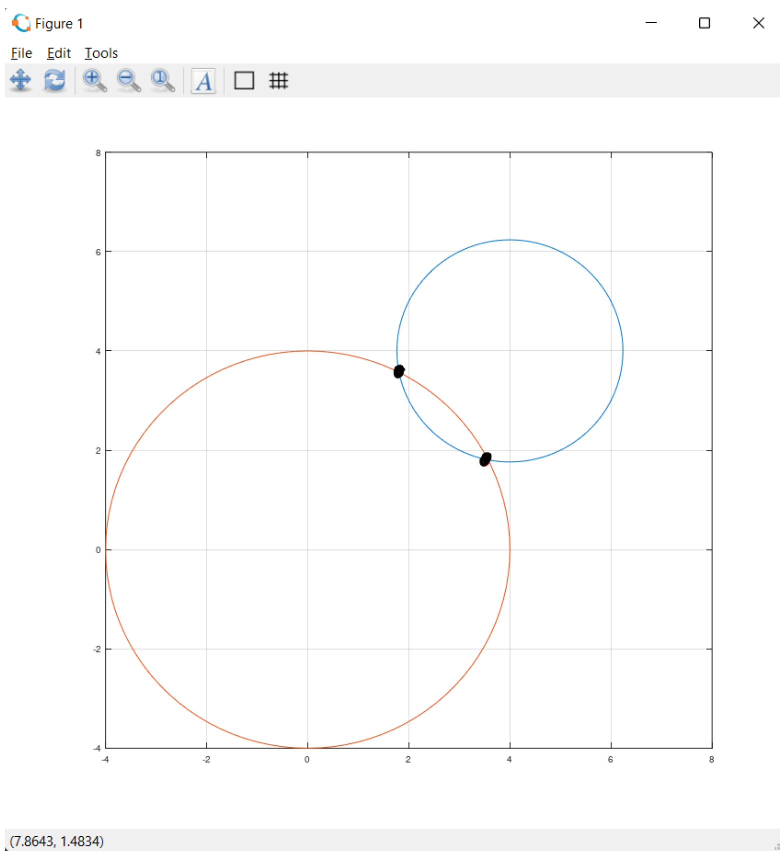
TUGAS METODE NUMERIK

Kelompok 8:
- Wendy Santoso / C14200036 / B (Newton-Raphson A dan B, *fsolve* A)
- Anthony Reynaldi / C14200078 / B (Gauss-Seidel dan Graphical Method A dan B)
- Jeremy Dion Purnama / C14200206 / B (Gauss-Seidel Relaksasi A dan B, *fsolve* B)

A. Carilah akar persamaan (roots) dari persamaan nonlinear berikut ini:

1. Graphical Approach:



Hasil plot dari persamaan menghasilkan grafik seperti di atas. Terdapat dua titik potong sehingga dapat ditentukan *initial value*.

Titik 1: (1.8, 3.5)

Titik 2: (3.5, 1.8)

Sebelum melakukan perhitungan diperlukan merubah format persamaan untuk mencari nilai x dan y setiap iterasi.

Persamaan 1:

$(x - 4)^2 + (y - 4)^2$	$= 5$
$x^2 - 8x + 16 + (y - 4)^2$	$= 5$
$- 8x$	$= 5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16$
x	$= (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$ (a)

Atau

x^2	$= 5 - (y - 4)^2 + 8x - 16$
x	$= \sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$ (b)

Persamaan 2:

$x^2 + y^2$	$= 16$
y^2	$= 16 - x^2$
y	$= \sqrt{16 - x^2}$

2. Gauss-Seidel:
   a) Cara Manual:

      Titik 1 (1.8, 3.5)
      Ket: untuk menghitung x digunakan persamaan 1 a

      – Iterasi 1 –
      x = 1.8
      y = 3.5

      $x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$
      $x = (5 - (3.5 - 4)^2 - 1.8^2 - 16) / -8$
      x = 1.8113

      $y = \sqrt{16 - x^2}$
      $y = \sqrt{16 - 1.8113^2}$
      y = 3.5664

– Iterasi 2 –

$x = 1.8113$
$y = 3.5664$

$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$
$x = (5 - (3.5664 - 4)^2 - 1.8113^2 - 16) / -8$
$x = 1.8086$

$y = \sqrt{16 - x^2}$
$y = \sqrt{16 - 1.8086^2}$
$y = 3.5678$

– Iterasi 3 –

$x = 1.8086$
$y = 3.5678$

$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$
$x = (5 - (3.5678 - 4)^2 - 1.8086^2 - 16) / -8$
$x = 1.8072$

$y = \sqrt{16 - x^2}$
$y = \sqrt{16 - 1.8072^2}$
$y = 3.5685$

Titik 2 (3.5, 1.8)
Ket: untuk menghitung x digunakan persamaan 1 b karena jika menggunakan persamaan 1 a akan menghasilkan nilai yang divergen

– Iterasi 1 –
x = 3.5
y = 1.8

x = $\sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$
x = $\sqrt{5 - (1.8 - 4)^2 + 8 \times (3.5) - 16}$
x = 3.4871

y = $\sqrt{16 - x^2}$
y = $\sqrt{16 - 3.4871^2}$
y = 1.9596

– Iterasi 2 –
x = 3.4871
y = 1.9596

x = $\sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$
x = $\sqrt{5 - (1.9596 - 4)^2 + 8 \times (3.4871) - 16}$
x = 3.5684

y = $\sqrt{16 - x^2}$
y = $\sqrt{16 - 3.5684^2}$
y = 1.8073

– Iterasi 3 –
x = 3.5684
y = 1.8073

x = $\sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$

x = $\sqrt{5 \ - \ (1.8073 \ - \ 4)^2 \ + \ 8 \times (3.5684) \ - \ 16}$
x = 3.5692

y = $\sqrt{16 \ - \ x^2}$
y = $\sqrt{16 \ - \ 3.5692^2}$
y = 1.8058

Hasil Akhir Setelah 3 Iterasi
Titik (1.8, 3.5) menghasilkan **(1.8072, 3.5685)**
Titik (3.5, 1.8) menghasilkan **(3.5692, 1.8058)**

b) Program Octave/Matlab:

```
>> a2

Titik 1 (1.8, 3.5)
   1.8058   3.5692
Titik 2 (3.5, 1.8)
   3.5692   1.8058
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

c) Program Python:

```
Titik 1 (1.8, 3.5)
[1.8058305325317472, 3.5691702239842953]
Titik 2 (3.5, 1.8)
[3.5691709405606216, 1.805829116239299]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave. Kedua titik mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

3. Gauss-Seidel dengan Relaksasi:
   a) Cara Manual:
      Titik 1 (1.8, 3.5)
      λ = 0.5

      – Iterasi 1 –
      x = $(5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$

$x = (5 - (3.5 - 4)^2 - 1.8^2 - 16) / -8$
$x = 1.8113$

$x_{,r} = 0.5*1.8113 + (1-0.5)*1.8$
$= 0.9057 + 0.9$
$= 1.8057$

$y = \sqrt{16 - x^2}$
$y = \sqrt{16 - 1.8057^2}$
$y = 3.5692$

$Y_{,r} = 0.5*3.5692 + (1-0.5)*3.5$
$= 1.7846 + 1.75$
$= 3.5346$

– Iterasi 2 –
$x = 1.8057$
$y = 3.5346$

$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$
$x = (5 - (3.5346 - 4)^2 - 1.8057^2 - 16) / -8$
$x = 1.8096$

$x_{,r} = 0.5*1.8096 + (1-0.5)*1.8057$
$= 0.9048 + 0.9027$
$= 1.8075$

$y = \sqrt{16 - x^2}$
$y = \sqrt{16 - 1.8075^2}$
$y = 3.5683$

$Y_{,r} = 0.5*3.5683 + (1-0.5)*3.5346$
$= 1.7842 + 1.7673$
$= 3.5515$

– Iterasi 3 –
$x = 1.8075$

y = 3.5515

x = (5 - (y − 4)^2 - x^2 - 16) / -8
x = (5 - (3.5515 − 4)^2 - 1.8075^2 - 16) / -8
x = 1.8085

$x_{,r}$ = 0.5*1.8085 + (1-0.5)*1.8075
= 0.9043 + 0.9038
= 1.8081

y = $\sqrt{16 - x^2}$
y = $\sqrt{16 - 1.8081^2}$
y = 3.5680

$Y_{,r}$ = 0.5*3.5680 + (1-0.5)*3.5515
= 1.7840 + 1.7758
= 3.5598

Titik 2 (3.5, 1.8)
λ = 0.5

– Iterasi 1 –
x = $\sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$
x = $\sqrt{5 - (1.8 - 4)^2 + 8 * 3.5 - 16}$
x = 3.4871

$x_{,r}$ = 0.5*3.4871 + (1-0.5)*3.5
= 1.7436 + 1.75
= 3.4936

y = $\sqrt{16 - x^2}$
y = $\sqrt{16 - 3.4936^2}$
y = 1.9480

$Y_{,r}$ = 0.5*1.9480 + (1-0.5)*1.8
= 0.9740 + 0.9

= 1.8740

– Iterasi 2 –

x = 3.4936
y = 1.8740

x = $\sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$

x = $\sqrt{5 - (1.8740 - 4)^2 + 8 * 3.4936 - 16}$

x = 3.5255

x,r = 0.5*3.5255 + (1-0.5)*3.4936
= 1.7628 + 1.7468
= 3.5096

y = $\sqrt{16 - x^2}$

y = $\sqrt{16 - 3.5096^2}$

y = 1.9190

Y,r = 0.5*1.9190 + (1-0.5)*1.8740
= 0.9595 + 0.9370
= 1.8965

– Iterasi 3 –

x = 3.5096
y = 1.8965

x = $\sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$

x = $\sqrt{5 - (1.8965 - 4)^2 + 8 * 3.5096 - 16}$

x = 3.5570

x,r = 0.5*3.5570 + (1-0.5)*3.5096
= 1.7785 + 1.7548
= 3.5333

y = $\sqrt{16 - x^2}$

y = $\sqrt{16 \ - \ 3.5333^2}$
y = 1.8750

$Y_{,r}$ = 0.5*1.8750 + (1-0.5)*1.8965
  = 0.9375 + 0.9483
  = 1.8858

Hasil Akhir Setelah 3 Iterasi
Titik (1.8, 3.5) menghasilkan **(1.8081, 3.5598)**
Titik (3.5, 1.8) menghasilkan **(3.5333, 1.8858)**

b) Program Octave/Matlab:

```
>> Relax
Titik 1 (1.8, 3.5)
   1.8058   3.5692
Titik 2 (3.5, 1.8)
   1.8058   3.5692
>> |
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik dengan lamda 0.5 mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

c) Program Python:

```
Titik 1 (1.8, 3.5)
[1.8058336102501436, 3.5691676332126114]
Titik 2 (3.5, 1.8)
[3.5691752105913146, 1.8058218046872039]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave. Kedua titik mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

4. Newton-Raphson:
   a) Cara Manual:

Persamaan 1: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 5 \rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 8y + 16) - 5 = 0$

$\frac{\delta f1}{x}$ = 2x - 8 ; $\frac{\delta f1}{y}$ = 2y - 8

Persamaan 2: $x^2 + y^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 16 = 0$

$\frac{\delta f2}{x}$ = 2x ; $\frac{\delta f2}{y}$ = 2y

Titik (1.5, 3.5)

– Iterasi 1 –

x = **1.5**, y = **3.5**

$\frac{\delta f1}{x}$ = 2x - 8 = 2*(1.5) - 8 = **-5** ; $\frac{\delta f1}{y}$ = 2y - 8 = 2*(3.5) - 8 = **-1**

$\frac{\delta f2}{x}$ = 2x = 2*(1.5) = **3** ; $\frac{\delta f2}{y}$ = 2y = 2*(3.5) = **7**

det = $(\frac{\delta f1}{x} \times \frac{\delta f2}{y}) - (\frac{\delta f1}{y} \times \frac{\delta f2}{x})$

det = (-5*7) - (-1*3) = -35 + 3 = **-32**

$f_1 = (x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 = (1.5 - 4)^2 + (3.5 - 4)^2 - 5$ = 6.25 + 0.25 - 5 = **1.5**

$f_2 = x^2 + y^2 - 16 = 1.5^2 + 3.5^2 - 16$ = 2.25 + 12.25 - 16 = **-1.5**

$x_{i+1} = x_i - ((f1\frac{\delta f2}{y} - f2\frac{\delta f1}{y})$ / det) = 1.5 - ((1.5*7 - (-1.5)*(-1)) / -32)

= 1.5 - ((10.5 - 1.5) / -32) = 1.5 - (9 / -32) = 1.5 + 0.2813 = **1.7812**

$y_{i+1} = y_i - ((f2\frac{\delta f1}{x} - f1\frac{\delta f2}{x})$ / det) = 3.5 - (((-1.5)*(-5) - 1.5*3) / -32)

= 3.5 - ((7.5 - 4.5) / -32) = 3.5 - (3 / -32) = 3.5 + 0.0938 = **3.5938**

– Iterasi 2 –

x = **1.7812**, y = **3.5938**

$\frac{\delta f1}{x}$ = 2x - 8 = 2*(1.7812) - 8 = **-4.4376** ;

$\frac{\delta f1}{y}$ = 2y - 8 = 2*(3.5938) - 8 = **-0.8124**

$\frac{\delta f2}{x}$ = 2x = 2*(1.7812) = 3.5624 ; $\frac{\delta f2}{y}$ = 2y = 2*(3.5938) = **7.1876**

det = $(\frac{\delta f1}{x} \times \frac{\delta f2}{y}) - (\frac{\delta f1}{y} \times \frac{\delta f2}{x})$

det = (-4,4376*7,1876) - (-0,8124*3,5624) = -31,8957 + 2,8941 = **-29.0016**

$f_1 = (x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 = (1.7812 - 4)^2 + (3.5938 - 4)^2 - 5$ = 4.9231 + 0.1650 - 5 = **0.0881**

$f_2 = x^2 + y^2 - 16 = 1.7812^2 + 3.5938^2 - 16$ = 3,1727 + 12,9154 - 16 = **0.0881**

$x_{i+1} = x_i$ - (($f1\frac{\delta f2}{y}$ $-$ $f2\frac{\delta f1}{y}$) / det) = 1.7812 - ((0.0881*3.5624 - 0.0881*(-0.8124)) / (-29.0016))
= 1.7812 - ((0.3138 + 0.0716) / (-29.0016))
= 1.7812 - (0.3854 / (-29.0016)) = 1.7812 + 0.0133 = **1.7945**

$y_{i+1} = y_i$ - (($f2\frac{\delta f1}{x}$ $-$ $f1\frac{\delta f2}{x}$) / det) = 3.5938 - ((-0.0881*(-4.4376) - 0.0881*3.5624) / (-29.0016))
= 3.5938 - ((0.3909 - 0,3138) / (-29.0016))
= 3.5938 - (0.0771 / (-29.0016))
= 3.5938 + 0.0027 = **3.5965**

– Iterasi 3 –
x = **1.7945**, y = **3.5965**
$\frac{\delta f1}{x}$ = 2x - 8 = 2*(1.7945) - 8 = **-4.4110**;
$\frac{\delta f1}{y}$ = 2y - 8 = 2*(3.5965) - 8 = **-0.8070**
$\frac{\delta f2}{x}$ = 2x = 2*(1.7945) = **3.5890** ; $\frac{\delta f2}{y}$ = 2y = 2*(3.5965) = **7.1930**

det = ($\frac{\delta f1}{x} \times \frac{\delta f2}{y}$) $-$ ($\frac{\delta f1}{y} \times \frac{\delta f2}{x}$)
det = (-4.4110*7.1930) - (-0.8070*3.5890) = -31.7283 + 2,8963 = **-28.8320**

$f_1 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 5 = (1.7945 - 4)^2 + (3.5965 - 4)^2 - 5$ = 4.8642 + 0.1628 - 5 = **0.027**
$f_2 = x^2 + y^2 - 16 = 1.7945^2 + 3.5965^2 - 16$ = 3.2202 + 12,9348 - 16 = **0.155**

$x_{i+1} = x_i$ - (($f1\frac{\delta f2}{y}$ $-$ $f2\frac{\delta f1}{y}$) / det) = 1.7945 - ((0.027*7.1930 - 0.155*(-0.8070)) / (-28.832))
= 1.7945 - ((0.1942 + 0.1251) / (-28.832))
= 1.7945 - (0.3193 / (-28.832)) = 1.7945 + 0.0111 = **1.8056**

$y_{i+1} = y_i$ - (($f2\frac{\delta f1}{x}$ $-$ $f1\frac{\delta f2}{x}$) / det) = 3.5965 - ((0.155*(-4.4110) - 0.027*3.589) / (-28.832))
= 3.5965 - ((-0.6837 - 0,0969) / (-28.832))
= 3.5965 - (0.7806 / (-28.832)) = 3.5965 + 0.0271 = **3.6236**

b) Program Octave/Matlab:

```
Titik 1 (1.5, 3.5)
   1.8058   3.5692
Titik 2 (3.5, 1.5)
   3.5692   1.8058
>> |
```

Initial value yang digunakan pada program adalah (1.5, 3.5) untuk mencari titik 1 dan (3.5, 1.5) untuk mencari titik 2. Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik mengalami konvergen karena hasilnya sama dengan *true value*.

c) Program Python:

```
Titik 1
[1.8058290012701486, 3.5691709987298514]
Titik 2
[3.5691709987298514, 1.8058290012701486]
```

Sama seperti program Octave, Initial value yang digunakan pada program adalah (1.5, 3.5) untuk mencari titik 1 dan (3.5, 1.5) untuk mencari titik 2. Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave. Kedua titik mengalami konvergen karena sama dengan *true value*.

5. Menggunakan *fsolve* function:

   Dengan menggunakan fungsi *fsolve* milik Octave, hasil akar persamaan yang ditemukan adalah sebagai berikut.

```
>> a5

Titik 1 (1.8, 3.5)
x =
   1.8058
   3.5692

fx =
   4.0107e-06
   4.0106e-06

Titik 2 (3.5, 1.8)
x =
   3.5692
   1.8058

fx =
   4.0107e-06
   4.0106e-06
```

Hasil yang didapatkan menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, Gauss-Seidel dengan relaksasi, dan juga Newton-Raphson.

Kesimpulan

Soal bagian A dapat diselesaikan dengan bermacam metode mulai dari Gauss-Seidel, Gauss-Seidel dengan relaksasi, Newton-Raphson, dan juga *fsolve*. Semua metode menghasilkan jawaban yang sangat mendekati *true value*. Tetapi, pada metode Gauss-Seidel (dan juga dengan relaksasi) memerlukan perubahan format perumusan x. Persamaan 1 a adalah format yang paling pas untuk mencari hasil dari *initial value* titik 1 (1.8, 3.5) karena akan terjadi konvergen. Sedangkan Persamaan 1 a tidak dapat digunakan untuk mencari hasil dari *initial value* titik 2 (3.5, 1.8) karena akan terjadi divergen, sehingga diperlukan perubahan format seperti pada Persamaan 1 b.

B. Carilah akar persamaan (roots) dari persamaan nonlinear berikut ini:

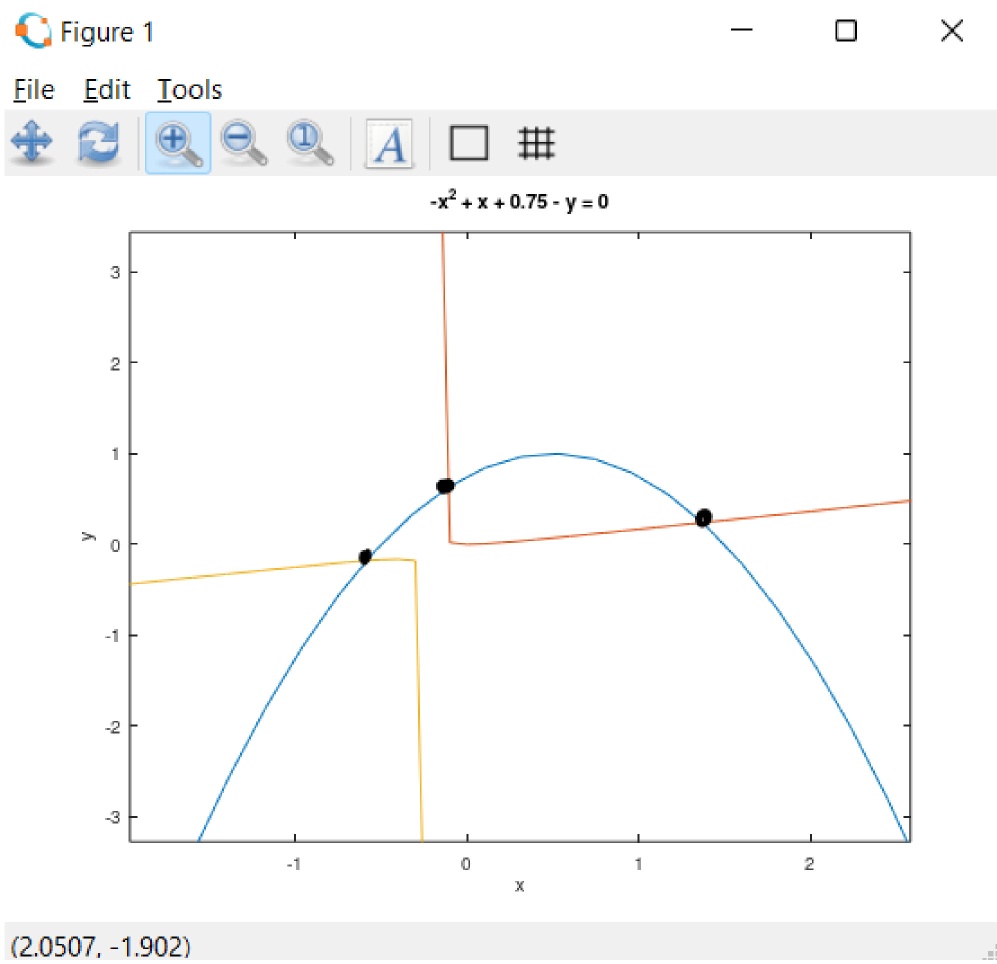
$$y = -x^2 + x + 0.75$$
$$y + 5xy = x^2$$

Initial value yang digunakan:

$x = 1.2$

$y = 1.2$

1. Graphical Approach:



Hasil plot dari persamaan menghasilkan grafik seperti di atas. Terdapat tidak titik potong sehingga terdapat 3 *root* yang berbeda. Perkiraan *root* adalah sebagai berikut.

Titik 1: (-0.6, -0.1)

Titik 2: (-0.2, 0.6)

Titik 3: (1.4, 0.3)

Sebelum melakukan perhitungan diperlukan merubah format persamaan untuk mencari nilai x dan y setiap iterasi. Terdapat beberapa format tetapi hanya 1 dari masing-masing yang dapat menghasilkan konvergen.

Persamaan 1:

$y = -x^2 + x + 0.75$

$x^2 = x + 0.75 - y$

$x = \sqrt{x + 0.75 - y}$

Persamaan 2:

$y + 5xy = x^2$

$5xy = x^2 - y$

$y = (x^2 - y) / 5x$

2. Gauss-Seidel:
    a. Program Octave/Matlab:

```
>> b2

Titik 1 (1.2, 1.2)
   1.3048   0.3523
>> |
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik mengalami konvergen karena mendekat ke arah *true value* tetapi hasil akhir tidak menghasilkan nilai yang sangat dekat dengan *true value*.

    b. Program Python:

```
Titik 1 (1.2, 1.2)
[1.3047822562164257, 0.3523254316110222]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave.

3. Gauss-Seidel dengan Relaksasi:
    a. Program Octave/Matlab:

```
Titik 1 (1.2, 1.2), Lamda = 0.5
   1.3048   0.3523
>> |
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik dengan lamda 0.5 mengalami konvergen karena mendekat ke arah *true value* tetapi hasil akhir tidak menghasilkan nilai yang sangat dekat dengan *true value*.

b. Program Python:

```
Titik 1 (1.2, 1.2), Lamda = 0.5
[1.3047822219707812, 0.352325620290044]

Process finished with exit code 0
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave.

4. Newton-Raphson:
   a. Program Octave/Matlab:

```
Hasil dengan Initial Value (1.2, 1.2)) =
   1.3721   0.2395
>> |
```

Hasil perhitungan dengan initial value (1.2, 1.2) pada program Octave menunjukan hasil yang konvergen karena titik yang dihasilkan sama dengan *true value*.

   b. Program Python:

```
Hasil dengan Initial Value (1.2, 1.2)) =
[1.3720654058273418, 0.2395019279592069]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave yaitu konvergen karena sama dengan *true value*.

5. Menggunakan *fsolve* function:
  Dengan menggunakan fungsi *fsolve* milik Octave, hasil akar persamaan yang ditemukan adalah sebagai berikut.

```
>> b5

Titik Initial (1.2, 1.2)
x =
   1.3721
   0.2395

fx =
  -1.5137e-07
  -5.5866e-07
```

Hasil yang didapatkan menunjukan hasil yang berbeda dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan Gauss-Seidel dengan relaksasi. Tetapi, metode Gauss-Seidel dan *fsolve* mendekati titik yang sama.

Kesimpulan

Soal b dapat diselesaikan dengan beberapa cara tetapi tidak semuanya menghasilkan jawaban yang optimal. Metode Gauss-Seidel (dengan maupun tidak dengan relaksasi) dapat menghasilkan konvergen ke *true value* tetapi tidak menghasilkan jawaban yang tepat. Sedangkan metode Newton-Raphson dan *fsolve* menghasilkan jawaban yang lebih akurat karena hasilnya sangat mendekati *true value*. Jadi, metode Newton-Raphson dan *fsolve* lebih cocok digunakan.