ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Métodos Numéricos

Anthony Goyes

Tarea 10 Descomposición LU

CONJUNTO DE EJERCICIOS

1. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

$$\boldsymbol{a.}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(1)+(-3)(2) & (2)(5)+(-3)(0) \\ (3)(1)+(-1)(2) & (3)(5)+(-1)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b.}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(1)+(-3)(-3) & (2)(5)+(-3)(2) & (2)(-4)+(-3)(0) \\ (3)(1)+(-1)(-3) & (3)(5)+(-1)(2) & (3)(-4)+(-1)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 4 & -8 \\ 6 & 13 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c.}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -11 \\ -6 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d.}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -14 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

Matriz singular: no se puede invertir, determinante es 0.

Matriz no singular: se puede invertir, determinante diferente de 0.

$$a.\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$det = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det = (4)(0)(-3) + (2)(7)(-2) + (6)(3)(-1) - ((-2)(0)(6) + (-1)(7)(4) + (-3)(3)(2))$$

$det = 0 - 28 - 18 - (0 - 28 - 18) = 0$

El determinante es cero, por lo tanto, es una matriz singular y no tiene inversa.

$b. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$det = 16 + 330 + 63 - (72 - 77 - 60) = -8$

El determinante es diferente de cero, por lo tanto, es una matriz no singular y tiene inversa.

Inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$E_2 - 2E_1 \rightarrow E_2$

$E_3 - 3E_1 \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$3E_3 - 5E_2 \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$-\frac{E_2}{3} \rightarrow E_2$

$\frac{E_3}{8} \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right)$$

$E_2 - \frac{1}{3}E_3 \rightarrow E_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right)$$

$E_1 - 2E_2 \rightarrow E_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{3}{8} \end{array}\right)$$

$$c. \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Una forma de encontrar el determinante es realizar la eliminación gaussiana y luego multiplicar los valores de la diagonal.

$E_2 - E_1 \rightarrow E_2$

$E_3 - 2E_1 \rightarrow E_3$

$E_4 + E_1 \rightarrow E_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$E_3 + E_2 \rightarrow E_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

En este caso en la diagonal existe un numero cero, por lo tanto, el determinante será cero. Además, es una matriz singular y no tiene inversa.

$$d. \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular su determinante, únicamente se multiplican los números de la diagonal principal.

$det = (4)(7)(1)(1) = 28$

El determinante es diferente de cero, por lo tanto, es una matriz no singular y tiene inversa.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{28} & -\frac{11}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

3. Resuelva los sistemas lineales 4 x 4 que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Primer sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$E_2 - E_1 \rightarrow E_2$

$E_3 - 2E_1 \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$E_3 - 3E_2 \rightarrow E_3$

$E_4 + E_2 \rightarrow E_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{8}E_3 \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$E_4 - 2E_3 \rightarrow E_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- $-X_4 = 1$

$X_4 = -1$

- $X_3 - X_4 = -1$

$X_3 - (-1) = -1$

$X_3 = -2$

- $X_2 - 3X_3 + 2X_4 = -2$

$X_2 - 3(-2) + 2(-1) = -2$

$X_2 + 6 - 2 = -2$

$X_2 = -6$

- $X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 6$

$X_1 - (-6) + 2(-2) - (-1) = 6$

$X_1 + 6 - 4 + 1 = 6$

$X_1 = 3$

Segundo sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$E_2 - E_1 \rightarrow E_2$

$E_3 - 2E_1 \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$E_3 - 3E_2 \rightarrow E_3$

$E_4 + E_2 \rightarrow E_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{8}E_3 \rightarrow E_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$E_4 + 2E_3 \rightarrow E_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

- $-X_4 = -1$

$X_4 = 1$

- $X_3 - X_4 = 0$

$X_3 = X_4$

- $X_2 - 3X_3 + 2X_4 = 0$

$X_2 - 3 + 2 = 0$

$X_2 - 1 = 0$

$X_2 = 1$

- $X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 1$

$X_1 - 1 + 2 - 1 = 1$

$X_1 = 1$

4. Encuentre los valores de A que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Para que la matriz sea singular, el determinante de la matriz A debe ser cero.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \propto & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \propto & -3/2 & 0 & \propto \end{vmatrix} = 0$$

$\det A = -3 + 0 + 2 \propto^2 - [0 + \propto + 3] = 0$

$\det A = 2 \propto^2 - \propto -6 = 0$

$\det A = \propto (2 \propto +3) - 2(2 \propto +3) = 0$

$\det A = (2 \propto +3)(x - 2) = 0$

Por lo tanto, los valores de A que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$\propto = -\frac{3}{2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\propto = 2$

5. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio a:

Primero encontramos y resolviendo Ly = b

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $Y_1 = 2$
- $2Y_1 + Y_2 = -1$

  $4 + Y_2 = -1$

  $Y_2 = -5$

- $-Y_1 + Y_3 = 1$
  $-2 + Y_3 = 1$
  $Y_3 = 3$

Luego encontramos las soluciones del sistema resolviendo Ux = y

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $3X_3 = 3$
  $X_3 = 1$
- $-2X_2 + X_3 = -5$

  $-2X_2 + 1 = -5$

  $-2X_2 = -6$

  $X_2 = 3$

- $2X_1 + 3X_2 - X_3 = 2$

$2X_1 + 9 - 1 = 2$
$2X_1 + 8 = 2$
$2X_1 = -6$
$X_1 = -3$

6. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU mediante el algoritmo de factorización LU con l_{ii} = 1 para todas las i.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$

Algoritmo modificado:

```python
import numpy as np
import logging

def descomposicion_LU(A: np.ndarray) -> tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    """Realiza la descomposición LU de una matriz cuadrada A.
    [IMPORTANTE] No se realiza pivoteo.

    ## Parameters

    ``A``: matriz cuadrada de tamaño n-by-n.

    ## Return

    ``L``: matriz triangular inferior.

    ``U``: matriz triangular superior. Se obtiene de la matriz ``A`` después de aplicar la eliminación gaussiana.
    """
    A = np.array(A, dtype=float)  # Convertir a float para evitar problemas con enteros

    assert A.shape[0] == A.shape[1], "La matriz A debe ser cuadrada."
    n = A.shape[0]

    L = np.zeros((n, n), dtype=float)

    for i in range(0, n):  # Loop por columna
        # --- Determinar pivote
        if abs(A[i, i]) < 1e-12:  # Comparar con un valor pequeño en lugar de cero directamente
            raise ValueError("No existe solución única debido a un pivote cero.")

        # --- Eliminación: Loop por fila
        L[i, i] = 1
        for j in range(i + 1, n):
            m = A[j, i] / A[i, i]
            A[j, i:] = A[j, i:] - m * A[i, i:]
            L[j, i] = m

        logging.info(f"\n{A}")

    if abs(A[n - 1, n - 1]) < 1e-12:  # Verificar nuevamente el último elemento diagonal
        raise ValueError("No existe solución única debido a un pivote cero.")

    U = A  # Renombrar A a U para mayor claridad

    return L, U
```

Literal a:

```
Matriz L
 [[1.  0.  0. ]
 [1.5 1.  0. ]
 [1.5 1.  1. ]]

Matriz U
 [[ 2.  -1.   1. ]
 [ 0.   4.5  7.5]
 [ 0.   0.  -4. ]]
```

Literal b:

```
Matriz L
 [[ 1.          0.          0.        ]
 [-2.10671937  1.          0.        ]
 [ 3.06719368  1.19775553  1.        ]]

Matriz L
 [[ 1.012      -2.132       3.104     ]
 [ 0.         -0.39552569 -0.47374308]
 [ 0.          0.         -8.93914077]]
```

Literal c:

```
Matriz L
 [[ 1.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.5         1.          0.          0.        ]
 [ 0.         -2.          1.          0.        ]
 [ 1.         -1.33333333  2.          1.        ]]

Matriz U
 [[2.  0.  0.  0. ]
 [0.  1.5 0.  0. ]
 [0.  0.  0.5 0. ]
 [0.  0.  0.  1. ]]
```

Literal d:

```
Matriz L
 [[ 1.          0.          0.          0.        ]
 [-1.84919103  1.          0.          0.        ]
 [-0.45964332 -0.25012194  1.          0.        ]
 [ 2.76866152 -0.30794361 -5.35228302  1.        ]]

Matriz U
 [[ 2.17560000e+00  4.02310000e+00 -2.17320000e+00  5.19670000e+00]
 [ 0.00000000e+00  1.34394804e+01 -4.01866194e+00  1.08069910e+01]
 [ 0.00000000e+00  4.44089210e-16 -8.92952394e-01  5.09169403e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.20361280e+01]]
```

7. Modifique el algoritmo de eliminación gaussiana de tal forma que se pueda utilizar para resolver un sistema lineal usando la descomposición LU y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales.

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984, \\ -2.132x_1 + 4.096x_2 - 7.013x_3 &= -5.049, \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5, \\ -3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102, \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 + 1.1973x_4 &= -6.1593, \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 &= 3.0004, \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 - 4.1561x_4 &= 0.0000. \end{aligned}$$

Algoritmo modificado:

```python
import numpy as np
import logging

def descomposicion_LU(A: np.ndarray) -> tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    """Realiza la descomposición LU de una matriz cuadrada A.
    [IMPORTANTE] No se realiza pivoteo.

    ## Parameters

    ``A``: matriz cuadrada de tamaño n-by-n.

    ## Return

    ``L``: matriz triangular inferior.

    ``U``: matriz triangular superior. Se obtiene de la matriz ``A`` después de aplicar la eliminación gaussiana.
    """
    A = np.array(A, dtype=float)  # Convertir a float para evitar problemas con enteros

    assert A.shape[0] == A.shape[1], "La matriz A debe ser cuadrada."
    n = A.shape[0]

    L = np.zeros((n, n), dtype=float)

    for i in range(0, n):  # Loop por columna

        # --- Determinar pivote
        if abs(A[i, i]) < 1e-12:  # Comparar con un valor pequeño en lugar de cero directamente
            raise ValueError("No existe solución única debido a un pivote cero.")
        # --- Eliminación: loop por fila
        L[i, i] = 1
        for j in range(i + 1, n):
            m = A[j, i] / A[i, i]
            A[j, i:] = A[j, i:] - m * A[i, i:]
            L[j, i] = m

        logging.info(f"\n{A}")

    if abs(A[n - 1, n - 1]) < 1e-12:  # Verificar nuevamente el último elemento diagonal
        raise ValueError("No existe solución única debido a un pivote cero.")

    U = A  # Renombrar A a U para mayor claridad

    return L, U
```

Resultados:

Literal a:

```
[ 1.  2. -1.]
```

Literal b:

```
[1. 1. 1.]
```

Literal c:

```
[ 1.5  2.  -1.2  3. ]
```

Literal d:

```
[2.9398512  0.0706777  5.67773512 4.37981223]
```