

Lista de Ejercicios - 1ero BT

Anthony de los Santos *

2024

*Los ejercicios y comentarios presentados aquí son de mi responsabilidad, por cualquier error visto contactar agregdelossantos@gmail.com

Contenido :

| | | |
|----------|--|-----------|
| 0 | Sobre estas notas. | 3 |
| 1 | Lista 01: Geometría | 3 |
| 2 | Lista 02: Funciones de Primer grado | 6 |
| 3 | Lista 03: Funciones cuadráticas. | 10 |
| 4 | Lista 04: Sistema de ecuaciones e Inecuaciones. | 12 |
| 5 | Lista 05: Función exponencial | 13 |
| 6 | Lista 06: Logaritmos | 13 |

0 Sobre estas notas.

Estas notas estan pensadas para ser una guia en las clases, y también será referencia de ejercicios a realizar.

Estas notas, apuntes, estan en construcción. Se modifica en el correr del curso. **Ultima modificación : Miércoles 25 de Septiembre**

1 Lista 01: Geometría

En esta lista de ejercicios trataremos los temas de Geometría e introducción a Funciones. De Geometría veremos mediatriz, bisectriz y sus aplicaciones. Lo ultimo de esta lista sería el concepto de Función, esto es, dominio, codominio, representación de funciones.

Ejercicio 1

- a) Defina Lugar Geométrico (LG).
- b) Exprese la Circunferencia como LG.

Ejercicio 2 - Primeras construcciones

Mediatriz

En este ejercicios trabajaremos con el concepto de Mediatriz y bisectriz.

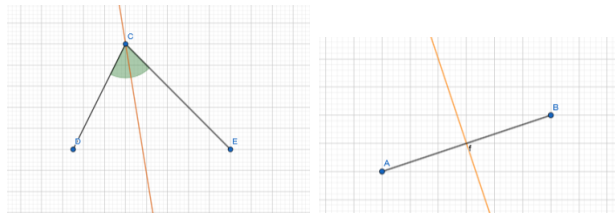
Comencemos con algo simple, dado un segmento de recta AB , de longitud 5cm construir su mediatriz.

Ejercicio a) Construir un triángulo equilatero de lados 6cm y construir la mediatriz en cada uno de sus lados.

Al construir la mediatriz de cada lado de un triángulo, veremos que se intersectan en un punto, a este punto le diremos *circuncentro del triángulo*. Sabemos de Euclides, que dado un punto (centro) y una distancia (radio) podemos trazar una circunferencia (*circunferencia circunscrita*) . Pongamos como centro el punto circuncentro del triángulo y como radio la distancia de este punto a uno de sus vertices.

Al construir esta circunferencia, Que podremos notar ?

Ejercicio b) Trace un triángulo escaleno, halle el circuncentro de tal triángulo y trace la circunferencia.



1) Izquierda: Bisectriz del ángulo en el vértice C. 2) Derecha: Mediatriz del segmento AB.

Bisectriz

Ejercicio c) Construcción de un triángulo isósceles con dos lados de 6cm y determinar la bisectriz de cada uno de sus ángulos.

Al realizar esta construcción, las rectas se intersectan en un punto, el *incentro* del triángulo. Si dejamos como centro de una circunferencia este punto (incentro) y como radio la distancia de tal punto hacia un lado del triángulo, ¿Que podemos decir de esta circunferencia (*circunferencia inscrita*) ?

Ejercicio d) Construir un triángulo equilátero de lados 7cm. Hallar los puntos circuncentro e incentro de tal triángulo con las respectivas circunferencias. *Trazar cada circunferencias con distinto color, si es posible*

Ejercicio 3 - Problemas a resolver

Pintar la ruta

En un tramo de ruta nacional, se debe pintar la división de carriles sobre una línea que equidista de los lados de la ruta. Supongamos un tramo donde sus lados son rectas paralelas (no hay curvas en este segmento de ruta). Como podría resolver este problema ? a esta línea de pintura la llamamos *paralela media*

Además de resolver el problema, explicar el método usado.

Placa metálica

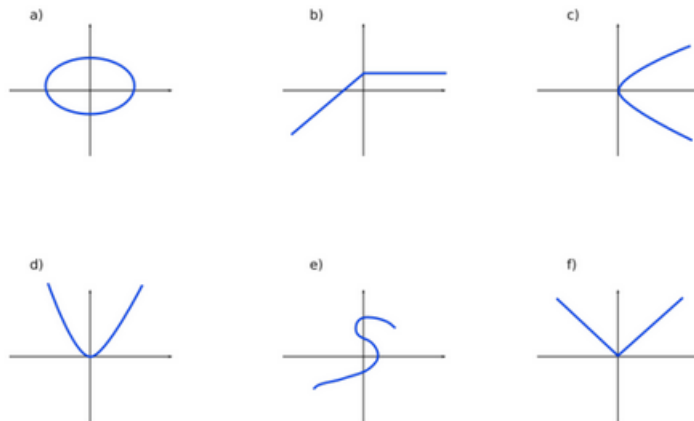
Para el diseño de una pieza metálica, se tiene una placa cuadrada de 5cm sus lados. Se necesita en este diseño colocar un disco metálico que sea interior a esta placa y que sea tangente a sus lados. Además se pide un anillo de aluminio de modo que éste toque los vértices de la placa, de modo que la placa metálica estará dentro de tal anillo.

Construir dicha pieza con las especificaciones indicadas.

Ejercicio 4 - Introducción a Funciones

a) Defina función entre dos conjuntos A, B. ($f : A \rightarrow B$). (Puede apoyarse de lo visto en clase como en otros materiales (libros, internet, ...))

c) **Función a partir de gráfico.** Identificar si corresponde o no a una función según el gráfico.



d) Expresar el área de un círculo como una función de su radio. Esto es, dado un radio (entrada), que la función retorne el área del círculo (salida). Crear una *tabla de valores* con la función con 3 valores como ejemplo.

2 Lista 02: Funciones de Primer grado

En esta lista de ejercicios trataremos el tema de Función de primer grado y sus aplicaciones y un ejemplo de función proporcional de tipo $f(x) = 1/x$.

Ejercicio 1 - Imágenes y tabla de valores.

Ejercicio 1.1)

Se consideran las siguientes funciones,

$$\text{a) } f(x) = 2x + 3 \quad \text{b) } g(x) = 2(x - 1) \quad \text{c) } p(x) = \frac{-3x}{4} - 2$$

Determinar para cada función la imagen de $x = 2$, $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$. Construir una tabla de valores, agregando valores a su elección y realizar la gráfica de las funciones.

Movimiento unidimensional de una partícula

Supongamos el movimiento de una partícula que se mueve sobre una recta, esto es, describe un movimiento rectilíneo. Cuando ésta partícula esta libre de Fuerzas externas actuando sobre ella, no presenta *aceleración*. De aquí que la partícula tendrá *velocidad constante*. Otro caso es cuando la partícula presenta una *aceleración constante*, esto es, $a(t) = a$ siendo a un número real, constante y $a(t)$ la aceleración de la partícula en un instante de tiempo t . Cuando la aceleración es constante, podemos decir que la velocidad de la partícula en un instante t puede expresarse como una función lineal $f(t) = at + b$

Sea $v(t)$ la velocidad de la partícula (*unidades en m/s*) para un instante t (*segundos*), Describir en cada caso el valor de la velocidad en el tiempo t y graficar la función $v(t)$ correspondiente:

a) $v(t) = 2$, Determinar $v(2)$, $v(0)$, $v(5)$ (Opcional : Podrias decir si la aceleración es nula o con un valor distinto de cero, constante ?)

b) $v(t) = 4t + 1$, Determinar $v(0)$, $v(5)$, $v(10)$

c) $v(t) = -9.8t + 2$, Determinar $v(0)$, $v(2)$, $v(4)$

Ejercicio 1.3) Proporcionalidad : Regla de tres

- Definiciones: ¿Qué significa que una cantidad X sea *directamente proporcional* a una cantidad Y ? ¿ Que significa que Y sea *inversamente proporcional* a X ?
- Para un cierto evento, se necesita comprar 24 metros de una tela para decoración. Se sabe que el costo por comprar 15 metros de tela es de \$200 ¿ Cuanto sería el costo por los 24 metros de tela ?
- En un día de trabajo de 8 horas, un operario ha confeccionado 140 cajas para guardar en cada una ciertos dulces. ¿ Cuantas horas tardaría para realizar 240 cajas ?
- En una tienda el paquete de 800g de azúcar se vendía a \$5, actualmente se venden paquetes de 2kg a \$14 ¿ Aumentó el precio del azúcar ? Si es así, ¿ Cual sería la diferencia de precios ?

Regla de tres compuesta

- En una empresa, 10 funcionarios producen 150 piezas en 30 días hábiles. ¿ Cuantos funcionarios se necesitan si la cantidad de piezas a realizar es 200 y cuentan con 20 días hábiles ?
- Se gastaron \$68 en el alumbrado de una casa, con 10 lamparas encendidas durante 4 horas. ¿ Cuánto se gastará con 15 lamparas encendidas durante 3 horas ?

Ejercicio 2 - Cortes con los ejes

Para representar graficamente una función vimos que disponemos de un sistema de coordenadas cartesiano, que posee dos ejes (rectas) perpendiculares. En donde su intersección es el origen de coordenadas.

La gráfica de una función, su *curva*, puede "cruzar" alguno de esos ejes. La intersección o el cruce con el eje vertical, se denomina **Ordenada al Origen**, y este sería determinado por la imagen de $x = 0$, esto es, $f(0)$.

Ahora, puede ser que la curva, cruce por el eje horizontal, también denominado eje de las *abscisas*. El Conjunto de aquellos puntos sobre este eje en donde la curva intersecta, se denomina **Cero de la función** o también el conjunto de **raíces de la función** $f(x)$.

Estos puntos se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$

Lo anterior se puede expresar en un lenguaje de conjuntos como,
 $C = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ Donde C es el conjunto de Ceros, para una función $f : A \rightarrow B$

Ejercicio 2.1)

Dada las siguientes funciones, hallar los puntos de corte con los ejes. Esto es, determinar la ordenada al origen, (*Corte con el eje vertical Y*), esto se dará cuando $x = 0$. Corte con el eje de las abscisas, (*corte con el eje horizontal X*), esto se dará cuando $f(x) = 0$. Realizar gráfica.

a) $f(x) = 2x + 4$ b) $g(x) = -3(x - 5)$ c) $h(x) = \frac{x}{7} - 7$ d) $y(x) = \frac{2x}{3} + \frac{3}{2}$

Ejercicio Opcional: Programación

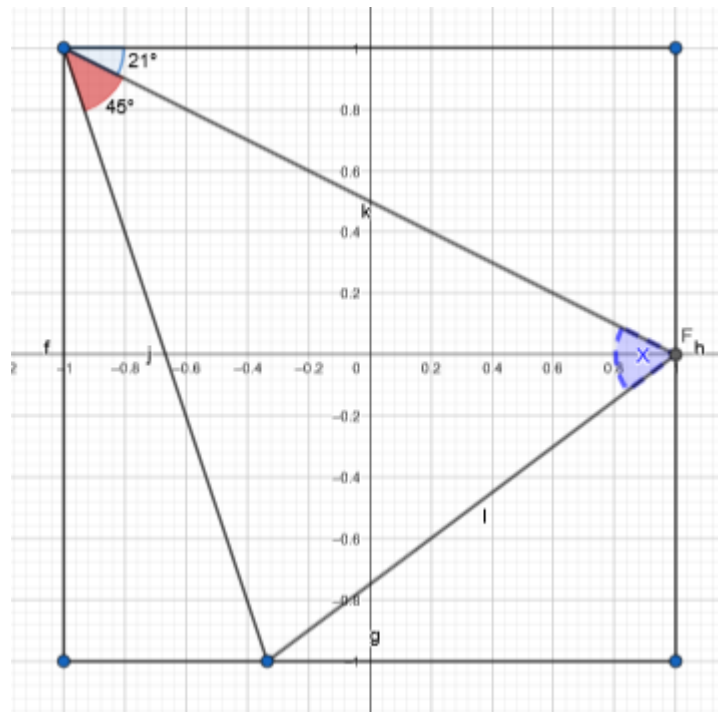
Escribir un programa (En el language que deseen, Java, Python,c++,...) que determine los cortes con los ejes. Un ejemplo es definir una función `cortesPrimerGrado(a,b)`, que toma como entrada dos valores (a,b) de tipo Float, y retorna la salida en pantalla los cortes con los ejes (X,Y).

Verificar aplicando el programa con las funciones del Ejercicio 2.1)

Ejercicio 3)

Ejercicio 3.1) Una poco de Geometría

a) Dada la siguiente figura, determinar el valor de x .



b) Indicar los cortes con los ejes de la función, $p(x) = 2x + \frac{\pi}{4}$.

c) Resolver $p(x) = \pi$

Ejercicio 3.2)

Dada las siguientes funciones, $f(x) = 5x - 3$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + 3$

a) Graficar en un mismo sistema de coordenadas cartesiano, ambas funciones. Esto es, una gráfica ambas funciones.

Se intersectan estas funciones ?

b) Hallar, *si es que se intersectan*, las coordenadas del punto de intersección.

Ganancias en la Gomería

En un taller de mecánica automotriz para el sector de Gomería deciden incorporar la venta de neumáticos. Para comenzar con esta propuesta, deciden vender cubiertas rodado 13, R13, de distintas marcas.

La administración obtiene un modelo matemático para estimar la ganancia de ventas, este modelo se expresa como,

$$G(x) = 12 + 40x$$

En donde 12 es un valor fijo en Dolares, y por cada neumático vendido, un valor de 40 dolares.

a) Convertir cada valor que esta en Dolares a Pesos Uruguayos.

b) Calcular la ganancia $G(x)$ si se venden, 5, 8, 10, 13 neumáticos.

c) Determinar cuantos neumáticos se necesitan para que la gancia sea de, \$ 3600, \$ 6880, \$ 11680

Función Inversa

a) Determinar las condiciones para la existencia de una función inversa de $f : A \rightarrow B$

b) Dada las siguientes funciones, hallar la inversa de cada una y realizar una tabla de valores.

i) $f(x) = 3x - 2$ ii) $g(x) = 7x + 7$ iii) $h(x) = \frac{-x}{2} - 3$ iv) $y(x) = \frac{x}{10} + 10$

c) Graficar 2 funciones de la parte b) con su respectiva inversa.

d) **Escala de Temperatura**

Las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

Donde C es un dato de entrada, una temperatura en Celsius, y $F(C)$ es la correspondiente temperatura en Fahrenheit.

i) Encontrar F^{-1} y discutir el significado.

ii) Hallar $F^{-1}(86)$

3 Lista 03: Funciones cuadráticas.

Una función cuadrática o *función de segundo grado* es una función polinomial de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Primeros ejercicios: Completar la tabla de valores, con los valores de entrada indicados, y graficar las siguientes funciones:

- $f(x) = x^2 - 2$, $x = \{-2, -0.5, 0, 1, 3\}$
- $g(x) = x^2 - x$, $x = \{-4, -2.5, -1, 1, 2.25\}$
- $h(x) = x^2 + 2x - 3$, $x = \{-2, -1.5, -1, -0.5, 0\}$

Podría ser necesario agregar más valores de entrada en la tabla de valores para graficar las funciones.

Un poco de álgebra

Dada las siguientes expresiones algebraicas, desarrollar y expresar la igualdad.

a) $(x - 4)(x + 4) =$

b) $x^2 + 2x =$

c) $x^2 - 25 =$

d) $2x^2 - 4x =$

El Cero de la función

Recordemos que el Cero de una función es el conjunto de soluciones a la ecuación $f(x) = 0$, esto es, el conjunto de raíces de la función (cortes con el eje horizontal, X).

Parte A)

Determinar los ceros (raíces) de las siguientes funciones y realizar un bosquejo de su gráfica. *(Puede y conviene utilizar alguna herramienta computacional para las gráficas, ej: Geogebra.)*

a) $f(x) = x^2 - 16$

b) $g(x) = x^2 + 2x$

c) $h(x) = 2x^2 - 4x$

d) $y(x) = x^2 + 25$

Parte B)

Parte B) El caso general : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Determinar los ceros para las siguientes funciones y graficar.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $g(x) = -x^2 - 6x - 8$

c) $h(x) = 2x^2 + 2x - 12$

d) $y(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

Ejercicio Opcional: Programación

Escribir un programa (En el lenguaje que deseen, Java, Python, c++,...) que determine los cortes con los ejes de una función cuadrática. Un ejemplo es definir una función `cortesSegundoGrado(a,b,c)`, que toma como entrada los coeficientes (a,b,c) de tipo Float, y retorna la salida en pantalla los cortes con los ejes (X,Y).

Verificar aplicando el programa con las funciones anteriores.

Máximo, mínimo. Coordenadas del vértice

Determinar las coordenadas del vértice de las funciones anteriores (*Ejercicio 3.1 Parte B*). Indicar si se trata de un máximo o un mínimo.

Ingresos en la tienda

En una determinada tienda, se sugiere que el ingreso generado por vender cierta mercadería está dado por la función $I(x) = 80x - 0.5x^2$. En donde la unidad de $I(x)$ es el dólar.

¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

Corral para équinos

En una chacra se tiene 740m de cerca para cercar un corral rectangular para équinos. Suponiendo el ancho del corral variable $a = x$ y su largo $l = 370 - x$

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.

(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

Ejercicio Opcional: Programación

Escribir un programa (En el lenguaje que deseen, Java, Python, c++,...) que determine las coordenadas del vértice de una función cuadrática y exprese si se trata de un máximo o un mínimo.

Verificar aplicando el programa con las funciones anteriores.

4 Lista 04: Sistema de ecuaciones e Inecuaciones.

Sistema de ecuaciones lineales 2 x 2

Primeros ejercicios

1) Hallar dos números cuya suma es 2024 y cuya diferencia es 2012.

2) La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más el doble del más pequeño. Determinar tales números.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y realizar su gráfica

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

5 Lista 05: Función exponencial

6 Lista 06: Logaritmos