadrada

8.6 Transformada wavelet continua

- Ejemplo de la forma de calculo de la Transformada Wavelet Continua (CWT)
 1. Se utiliza la función wavelet gaussiana
 2. El parámetro to indica el termino de traslación
 3. El parámetro s indica la escala, o ancho de la wavelet madre
- close all
- clear all
- npuntos=1000;

```
• t=0:1/npuntos:1;
• to=0.25;
• s=10000;
•  $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$ 
• tiempo=t*1000;
• subplot(2,2,1)
• plot(tiempo,a,'r')
• fill(tiempo,a,'r');
• title('s = 250 to = 250');
• hold on
• x=-8*pi:12*pi/1000:8*pi;
• senal = 60 * cos(x).^5 .* sin(x).^7 ./ (sin(x).^5 + x + eps);
• plot(senal)
• axis([0,1100,-0.5,1])
• grid on
• xlabel('Tiempo [ms]');
• to=0.45;
•  $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$ 
• subplot(2,2,2)
• plot(tiempo,a,'r')
• fill(tiempo,a,'r');
• title('s = 250 to = 450');
• hold on
• x = -8 * pi : 12 * pi / 1000 : 8 * pi;
• senal = 60 * cos(x).^5 .* sin(x).^7 ./ (sin(x).^5 + x + eps);
• plot(senal)
• axis([0,1100,-0.5,1])
• grid on
• xlabel('Tiempo [ms]');
• to=0.65;
•  $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$ 
• subplot(2,2,3)
• plot(tiempo,a,'r')
• fill(tiempo,a,'r');
• title('s = 250 to = 650');
• hold on
• x = -8 * pi : 12 * pi / 1000 : 8 * pi;
• senal = 60 * cos(x).^5 .* sin(x).^7 ./ (sin(x).^5 + x + eps);
• plot(senal)
• axis([0,1100,-0.5,1])
• grid on
• xlabel('Tiempo [ms]');
• to = 0.75;
•  $a = \exp(-s * (t - to)^2 / 2);$ 
• subplot(2,2,4)
• plot(tiempo,a,'r')
• fill(tiempo,a,'r');
• title('s = 250 to = 750');
```

- hold on
- $x = -8 * pi : 12 * pi / 1000 : 8 * pi;$
- $senal = 60 * \cos(x)^5 .* \sin(x)^7 ./ (\sin(x)^5 + x + eps);$
- plot(senal)
- axis([0,1100,-0.5,1])
- grid on
- xlabel('Tiempo [ms]');

8.7 Programa básico para obtener la transformada wavelet discreta de una señal de N muestras empleando multiresolución.

- clear all;
- close all;
- load S;
- L=length(S);
- $[LD,HD] = wfilters('db8','d');$
- $con_{LD} = conv(S,LD);$
- $a1 = con_{LD}(2 : 2 : length(con_{LD}));$
- $con_{HD} = conv(S,HD);$
- $d1 = con_{HD}(2 : 2 : length(con_{HD}));$
- LR,HR = wfilters('db8','r');
- $ups = [zeros(1,length(a1));a1];$
- $ups = ups(:)';$
- $ups = ups(1 : 2 * length(a1));$
- $con_{LR} = conv(ups,LR);$
- $ar1 = con_{LR}((length(HR)) :$
- $(L+length(HR))-1);$
- $ups = [zeros(1,length(d1));d1];$
- $ups = ups(:)';$
- $ups = ups(1 : 2 * length(d1));$
- $con_{HR} = conv(ups,HR);$
- $dr1 = con_{HR}((length(HR)) : (L+length(HR))-1);$
- $sr = ar1 + dr1;$
- $[mod1,mod11] = wavedec(S,1,'db8');$
- $ac = wrcoef('a',mod1,mod11,'db8',1);$
- $[mod1,mod11] = wavedec(S,1,'db8');$
- $dc = wrcoef('d',mod1,mod11,'db8',1);$
- plot(ar1);
- hold;
- plot(ac,'r');

8.8 Transformada z-Matlab

- TRANSFORMADA z

Syntax:

$ztrans(f,trans_index,eval_point)$

- ejemplo 1: Syntax:Entrada
- syms a n x
- $f = a^n;$
- $ztrans(f, x)$ Syntax:Salida

- $\text{ans} = -x/(a - x)$
- ejemplo 2: Syntax:Entrada
- `syms a b c d w x y z`
- `ztrans([exp(x), 1; sin(y), i*z],[w, x; y, z], [a, b; c, d])`
Syntax:Salida
- $\text{ans} = [(a*\exp(x))/(a - 1), b/(b - 1)] \quad (c * \sin(1)) / (c^2 - 2 * \cos(1) * c + 1), (d * i) / (d - 1)^2]$

Bibliografía

VI

9	Bibliografía	199
9.1	Libros	
9.2	Recursos WEB	



9. Bibliografía

9.1 Libros

- HWEI P. HSU. Análisis de Fourier, Editorial Educativa.
- WAYNE TOMASI. Sistemas de Comunicaciones Electrónicas, Editorial Pearson, Cuarta edición.
- KREYSZIG ERWIN. Matemáticas avanzadas para ingeniería, Editorial Limusa Wiley, Tercera edición.
- PETER V. O'NEIL. Matemáticas avanzadas para ingeniería, Cengage Learning Editores, Sexta edición.
- GLYN JAMES. Matemáticas avanzadas para ingeniería, Pearson Educación, Segunda edición.
- ALAN V. OPPENHEIM. Señales y Sistemas, Pearson Education, Segunda Edición.

9.2 Recursos WEB

- Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Aplicaciones [online], Disponible en: <http://www.emis.de/journals/DM/v5/art6.pdf>
- :Los Números Complejos [online], Disponible en: http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Complejos/marco_complejos.htm
- Documentación series de Taylor [online], Disponible en: <http://www.mathworks.com/help/symbolic/taylor.html>
- Anexos tablas de integración [online], Disponible en: http://www.mathwords.com/i/integral_table.htm
- Guía ejemplos integración [online], Disponible en: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/dragan/licenc/varcomI-0708-integr-not.pdf
- Transformada rápida de Fourier [online], Disponible en: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/energias-renovables/>

MATLAB/datos/fourier/fourier_1.html

Fourier transform [online], Disponible en: <http://www.mathworks.com/help/symbolic/fourier.html>

Graficador de series de fourier [online], Disponible en: http://mygnet.net/codigos/matlab/graficacion/graficador_de_series_de_fourier.3276

Toolbox: Control System, Facultad de Ingeniería-UNER, Introducción a Matlab [online], Disponible en: <http://www.bioingenieria.edu.ar/academica/catedras/control/archivos/material/Anexos/apunte%20matlab%20parte1%20y%202.pdf>

Ejercicios sobre transformada z, Alumno: Guillermo M. Tabeni Couvert [online], Disponible en: <http://controldigital.wikispaces.com/file/view/Z+TR.pdf>