Overview

Welcome to **Draft-kit** - a powerful toolkit for creating drafts and content.

Built on **MarkdownX**, this system provides:

[Markdown](#) for text formatting
[Mermaid](#) for elegant diagrams
[Typst](#) for mathematics
p5.js Automatic **P5js** for visualization
Automatic **TreeSideBar** for easy navigation
Full support for Vietnamese characters and spaces in folder/file names.

Cách dùng markdown

Basic Syntax

Headers

```
# H1
## H2
### H3
#### H4
##### H5
###### H6
```

Emphasis

```
*italic* or _italic_
**bold** or __bold__
**_bold italic_** or **_bold italic_**
~~strikethrough~~
```

Lists

Unordered:

```
- Item 1
- Item 2
  - Subitem 2.1
  - Subitem 2.2
```

Ordered:

```
1. First item
2. Second item
3. Third item
```

Links

```
[Link text](URL)
[Link with title](URL "Title")
```

Images

```
![Alt text](image.jpg)
![Alt text](image.jpg "Image title")
```

Code

Inline code: `code`

Code blocks:

````
```language
code block
```
````

Blockquotes

```
> Blockquote
> Multiple lines
>> Nested blockquotes
```

Tables

```
| Header 1 | Header 2 |
|----------|----------|
| Cell 1   | Cell 2   |
| Cell 3   | Cell 4   |
```

Horizontal Rule

```
---
***
___
```

Extended Syntax

Task Lists

```
- [x] Completed task
- [ ] Uncompleted task
```

Footnotes

```
Here's a sentence with a footnote[^1].
[^1]: This is the footnote.
```

Heading IDs

```
### My Heading {#custom-id}
```

Definition Lists

```
Term
: Definition
```

Emoji

```
:smile: :heart: :thumbsup:
```

Remember to check your Markdown processor's support for extended syntax features.

Basic Syntax

Headers

H1

H2

H3

H4

H5

H6

Emphasis

italic or *italic* **bold** or **bold** ***bold italic*** or ***bold italic*** ~~strikethrough~~

Lists

Unordered:

- Item 1
- Item 2
  - Subitem 2.1
  - Subitem 2.2

Ordered:

1. First item
2. Second item
3. Third item

Links

Link text Link with title

Images

Alt text Alt text

Code

Inline code: `code`

Code blocks:

```
code block
```

Blockquotes

> *Blockquote Multiple lines*
>
> > *Nested blockquotes*

Tables

Header 1	Header 2
Cell 1	Cell 2
Cell 3	Cell 4

Horizontal Rule

Extended Syntax

Task Lists

- [x] Completed task
- [ ] Uncompleted task

Footnotes

Here's a sentence with a footnote[1].

Heading IDs

My Heading 3

Definition Lists

Term : Definition

Emoji

:smile: :heart: :thumbsup:

Remember to check your Markdown processor's support for extended syntax features.

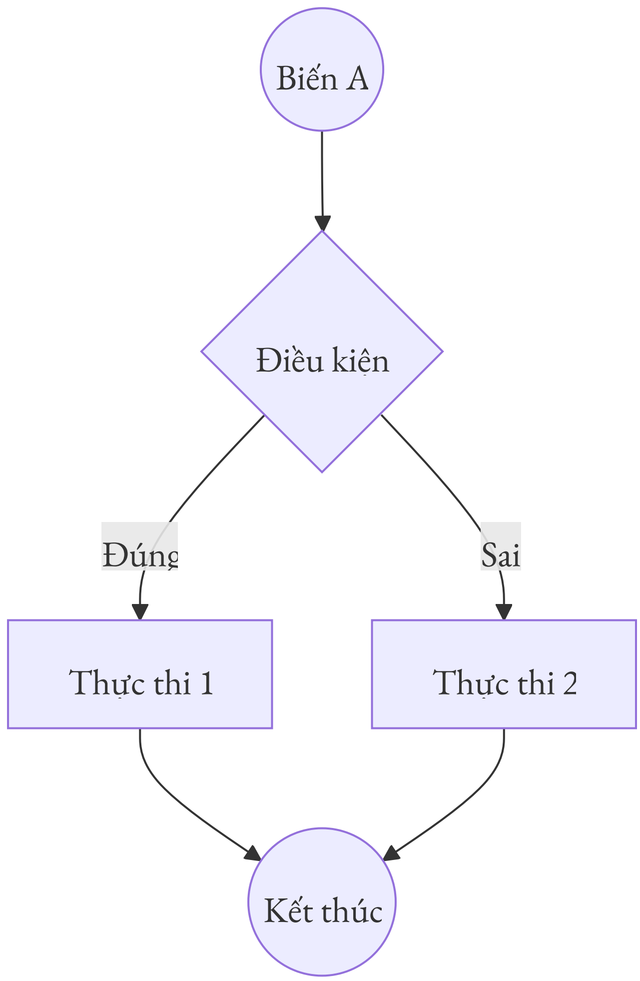
Footnotes

1. This is the footnote. ↩

Diagrams with Mermaid

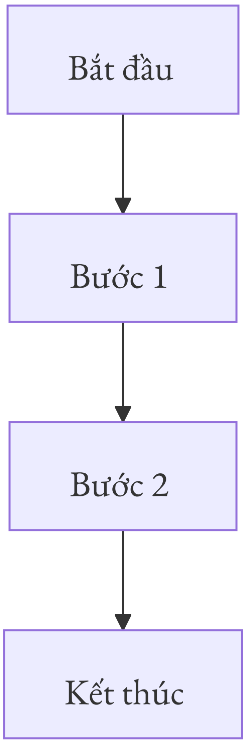
Graph

```
graph TD
    A((Biến A)) --> B{Điều kiện}
    B -->|Đúng| C[Thực thi 1]
    B -->|Sai| D[Thực thi 2]
    C --> E((Kết thúc))
    D --> E
```



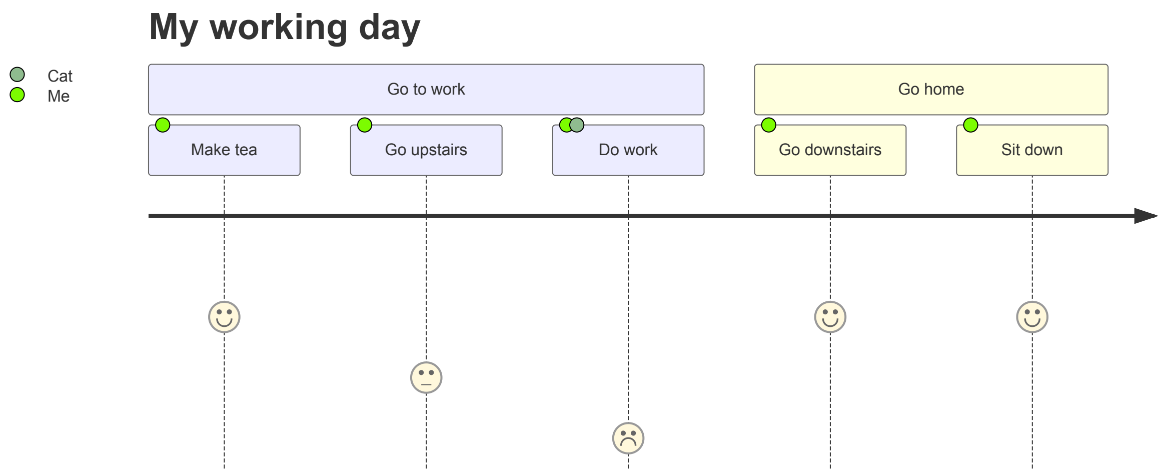
Flowchart

```
graph TD
    A[Bắt đầu] --> B[Bước 1]
    B --> C[Bước 2]
    C --> D[Kết thúc]
```



Journey

```
journey
title My working day
section Go to work
    Make tea: 5: Me
    Go upstairs: 3: Me
    Do work: 1: Me, Cat
section Go home
    Go downstairs: 5: Me
    Sit down: 5: Me
```


My working day
Cat
Me
Go to work
Go home
Make tea
Go upstairs
Do work
Go downstairs
Sit down

Math Blocks in Typst

Tài liệu

- [Math Blocks Documentation]
- [Math Block Examples] Typst provides powerful support for mathematical expressions and equations through its math block system.

Math Block Features

Syntax Options

Typst offers both inline math using single $ delimiters and block math using double $$ delimiters for more complex equations and formulas.

Mathematical Elements

Math blocks support:

- Common mathematical operators
- Greek letters and symbols
- Fractions and integrals
- Matrices and arrays
- Subscripts and superscripts
- Multi-line equations

Examples

Complex math block:

VD1

Input

```
integral_0^infinity frac(x^3, e^x - 1) dif x
```

```
= frac(pi^4, 15)
```

Output

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

VD2

Input

```
vec(a/b, a/b, a/b) = vec(1, 1, 1)
```

Output

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Common Math Notation

Math blocks automatically handle:

- Proper spacing around operators
- Multi-character variable names
- Alignment in multi-line equations
- Equation numbering
- Cross-referencing

Typst's math blocks combine LaTeX-like mathematical capabilities with a more intuitive and modern syntax.

Gõ kí hiệu toán học ở Latex và typst

Latex

```
1. belongs to: \in
2. (does not belong to): \notin
3. union : \cup
4. intersection: \cap
5. proper subset: subset
6. subset: \subseteq
7. set difference: setminus
8. emptyset: \emptyset
9. Natural numbers: \mathbb{N}
10. integers : \mathbb{Z }
```

Typst:

```
1. belongs to: $in$
2. (does not belong to): $nin$
3. union : $union$
4. intersection: $sect$
5. proper subset: $subset.strict$
6. subset: $subset$
7. set difference: $setminus$
8. emptyset: $empty$
9. Natural numbers: $NN$
10. integers :      $ZZ$
```

A test to embed typst formulas into MDX.

Inline formulas:

Blah blah blah formula: $E = Mc^2$. This is inline!

Standalone formulas:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \\ &= \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \end{aligned}$$

$$A = \pi r^2$$

$$\text{area} = \pi \cdot \text{radius}^2$$

Using the ```math code block:

$$a = \frac{1}{2 \pi r}$$

$A \in B$

$25\%, 50\%, 25\%$

Show code

1. Chèn code với ```

Vd typescript:

```
const a = 2
let b = a *3
```

(Sử dụng rehypeShiki)

```
npm i @shikijs/rehype
```

//next.config.mjs

```
import createMDX from "@next/mdx";

import rehypeTypst from "@myriaddreamin/rehype-typst";
import remarkMermaid from "remark-mermaidjs";

import rehypeShiki from "@shikijs/rehype";

/** @type {import('next').NextConfig} */
const nextConfig = {
  pageExtensions: ["js", "jsx", "md", "mdx", "ts", "tsx"],
  trailingSlash: true,
  assetPrefix: process.env.NODE_ENV === "production" ? "/roadkit" : "",

  experimental: {
    esmExternals: true, // Enable ESM support
  },
};
if (process.env.NODE_ENV === "production") {
  nextConfig.output = "export";
```

```
  nextConfig.images = { unoptimized: true };
  nextConfig.basePath = "/roadkit";
}

const withMDX = createMDX({
  extension: /\.mdx?$/,
  options: {
    remarkPlugins: [remarkMermaid],
    rehypePlugins: [
      rehypeTypst,
      [
        rehypeShiki,
        {
          theme: "dark-plus",
        },
      ],
    ],
  },
});

export default withMDX(nextConfig);
```

2. Thêm element details để đóng mở code

- Mở .vscode/settings.json

```
{
  "emmet.includeLanguages": {
    "markdown": "html",
    "mdx": "html"
  },
}
```

Là có thể sử dụng html element và gợi ý import component trong mdx.

▼ Code Hello.py

```
print('hello')
```

P5js đồ họa

Hello

Thử 1 hình vẽ p5

Click vào hình dưới đây để hình trái tim hiện ra

[redacted]

Ong và nhện

Được truyền cảm hứng từ khái niệm 'Ong và Nhện' của Jonathan Swift, nên mình cũng liệt kê ra vài tác giả mà mình thấy là theo trường phái 'Ong' sẽ giúp ích cho người đọc và giúp người đọc có cơ sở để đọc những cuốn 'Nhện' đỡ bị mông lung.

[Link tác phẩm the battle of the books: https://www.gutenberg.org/files/623/623-h/623-h.htm](https://www.gutenberg.org/files/623/623-h/623-h.htm)

Giải thích kĩ hơn thì từ tác phẩm 'The Battle of the books' của Jonathan Swift, ông đưa ra hình ảnh ẩn dụ là ong và nhện. Ong bay đi xa tìm hoa để lấy mật, tạo ra những điều đẹp đẽ tượng trưng cho sự ngọt ngào, và đầy ánh sáng, giống như con ong . Ông ngầm so sánh vài tác giả cổ đại như Plato, Aristotle với con ong. Còn con nhện ko đi đâu xa mà chỉ quanh quẩn ở 1 góc nhỏ, tạo mạng nhện của riêng nó, giăng tơ chăng bẫy, tạo ra chất độc để tiêu hóa côn trùng, tượng trưng cho sự cá tính, nhưng có thể nguy hiểm - giống như cái bẫy. Ông ngầm ví vài tác giả hiện đại như Descartes (và vài tác giả hiện đại nhưng khác nhưng mà mình cũng chưa đọc các tác giả này mà chỉ biết mỗi Descartes thôi) với nhện.

Mặc dù việc so sánh Descartes với nhện nó là điều còn gây tranh cãi nhưng khái niệm ong và nhện mà Swift đưa ra đã tạo cảm hứng để mình đưa ra 2 list là Bees và Spiders. Tuy nhiên, list này nó cũng chỉ là tương đối, tác giả có thể có cả những yếu tố của ong và nhện mà. Thực ra The Battle of the books có kha khá câu hỏi để có thể thảo luận nhưng ta có thể bàn sau.

Ong

1. Ray Bradbury : 451 độ F
2. Masanobu Fukuoka : Cuộc cách mạng 1 cọng rơm
3. Plato: Cộng hòa
4. Jonathan Swift: The battle of the books
5. Mark Twain: Cuộc phiêu lưu của Tom Sawyer, HuckFinn
6. Thomas Samaras: The Truth about your height
7. Aristotle
8. James Boswell : The life of Samuel

Nhện

1. Umberto Ecos : Tên của đóa hồng
2. Kafka : Vụ án
3. George Orwell : 1984
4. J.D. Salinger : Bắt trẻ đồng xanh
5. Fitzgerald: Đại gia Gatsby
6. Mark Haddon: Bí ẩn con chó lúc nửa đêm

Còn ví dụ như Shakespear thì mình thực sự ko biết nên xếp ông vào đâu nữa.

Ngoài ra thì có những tác phẩm không chú trọng vào việc suy nghĩ, tư duy, mà thiên về cảm xúc thì có thể kể đến các nhà thơ, văn học lãng mạn. Thiên về trí tưởng tượng thì có các nhà văn fantasy, các tác giả truyện tranh. Văn học trinh thám như Conan Doyle hoặc văn học kinh dị cũng có suy nghĩ nhưng phạm vi chỉ nằm ở việc tìm ra kẻ phạm tội, kẻ giết người chứ ko ở những phạm trù xã hội phức tạp hơn.

À, còn những tác phẩm về chủ đề sinh tồn thì mình ko rõ là nên xếp vào ong hay nhện.

Đo chu vi Trái Đất ở thời cổ đại

Tìm hiểu cách người cổ đại giải quyết vấn đề.

Nguồn:

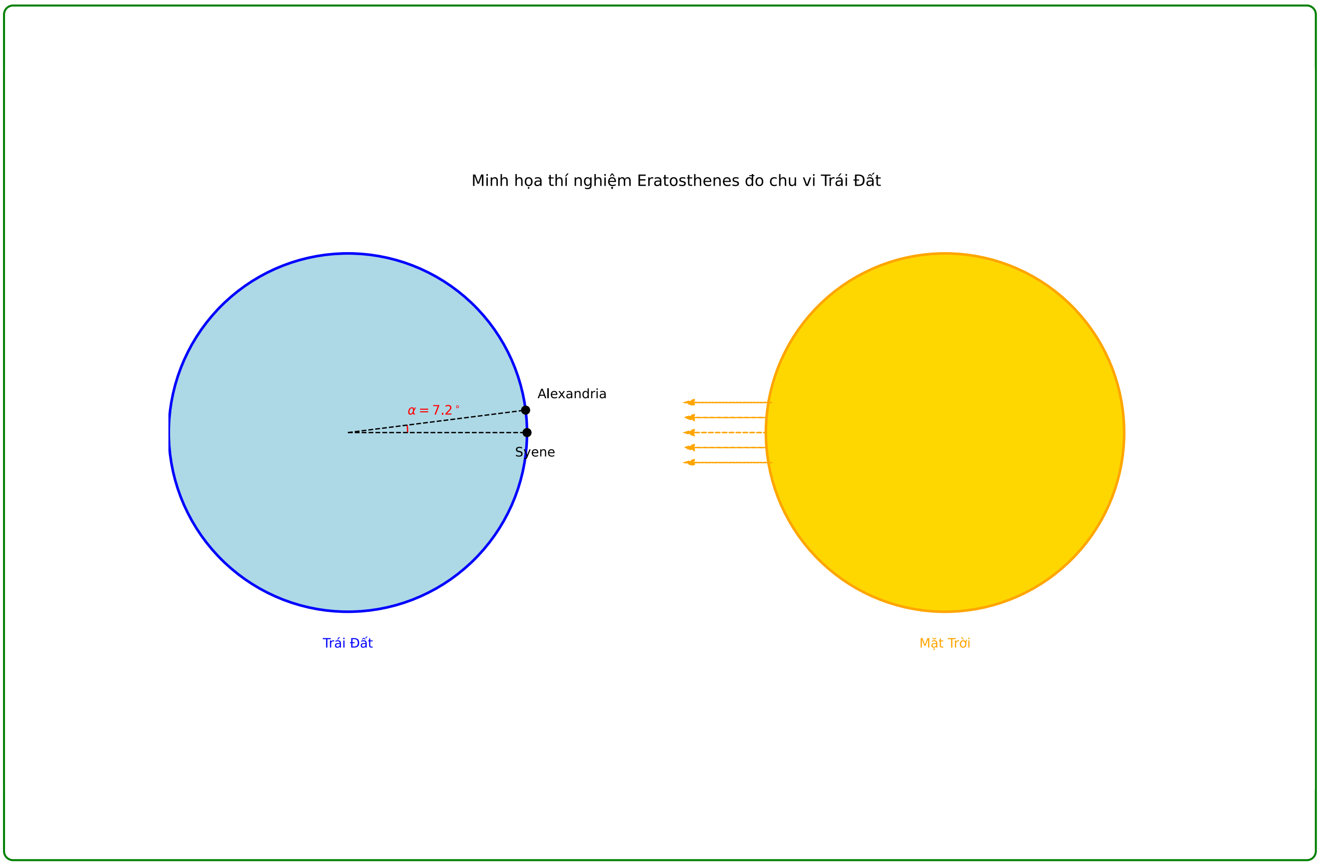
1. Sách: Alfred S. Posamentier: Vẻ đẹp toán học
2. Internet: https://clbvatlysangtaovts.wordpress.com/thuc-nghiem-vat-ly/do-chu-vi-va-ban-kinh-trai-dat/

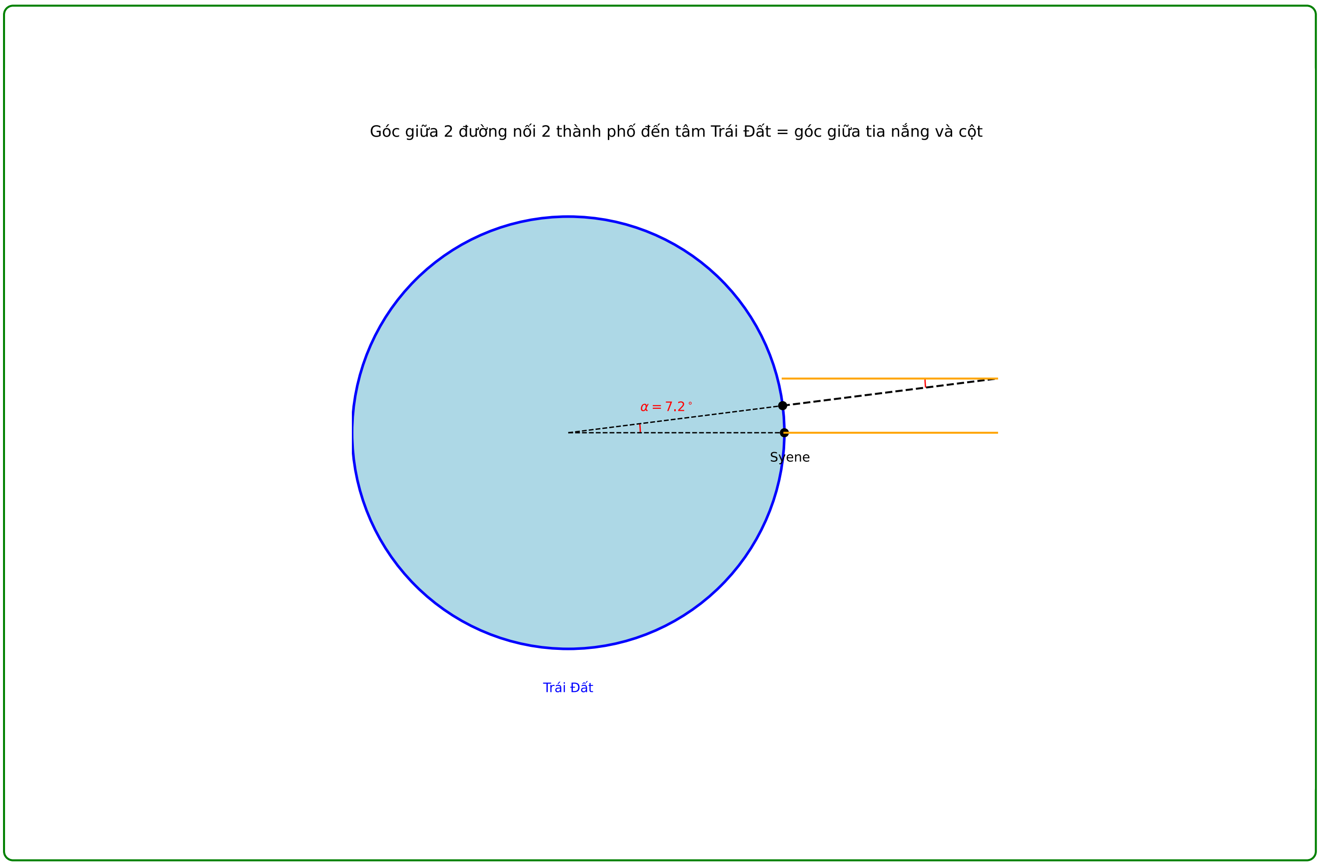
Eratosthenes đã đo chu vi Trái Đất ntn?

Hàng nghìn năm trước, việc đo đạc Trái Đất là 1 việc rất khó. Nguồn gốc của từ hình học - *geometry* là 'đo Trái Đất', (*geo*: đất, trái đất, *metry*: đo đạc). Do đó chúng ta sẽ đi ngược dòng lịch sử và tìm hiểu về ý nghĩa nguyên thủy của bộ môn hình học. Vào khoảng năm 230 TCN, nhà toán học Hy Lạp Eratosthenes là 1 trong những người đầu tiên tìm cách đo chu vi của Trái Đất. Số đo của ông tương đối chính xác, chỉ lệch 2% so với số đo thực tế. Để thực hiện phép đo này, ông đã sử dụng quan hệ giữa các góc so le trong của các đường thẳng song song.

Là thủ thư của thư viện Alexandria, Eratosthenes đã có cơ hội tìm đọc vô số bản ghi chép về các sự kiện theo lịch. Ông phát hiện ra rằng ở thị trấn Syên bên bờ sông Nile (ngày nay là Aswan), vào đúng giữa trưa của 1 ngày nhất định trong năm, Mặt trời ở ngay trên đỉnh đầu của chúng ta. Do đó, ánh nắng có thể rọi tới tận đáy của 1 cái giếng sâu và 1 chiếc cột thẳng đứng song song với ánh nắng sẽ ko đổ bóng.

Tuy nhiên cùng thời điểm đó, 1 chiếc cột thẳng đứng khác tại tp Alexandria lại có bóng. Eratosthenes chờ đến đúng ngày đó và ông đã đo lại góc tạo bởi chiếc
cột ở Alexandria và tia nắng mặt trời đi qua chiếc đỉnh chiếc cột, đổ bóng xuống mặt đất. Ông tìm ra góc α này bằng khoảng $7°12$ hay bằng $\frac{1}{50}$ của $360°$.





Với giả thiết các tia nắng mặt trời chiếu song song, ông thấy rằng góc ở tâm Trái Đất phải bằng góc α và cũng bằng xấp xỉ $\frac{1}{50}$ của $360°$. Vì Syene và Alexandria gần như nằm trên cùng 1 kinh tuyến nên Syene phải nằm trên bán kính song song với các tia nắng mặt trời. Eratosthenes suy luận đc rằng khoảng cách giữa Syene và Alexandria bằng $\frac{1}{50}$ chu vi Trái Đất. Mà khoảng cách giữa Alexandria và Syene đc cho là cách nhau khoảng 5000 stadium. Stadium là 1 đơn vị đo cổ của Hy Lạp, 1 stadium bằng chiều dài của 1 sân vận động Olympic hoặc svđ Ai Cập, tương đương khoảng 157m. Do đó, ông kết luận rằng chu vi Trái Đất khoảng $250,000$ stadium tương đương với khoảng $39,250$ km. Con số này gần đúng với kết quả tính toán ngày nay. Quả là tuyệt vời.

Câu hỏi: Làm sao người ta biết được Alexandria và Syene cách nhau 5000 stadium?

PS: Alexandria và Syene hiện nay: Nguồn:
https://www.google.com/maps/dir/Alexandria,+Ai+C%E1%BA%ADp/Syene,+Ai+
entry=ttu&g_ep=EgoyMDI1MDYxMS4wIKXMDSoASAFQAw%3D%3D

Trò chơi: Thực hiện lại thực nghiệm của Eratosthenes

1-Thực nghiệm đo tiến hành vào các ngày đặc biệt.

Đó là các ngày đặc biệt trong chuyển động biểu kiến của Mặt Trời: Hạ Chí, Đông Chí, Xuân Phân và Thu Phân.

- Vào ngày hạ chí (khoảng 21/6), Mặt Trời sẽ đi qua đỉnh đầu vào giữa trưa ở các nơi có vĩ tuyến 23,5 độ Bắc.
- Vào ngày đông chí (khoảng 22/12), Mặt Trời sẽ đi qua đỉnh đầu vào giữa trưa ở các nơi có vĩ tuyến 23,5 độ Nam.
- Vào ngày xuân phân (khoảng 20/3) và thu phân (khoảng 23/9), Mặt Trời sẽ đi qua đỉnh đầu vào giữa trưa ở các nơi nằm trên đường xích đạo.

Tận dụng các ngày đặc biệt này ta chỉ cần đo góc bóng Mặt Trời ở nơi mình sinh sống (Góc A cần xác định) rồi tìm khoảng cách từ vĩ tuyến địa phương đến vĩ tuyến nơi bóng Mặt Trời bằng không (khoảng cách D). Ví dụ vào ngày xuân phân 20/3 tới đây. Chỉ cần đo góc bóng nắng vào lúc giữa trưa ở địa phương của bạn (góc A) và tìm khoảng cách từ vĩ độ địa phương đến đường xích đạo (khoảng cách D) là có thể tìm ra chu vi Trái Đất theo công thức : A / 360 = D / chu vi Trái Đất

Ưu điểm của phương pháp: Các nhóm có thể thực hiện độc lập mà không phụ thuộc vào nhóm khác. Vào ngày xuân phân và thu phân thì góc của bóng nắng còn chính là vĩ độ địa phương nơi tiến hành đo. Điều lưu ý là: góc bóng nắng phải được xác định vào lúc giữa trưa thiên văn là khi Mặt trời lên cao nhất (qua kinh tuyến trên). Giữa trưa theo giờ đồng hồ 12h đôi khi không phải là lúc Mặt Trời lên cao nhất. (Cách đo và xác định bóng sẽ bàn kỹ hơn trong phần dụng cụ đo)

Câu hỏi: Vào ngày nào, mặt trời sẽ đi qua đỉnh đầu ở Hà Nội ?

2- Thực nghiệm đo vào ngày bất kỳ

Do vào ngày bất kỳ với ít nhất là 2 nhóm cách xa nhau về vĩ độ ví dụ như TP.HCM và Hà Nội.

Mỗi nhóm đo góc Mặt Trời ở địa phương mình và dùng kết quả của nhóm bạn để tính toán. Góc A cần tính lúc này là độ lệch góc bóng giữa 2 địa phương có được bằng các đo bóng Mặt Trời vào lúc giữa trưa thiên văn. A = góc bóng địa điểm 1- góc bóng địa điểm 2.

Do thí nghiệm nguyên thủy của Eratosthenes tiến hành ở hai địa điểm cùng nằm trên đường kinh tuyến. Nên với hai địa điểm có khác biệt về kinh tuyến như Hà Nội và Tp.HCM ta sẽ phải hiệu chỉnh lại. Cũng do khác biệt về kinh tuyến mà giữa trưa thiên văn ở Hà Nội và TP.HCM sẽ chênh nhau vài phút. Khoảng cách giữa hai địa phương (D) lúc này được thay bằng khoảng cách giữa hai đường vĩ độ địa phương. Có A và D ta cũng sử dụng công thức A / 360 = D / chu vi Trái Đất để tìm ra chu vi Trái Đất

3. Dụng cụ đo và phương pháp đo.

3.1. Dụng cụ đo

Dụng cụ đo đơn giản chỉ là 1 cọc được dựng vuông góc với mặt đất bằng phẳng.

Để đảm bảo cọc vuông góc với mặt đất một số phương án được đề nghị như sau:

a. Làm mâm đo.

Dựng một cọc vuông góc với đế là một mâm tròn. Đường kính mâm tròn có thể 1m hoặc hơn. Cọc đo có thể dài hay ngắn, nhưng dao động trong khoảng 0.5m-1,5m. Có thể tháo ra được (nên dùng 2 cọc dài ngắn thay nhau). Trên mặt mâm đo nên có sẵn các vạch chia độ . Nên vẽ luôn các đường tròn đồng tâm bán kính cách đều để có thể xác định bóng nắng đang ở khoảng cách nào. Có một số yếu tố khó khăn khi làm thiết bị này là :

- Đảm bảo được cọc đo hoàn toàn vuông góc với mâm đo
- Mâm đo đảm bảo phẳng.
- Có bộ phận chỉnh thẳng ngang của mâm đo. Như vậy trong 3 chân đế của thiết bị đo, nên có 2 chiếc có thể điều chỉnh được. Bộ cân chỉnh cân bằng của mâm đo có thể làm như kiểu cân bằng ống nước của thợ xây.

b. Dùng cọc nghiêng thay vì cọc thẳng

Dựng cọc nghiêng thay vì cọc thẳng dùng dây dọi thả vật nặng để xác định vuông góc với mặt đất . Sau khi đã xác định được điểm bóng của Mặt Trời vào lúc giữa trưa thiên văn, ta đo góc của dây dọi và dây được căng thẳng nối hai điểm đầu cọc và bóng của nó trên mặt đất.

Một số phương án đảm bảo cho cọc đo vuông góc với mặt đất có thể tùy theo sáng tạo của từng nhóm.

3.2- Phương pháp đo

a- Xác định góc A vào lúc giữa trưa thiên văn

Thời gian đo tiến hành từ lúc 11g40 đến 12g30 (theo giờ Hà Nội) do độ lệch giữa giữa trưa theo giờ đồng hồ và giữa trưa thiên văn. Cứ 2 phút xác định bóng ở đầu gậy một lần, bóng ở đầu gậy sẽ vẽ lên trên mặt đất dạng một đường thẳng. Sau một thời gian đo ta xác định được điểm bóng có khoảng cách ngắn nhất đến chân gậy đó chính là bóng của thời điểm giữa trưa thiên văn.

Góc bóng nắng A được xác định bằng thước đo góc hay bằng công thức tang A= Chiều dài bóng / chiều dài gậy

b- Xác định khoảng cách giữa vĩ độ hai điểm đo.

Có thể sự dụng các công cụ hiện đại như chương trình Google Earth. Nhưng khuyến khích sử dụng bản đồ để xác định khoảng cách. Mặc dù có độ sai số cao. Các bạn có thể tham khảo giá trị sau, nếu so sánh vị trí đo của mình với bắc chí tuyến khi tính toán cho lần Hạ chí này:

Chúng ta biết rằng Chu vi Trái đất bằng [360* D (Khoảng cách từ nơi đo tới Bắc chí tuyến trong ngày hạ chí)]/góc anpha, nhân tiện có kinh vĩ độ của các địa điểm Duy tính toán giá trị D này theo Distance to Tropic of Cancer Caculator của EAAE, khỏi mất công các bạn tính toán giá trị khoảng cách này theo bản đồ nữa

1. Ho Chi Minh city, 10.7694 N, D= -1409.17 km, giá trị âm tức là ở phía Nam của Bắc chí tuyến, và tất cả các địa phương của VN đều nằm ở phía Nam cả, do Bắc chí tuyến đi qua gần như ngay điểm cực bắc của nước ta.

2. Ha Noi, 21.033 N. D= -268.94 km

3. Pleiku, 13.99N, D= -1031.52 km

4. Da Nang, 16.07 N, D= -820.16 km

5. Bao Loc, 11.50N, D= -1328.04 km

6. Phan Thiết, 10.93N, D= -1391.38 km

7. Vung Tau, 10.35N, D=-1455.84 km

8. Cao Lãnh, 10.46N, D= -1443.62 km

9. Sa Đéc, 10.30N và D= -1461.4 km

10. Thanh Hoá, 19.81N, D=-404.52 km

Kẻ hai đường song song là 2 đường vĩ tuyến đi qua hai điểm đo chúng ta sẽ đo khoảng cách giữa hai đường đó bằng các đo bằng thước chia vạch mm và dùng tỉ lệ xích của bản đồ để suy ra khoảng cách thật. Sử dụng bản đồ thế giới để tìm khoảng các từ vĩ độ chúng ta đến xích đạo hay các đường chí tuyến, nếu đo vào ngày đặc biệt và bản đồ Việt Nam nếu 2 điểm đo cùng trên nước Việt Nam vào ngày bất kỳ.

Với 6000đ ta có thể mua được 1 Bản đồ Việt Nam khổ 60×80 tỉ lệ 1/3.500.000 của Nhà XB Bản đồ T11/2006. Với tỉ lệ này 1cm trên bản đồ sẽ tương đương với 35km trên thực địa. Thước thẳng thông thường có vạch chia đến mm, như vậy ta có thể xác định khoảng cách chính xác đến +- 1.75 km ! Khoảng cách TP HCM- Hà nội là 32.4 * 35 = 1.134km.

c – Xác định chu vi Trái Đất

Chu vi Trái Đất = 360xD/A Kiểm tra với kết quà thực tế : Chu vi Trái Đất trung bình là 40.041 km do Trái Đất không phải là hình cầu hoàn hảo mà hơi dẹt ra ở xích đạo. Do sai số của dụng cụ và quá trình đo có thể kết quả đo sẽ chênh lệch trong khoảng 1 hay 2 ngàn km.

Bài toán Nhảy cầu kính

Nguồn bài toán nhảy cầu kính: https://quanhoang-pm.github.io/puzzle/glass-bridge-in-squid-game/

Squid Game là một series được phát hành trên Netflix vào tháng 09/2021. Nó kể về một cuộc thi nơi 456 người chơi đánh cược mạng sống của bản thân trong khi tham gia các trò chơi *đơn giản* để giành lấy một phần thưởng vô cùng lớn. Câu đố dưới đây được lấy cảm hứng từ một trong những trò chơi diễn ra trong cuộc thi này.

Mô tả

Có một nhóm người (đủ đông) tham gia trò chơi **Nhảy cầu kính**. Cây cầu gồm n hàng kính (n là một số nguyên dương), mỗi hàng kính có hai tấm kính: một kính cường lực và một kính thường. Kính cường lực có thể chịu được sức nặng của một người bất kỳ, kính thường thì không.

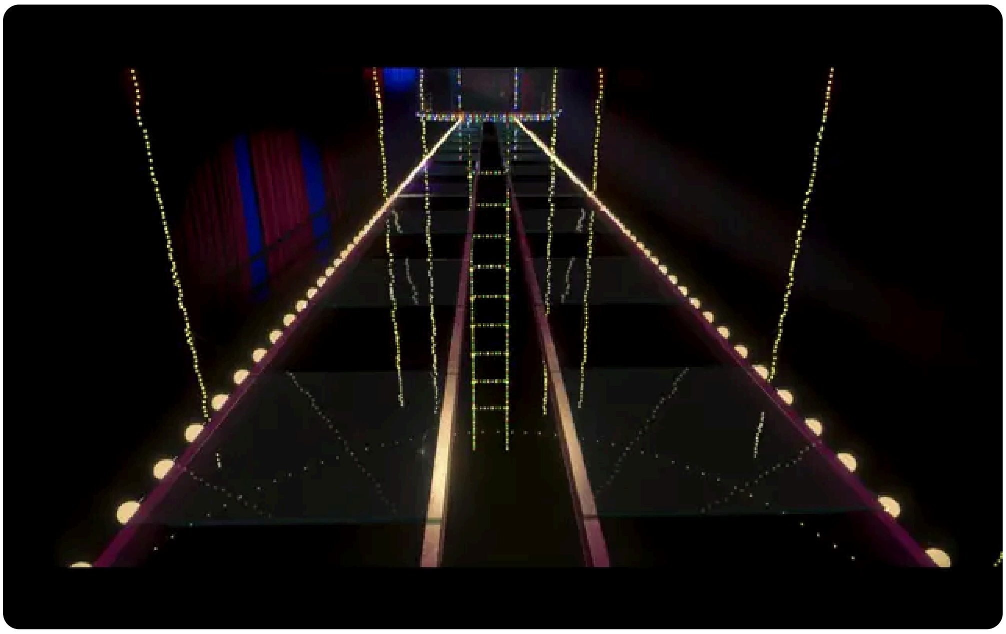
Tất cả người chơi xếp thành một dãy tại vị trí xuất phát và lần lượt nhảy trên cầu kính, mỗi thời điểm có tối đa một người trên cầu. Mỗi giây, người đứng trên cầu (hoặc đứng đầu ở vị trí xuất phát) phải chọn một trong hai tấm kính trong hàng kính tiếp theo và nhảy tới đó. Nếu đó là kính cường lực, người chơi tiếp tục trò chơi, nếu đó là kính thường, kính vỡ và người chơi bị loại khỏi trò chơi.

Khi có người đầu tiên tới được đầu bên kia của cây cầu, trò chơi kết thúc và anh ấy/cô ấy là người chiến thắng. Những người còn lại bị loại khỏi trò chơi. Mục tiêu của người tham gia là trở thành người chiến thắng trò chơi này.

Dưới đây là một số nhận xét liên quan tới trò chơi:

- Những người đi sau có thể dựa vào lựa chọn của người đi trước để suy luận ra đâu là kính thường, đâu là kính cường lực ở mỗi hàng kính.

- Sau khi người thứ nhất thực hiện bước nhảy lên hàng kính đầu tiên, bất kể kết quả ra sao, những người ở sau sẽ biết chắc chắn đâu là kính cường lực ở hàng kính đầu tiên này.
- Nếu trò chơi vẫn tiếp tục sau khi có người qua được đầu bên kia, những người chơi từ vị trí $n+1$ trở đi chắc chắn sẽ an toàn nhảy qua hết n hàng kính trên cầu.
- Với luật chơi được mô tả bên trên, những người chơi từ vị trí $n+2$ trở đi chắc chắn không thể dành chiến thắng.
- Trò chơi chắc chắn sẽ kết thúc sau một khoảng thời gian hữu hạn.
- Khi $n=2$, xác suất chiến thắng của ba người đầu tiên lần lượt là $25\%, 50\%, 25\%$, những người còn lại không thể chiến thắng.



| Cây cầu kính trong series Squid Game |

Các biến thể

Danh sách dưới đây liệt kê các biến thể của luật chơi được mô tả bên trên.

- Biến thể 0. Luật chơi giữ nguyên như mô tả bên trên.
- Biến thể 1 (thay đổi điều kiện chiến thắng). Hai người đầu tiên đến đích là những người chiến thắng. Trò chơi kết thúc ngay sau đó.
- Biến thể 2 (thay đổi số kính ở mỗi hàng). Mỗi hàng kính có 2 kính thường và 1 kính cường lực.
- Biến thể 3 (đặt giới hạn thời gian). Thời gian được tính từ bước nhảy đầu tiên, nếu quá giới hạn thời gian cho trước (đặt là m giây) mà chưa xác định được người chiến thắng thì tất cả người chơi bị loại.
- Biến thể 4 (hạn chế thông tin truyền lại từ người chơi trước). Người sau không trực tiếp nhìn thấy lựa chọn của người đi trước. Cú nhảy của một người sẽ làm vỡ kính thường, do đó người đến sau có thể nhận ra và tránh. Còn nếu người đó nhảy lên kính cường lực thì tấm kính không thay đổi và

người đến sau không có thông tin gì về hai tấm kính. Ví dụ với $n = 2$, xác suất chiến thắng của ba người đầu tiên lần lượt là 25%, 37.5%, 37.5%, những người còn lại không thể chiến thắng.

- Biến thể 5 (yêu cầu chiến thuật phù hợp mỗi khi nhảy). Khi tới một cửa bất kỳ, người chơi chỉ có thể biết số lượng người đi trước đã nhảy lên mỗi tấm kính, chứ không biết trạng thái của các tấm kính (vỡ hay lành, thường hay cường lực). Đâu là chiến thuật tối ưu: nhảy lên tấm kính ít người chọn hay nhảy lên tấm kính nhiều người chọn? Chiến thuật có thay đổi giữa các người chơi hay không?

Câu hỏi

Trong vai trò là một người tham gia trò chơi, câu hỏi quan trọng nhất cần trả lời là:

Câu hỏi 1. Chiến thuật nào tối đa hóa khả năng giành chiến thắng?

Trong các biến thể 0, 1, 2, 3 và 4, chiến thuật chỉ là việc chọn số thứ tự xuất phát, vì trong quá trình chơi mọi người chỉ cần tránh những tấm kính đã vỡ và chỉ có thể chọn ngẫu nhiên trong (những) tấm kính lành lặn. Riêng đối với biến thể 5, chiến thuật còn bao gồm việc lựa chọn khi đứng trước một hàng kính.

Một câu hỏi khác có liên quan là

Câu hỏi 2. Trung bình một lần chơi diễn ra trong bao lâu?

Hướng dẫn giải

▼ Gợi ý

Xét bài toán gốc với cây cầu gồm n hàng kính, sử dụng phương pháp đệ quy để chỉ ra chỉ có $n + 1$ người đầu tiên có cơ hội giành chiến thắng với xác suất là giá trị chuẩn hóa của dòng thứ $n + 1$ trong tam giác Pascal.

Giải bài toán nhảy cầu kính

Link câu đố nhảy cầu kính: https://quanhoang-pm.github.io/puzzle/glass-bridge-in-squid-game/

Về mặt sơ lược, đầu tiên mình tạo ra mô hình để mô tả bài toán, sau đó lập mô hình sự kiện xác suất để giải bài toán, sau đó ta sẽ có công thức đệ quy. Sau đó từ công thức đệ quy, (bằng 1 số thủ thuật) ta có thể tìm ra công thức tổng quát.

Mô hình bài toán

1. Trạng thái của trò chơi

▼ Details

Trạng thái của trò chơi là 1 tập hợp chứa các phần tử sau:

1. Thời gian (tính bằng số giây)
2. id của người đang ở trên cầu (đánh số từ 1)
3. Số người chơi ban đầu
4. Cây cầu:
    - Số hàng kính (n)
    - Vị trí của người đang chơi
    - Người đang ở trên cầu đang an toàn (ở tấm kính cường lực) hay nguy hiểm (ở tấm kính thường)

Ta mô tả 1 lần chơi = 1 danh sách các trạng thái của trò chơi từ trạng thái khởi tạo đến trạng thái kết thúc

Trạng thái khởi tạo

1. Thời gian = 0
2. Chưa có người ở trên cầu
3. Số người chơi ban đầu : M
4. Cây cầu (có n hàng kính, chưa có người chơi)

Trạng thái kết thúc :

1. Thời gian = t
2. Có 1 người ở trên cầu
3. Số người chơi ban đầu: M
4. Cây cầu:
    - Có n hàng kính
    - Người chơi đang ở vị trí n
    - Vị trí của người chơi là vị trí an toàn

2. Không gian xác suất

Không gian xác suất ở đây là tất cả các lần chơi có thể xảy ra. Mỗi lần chơi lại có 1 độ đo xác suất, tổng các độ đo xác suất là 1.

3. Sự kiện

▼ Details

Phần khó nhất của việc mô hình bài toán có lẽ là phần xây dựng sự kiện.

Bây giờ ta mô tả sự kiện $S(i, k, t)$ (S là safe) là như sau:

- Người có id i đang ở trên cầu
- Người đó đang **an toàn**
- Người đó đang ở vị trí k
- Thời gian là t (giây)
- Trong thời gian T = 0,1,2,...(t-1) chưa
  từng có ai an toàn ở vị trí k (nhấn mạnh là an toàn
  vì trước đó có thể có người đã ở vị trí k 1 cách nguy hiểm)

Tiếp theo ta mô tả sự kiện $D(i, k, t)$ (D là dangerous) như sau:

- Người có id i đang ở trên cầu
- Người đó đang **nguy hiểm**
- Người đó đang ở vị trí k
- Thời gian là t (giây)
- Trong thời gian T = 0,1,2,...(t-1) chưa
  từng có ai an toàn ở vị trí k (nhấn mạnh là an toàn
  vì trước đó có thể có người đã ở vị trí k 1 cách nguy hiểm)

Ta gọi P(A) = xác suất của sự kiện A. Dựa theo luật chơi, ta thấy ta cần tìm những giá trị sau:

1. Xác suất để người có id i giành chiến thắng với i từ 1 đến $N+1$. Thì xác suất để người id i giành chiến thắng là

$$P(W_i) = \sum_t P(S(i, N, t))$$

(Ta gọi $W(i)$ là sự kiện i dành chiến thắng).

2. Trung bình 1 lần chơi hết bao nhiêu thời gian

$$E = \sum_t tP(S(i, N, t))$$

1. Giải bài toán 1

Để giải bài toán xác suất này, ta đi tìm công thức đệ quy sau đó dùng pp quy nạp ta tìm ra công thức tổng quát.

Công thức đệ quy

▼ Details

Ta thấy khi $i = 1$ thì

$$P(S(1,0,0)) = 1$$
$$p(S(1,k,k)) = \frac{1}{2}p(S(1,k-1,k-1)) = \frac{1}{2^k} \text{ với } \quad k = 1, ..., N$$

Ta có thể làm vậy dễ dàng vì xác suất chọn mỗi loại kính đều bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}$.

Ta thấy sự kiện $S(i, k, t)$ có liên quan đến sự kiện :

- $S(i, k+1, t+1)$: Nếu sự kiện $S(i, k, t)$ xảy ra thì người i sẽ có quyền chọn lựa hàng kính tiếp theo, dẫn đến $S(i, k+1, t+1)$ sẽ xảy ra nếu chọn đc lựa chọn an toàn (là cái kính cường lực), $D(i, k+1, t+1)$ sẽ xảy ra nếu chọn phải kính vỡ.

Ta xem xét bước chuyển khi người i rơi vào trạng thái nguy hiểm $D(i, k, t)$, khi đó 'chưa từng có ai an toàn ở vị trí k' nên ta dùng chiến lược để cho người tiếp theo là $i+1$ sẽ học hỏi người i và là người đầu tiên an toàn ở vị trí k, dẫn đến trạng thái $S(i+1, k, t+k)$.

Tổng hợp từ 2 quan sát trên, ta cho rằng sự kiện $S(i+1,k,t+k)$ được cấu thành như sau:

$$S(i+1,k+1,t+k+1) = (S(i+1,k,t+k) \cap S(i+1,k+1,t+k+1)) \cup D(i,k+1,t)$$

Ta có công thức

$$P(S(i+1,k+1,t+k+1)) = \frac{1}{2}P(S(i+1,k,t+k)) + P(D(i,k+1,t))$$
$$P(S(i+1,k+1,t+k+1)) = \frac{1}{2}P(S(i+1,k,t+k)) + \frac{1}{2}P(S(i,k,t-1))$$

[^1].

Công thức tổng quát

Ở phần gợi ý, ta đã được gợi ý rằng dùng quy nạp chứng minh $n+1$ người đầu tiên có xác suất giành chiến thắng là giá trị chuẩn hóa của dòng thứ $n+1$ trong tam giác Pascal. Nên ta làm thử 3 bước quy nạp:

▼ Details

B1. Trường hợp cơ sở

Với $n=1$, ta có

$$P(W_1) = \frac{1}{2}$$
$$P(W_2) = \frac{1}{2}$$

B2. Giả thiết quy nạp

Giả thuyết quy nạp:

Với $n = 1, ..., N$, ta có

$$P(W_i) = \sum_t P(S(i,n,t)) = \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n} \quad \text{với} \quad i = 1, ..., n+1$$

Ta thấy trường hợp cơ sở n=1 thì giả thuyết đúng.

Ta giả sử giả thuyết đúng với $n = 1, ..., N$, ta sẽ chứng minh giả thuyết đúng với $n = N + 1$.

$$P(S(i, N+1, t)) = \frac{1}{2}P(S(i, N, t-1)) + \frac{1}{2}P(S(i-1, N, t-N-2))$$

Sau đó ta lấy tổng tất cả t của 2 vế, ta có

$$\begin{aligned}\sum_t P(S(i, N+1, t)) &= \frac{1}{2}\sum_t P(S(i, N, t-1)) + \frac{1}{2}\sum_t P(S(i-1, N, t-N-2)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\binom{N}{i}}{2^N} + \frac{1}{2}\frac{\binom{N}{i-1}}{2^N} \\ &= \frac{1}{2^{N+1}}\binom{N+1}{i}\end{aligned}$$

Như vậy ra ta đã chứng minh được giả thuyết đúng với $n = N + 1$.

B3. Kết luận

Ta có được công thức tổng quát của xác suất mỗi người chiến thắng.

$$P(W_i) = \sum_t P(S(i,n,t)) = \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n} \quad \text{với} \quad i = 1, ..., n+1$$

Như vậy người có xác suất thắng cao nhất là $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2. Tính thời gian trung bình 1 lượt chơi

Mò công thức tổng quát:

Code python,

▼ Details

```
import math
N = 6

# Solve by dp
# 1. Base
p = dict()

for i in range(0, N + 1):

    p[(1,i,i)] = math.pow(2, N-i)
print(p)

for i in range(1,N+1):
    for k in range(0,N+1):
        for t in range(0, i*N+2):

            a = p[(i,k,t-1)] if ((i,k,t-1) in p) else 0.0
            b = p[(i+1, k, t+k)] if ((i+1, k, t+k) in p) else 0.0
            p[(i+1, k+1, t+k+1)] = a/2.0 + b/2.0

print(p)
# solve prob to win

win = dict()
for i in range(1,N+2):
    win[i] = 0
    for t in range(1, (N+1)**2+2):
        a =  p[(i, N, t)] if (i,N,t) in p else 0
        win[i] = win[i] + a
print(win)
#
# Tính thời gian end game
time_end = 0
for i in range(1,N+2):
    sum = 0
    for t in range(1, (N+1)**2+2):
        a =  p[(i, N, t)] * t if (i,N,t) in p else 0
        sum +=a
    time_end += sum
print(time_end/math.pow(2, N))
```

tính ra thời gian trung bình cho vài trường hợp nhỏ của N

n	Thời gian trung bình 1 lần chơi f(n)	Hiệu $f(n) - f(n-1)$
1	1.5	
2	3.5	2
3	6	2.5
4	9	3
5	12.5	3.5
6	16.5	4

Ta thấy hiệu của các hạng tử trong dãy là dãy tăng dần đều ($g(n) = g(n-1) + \frac{1}{2}$). Từ đó ta tìm được công thức tổng quát của $g(n)$

$$g(n) = \frac{n}{2} + 1$$

Sau đó, suy ra công thức tổng quát của $f(n)$ là 1 hàm đa thức bậc 2.

$$f(n) = f(n-1) + \frac{n}{2} + 1$$
$$\Rightarrow f(n) = \frac{n(n+5)}{4}$$

Quay lại, lời giải lí thuyết, ta dùng quy nạp.

TH cơ sở

ta có $f(1) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = \frac{7}{2}$.

GT quy nạp

Giả thuyết quy nạp:

> Với mọi n = 2,...,N, ta có
>
> $$f(n) = f(n-1) + \frac{n}{2} + 1$$

Ta sẽ chứng minh giả thuyết đúng với n = N + 1. Ta bắt đầu với biểu thức trước đó:

$$P(S(i,N+1,t)) = \frac{1}{2}P(S(i,N,t-1)) + \frac{1}{2}P(S(i-1,N,t-N-2))$$

Nhân t cả 2 vế, rồi lấy tổng theo tất cả các t:

$$\sum_t tP(S(i,N+1,t)) = \frac{1}{2}\sum_t tP(S(i,N,t-1)) + \frac{1}{2}\sum_t tP(S(i-1,N,t-N-2))$$

Ở mỗi t của vế phải, tách t ra để cố gắng lấy đc cái hàm f(N)

$$\begin{aligned}\sum_t tP(S(i,N+1,t)) &= \frac{1}{2}\left(\sum_t (t-1)P(S(i,N,t-1)) + \sum_t P(S(i,N,t-1))\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\sum_t (t-N-2)P(S(i-1,N,t-N-2)) + \sum_t (N+2)P(S(i-1,N\right.\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_t (t-1)P(S(i,N,t-1)) + \frac{1}{2}\sum_t (t-N-2)P(S(i-1,N,t-N\right.\\ &+\frac{1}{2}\left(\sum_t P(S(i,N,t-1)) + \sum_t (N+2)P(S(i-1,N,t-N-2))\right)\\ &= \frac{1}{2}(f(N)+f(N)) + \frac{1}{2}(P(W(i,N)) + (N+2)*P(W(i-1,N)))\end{aligned}$$

(Trong đó $W(i,N)$ là sự kiện người i thắng trong trò mà cầu có N hàng kính).

Cuối cùng, lấy tổng theo tất cả i, ta có :

$$f(N+1) = f(N) + \frac{N+1}{2} + 1$$

Như vậy công thức đệ quy đã được chứng minh. Từ đó, đặt ẩn phụ A,B,C

$$f(n) = An^2 + Bn + C$$

Tính ra A,B,C được:

$$f(n) = \frac{n(n+5)}{4}$$