Límites y continuidad.

Anthony de los Santos *

24/10/2023

*Los ejercicios y comentarios presentados aquí son de mi responsabilidad, por cualquier error visto contactar *agregdelossantos@gmail.com*

Contenido :

0 Sobre estas notas.

Estas notas estan pensadas para ser una guia en las clases, y también será referencia de ejercicios a realizar.

—

Recomiendo seguir la **referencia bibliográfica** para un estudio más profundo. Como también apoyarse y utilizar herramientas computacionales para realizar gráficas y cálculo de límites. Algunos ejemplos de tales herramientas: Geogebra, matemática con Python, Octave, etc...

—

1 Primeras nociones de 'proximidad'.

1.1 Noción intuitiva de límite

Supongamos la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4$.
Queremos estudiar el comportamiento de la función f cuando los valores del dominio, los valores de entrada, se aproximan a 1. Esto ultimo podría expresarse como ($x \to 1$) que se puede leer como : *el valor x se aproxima hacia 1 ; x tiende hacia 1* .

Para esto, lo que podemos hacer es una tabla con valores $x|f(x)$.

x	$f(x) = x^2 - 4$
$0,75$	$f(0,75) = -3,43$
$0,9$	$f(0,9) = -3,19$
$0,99$	$f(0,99) = -3,019$
$1,001$	$f(1,001) = -2,9979$
$1,01$	$f(1,01) = -2,9799$
$1,05$	$f(1,05) = -2,8975$

Con esta tabla, podríamos conjeturar, suponer, que cuando x se aproxima hacia 1, $(x \to 1)$, la función $f(x)$ se aproxima hacia el valor de -3, esto lo denotamos como $f(x) \to -3$.

Decimos entonces que la función tiene límite -3 cuando x tiende hacia 1.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -3$$

1.2 Distancia entre dos puntos en R

Tengamos ahora una función real, $f(x) = 2x - 2$ y conjeturemos el límite de $f(x)$, cuando x tiende hacia 0. $(x \to 0)$

Por el momento, podemos realizar una tabla de valores, como en la parte anterior, y estudiar el comportamiento de $f(x)$, cuando $x \to 0$

Al realizar este estudio podríamos decir que $f(x) \to -2$ cuando $x \to 0$

Ejercicio : Realizar la tabla de valores y verificar la conjetura del Límite de $f(x)$

Una pregunta que surge, ¿ Que tan próximo está f(x) de -2 ?

Esto depende de cuanto queramos que sea esa proximidad. Pero para eso, debemos tener una idea de 'medida' en los numeros reales, o mejor dicho, una noción de distancia entre dos puntos.

Dado dos puntos, $a, b \in \mathbf{R}$ se define la distancia entre a,b como:

$$d(a,b) = |a-b|$$

Supongamos el caso en que deseamos que $f(x)$ diste de -2 *(su límite)* menos que 1 unidad. Esto es, $|f(x) - (-2)| < 1$

Pasamos al desarrollo de cuentas :

$$|f(x) - (-2)| < 1$$

$$|(2x-2) - (-2)| < 1$$

$$|2x - 2 + 2| < 1$$

$$|2x| < 1$$

$$2|x| < 1$$

$$|x| < \tfrac{1}{2}$$

$$|x - 0| < \tfrac{1}{2}$$

Que interpretar de esto? Recordemos que conjeturamos el límite de f(x) cuando x se aproxima hacia 0. Dicho límite es -2.

Lo que procuramos es, aquellos valores de x que permiten que $f(x)$ este a menos de 1 unidad del límite -2.

Mejor dicho, cuando la distancia entre x y 0 sea menor que $\frac{1}{2}$, $|x - 0| < \frac{1}{2}$, la función $f(x)$ estará próxima a -2, tal distancia entre f(x) y -2 es menor a 1 unidad, $|f(x) - (-2)| < 1$

Otra cuestión ... Si ahora quiero que f(x) diste de -2, un valor menor que 0,05 unidades. ¿ Que distancia debe estar x de 0 para que f(x) diste de -2, menos de 0,05 unidades ?

Respuesta : $|x - 0| < 0,025$

Investigar y confirmar estos resultados con la tabla de valores $x|f(x)$.

2 Definiciones formales

2.1 Definición de límite

Siguiendo con la función y ejemplo anterior, vimos que si deseamos que la distancia de $f(x)$ a su límite L sea menor que 1 unidad, tenemos que x debe estar a una distancia de 0, menor que 1/2. Esto lo podemos hacer con cualquier valor positivo, *tan pequeño cuanto quieramos*. La distancia de mi función $f(x)$ a su límite L tan *próxima*. Esto si, suponiendo que este límite existe. Pasamos entonces a la definición formal:

La función $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende hacia un valor a si,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Esta es la conocida definición $\epsilon - \delta$ *(epsilon-delta)* de Límite de una función en un punto.

Ejemplo: Probar que $\lim_{x \to 0} 2x - 2 = -2$

Para esto trataremos de encontrar un δ en función de ϵ tal que se cumpla lo de la definición.

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{en este caso, } |(2x - 2) - (-2)| < \epsilon, \text{ con } \epsilon > 0$$

$$|2x| < \epsilon, \text{ que lo puedo expresar como, } |2(x - 0)| < \epsilon$$

$$2|x - 0| < \epsilon, \text{ por último, } |x - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

Defino entonces $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, tal que se cumple lo expresado en la definición.

Esto es, cuando la distancia de cualquier punto x a 0, sea menor que $\epsilon/2$, $f(x)$ estará tan próxima a su límite, a una distancia menor que ϵ, sea este valor el que se quiera, tan pequeño, pero mayor a cero ($\epsilon > 0$).

2.2 Operaciones con Límites

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$

$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x))$	$L \pm M$
$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$	LM
$\lim_{x \to a} kf(x)$	kL siendo $k \in R$
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$	$\frac{L}{M}$
$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{L}$
$\lim_{x \to a}(f(x))^n$	L^n

Ejemplo: Si $\lim_{x \to -2} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -2} g(x) = -1$, esto es, $L = 1$, $M = -1$

a) $\lim_{x \to a}(f(x) + 5g(x)) = -4$

b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -1$

c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$

Compruebe y explique que propiedades utilizó para el cálculo de los límites.

—

Cálculo de límites, primeros casos indeterminados $\frac{0}{0}$

Supongamos que tenemos una función $f(x) = x^2 + 3x - 5$ y queremos saber su límite cuando x tiende hacia 3
Lo que podemos hacer es de cierta forma 'evaluar' la función en ese punto, cuidado por que la $f(x)$ no necesita estar definida en ese punto para calcular el límite.

$$\lim_{x \to 3} x^2 + 3x - 5 = (3)^2 + 3(3) - 5 = 13$$

Decimos que el límite de la función $f(x)$ es 13 cuando $x \to 3$

En general, una 'estrategia' para el cálculo de límites es evaluar la función en el punto de tendencia y estudiar el resultado.

Supongamos ahora que queremos cálcular el límite, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Esta función No esta definida cuando $x = 3$ ya que su denominador es nulo cuando x vale 3.

Por ende tenemos que, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$

En este caso decimos que el *límite es indeterminado*. Existen otros tipos de indeterminados, que ya veremos. Cuando esto sucede, hay distintas estrategias a seguir para tratar de resolver esa indeterminación.

En este caso, basta con un poco de álgebra para resolver el problema.

Primero veamos que $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

por ende, se puede escribir el límite como $\lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$

Si evaluamos el límite seguirá indeterminado, pero este límite se puede simplificar, cancelando los terminos $(x - 3)$ que estan en el numerador y en el denominador.

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$$

por ende, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

3 Lista de Ejercicios - Límites - Aproximaciones y operaciones básicas

Ejercicio 1) Aproximaciones

Aproximar el límite de las siguientes funciones utilizando una tabla de valores. Pueden ayudarse con calculadoras o distintos programas de cálculo.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9^x-5^x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$

Ejercicio 2) Operaciones con límites

Teniendo que, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -2$. Resolver

a) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+5g(x))$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$

Ejercicio 3) Prueba de límite utilizando la definición

Probar que $\lim\limits_{x\to 10} 3-\dfrac{4}{5}x = -5$

Ejercicio 4) Cálculo de límites

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$

Ejercicio 5) Investigar

Dado el siguiente límite, discutir sobre su valor.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+6}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

4 Limites laterales, Limite infinito

Cuando queremos saber el Límite de una función cuando los valores de x tienden hacia un valor a , lo que hacemos es 'aproximarnos' del punto a, tomando valores menores y mayores que este, muy próximos al valor mismo de a. Esto es, si tengo el caso en que $x \to 2$ entonces puedo tomar los siguientes valores que se aproximan hacia 2 :

$$1,80 \mid 1,90 \mid 1,99 \mid 1,9999 \mid 2,0001 \mid 2,001 \mid 2,01 \mid 2,05$$

Supongamos que ahora quiero estudiar el caso, cuando me aproximo hacia 2, pero con aquellos valores mayores a 2. En este caso decimos que me aproximo hacia 2 por la derecha y lo denotamos $x \to 2^+$

Estos valores podrían ser : $2,0001 \mid 2,001 \mid 2,01 \mid 2,05$

Caso análogo para aproximarme con valores menores a 2. Decimos que me aproximo hacia 2, por la izquieda y lo denotamos $x \to 2^-$

Definición de Límites laterales

El Límite de la función $f(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha existe y es igual a L, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ si tenemos que,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejercicio : Escribir la definición de Límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia el punto a, por la izquierda; $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Ejemplos:

a) Calcular el límite por derecha e izquierda (límites laterales) cuando x tiende hacia 0, de la siguiente función,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

b) Calcular límites laterales, cuando x tiende hacia 1 de la siguiente función g(x),

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$$

c) Calcular $\lim\limits_{x \to -4} |x+4| \quad (h(x) = |x+4|) \to 0$ cuando $(x \to -4)$
Ejercicio: Comprobar

Ejercicio: Calcular los límites anteriores, pero teniendo en cuenta su gráfico. Esto es, sin cálculos, solamente viendo la gráfica de la función.

Concepto Importante!!!
El límite de una función existe, sí y solamente si, los límites laterales existen y son ambos iguales.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ sii } \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Límites en el infinito

Tenemos del Ejercicio 5.b) de la Lista de ejercicios, que si $(x \to 0^+)$, $1/x^2$ toma valores muy grandes, lo mismo sucede cuando $(x \to 0^-)$
En este caso decimos que $(f(x) = 1/x^2 \to \infty)$, la función tiende hacia el infinito.

Ejercicio: Investigar que pasa con $log(x)$ cuando $x \to 0^+$

Definición : Límite infinito cuando $x \to a$

Decimos que el límite de una función $f(x)$ tiende hacia el infinito, cuando $x \to a$ si para cualquier valor $M > 0$, se tiene

$$|x - a| < \delta \implies f(x) > M$$

Ejercicio: Completar la definición cuando $(f(x) \to -\infty)$

Usamos la notación $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ En estos casos se dice también que la *función* $f(x)$ *es un infinito en cierto punto* a.

5 Lista de Ejercicios: Cálculo de Límites, Límite infinito

Ejercicio 6) Cálculo de límites - 2da parte

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 16x - 24}{x - 3}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \leq -2, \\ -4x + x & \text{si } x > -2. \end{cases}$ Hallar el límite de $f(x)$, cuando $x \to -2$

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Ejercicio 7)

Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 3^+} log(x-3)$

b) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1}$

d) $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{log(x+2)}{3}$

6 Infinitos, infinitésimos

6.1 Límites y asíntotas

Hasta el momento, estudiamos el comportamiento de una función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima hacia un determinado valor a, $(x \to a)$.

Desde ahora, consideramos el caso en el que x toma valores arbitatrios, y suficientemente grande. Lo notaremos como ($x \to \infty$)
También se considera el caso análogo, cuando x toma valores muy pequeños, o negativos, en este caso lo notamos $(x \to -\infty)$

Como el caso anterior diremos que la función $f(x)$ tiene límite L cuando la variable x tiende hacia el infinito ($x \to \infty$) si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : |x| > N \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\text{Notación: } \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Ejercicio : Completar la definición para cuando $(x \to -\infty)$

Comencemos estudiando el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ cuando $x \to \infty$ *Ejercicio : Gráficar la función con ayuda de alguna herramienta computacional, ej: Geogebra, Python, etc...*

Planteo de cuentas:

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ Tendiendo que podemos escribir $x^2 - 1 = x^2(1 - \dfrac{1}{x^2})$ y lo mismo para $x^2 + 1 = x^2(1 + \dfrac{1}{x^2})$ El límite lo expresamos como:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Cuando $x \to \infty$ los terminos $\frac{1}{x^2}$ tienden hacia 0

$$\text{Por ende, } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

El hecho de que $f(x)$ tiende hacia 1 cuando $x \to \infty$ tiene un signficado gráfico también. La gráfica de la función $f(x)$ se aproxima a la recta $y = 1$ cuando x toma valores suficientemente grandes. Decimos entonces que $f(x)$ tiene una Asíntota horizontal $y = 1$, cuando $x \to \infty$

Definición: Decimos que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal, $y = L$ cuando:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

—

El caso en que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ decimos que en la recta $x = a$ la función $f(x)$ tiene una asíntota vertical, de ecuación $x = a$ Ejemplo: Investigar asintota vertical de $g(x) = \frac{1}{x+2}$ cuando $x \to -2^{\pm}$

6.2 Ordenes de infinitos e infinitésimos

Ejercicio: Realizar y comparar en una tabla de valores las funciones e^x, x, $log(x)$, cuando $x \to \infty$

Definiciones: Decimos que una función $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Decimos que $f(x)$ es un infinito si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Funciones comparables : f y g ambas funciones, decimos que son comparables si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ existe en los Reales o son infinitos.

Discutir e introducir ordenes de infinitios e infitésimos en clase ...

Decimos que dos infinitésimos o infinitos f y g son equivalentes cuando $x \to a$, y lo anotamos $f(x) \sim g(x)$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Sean f y g infinitésimos o infinitos cuando $x \to a$. Supongamos que existe el límite: $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y tenemos también que $f(x) \sim h(x)$

entonces, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{g(x)}$

Análogamente, si existe $\lim_{x\to a} f(x).g(x)$, tenemos que,

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} h(x).g(x)$$

Esta herramienta es útil a la hora de calcular límites que parecen complejos pero si conocemos algunos infinitos o infinitésimos equivalentes puede que se simplifiquen los cálculos.

Ejemplo :

Supongamos que deseamos calcular el límite $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
Si hacemos tender x hacia 0, llegamos a una indeterminación del tipo 0/0. Si bien hay distintas herramientas para resolver casos indeterminados, este caso ya es un tanto más complejo que los anteriores.

La idea en este caso es tratar de usar equivalentes para resolver dicho límite. Por un lado, tenemos la equivalencia $e^x - 1 \sim x$ cuando $x \to 0$

Entonces, este límite puede expresarse como,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Claro que este límite se pudo resolver gracias a que ya se conocía la equivalencia $e^x - 1 \sim x$ cuando x tiende hacia 0. Una idea de esta equivalencia se podría entender cuando se estudia Derivadas y aproximaciones de funciones por polinomios *(ej: Desarrollo de Taylor)*.

Suele ser útil recurrir a una Tabla de infinitésimos equivalentes e infinitos equivalentes, para trabajar con algunos límites. Existen equivalencias básicas, como la usada en este ejemplo.

Podría estudiarse el comportamiento de la función $f(x) = e^x - 1$ en un entorno del 0 de un modo gráfico y comparar con la función $g(x) = x$ en tal entorno.

7 Lista de Ejercicios - Infinitos y Asíntotas

Ejercicio 8) Infinitos y asíntotas
Calcular y hallar, si existen, los límites y asíntotas siguientes

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 6x^2 - x + 8}{x^2 + 5x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 + 25}{10x^3 + 7x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{9x^2 + x} - x$

Ejercicio 9) Ordenes, infinitésimos
a) Investigar sobre infinitésimos e infinitos equivalentes básicos. *(La idea es conocer algunos equivalentes básicos para trabajar después con límites.)*

b) A partir de los equivalentes conocidos en la parte a), calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)(x + 1)}{e^x - 1}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{log(1 + x)}$

8 Continuidad

Cuando estamos calculando límites de una función $f(x)$, estudiamos el comportamiento de esa función cuando x se aproxima a cierto valor a, esto es, $x \to a$. No interesa, para nuestra definición de límite ni para nuestro estudio, cual es el valor de la función en el punto a, esto es, la imagen del punto a, $f(a)$. La función puede que No este definida en ese punto.

Supongamos ahora el caso en que Si interesa tener en cuenta este valor, la imagen de a, $f(a)$, cuando estamos calculando el límite de una función $f(x)$. Con esto queremos decir la siguiente definición,

Decimos que una función f es continua en el punto a cuando,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Definición formal:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Una función que es continua en todos sus puntos, se dice continua.
Cabe destacar en la definición que para que cierto límite exista entonces sus límites laterales deben ser iguales, esto es límite cuando $x \to a^+$, $x \to a^-$, estos límites iguales al valor $f(a)$.

Un ejemplo básico de funciones continuas son las funciones polinómicas, ejemplo de estas, $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

Ejercicios: Probar que las siguientes funciones son continuas en los puntos determinados.

1) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$, $x = 2$

2) $g(x) = 2x + 1 - log(x)$, $x = 5$

Puntos en donde la función No es continua
En algunos casos, suele ser de interes saber en donde una función No es continua, (discontinua). Estos puntos pueden ser en donde la función No esta definida.

Ejemplos :

Supongamos como primer caso la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

esta función No esta definida cuando $x = 2$, por ende no existe $f(2)$. Por lo tanto esta función No es continua en $x = 2$.

Otro ejemplo, sea la función $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Para saber si $g(x)$ es continua en $x = 0$ lo que podemos hacer es calcular los límites laterales de $g(x)$ cuando $x \to 0^-$, $x \to 0^+$

Ya sabemos por *ejercicio 5.b)* que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$. Lo mismo para el caso en que $x \to 0^-$. Tenemos que el Límite no existe cuando $x \to 0$. Por más que $f(0) = 1$, tenemos que la función $g(x)$ No es continua en $x = 0$

Ejercicio: Discutir continuidad de la función $g(x) = |x - 4|$ en $x = 4$. Graficar la función

Definiciones

Decimos que una función $f(x)$ es continua por la derecha de un punto $x = a$ si,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Caso análogo para continuidad por la izquierda.

Decimos que una función $f(x)$ es continua sobre un intervalo si es continua en cada uno de sus puntos en tal intervalo

9 Lista de ejercicios: Continuidad

Ejercicio 10)
Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos determinados.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \qquad$ en $x = -2$

b) $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \qquad$ en $x = 0$

c) $h(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases} \qquad$ en $x = 0$

d) $i(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1} \qquad$ en $x = -1$

Ejercicio 11)
Probar si las siguientes funciones son continuas en sus intervalos determinados,

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2} \qquad I = (2, \infty)$

b) $g(x) = 5\sqrt{3-x} \qquad I = (-\infty, 3)$

Ejercicio 12)
Encontrar los valores de ciertos parámetros para que la función sea continua.

a) $f(x) = \begin{cases} log(x+1) & \text{si } x > 0, \\ (x+m)^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \qquad$ en $x = 0$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1, \\ mx^2 + nx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \qquad$ en $x = 1$

10 Teoremas de funciones continuas

En construcción ...

11 Lista de ejercicios - Teoremas de funciones continuas

Ejercicio 12)
En construcción ...

12 Referencia bibliográfica

- James Stewart - Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas 7ma Ed.
- Stewart et al (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo 6ta Ed.

—

13 Apendice A: Ejercicios de álgebra. Operaciones básicas.

Ejercicio 1) Resolver las siguientes operaciones:

a) $(x-1)^3 - (x+2)^2$

b) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2-4} - \dfrac{x+1}{x+2}$

Ejercicio 2)

Resuelva :

a) $3(x+6)+4(2x-5)$

b) $(2x+3)^2$

Ejercicio 3)

Realizar un tabla de valores de las siguientes funciones: *(por ejemplo, pruebe con valores del intervalo (-2,2))*

a) $f(x) = 2x + 4$
b) $g(x) = e^{-2x}$
c) $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$
d) $i(x) = log(x+10)$

Ejercicio 4)

Comportamiento de una función $f(x)$ cuando x se aproxima hacia un determinado valor.

a) $f(x) = 2x + 5$; cuando x se aproxima hacia 2
Esto ultimo lo podemos escribir como $(x \to 2)$. - se dice x tiende a 2 -

14 Apendice B: Funciones por partes, valor absoluto y distancia

Ejercicio 1) Desigualdades con valor absoluto y distancias

a) $|x - 2| < 5$

b) $|2x + 7| \leq 2$

c) $|x - 2| > |x + 2|$

d) $|3x + 3| < |4(x + 1)|$

Ejercicio 2) Funciones por partes

Graficar las siguientes funciones.

a) $f(x) = |2x + 4|$

b) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d) $i(x) = |x + 4|$