

Árvores AVL

Prof. Kennedy Lopes

UFERSA

May 7, 2021

- A complexidade de busca em árvores binárias são dependentes da ordem que os elementos são inseridos ou removidos das estrutura de dados.
- Isto ocorre devido ao fato das árvores poderem se comportar no pior caso como filas.
- Surge o conceito de árvores com alturas balanceadas, conhecidas como AVL.

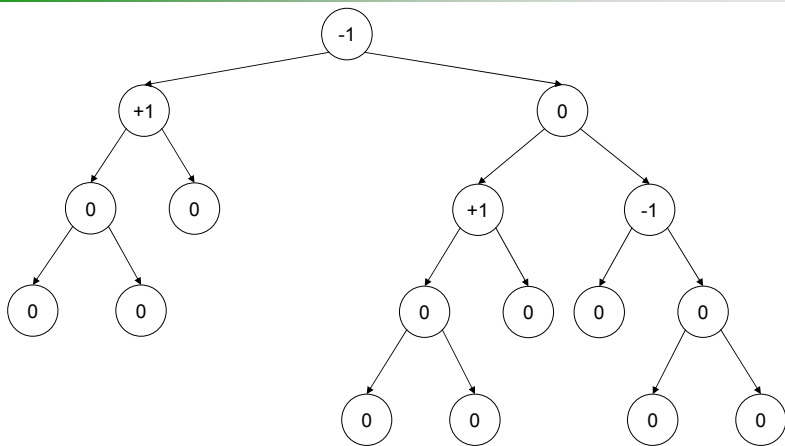
Uma árvore é definida como sendo:

- Uma árvore vazia é uma árvore AVL;
- Sendo **T** uma árvore binária de busca cujas sub-árvores esquerda e direita são L e R, respectivamente, T será uma AVL contando que:
 - ▶ L e R sejam AVL's;
 - ▶ $|h_L - h_R| \leq 1$. h_L e h_R são as alturas das sub-árvores L e R.

Fator de Balanceamento (FB)

- O fator de balanceamento ou fator de equilíbrio de um nó T em uma árvore binária é definido como sendo $hL - hR$.
- Para qualquer nó T numa árvore AVL, o fator de balanceamento assume o valor -1, 0 ou +1.
 - ▶ O FB de uma folha é 0.

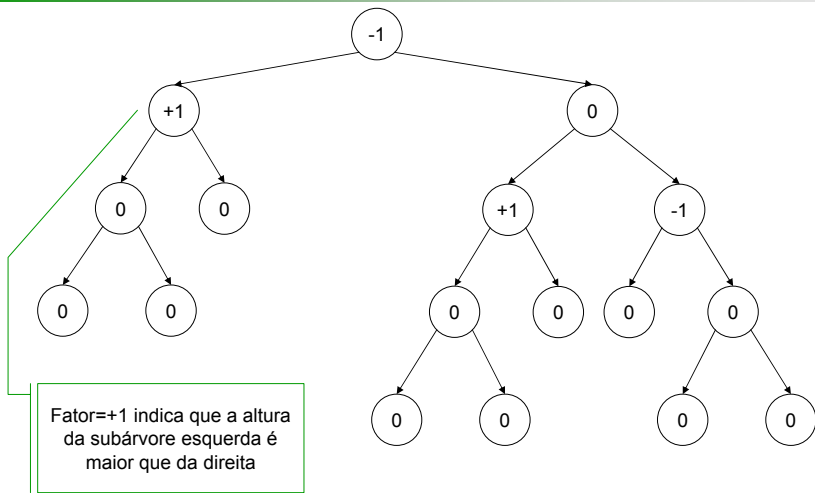
Fator de Balanceamento



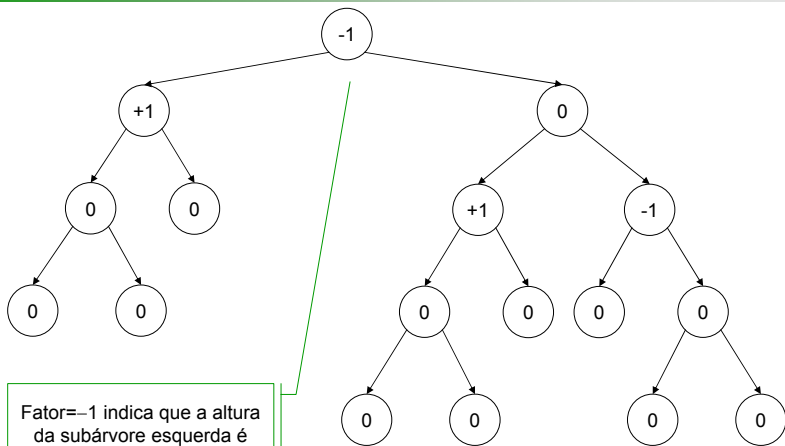
2



Fator de Balanceamento

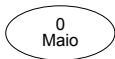


Fator de Balanceamento



Inserção Maio

Depois da inserção

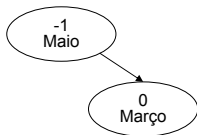


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Março

Depois da inserção

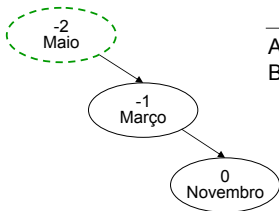


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

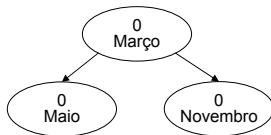
Inserção Novembro

Depois da inserção



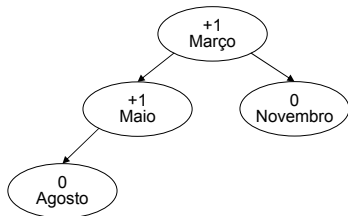
RR
A = -2
B = -1

Depois do rebalanceamento



Inserção Agosto

Depois da inserção



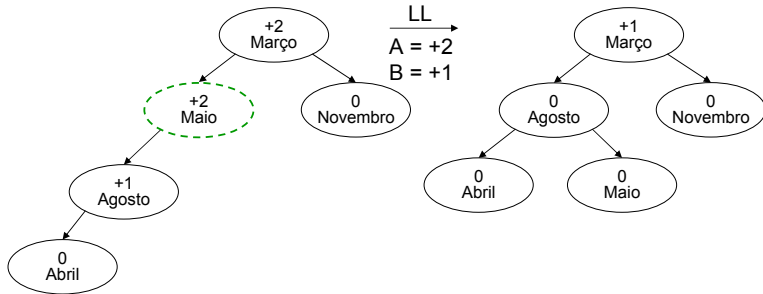
Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Abril

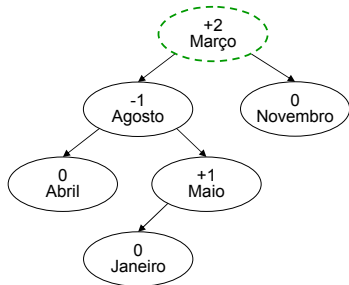
Depois da inserção

Depois do rebalanceamento



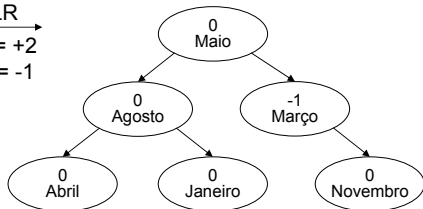
Inserção Janeiro

Depois da inserção



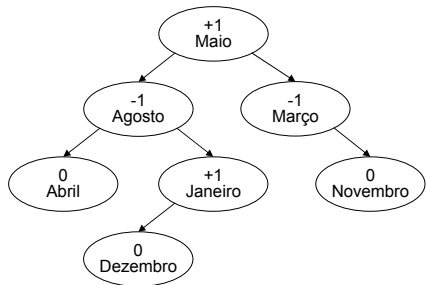
Depois do rebalanceamento

\xrightarrow{LR}
 $A = +2$
 $B = -1$



Inserção Dezembro

Depois da inserção

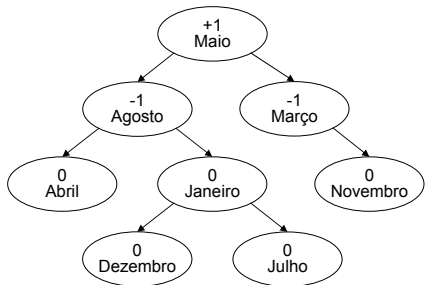


Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Julho

Depois da inserção



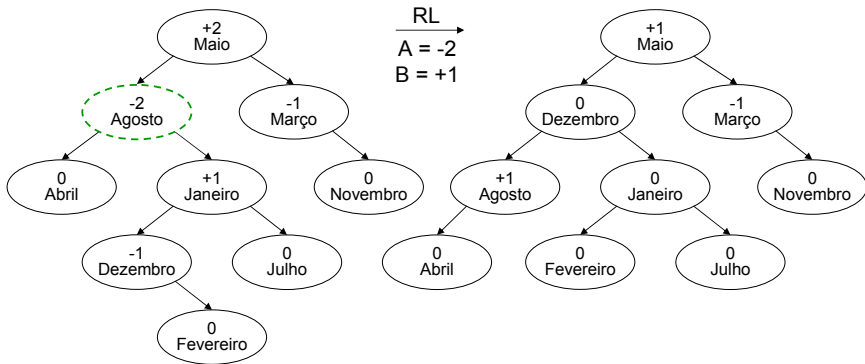
Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*

Inserção Fevereiro

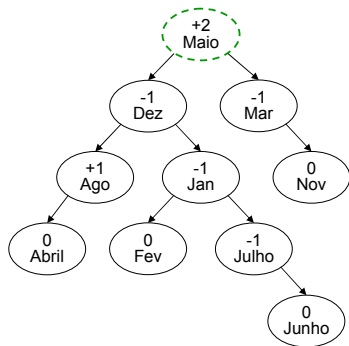
Depois da inserção

Depois do rebalanceamento



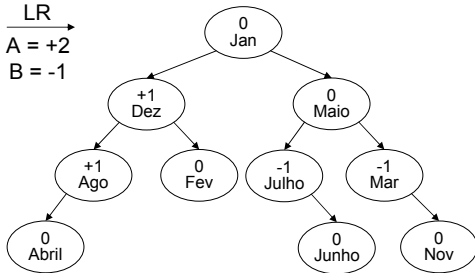
Inserção Junho

Depois da inserção



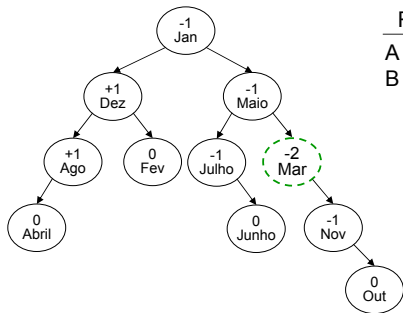
Depois do rebalanceamento

LR
A = +2
B = -1



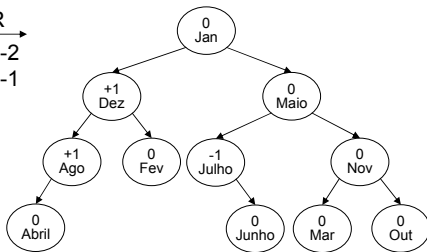
Inserção Outubro

Depois da inserção



RR
A = -2
B = -1

Depois do rebalanceamento

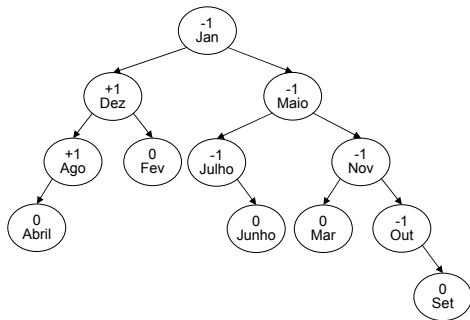


Inserção Setembro

Depois da inserção

Depois do rebalanceamento

*Sem necessidade
de rebalanceamento*



Rotações

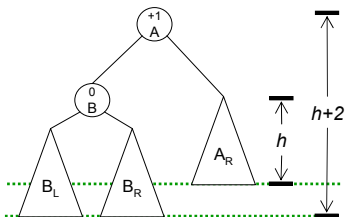
- O balanceamento é conduzido utilizando 4 tipos de rotações: LL, LR, RL e RR.
- RR e LR são simétricos em relação a LL e RL.
- O ancestral mais novo de **A** do novo nó inserido **Y** caracteriza o desbalanceamento. Pode ter os valores de +2 e -2.

Identificando rotações:

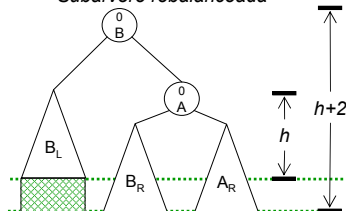
A	B	Tipo
+2	+1	LL
-2	-1	RR
+2	-1	LR
-2	+1	RL

Rotação LL

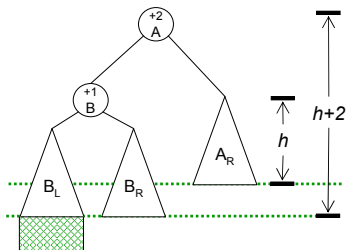
Subárvore balanceada



Subárvore rebalanceada

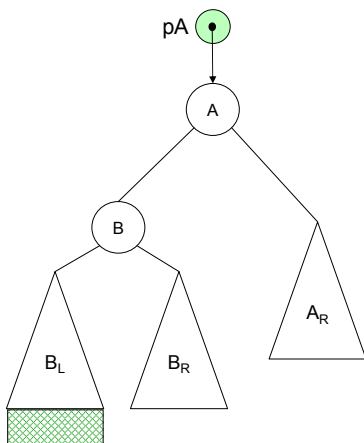


Subárvore desbalanceada após inserção



Altura de B_L aumenta para h+1

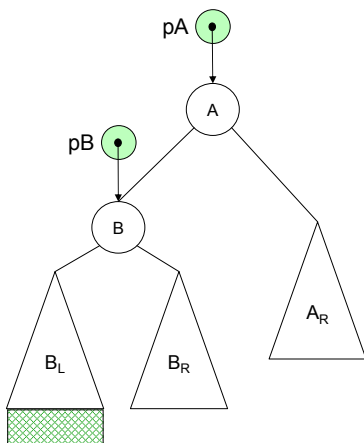
Rotação LL



□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B :

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pB;$

Rotação LL



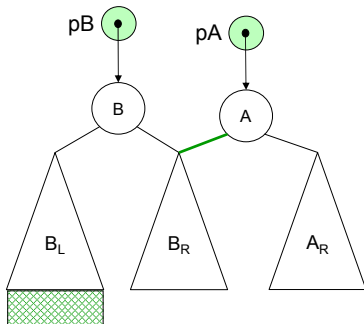
□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- **pB = pA->LeftNode;**
- pA->LeftNode = pB->RightNode;
- pB->RightNode = pA;
- pA = pB;

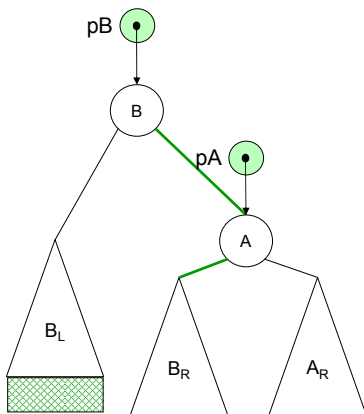
Rotação LL

- Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- **$pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode};$**
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pB;$



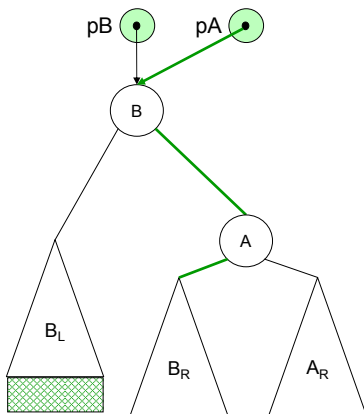
Rotação LL



□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- **$pB \rightarrow \text{RightNode} = pA;$**
- $pA = pB;$

Rotação LL

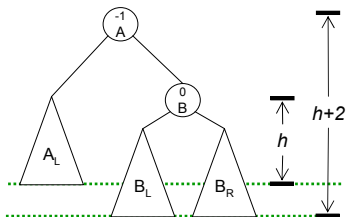


□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

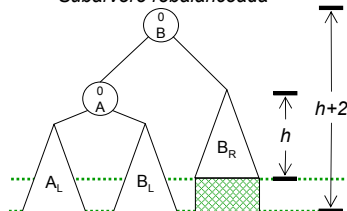
- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- **$pA = pB;$**

Rotação RR

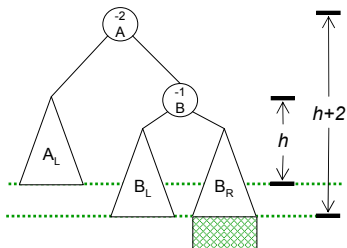
Subárvore balanceada



Subárvore rebalanceada

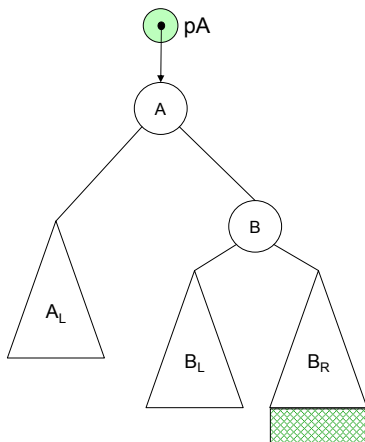


Subárvore desbalanceada após inserção



Altura de B_R aumenta para $h+1$

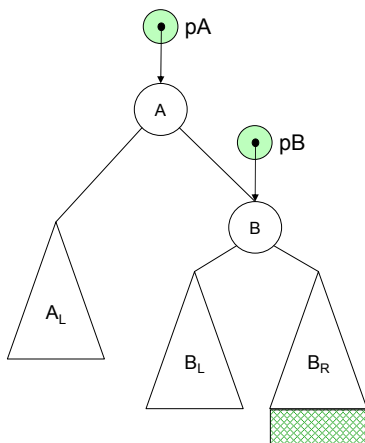
Rotação RR



□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B :

- $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
- $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$
- $pA = pB;$

Rotação RR



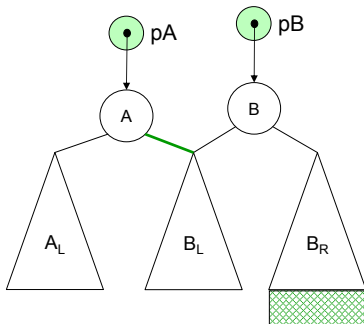
□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- **pB = pA->RightNode;**
- pA->RightNode = pB->LeftNode;
- pB->LeftNode = pA;
- pA = pB;

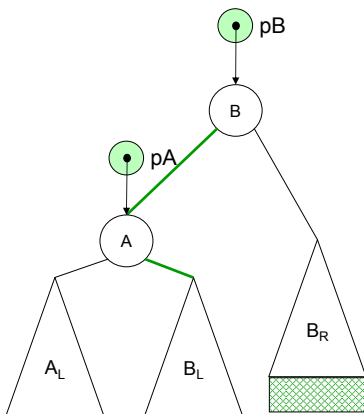
Rotação RR

□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
- $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$
- $pA = pB;$



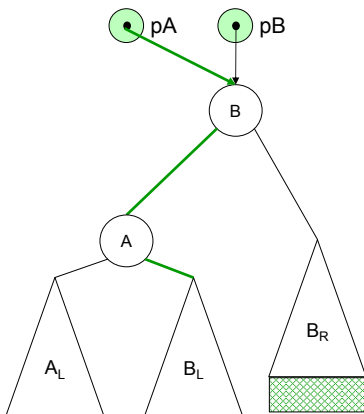
Rotação RR



□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

- $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
- $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
- **$pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$**
- $pA = pB;$

Rotação RR

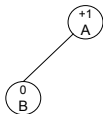


□ Assumindo pA e pB ponteiros para as subárvores com raízes A e B:

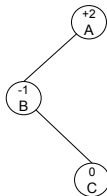
- $pB = pA \rightarrow \text{RightNode};$
- $pA \rightarrow \text{RightNode} = pB \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pB \rightarrow \text{LeftNode} = pA;$
- **$pA = pB;$**

Rotação LR(a)

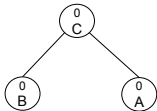
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

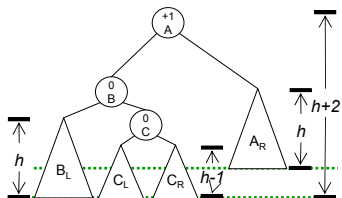


Subárvore rebalanceada

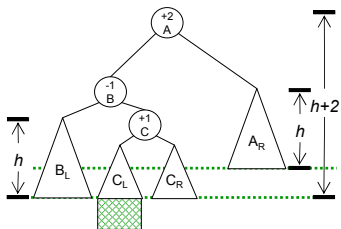


Rotação LR(b)

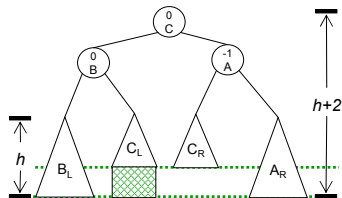
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

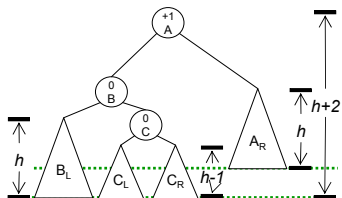


Subárvore rebalanceada

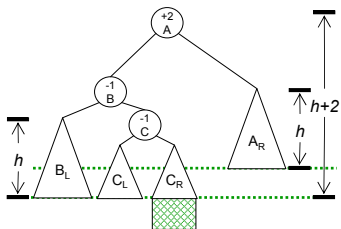


Rotação LR(c)

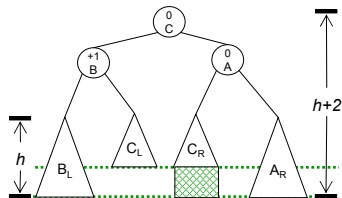
Subárvore balanceada



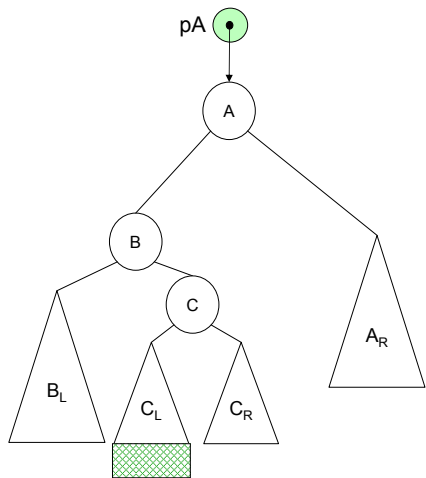
Subárvore desbalanceada após inserção



Subárvore rebalanceada



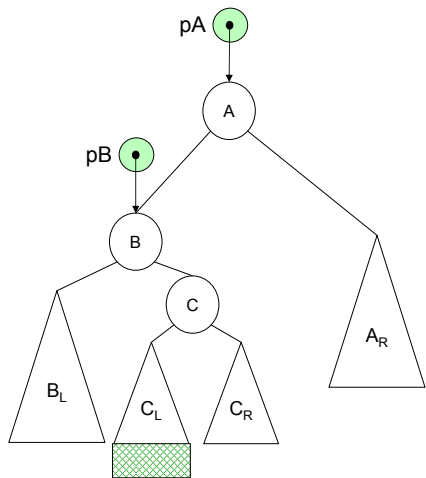
Rotação LR



Assumindo pA , pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A , B e C :

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode}$;
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode}$;
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode}$;
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB$;
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode}$;
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA$;
- $pA = pC$;

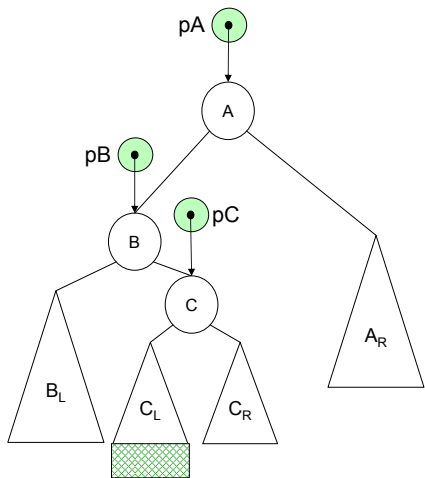
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- **pB = pA->LeftNode;**
- pC = pB->RightNode;
- pB->RightNode = pC->LeftNode;
- pC->LeftNode = pB;
- pA->LeftNode = pC->RightNode;
- pC->RightNode = pA;
- pA = pC;

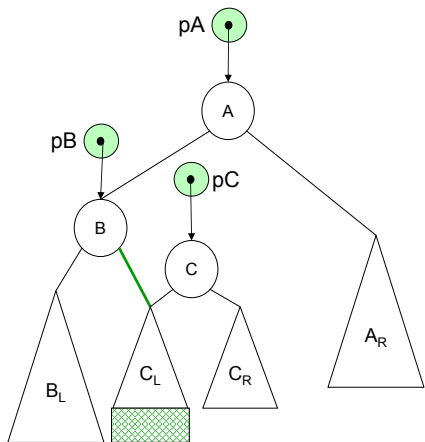
Rotação LR



Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- **$pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$**
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

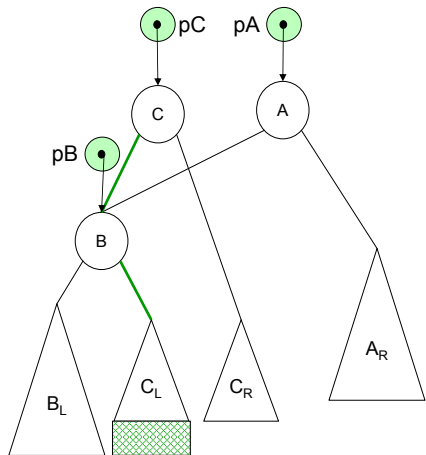
Rotação LR



Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- **$pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$**
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

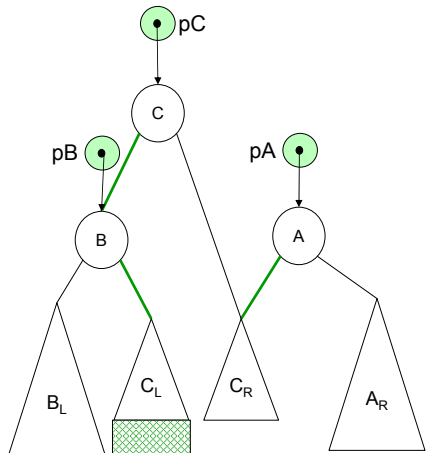
Rotação LR



□ Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- **$pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$**
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

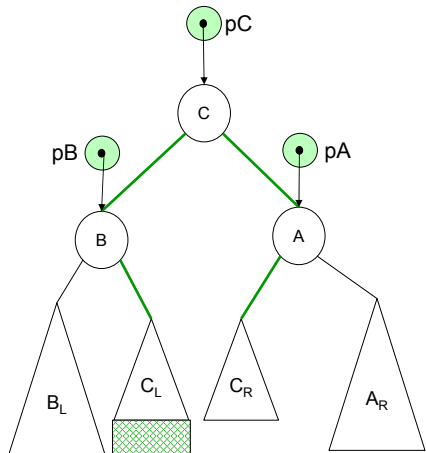
Rotação LR



Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- **$pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$**
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- $pA = pC;$

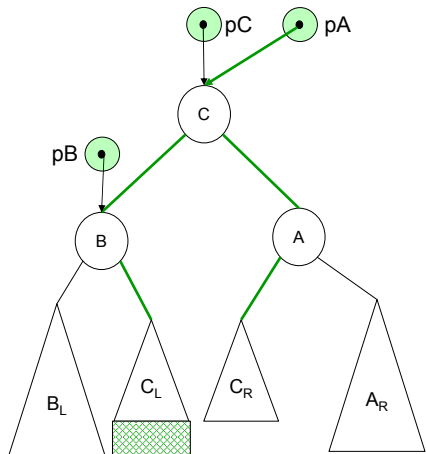
Rotação LR



Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- **$pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$**
- $pA = pC;$

Rotação LR

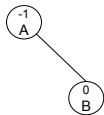


Assumindo pA, pB e pC ponteiros para as subárvores com raízes A, B e C:

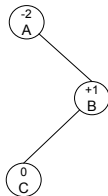
- $pB = pA \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC = pB \rightarrow \text{RightNode};$
- $pB \rightarrow \text{RightNode} = pC \rightarrow \text{LeftNode};$
- $pC \rightarrow \text{LeftNode} = pB;$
- $pA \rightarrow \text{LeftNode} = pC \rightarrow \text{RightNode};$
- $pC \rightarrow \text{RightNode} = pA;$
- **$pA = pC;$**

Rotação RL(a)

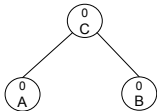
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

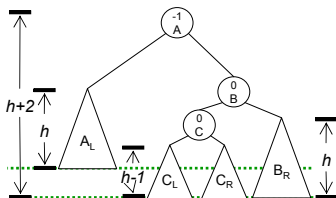


Subárvore rebalanceada

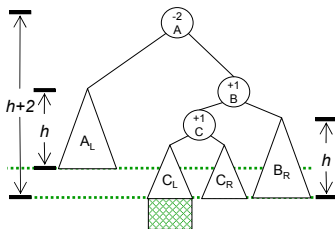


Rotação RL(b)

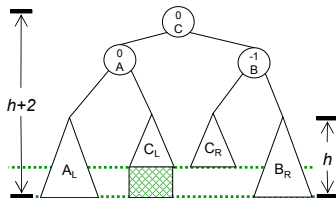
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

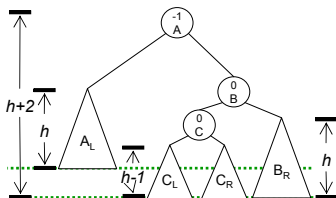


Subárvore rebalanceada

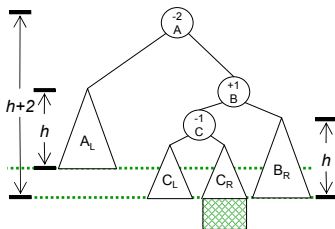


Rotação RL(c)

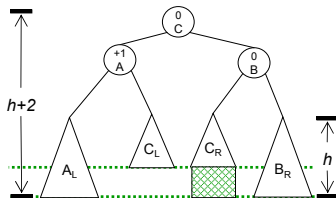
Subárvore balanceada



Subárvore desbalanceada após inserção

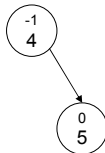


Subárvore rebalanceada



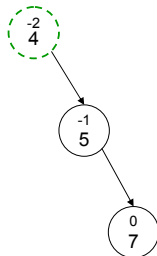
Inserções

❑ Inserir $x=7$



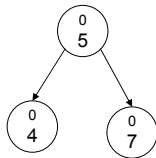
Inserções

- ❑ Inserido $x=7$
- ❑ A inserção produz uma árvore desbalanceada...



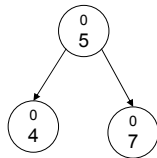
Inserções

- ❑ Inserido $x=7$
- ❑ A inserção produz uma árvore desbalanceada, cujo balanceamento envolve uma rotação RR



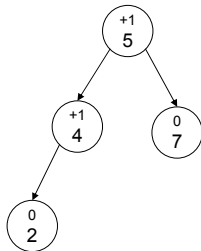
Inserções

❑ Inserir $x=2$



Inserções

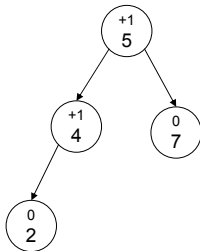
❑ Inserido $x=2$



Inserções

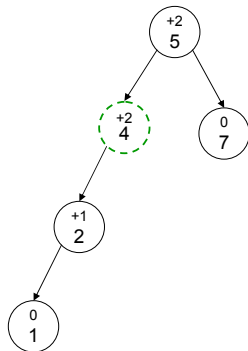
❑ Inserido $x=2$

❑ Inserir $x=1$



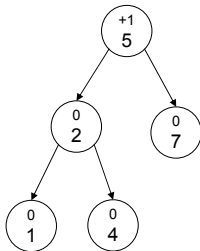
Inserções

- ❑ Inserido $x=2$
- ❑ Inserido $x=1$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 4...



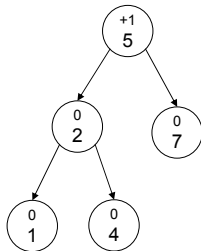
Inserções

- ❑ Inserido $x=2$
- ❑ Inserido $x=1$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 4, que é corrigido por uma rotação LL



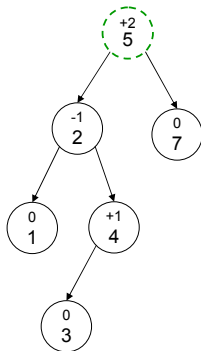
Inserções

❑ Inserir $x=3$



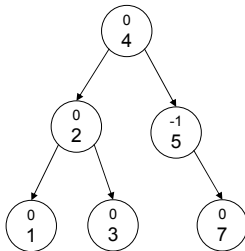
Inserções

- ❑ Inserido $x=3$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5...



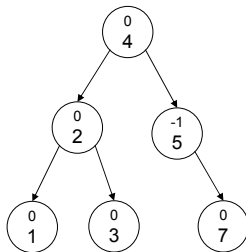
Inserções

- ❑ Inserido $x=3$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5, que é corrigido por uma rotação LR



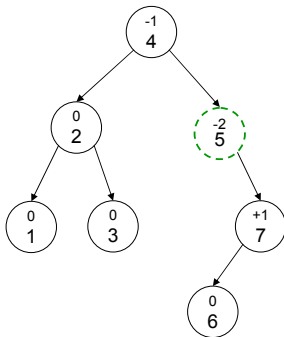
Inserções

❑ Inserir $x=6$



Inserções

- ❑ Inserido $x=6$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5...



Inserções

- ❑ Inserido $x=6$
- ❑ Ocorre desbalanceamento da subárvore de raiz 5, que é corrigido por uma rotação RL

