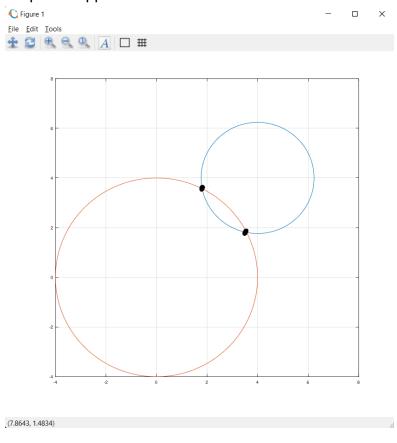
# **TUGAS METODE NUMERIK**

# Kelompok 8:

- Wendy Santoso / C14200036 / B (Newton-Raphson A dan B, *fsolve* A)
   Anthony Reynaldi / C14200078 / B (Gauss-Seidel dan Graphical Method A dan B)
- Jeremy Dion Purnama / C14200206 / B (Gauss-Seidel Relaksasi A dan B, fsolve B)
- A. Carilah akar persamaan (roots) dari persamaan nonlinear berikut ini:
  - 1. Graphical Approach:



Hasil plot dari persamaan menghasilkan grafik seperti di atas. Terdapat dua titik potong sehingga dapat ditentukan *initial value*.

Titik 1: (1.8, 3.5) Titik 2: (3.5, 1.8) Sebelum melakukan perhitungan diperlukan merubah format persamaan untuk mencari nilai x dan y setiap iterasi.

#### Persamaan 1:

$$(x-4)^{2} + (y-4)^{2} = 5$$

$$x^{2} - 8x + 16 + (y-4)^{2} = 5$$

$$-8x = 5 - (y-4)^{2} - x^{2} - 16$$

$$x = (5 - (y-4)^{2} - x^{2} - 16) / -8$$
(a)

Atau

$$x^{2}$$
 = 5 -  $(y - 4)^{2} + 8x - 16$   
 $x$  =  $\sqrt{5 - (y - 4)^{2} + 8x - 16}$  (b)

### Persamaan 2:

$$x^{2} + y^{2}$$
 = 16  
 $y^{2}$  = 16 -  $x^{2}$   
 $y$  =  $\sqrt{16 - x^{2}}$ 

### 2. Gauss-Seidel:

a) Cara Manual:

# Titik 1 (1.8, 3.5)

Ket: untuk menghitung x digunakan persamaan 1 a

$$x = (5 - (y - 4)^{2} - x^{2} - 16) / -8$$

$$x = (5 - (3.5 - 4)^{2} - 1.8^{2} - 16) / -8$$

$$x = 1.8113$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$
  
 $y = \sqrt{16 - 1.8113^2}$   
 $y = 3.5664$ 

# - Iterasi 2 -

$$x = 1.8113$$

$$y = 3.5664$$

$$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$$

$$x = (5 - (3.5664 - 4)^2 - 1.8113^2 - 16) / -8$$

$$x = 1.8086$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 1.8086^2}$$

$$y = 3.5678$$

# - Iterasi 3 -

$$x = 1.8086$$

$$y = 3.5678$$

$$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$$

$$x = (5 - (3.5678 - 4)^2 - 1.8086^2 - 16) / -8$$

$$x = 1.8072$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 1.8072^2}$$

# Titik 2 (3.5, 1.8)

Ket: untuk menghitung x digunakan persamaan 1 b karena jika menggunakan persamaan 1 a akan menghasilkan nilai yang divergen

## - Iterasi 1 -

$$x = 3.5$$

$$y = 1.8$$

$$x = \sqrt{5 - (y - 4)^{2} + 8x - 16}$$

$$x = \sqrt{5 - (1.8 - 4)^{2} + 8 \times (3.5) - 16}$$

$$x = 3.4871$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 3.4871^2}$$

$$y = 1.9596$$

## - Iterasi 2 -

x = 3.4871

y = 1.9596

$$x = \sqrt{5 - (y - 4)^{2} + 8x - 16}$$

$$x = \sqrt{5 - (1.9596 - 4)^{2} + 8 \times (3.4871) - 16}$$

$$x = 3.5684$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 3.5684^2}$$

$$y = 1.8073$$

### - Iterasi 3 -

x = 3.5684

y = 1.8073

$$x = \sqrt{5 - (y - 4)^2 + 8x - 16}$$

$$x = \sqrt{5 - (1.8073 - 4)^2 + 8 \times (3.5684) - 16}$$
  
 $x = 3.5692$ 

$$y = \sqrt{16 - x^{2}}$$

$$y = \sqrt{16 - 3.5692^{2}}$$

$$y = 1.8058$$

#### Hasil Akhir Setelah 3 Iterasi

Titik (1.8, 3.5) menghasilkan (1.8072, 3.5685)

Titik (3.5, 1.8) menghasilkan (3.5692, 1.8058)

b) Program Octave/Matlab:

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

c) Program Python:

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave. Kedua titik mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

- 3. Gauss-Seidel dengan Relaksasi:
  - a) Cara Manual:

Titik 1 (1.8, 3.5) 
$$\lambda = 0.5$$

- Iterasi 1 - 
$$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$$

$$x = (5 - (3.5 - 4)^2 - 1.8^2 - 16) / -8$$
  
 $x = 1.8113$ 

$$x_r = 0.5*1.8113 + (1-0.5)*1.8$$
  
= 0.9057 + 0.9  
= 1.8057

$$y = \sqrt{16 - x^{2}}$$

$$y = \sqrt{16 - 1.8057^{2}}$$

$$y = 3.5692$$

#### - Iterasi 2 -

$$x = 1.8057$$

$$y = 3.5346$$

$$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$$
  
 $x = (5 - (3.5346 - 4)^2 - 1.8057^2 - 16) / -8$   
 $x = 1.8096$ 

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 1.8075^2}$$

$$y = 3.5683$$

### - Iterasi 3 -

$$x = 1.8075$$

$$y = 3.5515$$

$$x = (5 - (y - 4)^2 - x^2 - 16) / -8$$
  
 $x = (5 - (3.5515 - 4)^2 - 1.8075^2 - 16) / -8$   
 $x = 1.8085$ 

$$x_r = 0.5*1.8085 + (1-0.5)*1.8075$$
  
= 0.9043 + 0.9038  
= 1.8081

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 1.8081^2}$$

$$y = 3.5680$$

# Titik 2 (3.5, 1.8)

$$\lambda = 0.5$$

# - Iterasi 1 -

$$x = \sqrt{5 - (y - 4)^{2} + 8x - 16}$$

$$x = \sqrt{5 - (1.8 - 4)^{2} + 8 * 3.5 - 16}$$

$$x = 3.4871$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 3.4936^2}$$

$$y = 1.9480$$

$$Y_r = 0.5*1.9480 + (1-0.5)*1.8$$
  
= 0.9740 + 0.9

## - Iterasi 2 -

$$x = 3.4936$$

$$y = 1.8740$$

$$x = \sqrt{5 - (y - 4)^{2} + 8x - 16}$$

$$x = \sqrt{5 - (1.8740 - 4)^{2} + 8 * 3.4936 - 16}$$

$$x = 3.5255$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 3.5096^2}$$

$$y = 1.9190$$

# - Iterasi 3 -

x = 3.5096

y = 1.8965

$$x = \sqrt{5 - (y - 4)^{2} + 8x - 16}$$

$$x = \sqrt{5 - (1.8965 - 4)^{2} + 8 * 3.5096 - 16}$$

$$x = 3.5570$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \sqrt{16 - 3.5333^{2}}$$

$$y = 1.8750$$

$$Y_{,r} = 0.5*1.8750 + (1-0.5)*1.8965$$

$$= 0.9375 + 0.9483$$

$$= 1.8858$$

#### Hasil Akhir Setelah 3 Iterasi

Titik (1.8, 3.5) menghasilkan (1.8081, 3.5598) Titik (3.5, 1.8) menghasilkan (3.5333, 1.8858)

b) Program Octave/Matlab:

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik dengan lamda 0.5 mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

c) Program Python:

```
Titik 1 (1.8, 3.5)
[1.8058336102501436, 3.5691676332126114]
Titik 2 (3.5, 1.8)
[3.5691752105913146, 1.8058218046872039]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave. Kedua titik mengalami konvergen karena mendekati *true value*.

- 4. Newton-Raphson:
  - a) Cara Manual:

Persamaan 1: 
$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 5 \rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 8y + 16) - 5 = 0$$
  
 $\frac{\delta f1}{x} = 2x - 8$ ;  $\frac{\delta f1}{y} = 2y - 8$   
Persamaan 2:  $x^2 + y^2 = 16 \rightarrow x^2 + y^2 - 16 = 0$   
 $\frac{\delta f2}{x} = 2x$ ;  $\frac{\delta f2}{y} = 2y$ 

### Titik (1.5, 3.5)

#### - Iterasi 1 -

$$x = 1.5, y = 3.5$$

$$\frac{\delta f1}{x} = 2x - 8 = 2^*(1.5) - 8 = -5 ; \frac{\delta f1}{y} = 2y - 8 = 2^*(3.5) - 8 = -1$$
$$\frac{\delta f2}{x} = 2x = 2^*(1.5) = 3 ; \frac{\delta f2}{y} = 2y = 2^*(3.5) = 7$$

$$\det = (\frac{\delta f1}{x} \times \frac{\delta f2}{y}) - (\frac{\delta f1}{y} \times \frac{\delta f2}{x})$$
  
$$\det = (-5*7) - (-1*3) = -35 + 3 = -32$$

$$f_1 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 5 = (1.5 - 4)^2 + (3.5 - 4)^2 - 5 = 6.25 + 0.25 - 5 = 1.5$$
  
 $f_2 = x^2 + y^2 - 16 = 1.5^2 + 3.5^2 - 16 = 2.25 + 12.25 - 16 = -1.5$ 

$$x_{i+1} = x_i - ((f1\frac{\delta f2}{y} - f2\frac{\delta f1}{y}) / \text{det}) = 1.5 - ((1.5*7 - (-1.5)*(-1)) / -32)$$
  
= 1.5 - ((10.5 - 1.5) / -32) = 1.5 - (9 / -32) = 1.5 + 0.2813 = **1.7812**

$$y_{i+1} = y_i - ((f2\frac{\delta f1}{x} - f1\frac{\delta f2}{x}) / det) = 3.5 - (((-1.5)*(-5) - 1.5*3) / -32)$$
  
= 3.5 - ((7.5 - 4.5) / -32) = 3.5 - (3 / -32) = 3.5 + 0.0938 = **3.5938**

#### - Iterasi 2 -

$$x = 1.7812$$
,  $y = 3.5938$ 

$$\frac{\delta f1}{x}$$
 = 2x - 8 = 2\*(1.7812) - 8 = -4.4376;

$$\frac{\delta f1}{v}$$
 = 2y - 8 = 2\*(3.5938) - 8 = -0.8124

$$\frac{\delta f^2}{x}$$
 = 2x = 2\*(1.7812) = 3.5624;  $\frac{\delta f^2}{y}$  = 2y = 2\*(3.5938) = 7.1876

$$\det = \left(\frac{\delta f1}{x} \times \frac{\delta f2}{y}\right) - \left(\frac{\delta f1}{y} \times \frac{\delta f2}{x}\right)$$

$$\det = \left(-4.4376^*7.1876\right) - \left(-0.8124^*3.5624\right) = -31.8957 + 2.8941 = -29.0016$$

$$f_1 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 5 = (1.7812 - 4)^2 + (3.5938 - 4)^2 - 5 = 4.9231 + 0.1650 - 5 = 0.0881$$

$$f_2 = x^2 + y^2 - 16 = 1.7812^2 + 3.5938^2 - 16 = 3,1727 + 12,9154 - 16 = 0.0881$$

$$\begin{array}{l} x_{i+1} = x_i - ((f1\frac{\delta f^2}{y} - f2\frac{\delta f_1}{y}) / \det) = 1.7812 - ((0.0881*3.5624 - 0.0881*(-0.8124)) / (-29.0016)) \\ = 1.7812 - ((0.3138 + 0.0716) / (-29.0016)) \\ = 1.7812 - (0.3854 / (-29.0016)) = 1.7812 + 0.0133 = 1.7945 \\ \hline \\ y_{i+1} = y_i - ((f2\frac{\delta f_1}{x} - f1\frac{\delta f_2}{x}) / \det) = 3.5938 - ((-0.0881*(-4.4376) - 0.0881*3.5624) / (-29.0016)) \\ = 3.5938 - ((0.3909 - 0.3138) / (-29.0016)) \\ = 3.5938 - (0.0771 / (-29.0016)) \\ = 3.5938 + 0.0027 = 3.5965 \\ \hline - Iterasi 3 - \\ x = 1.7945, y = 3.5965 \\ \frac{\delta f_1}{x} = 2x - 8 = 2*(1.7945) - 8 = -4.4110; \\ \frac{\delta f_2}{y} = 2y - 8 = 2*(3.5965) - 8 = -0.8070 \\ \frac{\delta f_2}{x} = 2x = 2*(1.7945) = 3.5890; \\ \frac{\delta f_2}{y} = 2y = 2*(3.5965) = 7.1930 \\ \hline \det = (\frac{\delta f_1}{x} \times \frac{\delta f_2}{y}) - (\frac{\delta f_1}{y} \times \frac{\delta f_2}{x}) \\ \det = (-4.4110*7.1930) - (-0.8070*3.5890) = -31.7283 + 2.8963 = -28.8320 \\ f_1 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 - 5 = (1.7945 - 4)^2 + (3.5965 - 4)^2 - 5 = 4.8642 + 0.1628 - 5 = 0.027 \\ f_2 = x^2 + y^2 - 16 = 1.7945^2 + 3.5965^2 - 16 = 3.2202 + 12.9348 - 16 = 0.155 \\ \hline x_{i+1} = x_i - ((f1\frac{\delta f_2}{y} - f2\frac{\delta f_1}{y}) / \det) = 1.7945 - ((0.027*7.1930 - 0.155*(-0.8070)) / (-28.832)) \\ = 1.7945 - ((0.3193 / (-28.832)) = 1.7945 + 0.0111 = 1.8056 \\ \hline y_{i+1} = y_i - ((f2\frac{\delta f_1}{x} - f1\frac{\delta f_2}{x}) / \det) = 3.5965 - ((0.155*(-4.4110) - 0.027*3.589) / (-28.832)) \\ = 3.5965 - ((-0.6837 - 0.0969) / (-28.832)) \\ = 3.5965 - ((-0.6837 - 0.0969) / (-28.832)) \\ = 3.5965 - ((0.7806 / (-28.832)) = 3.5965 + 0.0271 = 3.6236 \\ \hline \end{array}$$

b) Program Octave/Matlab:

```
Titik 1 (1.5, 3.5)

1.8058 3.5692

Titik 2 (3.5, 1.5)

3.5692 1.8058

>> |
```

Initial value yang digunakan pada program adalah (1.5, 3.5) untuk mencari titik 1 dan (3.5, 1.5) untuk mencari titik 2. Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik mengalami konvergen karena hasilnya sama dengan *true value*.

# c) Program Python:

```
Titik 1
[1.8058290012701486, 3.5691709987298514]
Titik 2
[3.5691709987298514, 1.8058290012701486]
```

Sama seperti program Octave, Initial value yang digunakan pada program adalah (1.8, 3.5) untuk mencari titik 1 dan (3.5, 1.8) untuk mencari titik 2. Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave. Kedua titik mengalami konvergen karena sama dengan *true value*.

# 5. Menggunakan fsolve function:

Dengan menggunakan fungsi *fsolve* milik Octave, hasil akar persamaan yang ditemukan adalah sebagai berikut.

```
>> a5

Titik 1 (1.8, 3.5)

x =
    1.8058
    3.5692

fx =
    4.0107e-06
    4.0106e-06

Titik 2 (3.5, 1.8)

x =
    3.5692
    1.8058

fx =
    4.0107e-06
    4.0106e-06
```

Hasil yang didapatkan menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, Gauss-Seidel dengan relaksasi, dan juga Newton-Raphson.

# Kesimpulan

Soal bagian A dapat diselesaikan dengan bermacam metode mulai dari Gauss-Seidel, Gauss-Seidel dengan relaksasi, Newton-Raphson, dan juga *fsolve*. Semua metode menghasilkan jawaban yang sangat mendekati *true value*. Tetapi, pada metode Gauss-Seidel (dan juga dengan relaksasi) memerlukan perubahan format perumusan x. Persamaan 1 a adalah format yang paling pas untuk mencari hasil dari *initial value* titik 1 (1.8, 3.5) karena akan terjadi konvergen. Sedangkan Persamaan 1 a tidak dapat digunakan untuk mencari hasil dari *initial value* titik 2 (3.5, 1.8) karena akan terjadi divergen, sehingga diperlukan perubahan format seperti pada Persamaan 1 b.

B. Carilah akar persamaan (roots) dari persamaan nonlinear berikut ini:

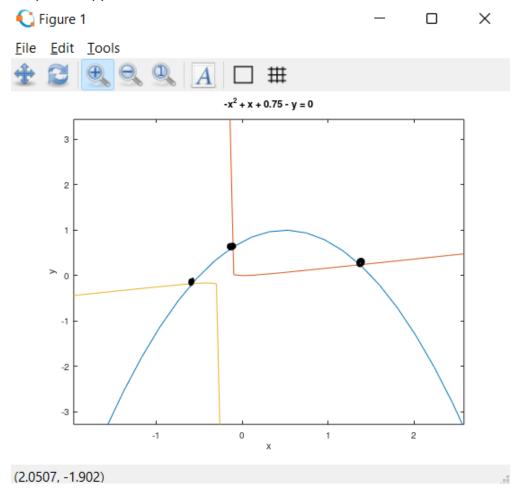
$$y = -x^2 + x + 0.75$$
  
 $y + 5xy = x^2$ 

Initial value yang digunakan:

$$x = 1.2$$

$$y = 1.2$$

1. Graphical Approach:



Hasil plot dari persamaan menghasilkan grafik seperti di atas. Terdapat tidak titik potong sehingga terdapat 3 *root* yang berbeda. Perkiraan *root* adalah sebagai berikut.

Titik 1: (-0.6, -0.1)

Titik 2: (-0.2, 0.6)

Titik 3: (1.4, 0.3)

Sebelum melakukan perhitungan diperlukan merubah format persamaan untuk mencari nilai x dan y setiap iterasi. Terdapat beberapa format tetapi hanya 1 dari masing-masing yang dapat menghasilkan konvergen.

### Persamaan 1:

y = 
$$-x^2 + x + 0.75$$
  
 $x^2$  =  $x + 0.75 - y$   
x =  $\sqrt{x} + 0.75 - y$ 

### Persamaan 2:

$$y + 5xy = x^{2}$$
  
 $5xy = x^{2} - y$   
 $y = (x^{2} - y) / 5x$ 

- 2. Gauss-Seidel:
  - a. Program Octave/Matlab:

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik mengalami konvergen karena mendekat ke arah *true value* tetapi hasil akhir tidak menghasilkan nilai yang sangat dekat dengan *true value*.

b. Program Python:

```
Titik 1 (1.2, 1.2)
[1.3047822562164257, 0.3523254316110222]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave.

- 3. Gauss-Seidel dengan Relaksasi:
  - a. Program Octave/Matlab:

```
Titik 1 (1.2, 1.2), Lamda = 0.5
1.3048 0.3523
>> [
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Octave menunjukan kedua titik dengan lamda 0.5 mengalami konvergen karena mendekat ke arah *true value* tetapi hasil akhir tidak menghasilkan nilai yang sangat dekat dengan *true value*.

# b. Program Python:

```
Titik 1 (1.2, 1.2), Lamda = 0.5
[1.3047822219707812, 0.3523256202900441]

Process finished with exit code 0
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave.

# 4. Newton-Raphson:

a. Program Octave/Matlab:

```
Hasil dengan Initial Value (1.2, 1.2)) = 1.3721 0.2395 >> |
```

Hasil perhitungan dengan initial value (1.2, 1.2) pada program Octave menunjukan hasil yang konvergen karena titik yang dihasilkan sama dengan *true value*.

## b. Program Python:

```
Hasil dengan Initial Value (1.2, 1.2)) = [1.3720654058273418, 0.2395019279592069]
```

Hasil perhitungan dengan menggunakan program Python menunjukan hasil yang sama dengan menggunakan program Octave yaitu konvergen karena sama dengan *true value*.

# 5. Menggunakan *fsolve* function:

Dengan menggunakan fungsi *fsolve* milik Octave, hasil akar persamaan yang ditemukan adalah sebagai berikut.

```
>> b5

Titik Initial (1.2, 1.2)

x =
    1.3721
    0.2395

fx =
    -1.5137e-07
    -5.5866e-07
```

Hasil yang didapatkan menunjukan hasil yang berbeda dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan Gauss-Seidel dengan relaksasi. Tetapi, metode Gauss-Seidel dan *fsolve* mendekati titik yang sama.

## Kesimpulan

Soal b dapat diselesaikan dengan beberapa cara tetapi tidak semuanya menghasilkan jawaban yang optimal. Metode Gauss-Seidel (dengan maupun tidak dengan relaksasi) dapat menghasilkan konvergen ke *true value* tetapi tidak menghasilkan jawaban yang tepat. Sedangkan metode Newton-Raphson dan *fsolve* menghasilkan jawaban yang lebih akurat karena hasilnya sangat mendekati *true value*. Jadi, metode Newton-Raphson dan *fsolve* lebih cocok digunakan.