ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN – CƠ – TIN HỌC

Lê Thị Thu An

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỂ GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN BIÊN ELLIPTIC

Khóa luận tốt nghiệp đại học hệ chính quy
Ngành Toán học
Chương trình cử nhân khoa học tài năng

Hà Nội - 2022

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN – CƠ – TIN HỌC

Lê Thị Thu An

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN ĐỂ GIẢI GẦN ĐÚNG BÀI TOÁN BIÊN ELLIPTIC

Khóa luận tốt nghiệp đại học hệ chính quy
Ngành Toán học
Chương trình cử nhân khoa học tài năng

Cán bộ hướng dẫn: TS. Nguyễn Trung Hiếu

Hà Nội - 2022

Mục lục

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên, em xin gửi cảm ơn chân thành đến thầy Nguyễn Trung Hiếu, người đã giúp em tiếp cận ngành Toán học tính toán nói chung cũng như cung cấp đầy đủ các loại sách, tài liệu để em có thể tìm hiểu đề tài này nói riêng.

Tiếp theo, em xin cảm ơn quý thầy, cô khoa Toán-Cơ-Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên đã tận tình chỉ dạy, truyền đạt cho em những kiến thức quý báu để em có thể thực hiện được tiểu luận này.

Cuối cùng, em xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè, tập thể lớp K63TNToán, những người đã sẵn sàng chia sẻ và giúp đỡ em trong học tập và cuộc sống.

Hà Nội, ngày 18 tháng 5 năm 2022

Sinh viên

Lê Thị Thu An.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Bài toán biên elliptic

Đầu tiên, ta đưa ra toán tử elliptic tổng quát và dạng biến phân của nó. Cho các hàm $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ với $i, j = 1, \ldots, n$ và $a_{ij} = a_{ji}$. Ma trận các hệ số (a_{ij}), được gọi là *elliptic đều* nếu tồn tại một hằng số dương α sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \text{ với mọi } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ h.k.n trong } \Omega, \tag{1.1}$$

tức là nếu ma trận (a_{ij}) xác định dương đều hầu khắp nơi. Toán tử elliptic tương ứng với ma trận hệ số elliptic được xác định bởi công thức

$$Au(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right). \tag{1.2}$$

Ta phát biểu bài toán biên elliptic.

Bài toán 1.1. *Cho miền Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, có biên Lipschitz. Tìm* *hàm $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sao cho:*

$$\begin{cases} Au(x) & = f \text{ trong } \Omega, \\ u & = g_0 \text{ trên } \Gamma_D, \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j & = g_1 \text{ trên } \Gamma_N. \end{cases}$$

Nếu ma trận (a_{ij}) là ma trận đơn vị thì ta có bài toán Poisson.

Bài toán 1.2. *Cho miền Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, có biên Lipschitz.*

Tìm hàm $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sao cho:

$$\begin{cases} -\Delta u & = f \text{ trong } \Omega, \\ u & = g_0 \text{ trên } \Gamma_D, \\ \partial_n u & = g_1 \text{ trên } \Gamma_N. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ở đây, $\partial_n u$ là đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài của u

$$\partial_n u = \nabla u \cdot \mathbf{n},$$

trong đó $\mathbf{n}$ là vector pháp tuyến đơn vị của biên Γ_N theo hướng ra ngoài, và ∇u là gradient của u. Ta giải thích các thành phần trong bài toán trên. Hàm u cần tìm là đại lượng vô hướng trên miền Ω. Δu là lượng khuếch tán. Hàm f thể hiện nguồn phát ở trong phương trình khuếch tán. Biên của Ω được chia thành 2 phần rời nhau: biên Dirichlet Γ_D (ta biết giá trị của u trên biên Dirichlet là g_0) và biên Neumann Γ_N (ta biết giá trị của đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài của u tại biên Neumann).

1.1.1 Dạng biến phân

Giả sử bài toán Poisson 1.2 có nghiệm. Nhân 2 vế với v đủ trơn rồi lấy tích phân, ta có:

$$\int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega fv. \tag{1.4}$$

Áp dụng công thức Green II, ta được:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\partial_n u)v = \int_\Omega fv. \tag{1.5}$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} (\partial_n u) + \int_\Omega fv. \tag{1.6}$$

Tích phân trên $\partial\Omega$ được phân tích thành tổng của 2 tích phân trên Γ_D và Γ_N.

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\Gamma_D} (\partial_n u)v + \int_{\Gamma_N} (\partial_n u)v + \int_\Omega fv. \tag{1.7}$$

Do không biết $\partial_n u$ trên Γ_D, nên nếu chọn hàm thử v thỏa mãn

$$v = 0 \qquad \text{trên } \Gamma_D$$

thì ta có

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v.$$

Trong phương trình trên, ta chưa sử dụng điều kiện biên Dirichlet. Dữ liệu f, g_1 xuất hiện ở vế phải. Biểu thức ở vế trái tuyến tính với cả u và v, nên là dạng song tuyến tính với 2 biến u và v. Vế phải tuyến tính với

v. Ta đặt:

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v$$
$$(f,v) := \int_\Omega fv$$
$$F(v) := \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v \text{ trên } \Gamma_D.$$

Khi chưa nêu cụ thể không gian của u, v, dạng yếu có thể được viết như sau:

Bài toán 1.3. *Tìm hàm u sao cho:*

$$\begin{cases} u = g_0 & \textit{trên } \Gamma_D, \\ a(u,v) = F(v) & \textit{với mọi } v \textit{ sao cho } v = 0 \textit{ trên } \Gamma_D. \end{cases} \tag{1.8}$$

Hai điều kiện biên xuất hiện ở hai nơi khác nhau. Điều kiện Dirichlet được đặt ngoài phương trình, được đặt lên hàm thử v. Điều kiện Neumann nằm trong phương trình, là điều kiện tương thích .

Bài toán dạng mạnh 1.2 cần u thuộc không gian $C^2(\overline{\Omega})$ trong khi bài toán dạng yếu 1.3 chỉ cần u có đạo hàm khả tích. Ta sẽ mở rộng không gian của u sang một không gian lớn hơn, là không gian $H^1(\Omega)$. Đó là không gian các hàm thuộc $L^2(\Omega)$ có các đạo hàm yếu cũng thuộc $L^2(\Omega)$. Nhưng trước hết, ta cần đưa ra khái niệm đạo hàm yếu ở mục sau đây.

1.1.2 Đạo hàm yếu

Đạo hàm trong công thức biến phân (1.3) là đạo hàm yếu, sẽ được trình bày trong mục này, được tham khảo từ [1], chương 1, trang 26-29.

Định nghĩa đạo hàm thông thường:

$$u'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

là một định nghĩa "địa phương", tức là ta chỉ cần thông tin của hàm u ở gần điểm x. Dạng biến phân được trình bày dưới đây sẽ cho ta góc nhìn toàn cục hơn, ta sẽ có được đạo hàm của hàm bình phương khả tích $L^2(\Omega)$. Ta thấy rằng nếu hàm $f, g \in L(\Omega)$ mà sai khác nhau 1 điểm, hoặc 2 điểm, hoặc 1 tập điểm có độ đo Lebesgue bằng 0 thì chúng vẫn được coi là tương đương nhau. Như vậy thì một định nghĩa toàn cục về đạo hàm sẽ phù hợp hơn với không gian các hàm khả tích Lebesgue. Ta cũng sẽ dùng kĩ thuật "đối ngẫu", để định nghĩa đạo hàm cho các hàm không trơn lắm bằng cách so sánh chúng với các hàm rất trơn.

Đầu tiên, ta đưa ra kí hiệu *đa chỉ số*.

Định nghĩa 1.1. *Một bộ đa chỉ số α là một bộ n số nguyên không âm α_i.*

Ví dụ 1.1. Với $n = 3$ thì ta có bộ $\alpha = (1, 2, 3)$, bộ $\beta = (0, 0, 5), \ldots$.

Độ dài của α được định nghĩa bằng tổng các thành phần của α:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Ví dụ:

$$|(1, 2, 3)| = 1 + 2 + 3 = 6$$

Với hàm $\phi \in C^\infty$, kí hiệu $D^\alpha\phi, \phi^{(\alpha)}$ là đạo hàm riêng bình thường

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \phi$$

Cấp của đạo hàm này là $|\alpha|$.

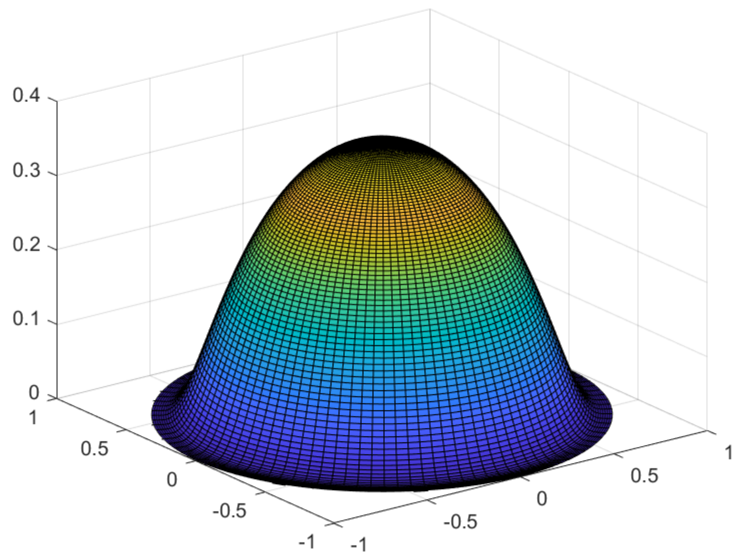
Tiếp theo, ta định nghĩa *giá* của một hàm với miền xác định là tập con của $\mathbb{R}^n$. Với hàm liên tục u, giá của nó là bao đóng của tập $\{x : u(x) \neq 0\}$. Nếu tập giá là tập compact và là tập con của phần trong của Ω thì ta nói hàm có giá compact theo Ω. Nếu Ω là một tập bị chặn, thì ta có định nghĩa tương đương là u triệt tiêu tại lân cận của $\partial\Omega$.

Định nghĩa 1.2. *Cho Ω là một miền xác định trong $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu $C_0^\infty(\Omega)$ là tập các hàm $C^\infty(\Omega)$ có giá compact trong Ω.*

Cho Ω là một miền xác định trong $\mathbb{R}^n$. Kí hiệu $C_0^\infty(\Omega)$ là tập các hàm $C^\infty(\Omega)$ có giá compact trong Ω.

Ví dụ 1.2. Ω là hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^2$. Một phần tử không tầm thường của $C_0^\infty(\Omega)$ là hàm có dạng hình chuông

$$\phi(x) := \begin{cases} e^{\dfrac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$



Hình 1.1: Đồ thị của hàm $\phi(x)$ trong Ví dụ 1.2.

Định nghĩa 1.3. *Cho trước miền* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *, tập các hàm* ***khả tích địa phương*** *được kí hiệu bởi*

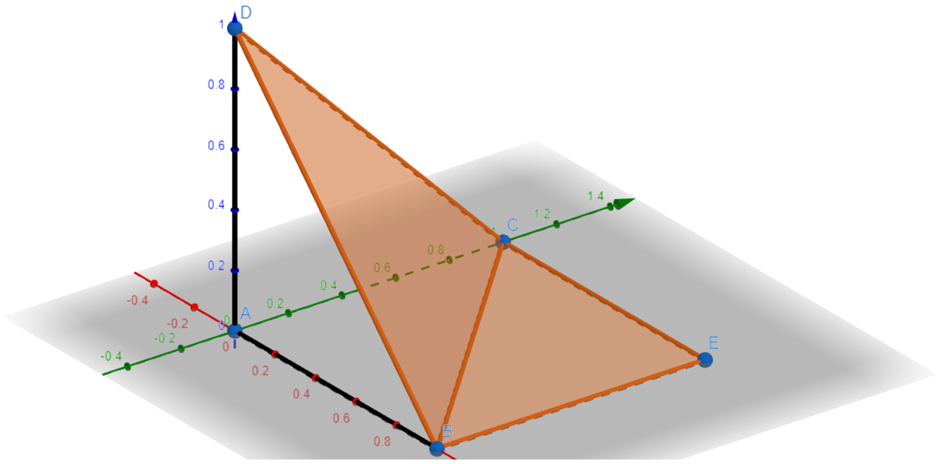
$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^1(K) \qquad \text{với mọi } K \text{ compact } \subset \text{ phần trong của } \Omega\}.$$

Định nghĩa 1.4 (Đạo hàm yếu)**.** *Ta nói rằng hàm* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *có* ***đạo hàm yếu****,* D^α_w*, nếu tồn tại hàm* $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ *sao cho*

$$\int_\Omega g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\phi^{(\alpha)}(x)dx \qquad \forall \phi \in C^\infty_0(\Omega)$$

Khi đó, ta định nghĩa $D^\alpha_w f = g$.

Ví dụ 1.3. Ở các phần sau của bài viết này, ta sẽ sử dụng đến các hàm tuyến tính từng mảnh, liên tục trên miền Ω.

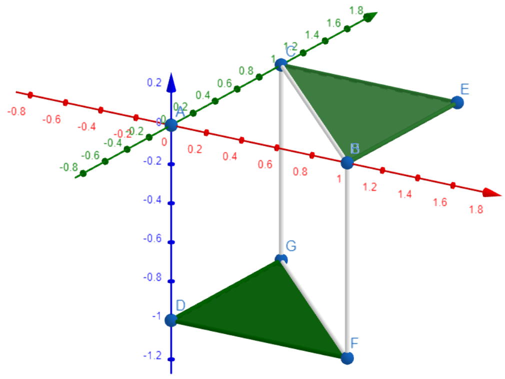


Hình 1.2: Đồ thị hàm f.

Trên miền hình vuông $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, cho hàm:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - x_1 - x_2, & \text{với } (x_1, x_2) \text{ thuộc tam giác } 0 \le x_1 + x_2 \le 1, \\ 0, & \text{với những điểm còn lại.} \end{cases}$$

Ta có đạo hàm yếu của f theo biến x_1 trên miền Ω là:



Hình 1.3: Đồ thị hàm g.

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{với } (x_1, x_2) \text{ thuộc tam giác } 0 \leq x_1 + x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{với những điểm còn lại.} \end{cases}$$

Không tồn tại đạo hàm yếu bậc 1 của hàm g trên miền Ω vì hàm g không tương đương với 1 hàm liên tục.

1.1.3 Không gian Sobolev

Mục này sẽ trình bày định nghĩa không gian Sobolev và vài tính chất chính của không gian này, được tham khảo từ [1], và [3].

Định nghĩa 1.5 (Chuẩn Sobolev)**.** *Cho k là một số nguyên không âm, và cho $f \in L^1_{loc}\Omega$. Giả sử rằng đạo hàm yếu D^α_w tồn tại với mọi $|\alpha| \leq k$. Định nghĩa chuẩn Sobolev*

$$\|f\|_{W^k_p(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha_w f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

trong trường hợp $1 \leq p < \infty$, và

$$\|f\|_{W^k_\infty(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha_w f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

trong trường hợp $p = \infty$.

Ở trong cả hai trường hợp, ta định nghĩa ***không gian Sobolev***

$$W_p^k(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) \qquad : \|f\|_{W_p^k(\Omega)} < \infty\}.$$

Không gian Sobolev có liên quan tới vài không gian khác. Ví dụ, với *chuẩn Lipschitz*

$$\|f\|_{Lip(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} : x, y \in \Omega, x \neq y\right\},$$

và không gian các hàm Lipschitz

$$Lip(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f\|_{Lip(\Omega)} < \infty\},$$

ta có $Lip(\Omega) = W^1_\infty$ và 2 chuẩn này tương đương nhau. Hơn nữa, với $k \geq 1$,ta có:

$$W^k_\infty = \{f \in C^{k-1}(\Omega) : f^{(\alpha)} \in Lip(\Omega) \text{ với mọi} |\alpha| \leq k-1\}.$$

Với số chiều $n = 1$, tức là Ω chỉ là 1 đoạn thẳng, không gian W^1_1 bằng không gian các hàm liên tục tuyệt đối trên đoạn Ω.

Dễ thấy rằng $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ là một chuẩn nên $W_p^k(\Omega)$ là một không gian định chuẩn. Định lí dưới đây (xem chứng minh ở [1], trang 30) khẳng định rằng không gian này là không gian đầy đủ.

Định lí 1.1. *Không gian Sobolev $W_p^k(\Omega)$ là không gian Banach.*

Cũng có một cách khác để định nghĩa không gian Sobolev. Đặt $H_p^k(\Omega)$ để chỉ bao đóng của $C^k(\Omega)$ đối với chuẩn Sobolev $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$. Ở trong trường hợp $p = \infty$ ta có $H^k_\infty = C^k$ và không giống hoàn toàn $W_p^k(\Omega)$. Thật vậy, ta cần cái sau phải thuộc không gian Lipschitz. Tuy nhiên, với $1 \leq p < \infty$ thì $H_p^k(\Omega) = W_p^k(\Omega)$. Đó là kết quả của bài báo của Meyers và Serrin (1964) (xem ở [2]). Để đơn giản về mặt kí hiệu, người ta viết H^k để chỉ không gian H_2^k $(= W_2^k)$.

Sau này để ước lượng sai số theo chuẩn Sobolev, thì người ta có thể sử dụng đến nửa chuẩn Sobolev.

Định nghĩa 1.6 (Nửa chuẩn Sobolev). *Cho k là một số nguyên không âm, và cho $f \in W_p^k(\Omega)$. Khi đó,*

$$|f|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

trong trường hợp $1 \le p < \infty$, và

$$|f|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha|=k} \|D_w^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

trong trường hợp $p = \infty$.

Trong bài toán biến phân 1.3, ta xét hàm $u \in H^1(\Omega)$, là không gian rộng hơn không gian $C^2(\overline{\Omega})$ trong bài toán 1.2 ở dạng mạnh. Ta chỉ còn phải xét xem hàm thử v thuộc không gian nào và tính chất của miền xác định Ω.

1.1.4 Miền có biên Lipschitz

Trong mục này, ta chỉ ra các tính chất của hàm Sobolev khi Ω có biên Lipschitz, được tham khảo từ [1]

Định nghĩa 1.7. *Ta nói Ω có **biên Lipschitz** nếu tồn tại họ các tập mở O_i, một tham số $\epsilon > 0$, một số nguyên N và một số nguyên dương M, sao cho với mọi $x \in \partial\Omega$, hình cầu bán kính ϵ tâm x sẽ nằm trong một tập mở O_i nào đó, không quá N tập O_i có giao không tầm thường, và mỗi miền O_i, có $O_i \cap \Omega = \Omega_i$, với Ω_i là miền mà biên của nó là đồ thị của một hàm Liptschitz ϕ_i (ví dụ: $\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^{n-1}, y < \phi(x)\}$) thỏa mãn $\|\phi_i\|_{Lip(\mathbb{R}^{n-1})} \le M$.*

Tính liên tục, bị chặn của hàm Sobolev được thể hiện trong định lí sau đây.

Định lí 1.2 (Bất đẳng thức Sobolev). *Cho Ω là miền n chiều với biên Lipschitz, cho k là số nguyên dương và $p \in [1, \infty]$ sao cho:*

$$k \geq n \text{ khi } p = 1$$
$$k > n/p \text{ khi } p > 1.$$

Khi đó, tồn tại hằng số C sao cho với mọi u thuộc $W_p^k(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_p^k(\Omega}.$$

Hơn nữa, tồn tại hàm liên tục trong $L^\infty(\Omega)$ tương đương với u.

Kết quả trên nói rằng một hàm mà có tính chính quy với đạo hàm yếu thích hợp thì sẽ liên tục, bị chặn. Kết quả trên là hệ quả của định lí xấp xỉ đa thức sẽ được trình bày ở phần sau. Ta lại áp dụng kết quả trên với đạo hàm yếu để có được hệ quả sau:

Hệ quả 1.1. *Cho Ω là miền n chiều với biên Lipschitz, cho k và m là số nguyên dương sao cho $m < k$ và $p \in [1, \infty]$ sao cho:*

$$k - m \geq n \text{ khi } p = 1$$
$$k - m > n/p \text{ khi } p > 1.$$

Khi đó, tồn tại hằng số C sao cho với mọi u thuộc $W_p^k(\Omega)$,

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_p^k(\Omega}.$$

Hơn nữa, tồn tại hàm C^m trong $L^p(\Omega)$ tương đương với u.

Chú ý 1.1. Nếu Ω không có biên Lipschitz thì định lí 1.2 không còn đúng.

Định lí vết nói rằng nếu một hàm u thuộc không gian Sobolev $W_p^k(\Omega)$ thì $u\big|_{\partial\Omega}$ (tức là vết của u) là hàm thuộc $L^p(\partial\Omega)$. Cụ thể, vì hàm u thuộc không gian $H^1(\Omega)$ nên trong bài toán biến phân 1.3, hàm g_0 ở điều kiện biên phải thuộc $L^2(\partial\Omega)$.

Định lí 1.3 (Định lí vết). *Giả sử Ω là miền có biên Lipschitz, và $p \in [1, \infty]$. Khi đó, tồn tại hằng số C sao cho:*

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{L^p(\Omega)}^{1-1/p}\|v\|_{W^p(\Omega)}^{1/p} \text{ với mọi } v \in W_p^1(\Omega).$$

Hàm thử v của bài toán biến phân 1.3 thuộc không gian $H^1(\Omega)$ sao cho $v\big|_{\Gamma_D} = 0$ trong $L^2(\partial\Omega)$. Ta có không gian con của H^1 sao cho giá trị tại Γ_D bằng 0

$$\overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v\big|_{\Gamma_D} = 0 \text{ trong } L^2(\Gamma_D)\} \tag{1.9}$$

Tương tự, ta cũng có không gian con của $W_2^k(\Omega)$ sao cho đạo hàm cấp $k-1$ thuộc $\overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

$$\overset{\circ}{H}{}^k_{\Gamma_D}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v^{(\alpha)}\big|_{\Gamma_D} = 0 \text{ trong } L^2(\Gamma_D) \text{ với mọi } |\alpha| < k\} \tag{1.10}$$

1.1.5 Bài toán biến phân Poisson

Biết được không gian của các hàm u và v, ta sẽ viết lại Bài toán 1.3 ở dạng chặt chẽ toán học. Phần này được tham khảo từ [1] và [3].

Bài toán 1.4. *Cho Ω là miền có biên Lipschitz. Tìm hàm $u \in H^1(\Omega)$ sao cho*

$$\begin{cases} u = g_0 & \text{trên } \Gamma_D, \\ a(u,v) = F(v) := \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v & \text{với mọi } v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega). \end{cases} \tag{1.11}$$

Dữ kiện của bài toán cần thỏa mãn:

$$\begin{aligned} f &\in L^2(\Omega), \\ g_1 &\in L^2(\Gamma_N), \\ g_0 &\in L^2(\Gamma_D). \end{aligned}$$

Ngoài ra thì g_0 còn phải thỏa mãn tính chất: tồn tại hàm u thuộc $H^1(\Omega)$ sao cho $u\big|_{\Gamma_D} = g_0$.

1.1.6 Bài toán biến phân Poisson với điều kiện biên thuần nhất

Biên Dirichlet có độ đo khác 0

Trong việc nghiên cứu các tính chất lí thuyết, người ta sẽ để cho $u = 0$ trên biên Dirichlet bằng cách lấy một hàm w thuộc $H^1(\Omega)$ sao cho $w = g_0$ trên Γ_D. Ta có

$$\begin{cases} w = g_0 & \text{trên } \Gamma_D, \\ a(w,v) & \text{được xác định với mọi } v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega). \end{cases}$$

Khi đó, với hàm u trong Bài toán 1.4 thì:

$$\begin{cases} u - w = 0 & \text{trên } \Gamma_D, \\ a(u-w,v) = G(v) := F(v) - a(w,v) & \text{với mọi } v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega). \end{cases}$$

Bài toán trở thành:

Bài toán 1.5. *Cho Ω là miền có biên Lipschitz. Tìm hàm $u \in H^1(\Omega)$ sao cho:*

$$\begin{cases} u = 0 & \text{trên } \Gamma_D, \\ a(u,v) = G(v) & \text{với mọi } v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega). \end{cases} \tag{1.12}$$

Biên Dirichlet có độ đo bằng 0

Nếu độ đo của biên Dirichlet bằng 0, thì nghiệm yếu của bài toán biên Neumann có thể sai khác nhau hằng số, ta sẽ làm cho bài toán này được duy nhất nghiệm bằng cách xét nghiệm trên không gian

$$Z := \{u \in H^1(\Omega) \text{ sao cho } \int_\Omega u = 0\}.$$

Bài toán trở thành:

Bài toán 1.6. *Cho Ω là miền có biên Lipschitz. Tìm hàm $u \in V \cap H^1(\Omega)$ sao cho*

$$a(u,v) = F(v) := \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v \text{ với mọi } v \in Z. \tag{1.13}$$

1.1.7 Bài toán biến phân elliptic

Ta quay lại một chút với bài toán biên elliptic để thấy được sự tương đồng của nó với bài toán Poisson.

Ta có bài toán biên elliptic dạng mạnh:

Bài toán 1.7. *Tìm $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sao cho:*

$$\begin{cases} Au(x) & = f \text{ trong } \Omega, \\ u & = g_0 \text{ trên } \Gamma_D \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j & = g_1 \text{ trên } \Gamma_N. \end{cases}$$

Toán tử song tuyến tính tự nhiên liên kết với toán tử elliptic 1.2 là:

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx. \tag{1.14}$$

Ước lượng dưới đây được suy ra từ việc thay ξ_i trong công thức (1.1) bằng $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ và thực hiện tích phân.

Định lí 1.4. *Cho ma trận hệ số thỏa mãn công thức (1.1) . Khi đó dạng song tuyến tính thỏa mãn*

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2_{H^1(\Omega)} \text{ với mọi } v \in H^1(\Omega).$$

Để đưa về dạng yếu, ta dùng định lí divergence:

Định lí 1.5. *Cho $\boldsymbol{p}$ thuộc $W_1^1(\Omega)^n$. Khi đó,*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{p} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p} \cdot \nu.$$

Chứng minh. Ta đã có kết quả trên với $\boldsymbol{p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Để chứng minh kết quả trên với $\boldsymbol{p} \in W_1^1(\Omega)^n$, ta dùng định lí vết 1.3 suy ra, nếu

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \ni \boldsymbol{p}_k \to \boldsymbol{p} \text{ trong } W_1^1(\Omega)^n$$

thì khi đó $\boldsymbol{u}_k \cdot \nu$ hội tụ trong $L^1(\partial\Omega)$ đến $\boldsymbol{p} \cdot \nu$ vì $\nu_i \in L^\infty(\Omega)$ với mọi $i = 1, \dots, n$. ■

Thay $\boldsymbol{p} := uv\boldsymbol{e_i}$ vào công thức trên, ta có định lí:

Định lí 1.6. *Cho u, v thuộc $H^1(\Omega)$. Khi đó,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i.$$

Thay $u := a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, ta có:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{u}{\partial x_j}\right) v = -\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} v\nu_i.$$

Lấy tổng trên đối với các $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n,$, ta có:

$$\int_\Omega Au(x)v = a(u,v) - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} v\nu_j.$$

Thay $Au(x) = f(x)$, lấy các hàm v sao cho $v = 0$ tại biên Γ_D, ta có:

$$a(u,v) = (f,v)\int_{\Gamma_N} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} v\nu_j.$$

Vậy bài toán biến phân elliptic tương ứng với (1.7) là

Bài toán 1.8.

$$\begin{cases} \textit{Tìm hàm } u \in H^1(\Omega) \textit{ sao cho} & \\ u = g_0 & \textit{trên } \Gamma_D, \\ (f,v) = a(u,v) & \textit{với mọi } v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega). \end{cases}$$

1.2 Phương pháp xấp xỉ Galerkin

Nhắc lại các không gian hàm trong bài toán biến phân Poisson

Không gian	biên Dirichlet có độ đo lớn hơn 0	biên Dirichlet có độ đo bằng 0
Không gian Hilbert H	$H^1(\Omega)$	$H^1(\Omega)$
Không gian con đóng V của H	$\overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega)$ sao cho $v = 0$ trên $\Gamma_D\}$	$Z := \{v \in H^1(\Omega)$ sao cho $\int_\Omega v = 0\}$

Ý tưởng của phương pháp xấp xỉ Galerkin là thay vì tìm hàm $u \in H^1(\Omega)$ trong bài toán biến phân 1.5 và 1.6, ta sẽ tìm hàm u_h trong không gian con V_h hữu hạn chiều của V. Nếu không gian con V_h đủ tốt thì u_h sẽ gần với u. Mục này sẽ viết về lí thuyết của phương pháp xấp xỉ này, được tham khảo từ [1].

Đầu tiên, ta có $(H^1(\Omega), \|.\|_{W_2^1(\Omega)})$ là một không gian Hilbert với tích trong:

$$(u,v)_{H^1} = \int_\Omega uvdx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Để bắt đầu, ta sẽ sử dụng một số tính chất của không gian Hilbert. Cho H là không gian Hilbert, và u là một phần tử của H. Một phiếm hàm L_u tuyến tính liên tục trên H có thể được định nghĩa như sau:

$$L_u(v) = (u,v). \tag{1.15}$$

Định lí dưới đây cho thấy rằng điều ngược lại cũng đúng.

Định lí 1.1 (Định lí biểu diễn Riesz). *Mọi phiếm hàm tuyến tính liên tục*

L trên không gian Hilbert H đều có thể được biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$L(v) = (u, v) \tag{1.16}$$

với u nào đó $\in H$. Hơn nữa, ta có:

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H. \tag{1.17}$$

Định nghĩa 1.1. *Một dạng song tuyến tính $a(\cdot,\cdot)$ trên không gian tuyến tính định chuẩn H được gọi là **bị chặn** nếu tồn tại $C < \infty$ sao cho:*

$$|a(v,w)| \leq C\|v\|_H\|w\|_H \qquad \text{với mọi } v, w \in H$$

*và được gọi là **elliptic** trên $V \subset H$ nếu tồn tại $\alpha > 0$ sao cho:*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_H^2 \qquad \text{với mọi } v \in V.$$

Mệnh đề 1.1. *Cho H là không gian Hilbert, và giả sử $a(\cdot,\cdot)$ là dạng song tuyến tính đối xứng, liên tục trên H và elliptic trên không gian con $V \subset H$. Khi đó, $(V, a(\cdot,\cdot))$ là không gian Hilbert.*

Chứng minh. Do tính elliptic của $a(\cdot,\cdot)$, nên nếu $v \in V$ và $a(v,v) = 0$ thì $v = 0$. Suy ra $a(\cdot,\cdot)$ là tích trong trên V.

Đặt $\|v\|_E = \sqrt{a(v,v)}$ và giả sử v_n là một dãy Cauchy trong $(V, \|\cdot\|_E)$. Từ tính elliptic, $\{v_n\}$ cũng là một dãy Cauchy trong $(H, \|\cdot\|_H)$. Vì H là không gian đủ, tồn tại $v \in H$ sao cho $v_n \to v$ trong chuẩn $\|\cdot\|_H$. Vì V đóng trong H, $v \in V$. Mà ta lại có $\|v - v_n\|_E \leq \sqrt{c_1}\|v - v_n\|_H$ vì $a(;\dot{)}$ bị chặn. Từ đó, suy ra $v_n \to v$ trong chuẩn $\|\|_E$, nên không gian $(V, \|\dot{\|}_E)$ đủ. ■

Một bài toán biến phân tổng quát được phát biểu như sau.

Giả sử rằng 5 điều kiện sau thoả mãn:

$$\begin{cases} (1) & (H, (\cdot, \cdot)) \text{ là không gian Hilbert.} \\ (2) & V \text{ là không gian con (đóng) của } H. \\ (3) & a(\cdot, \cdot) \text{ là dạng song tuyến tính , không nhất thiết phải đối xứng.} \\ (4) & a(\cdot, \cdot) \text{ bị chặn trên } V. \\ (5) & a(\cdot, \cdot) \text{ là elliptic trên } V. \end{cases} \tag{1.18}$$

Khi đó, bài toán biến phân là:

$$\text{Cho } F \in V', \text{ tìm } u \in V \text{ sao cho} \quad a(u, v) = F(v) \quad \text{với mọi } v \in V. \tag{1.19}$$

Và bài toán xấp xỉ Galerkin tương ứng là:

Cho không gian con hữu hạn chiều $V_h \subset V$ và $F \in V'$, tìm $u_h \in V_h$ sao cho

$$a(u_h, v) = F(v) \qquad \text{với mọi } v \in V_h. \tag{1.20}$$

Từ định lí Lax-Milgram, bài toán biến phân 1.19 có nghiệm duy nhất $u \in V$ và bài toán xấp xỉ Galerkin 1.20 có nghiệm duy nhất u_h thuộc V_h.

Định lí 1.2 (Lax-Milgram). *Cho không gian Hilbert H, một dạng song tuyến tính liên tục, elliptic $a(\cdot, \cdot)$, và một phiếm hàm tuyến tính liên tục $F \in V'$, thì sẽ tồn tại duy nhất phần tử $u \in V$ sao cho:*

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{với mọi } v \in V.$$

1.2.1 Ước lượng sai số cho bài toán biến phân

Cho u là nghiệm của bài toán biến phân 1.19 và u_h là nghiệm của bài toán xấp xỉ 1.20. Tuy nghiệm u_h có thể không là nghiệm gần với u nhất trong không gian V_h nhưng sai số này cũng nhỏ hơn hằng số nhân với sai số nhỏ nhất.

Định lí 1.3 (Céa). *Giả sử điều kiện thoả mãn và u là nghiệm của Bài toán 1.19. Với bài toán biến phân phần tử hữu hạn 1.20 ta có*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V. \tag{1.21}$$

Chứng minh. Vì $a(u, v) = F(v)$ với mọi $v \in V$ và $a(u_h, v) = F(v)$ với mọi $v \in V_h$, ta làm phép trừ

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \text{với mọi } v \in V_h. \tag{1.22}$$

Với mọi $v \in V_h$,

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \qquad \text{(do tính elliptic)} \\
&= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v) \qquad (\text{vì } v - u_h \in V_h) \\
&\leq C\|u - u_h\|_V \|u - v\|_V \qquad \text{do tính bị chặn}
\end{aligned}$$

Nên,

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v\|_V \quad \text{với mọi } v \in V_h. \tag{1.23}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_V &\leq \frac{C}{\alpha}\inf_{v\in V_h}\|u-v\|_V \\ &= \frac{C}{\alpha}\min_{v\in V_h}\|u-v\|_V \quad (\text{vì } V_h \text{ đóng}).\end{aligned}$$

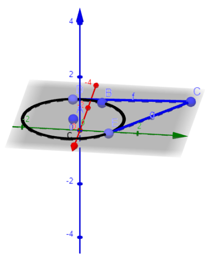
■

1.2.2 Tính chất elliptic của dạng song tuyến tính $a(\cdot,\cdot)$ trong bài toán biến phân

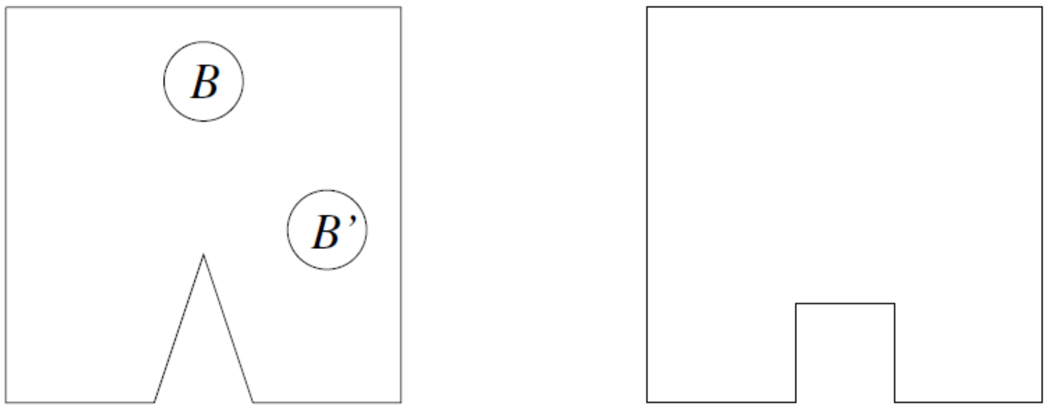
Ta sẽ chỉ ra điều kiện để toán tử $a(\cdot,\cdot)$ trong bài toán biến phân 1.5 và 1.6 thỏa mãn tính elliptic trên không gian con V tương ứng, tức là:

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|_H^2 \qquad \text{với mọi } v \in V.$$

Định nghĩa 1.2 (hình sao). *Ω được gọi là có hình sao đối với hình cầu B nếu với mọi $x \in \Omega$, bao lồi của $\{x\} \cup B$ là tập con của Ω.*



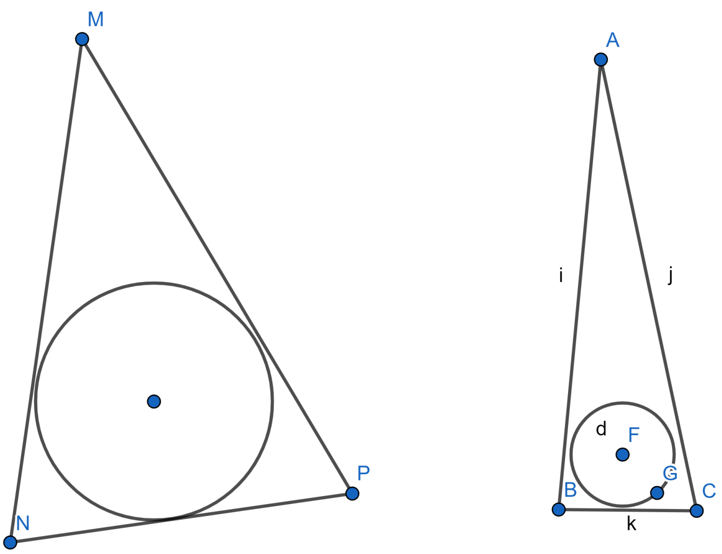
Hình 1.4: bao lồi của $\{x\} \cup B$.



Hình 1.5: Ở hình bên trái, đa giác trên là lồi đối với hình cầu B nhưng không lồi với hình cầu B′. Còn đa giác ở bên phải không lồi với bất cứ hình cầu nào.

Định nghĩa 1.3. *Giả sử* Ω *có đường kính d và có hình sao đối với hình cầu B. Đặt* $\rho_{max} = sup\ \{\rho : \Omega$ *có hình sao đối với một hình cầu bán kính* $\rho\}$*. Khi đó, tham số* ***chunky*** *của* Ω *được định nghĩa bởi:*

$$\gamma = \frac{d}{\rho_{max}}.$$



Hình 1.6: So sánh độ chunky của 2 tam giác

Như ở hình trên, ta thấy tam giác ABC "chunky" hơn tam giác MNP.

Định lí dưới đây chỉ ra tính elliptic của Bài toán 1.5.

Định lí 1.7 (xem ở [1]). *Cho Ω là một miền là hợp hữu hạn của các miền có hình sao đối với hình cầu nào đó. Khi đó tồn tại một hằng số $C < \infty$ chỉ phụ thuộc vào Ω và Γ_D sao cho:*

$$\|v\|_{H^1} \leq C|v|_{H^1} \text{ với mọi } v \in \overset{o}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega).$$

Còn định lí dưới đây chỉ ra tính elliptic của Bài toán 1.6.

Định lí 1.8 (xem ở [1]). *Cho Ω là một miền là hợp hữu hạn của các miền có hình sao đối với hình cầu nào đó. Khi đó tồn tại một hằng số $C < \infty$ chỉ phụ thuộc vào Ω sao cho:*

$$\|v\|_{H^1} \leq C|v|_{H^1} \text{ với mọi } v \in Z.$$

Như vậy, toán tử $a(\cdot,\cdot)$ trong Bài toán 1.5 và 1.6 có tính elliptic trên không gian V, nên các điều kiện (1.18) thỏa mãn, ta có thể áp dụng các kết quả trên để suy ra:

- Nghiệm u của bài toán 1.5 và 1.6 là duy nhất.
- Nghiệm u_h của bài toán 1.20 là duy nhất trong không gian con V_h hữu hạn chiều của V.
- Sai số giữa nghiệm xấp xỉ u_h và u được thể hiện qua định lí Cea:

  $$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

  trong đó C và α chỉ phụ thuộc vào Ω và biên Γ_D.

Chương 2

Phương pháp phần tử hữu hạn

Chương này sẽ trình bày về phương pháp phần tử hữu hạn, các đánh giá sai số nội suy cho nghiệm xấp xỉ bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Nội dung và các hình vẽ của chương được dựa trên tài liệu tham khảo [1].

Ý tưởng của phương pháp phần tử hữu hạn là: ta chia miền xác định thành các miền con, trên mỗi miền con ta sẽ xây dựng một phần tử hữu hạn, rồi ta xây dựng hệ phương trình tuyến tính trên mỗi miền con đó, rồi từ đó ta ghép chúng lại để được hệ phương trình tuyến tính toàn cục, giải hệ toàn cục và ra được nghiệm xấp xỉ.

2.1 Phần tử hữu hạn tổng quát

Định nghĩa 2.1. *Cho*

1. *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập con đóng bị chặn với phần trong khác rỗng và có biên trơn từng khúc (miền của phần tử).*

2. *$\mathcal{P}$ là không gian hữu hạn chiều các hàm trên D (không gian các hàm hình dạng) và*

3. *$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$ là một cơ sở của $\mathcal{P}'$ (tập các biến nút).*

Khi đó, không gian $(K, \mathcal{N}, \mathcal{P})$ được gọi là ***phần tử hữu hạn****.*

Định nghĩa 2.2. *Cho $(K, \mathcal{N}, \mathcal{P})$ là một* ***phần tử hữu hạn****. Khi đó, cơ sở $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$ của $\mathcal{P}$ đối ngẫu với $\mathcal{N}$ (tức là $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$ được gọi là một* ***cơ sở nút*** *của $\mathcal{P}$.*

Bổ đề 2.1. *Cho $\mathcal{P}$ là không gian vector d chiều và $\{N_1, N_2, \ldots, N_d\}$ là tập con của không gian đối ngẫu $\mathcal{P}$. Khi đó 2 khẳng định sau tương đương:*

(a) $\{N_1, N_2, \ldots, N_d\}$ là cơ sở cho $\mathcal{P}'$.

(b) Cho $v \in \mathcal{P}$ với $N_i(v) = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, d$, khi đó $v \equiv 0$.

Chứng minh. Lấy $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_d\}$ là một cơ sở của $\mathcal{P}$. $\{N_1, \ldots, N_d\}$ là cơ sở của $\mathcal{P}$ khi và chỉ khi với mọi $L \in \mathcal{P}$,

$$L = \alpha_1 N_1 + \ldots \alpha_d N_d \tag{2.1}$$

với d là số chiều của $\mathcal{P}$. Khi đó phương trình trên tương đương với

$$y_i := L(\phi_i) = \alpha_1 N_1(\phi_i) + \ldots \alpha_d N_d(\phi_i), \quad i = 1, \ldots d.$$

Đặt $\mathbf{B} = (N_j(\phi_i)), \quad i, j = 1, \ldots d$. Khi đó, (a) tương đương với việc $\mathbf{B}\alpha = y$ là luôn giải được, tức là $\mathbf{B}$ khả nghịch. Cho bất kì $v \in \mathcal{P}$, ta có thể viết $v = \beta_1\phi_1 + \cdots + \beta_d\phi_d$. $N_i v = 0$ có nghĩa là $\beta_1 N_i \phi_1 + \cdots + \beta_d N_i \phi_d = 0$. Khi đó (b) sẽ tương đương với: $\beta_1 N_i \phi_1 + \cdots + \beta_d N_i \phi_d = 0$ với $i = 1, \ldots, d$. $\Rightarrow \beta_1 = \beta_d = 0$. Đặt $\mathbf{C} = (N_i(\phi_j), \quad i, j = 1, \ldots, d$. Khi đó, (b) tương đương với việc $\mathbf{C}x = 0$ có duy nhất một nghiệm không tầm thường. Tương đương với $\mathbf{C}$ khả nghịch. Mà $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$. Vậy (a) tương đương với (b). ∎

Chú ý 2.1. Điều kiện (iii) ở định nghĩa trên tương đương với mệnh đề (a) của bổ đề, nên để kiểm tra (iii), ta có thể kiểm tra (b). Ví dụ ở trên, $v \in \mathcal{P}_1$ có nghĩa là $v = a + bx$; $N_1(v) = N_2(v) = 0$ nghĩa là $a = 0$ và $a + b = 0$. Từ đó suy ra $a = b = 0$, $v \equiv 0$. Tổng quát hơn, nếu $v \in \mathcal{P}_k$ và $0 = N_i(v) = v(a + (b-a)i/k) \quad \forall i = 0, 1, \ldots k$ thì từ định lí cơ bản của đại số, ta có $v \equiv 0$.

Ta sẽ sử dụng các thuật ngữ dưới đây:

Định nghĩa 2.3. *Ta nói $\mathcal{N}$ xác định $\mathcal{P}$ nếu $\psi \in \mathcal{P}$ với $N(\psi) = 0 \quad \forall N \in \mathcal{N}$ kéo theo $\psi = 0$*

Chú ý 2.2. Ta thường gọi siêu phẳng $\{x : L(x) = 0\}$, (với L là hàm tuyến tính không suy biến) là L.

Ví dụ 2.1 (Ví dụ cho siêu phẳng)**.** Trong $\mathbb{R}^2$, đường thẳng $ax + by = 0$ là một siêu phẳng, ta có thể gọi $(x, y) \mapsto ax + by$ là một siêu phẳng trên $\mathbb{R}^2$. Trong $\mathbb{R}^3$, mặt phẳng $Ax = 0$, với A là ma trận cỡ 2×3 , rank $A = 2$, x là vector 3 chiều, thì A là một siêu phẳng. Tương tự với không gian các phiếm hàm.

2.2 Một số loại phần tử hữu hạn

2.2.1 Trên miền 2 chiều

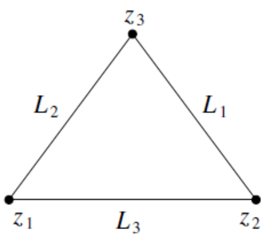
Phần tử tam giác

Cho K là một tam giác bất kì. Lấy $\mathcal{P}_k$ kí hiệu tất cả các đa thức hai biến với bậc $\leq k$. Bảng sau cho ta số chiều của của $\mathcal{P}_k$

k	$dim\mathcal{P}_k$
1	3
2	6
3	10
$\dots$	$\dots$
k	$\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

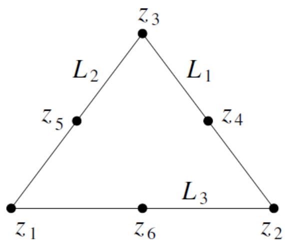
Phần tử Lagrange

Ví dụ 2.2 (k=1)**.** Lấy $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$. Lấy $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$ (dim $\mathcal{P}_1 = 3$) với $N_i(v) = v(z_i)$ và $\{z_1, z_2, z_3\}$ là các đỉnh của K. Phần tử này được miêu tả ở hình vẽ sau.



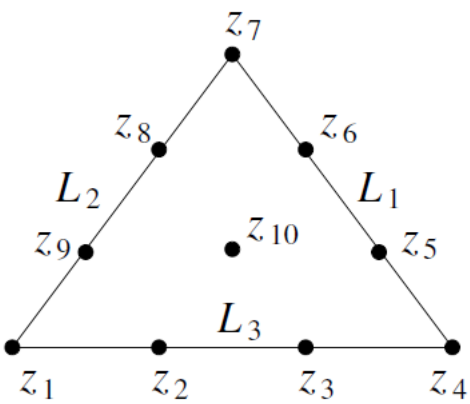
Ví dụ 2.3 (k= 2)**.** Lấy $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p(x,y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 6\}$ và $\mathcal{N}_2 = \{N_1, \dots, N_6\}$ với

$$N_i(v) = \begin{cases} v(\text{đỉnh thứ i}) = v(z_i) & i = 1, 2, 3, \\ v(\text{trung điểm cạnh thứ (i-3)}, & i = 4, 5, 6. \end{cases}$$

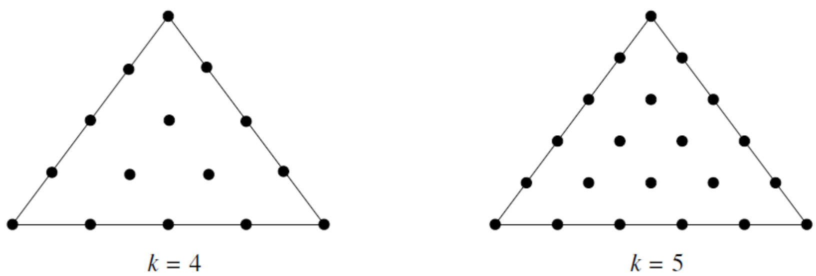


Hình 2.1: Phần tử Lagrange bậc 2

Ví dụ 2.4. Tương tự phần tử Lagrange bậc 1 và 2, ta có phần tử Lagrange bậc 3,4,5:



Hình 2.2: Phần tử Lagrange bậc 3



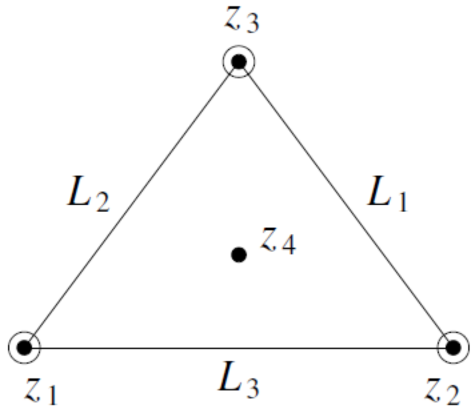
Hình 2.3: Phần tử Lagrange bậc 4 và bậc 5

Phần tử Lagrange tổng quát:

$$\begin{cases} 3 & \text{nút đỉnh tam giác,} \\ 3(k-1) & \text{nút trên cạnh tam giác,} \\ \dfrac{1}{2}(k-2)(k-1) & \text{nút điểm trong.} \end{cases}$$

Phần tử Hermite

Ví dụ 2.5 (Phần tử Hermite bậc 3)**.** Lấy " ● " để mô tả việc lấy giá trị tại điểm đó và vòng tròn " ○; " để chỉ việc lấy giá trị của đạo hàm tại điểm ở tâm vòng tròn.



Hình 2.4: Phần tử Hermite bậc 3

Phần tử Hermite tổng quát (bậc k):

$$\begin{cases} 3 & \text{nút đỉnh tam giác,} \\ 6 & \text{đạo hàm theo hướng tại 3 đỉnh tam giác,} \\ 3(k-3) & \text{nút trên cạnh tam giác} \\ \dfrac{1}{2}(k-2)(k-1) & \text{nút điểm trong (như trong phần tử Lagrange).} \end{cases}$$

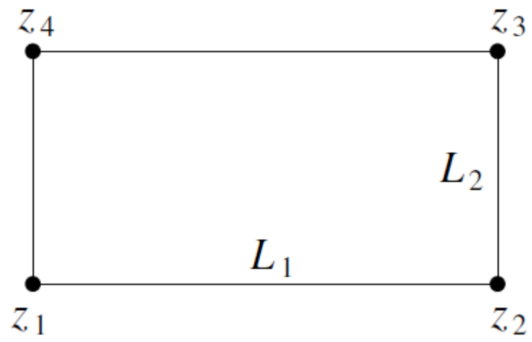
Phần tử hình chữ nhật

Ta sẽ xét phần tử hữu hạn trên hình chữ nhật. Đặt $\mathcal{Q}_k = \{\sum_j c_j p_j(x) q_j(x) : p_j, q_j$là các đa thức 1 biến có bậc không quá $k\}$. Số chiều của $\mathcal{Q}_k$:

$$\dim \mathcal{Q}_k = (\dim \mathcal{P}_k^1)^2.$$

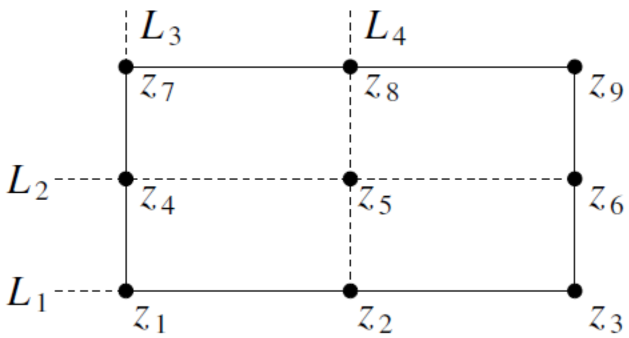
Phần tử tích tensor

Ví dụ 2.6 (k=1)**.** $\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1$.
$\mathcal{N}$ được mô tả như ở Hình 2.5



Hình 2.5: Phần tử hình chữ nhật song tuyến tính

Ví dụ 2.7. Tương tự, ta có phần tử hình chữ nhật song bậc hai.



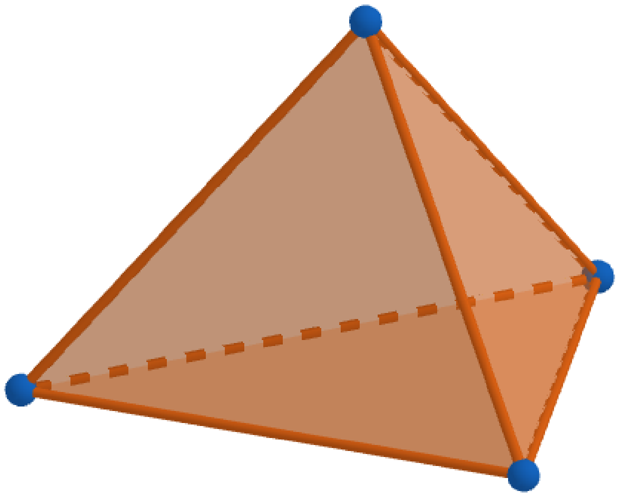
Hình 2.6: Phần tử hình chữ nhật song bậc hai

2.2.2 Trên miền 3 chiều

Các phần tử hữu hạn trên $\mathbb{R}^3$ cũng được xây dựng tương tự như trên $\mathbb{R}^2$.

Phần tử tứ diện

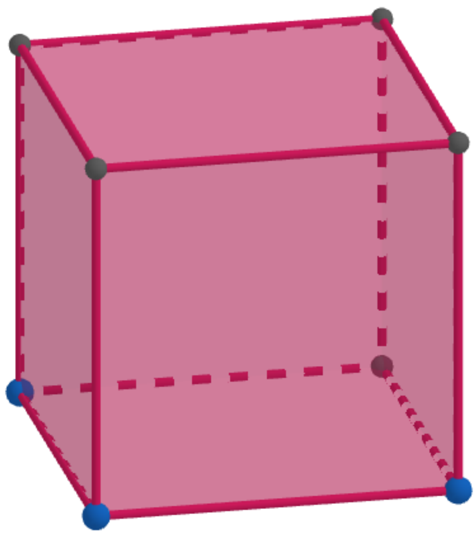
Phần tử Lagrange $\mathcal{P} = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4$ với $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4\}$.



Hình 2.7: Phần tử Lagrange bậc 1

Phần tử hình hộp

$\mathcal{P} = \{\sum_j p_j(x_1)q_j(x_2)r_j(x_3)$ sao cho p_j, q_j, r_j là các đa thức 1 biến có bậc $\leq 1\}$



Hình 2.8: Phần tử hình hộp tam tuyến tính

2.3 Phép nội suy

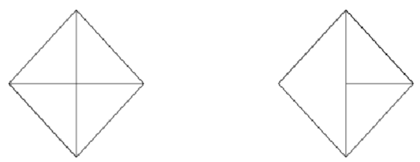
Ta viết lại định nghĩa phân hoạch một cách chặt chẽ.

Định nghĩa 2.4. *Một **phân hoạch** của một miền xác định Ω là một họ hữu hạn các miền $\{K_i\}$ sao cho:*

- $intK_i \cap intK_j = \emptyset$ *nếu* $i \neq j$ *và*
- $\bigcup K_i = \overline{\Omega}$.

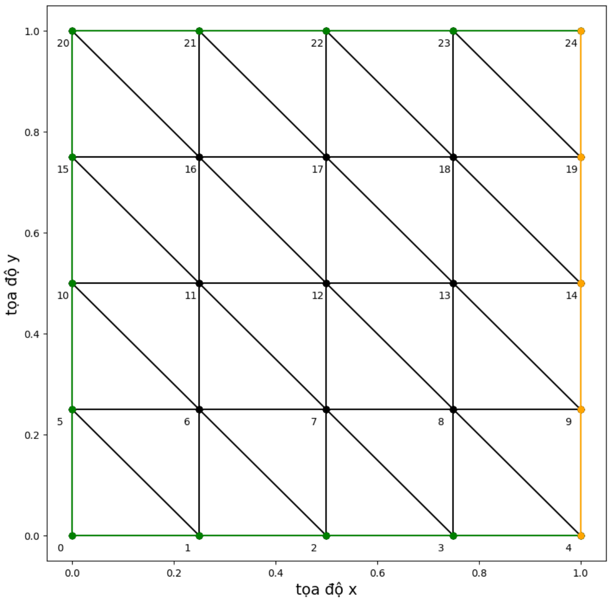
Ở không gian 2 chiều, ta đã có định nghĩa phân hoạch tam giác.

Định nghĩa 2.5. *Một **phân hoạch tam giác** (hay còn gọi là phân hoạch của một miền có hình dạng đa giác Ω là một phân hoạch gồm các tam giác có tính chất: không có đỉnh nào của bất kì tam giác nào lại thuộc cạnh hay điểm trong của tam giác khác.*



Hình 2.9: Hai phân hoạch: phân hoạch ở bên trái là phân hoạch tam giác còn phân hoạch ở bên phải không là phân hoạch tam giác.

Ngoài ra phân hoạch tam giác còn phải bảo đảm sự phân chia biên Dirichlet và Neumann ban đầu, tức là mỗi cạnh của một tam giác trong phân hoạch mà nằm trên biên Γ không thể vừa có thành phần Dirichlet vừa có thành phần Neumann. Nếu có một điểm ở vị trí chuyển giữa biên Dirichlet và Neumann, điểm đó phải nằm trên đỉnh của tam giác trong phân hoạch, ta coi đỉnh đó là đỉnh Dirichlet. Định nghĩa phân hoạch tam giác ở chiều lớn hơn 2 cũng tương tự. Bây giờ ta sẽ nối các phần tử hữu hạn lại để tạo thành không gian hàm.

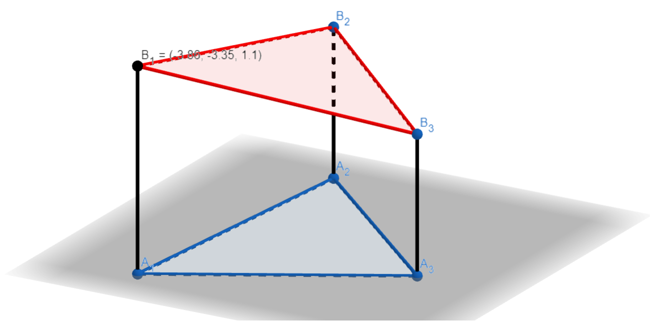


Hình 2.10: Một ví dụ về phân hoạch tam giác với các cạnh màu cam là cạnh Dirichlet, các cạnh màu xanh lá cây là cạnh Neumann.

Ta sẽ bắt đầu bằng định nghĩa phép nội suy.

Định nghĩa 2.6. *Cho không gian $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, lấy tập $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\} \in \mathcal{P}$ là một cơ sở đối ngẫu của $\mathcal{N}$. Nếu v là một hàm sao cho mọi $N_i \in \mathcal{N}$, $i = 1, \ldots, k$ được xác định, thì ta định nghĩa* ***nội suy địa phương*** *bởi:*

$$\mathcal{I}_K v := \sum_{i=1}^{k} N_i(v)\phi_i. \tag{2.2}$$

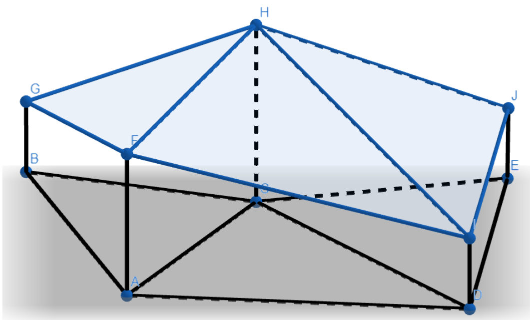


Hình 2.11: Hàm nội suy phần tử Lagrange tuyến tính trên tam giác $A_1A_2A_3$.

Định nghĩa 2.7. *Giả sử Ω là một miền với phân hoạch $\mathcal{T}$. Giả sử rằng với mỗi miền phần tử, K, phân hoạch được trang bị một số dạng hàm, $\mathcal{P}$, và biến nút, $\mathcal{N}$, sao cho $(K, \mathcal{N}, \mathcal{P})$ tạo nên một phần tử hữu hạn.Lấy m là bậc cao nhất của đạo hàm riêng chứa trong các biến nút. Với $f \in C^m(\overline{\Omega})$,* ***nội suy toàn cục*** *được định nghĩa bởi:*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f\big|_{K_i} = \mathcal{I}_{K_i} f. \tag{2.3}$$

với mọi $K_i \in \mathcal{T}$.



Hình 2.12: Một ví dụ về hàm nội suy toàn cục trên các phần tử Lagrange.

Dưới đây là một số tính chất của phép nội suy.

Mệnh đề 2.1. *$\mathcal{I}_K$ có tính chất tuyến tính.*

Mệnh đề 2.2. $N_i \mathcal{I}_K(f) = N_i(f) \quad 1 \leq i \leq k.$

Mệnh đề 2.3. *$\mathcal{I}_K(f) = f \quad \forall f \in \mathcal{P}$. Đặc biệt, $\mathcal{I}_K$ là luỹ đẳng, tức là $\mathcal{I}_K^2 = \mathcal{I}_K$.*

Định nghĩa 2.8. *Ta nói một phép nội suy có* ***bậc liên tục*** *r (viết gọn là C^r) nếu $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f \in C^r$ với mọi $f \in C^m(\overline{\Omega})$. Không gian $V_{\mathcal{T}} = \{\mathcal{I}_{\mathcal{T}} f : f \in C^m\}$ được gọi là không gian phần tử hữu hạn C^r.*

Ví dụ 2.8. Phần tử Lagrange là phần tử C^0.

,

2.4 Các đánh giá sai số cho hàm nội suy

Ta xét sai số cho hàm nội suy địa phương.

Định lí 2.1. *Cho $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ là một phần tử hữu hạn thỏa mãn:*

- *K có dạng sao với hình cầu nào đó*
- *$\mathcal{P}_{m-1} \subseteq \mathcal{P} \subseteq W_\infty^m(K)$ và*
- *$\mathcal{N} \subseteq (C^l(\overline{K}))'$.*

với $m > l + n/2$. Với $i \leq m$ và $v \in W_2^m(K)$ ta có:

$$\|v - \mathcal{I}v\|_{W_2^i(K)} \leq C(diam\ K)^{m-i}|v|_{W_2^m(K)},$$

trong đó hằng số C chỉ phụ thuộc vào miền K.

Tiếp theo, ta đánh giá sai số cho hàm nội suy toàn cục.

Cho $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in(0,1]}$: = một họ các phân phân hoạch trên Ω sao cho đường kính của mỗi phân hoạch $\mathcal{T}_h$ thì không quá h diam Ω.

Định nghĩa 2.1. *B_T là hình cầu lớn nhất được chứa trong T sao cho T là hình dạng ngôi sao với B_T. Một họ được gọi là không suy biến, hay chính quy nếu với mọi $T \in \mathcal{T}^h$ và với mọi $h \in (0, 1]$,*

$$diam_{B_T} \geq \rho\ diam\ T. \tag{2.4}$$

Định lí 2.2. *Cho $\{\mathcal{T}_h\}$, $0 \leq h \leq 1$, là một họ phân hoạch chính quy của một miền đa giác Ω trong $\mathbb{R}^n$. Lấy $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ là một phần tử tham chiếu, thỏa mãn các điều kiện như trong Định lí 2.1. Với mỗi miền con $T \in \mathcal{T}_h$, phần tử hữu hạn tương ứng với nó là một phần tử tương đương affine với $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$.*

Khi đó, tồn tại hằng số C (phụ thuộc vào n, m, ρ và phần tử tham chiếu) sao cho với mọi $0 \leq s \leq m$ và với mọi $v \in W_2^m(\Omega)$,

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v - \mathcal{I}^h v\|^2_{W_2^s(T)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C h^{m-s} |v|_{W_2^m(\Omega)}.$$

Khi $s = 0$ và $m = 2$, ta có :

$$\|v - \mathcal{I}^h v\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^2 |v|_{H^2(\Omega)}.$$

2.4.1 Sai số cho nghiệm xấp xỉ

Giả sử Ω là miền hình đa giác (hoặc đa diện). Họ phân hoạch $\mathcal{T}_h$ như trong 2.2, với $m = 2$, $s = 0$, ta có:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_1}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}. \text{ (theo Định lí Cea)} \tag{2.5}$$

$$\leq \frac{C_1}{\alpha} \|u - \mathcal{I}^h u\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.6}$$

$$\leq \frac{C_1}{\alpha} C_2 h^2 |v|_{H^2(\Omega)} \text{ (sai số nội suy)} \tag{2.7}$$

$$= C h^2 |v|_{H^2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

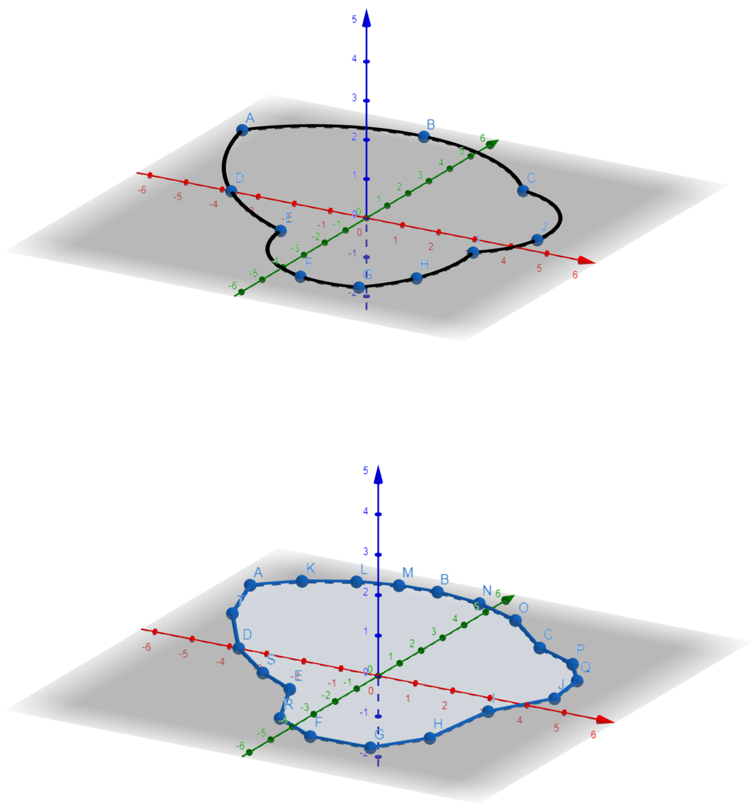
Chương 3

Cách thực hiện và thử nghiệm số

Chương này sẽ trình bày cách thực hiện phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán biên elliptic, được dựa trên tài liệu tham khảo [3].

3.1 Cách thực hiện

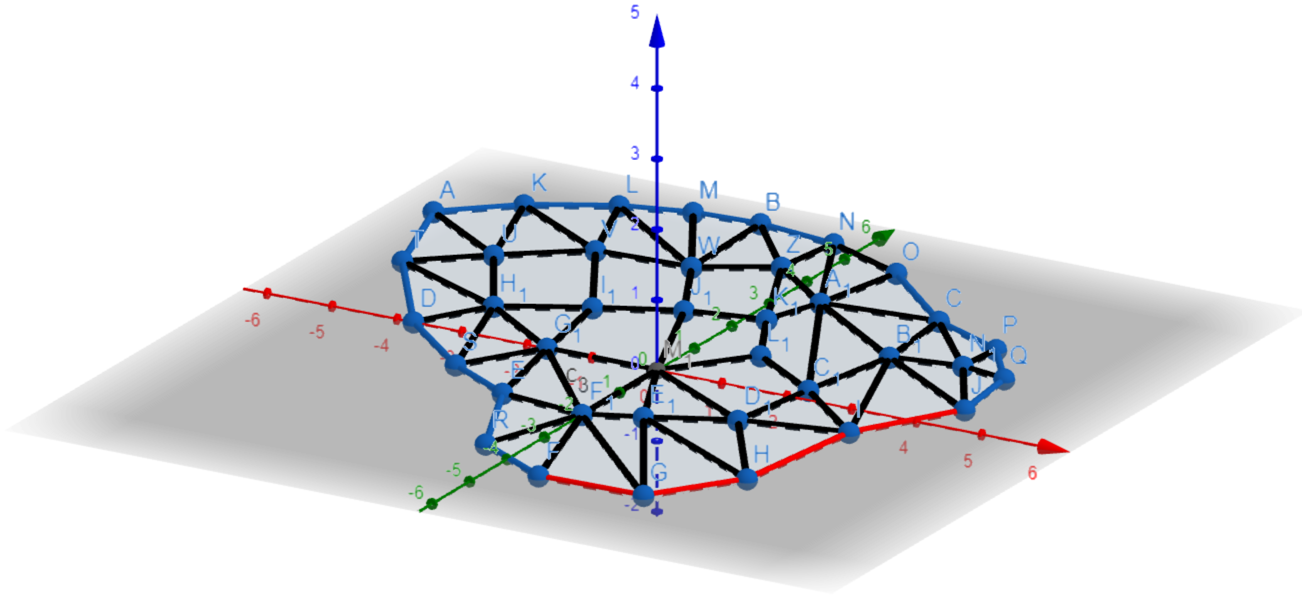
Bước 1: Xấp xỉ Ω bằng một đa giác (hoặc đa diện)



Hình 3.1: Một ví dụ về miền Ω (trái) và đa giác xấp xỉ của nó (phải).

Ta cần tất cả các đỉnh của đa giác xấp xỉ đều phải nằm trên biên của Ω.

Bước 2: Chia lưới

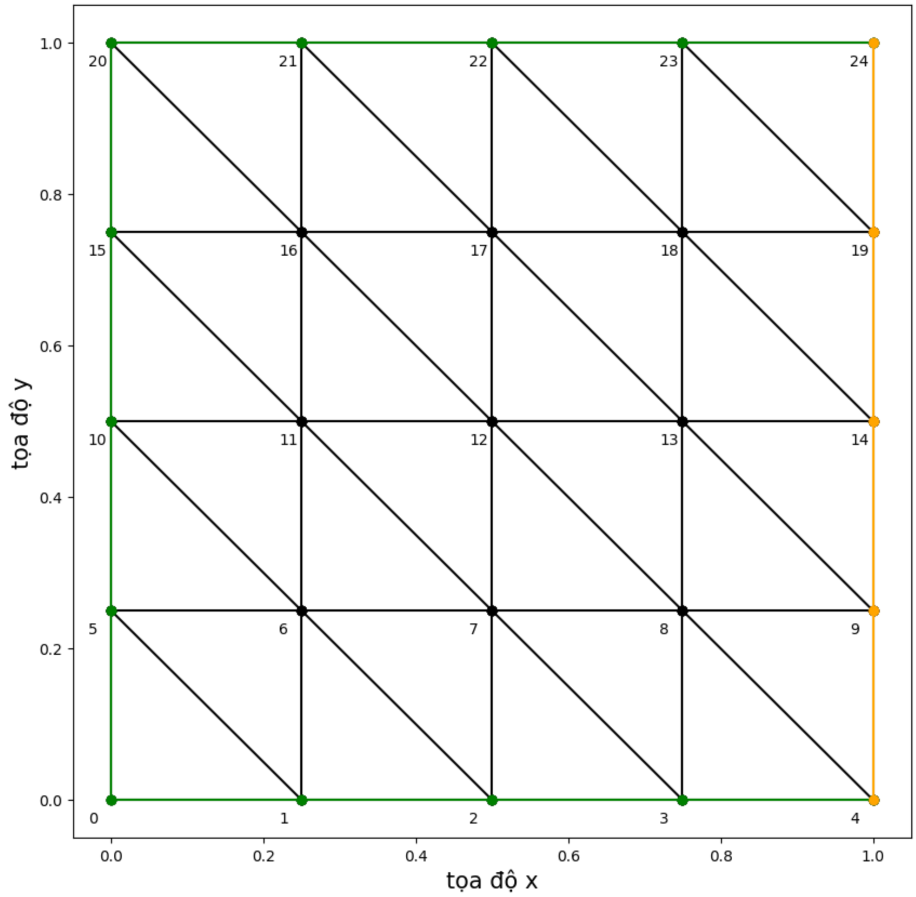


Hình 3.2: Một ví dụ về phân hoạch trên đa giác.

Bước 3: Xây dựng hệ phương trình phần tử hữu hạn

Các nút Dirichlet và các cạnh Neumann

Ta đã có phiên bản rời rạc của miền Ω. Trong phân hoạch $\mathcal{T}_h$, ta gọi cạnh mà nằm trên biên Dirichlet là cạnh Dirichlet, cạnh nằm trên biên Neumann là cạnh Neumman. Các đỉnh của các cạnh Dirichlet là các **đỉnh Dirichlet**. Nếu một đỉnh vừa nằm trên cạnh Dirichlet vừa nằm trên cạnh Neumann thì nó được coi là đỉnh Dirichlet.



Ví dụ 3.1. Trong phân hoạch trên, các cạnh Dirichlet là các cạnh màu xanh lá cây, các cạnh Neumann màu cam.

Tập các đỉnh Dirichlet là

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 21, 22, 23, 34\}$$

Các đỉnh còn lại là các đỉnh Neumann.

Trong bài toán biến phân rời rạc, ta quan tâm đến 2 đối tượng: các đỉnh Dirichlet và các cạnh Neumann. Nhắc lại không gian

$$\overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v\big|_{\Gamma_D} = 0 \text{ trong } L^2(\Gamma_D)\}.$$

Ta sẽ sử dụng không gian

$$V_h^{\Gamma_D} = \overset{\circ}{H}{}^1_{\Gamma_D}(\Omega) \cap V_h = \{v_h \in V_h \text{ sao cho } v_h = 0 \text{ trên } \Gamma_D\}$$

Có

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_h(\boldsymbol{p}_i)\varphi_i.$$

Với $\boldsymbol{p}_j$ là đỉnh Dirichlet thì $u_h(\boldsymbol{p}_j) = g_0(p_j.$

Trong phân hoạch ví dụ trên, ta chia các đỉnh thành 2 loại: đỉnh Dirichlet và đỉnh độc lập:

$$Dir = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 21, 22, 23, 24\},$$
$$Ind = \{6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19\}.$$

Mỗi phần tử của $V_h^{\Gamma_D}$ sẽ có dạng:

$$u_h = \sum_{i \in Ind} u_h(\boldsymbol{p}_i)\varphi_i.$$

Số chiều của không gian $V_h^{\Gamma_D}$ bằng số các đỉnh trong tập các đỉnh độc lập Ind.

Đưa về bài toán rời rạc

Chuyển từ không gian $H^1(\Omega)$ sang không gian hữu hạn con chiều V_h, ta có bài toán biến phân Poisson rời rạc:

Bài toán 3.1. *Tìm hàm $u_h \in V_h$ sao cho*

$$\begin{cases} u_h(\boldsymbol{p}_j) = g_0(\boldsymbol{p}_j) & \textit{với mọi } j \in Dir, \\ a(u_h, v_h) = F(v_h) & \textit{với mọi } v_h \in V_h^{\Gamma_D}. \end{cases}$$

Phương trình rời rạc

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \text{ với mọi } v_h \in V_h^{\Gamma_D}$$

tương đương với hệ phương trình:

$$a(u_h, \varphi_i) = F(\varphi_i) \text{ với mọi } i \in \text{Ind} \tag{3.1}$$

Để chuyển thành hệ phương trình tuyến tính, ta phân tích :

$$u_h = \sum_{j \in \text{Ind}}^{N} u_j \varphi_j + \sum_{i \in \text{Dir}}^{N} g_0(\boldsymbol{p}_i)\varphi_i.$$

Trong đó, u_j ($j \in$ Ind) là các số cần tìm.

Thay hệ phương trình 3.2, ta có:

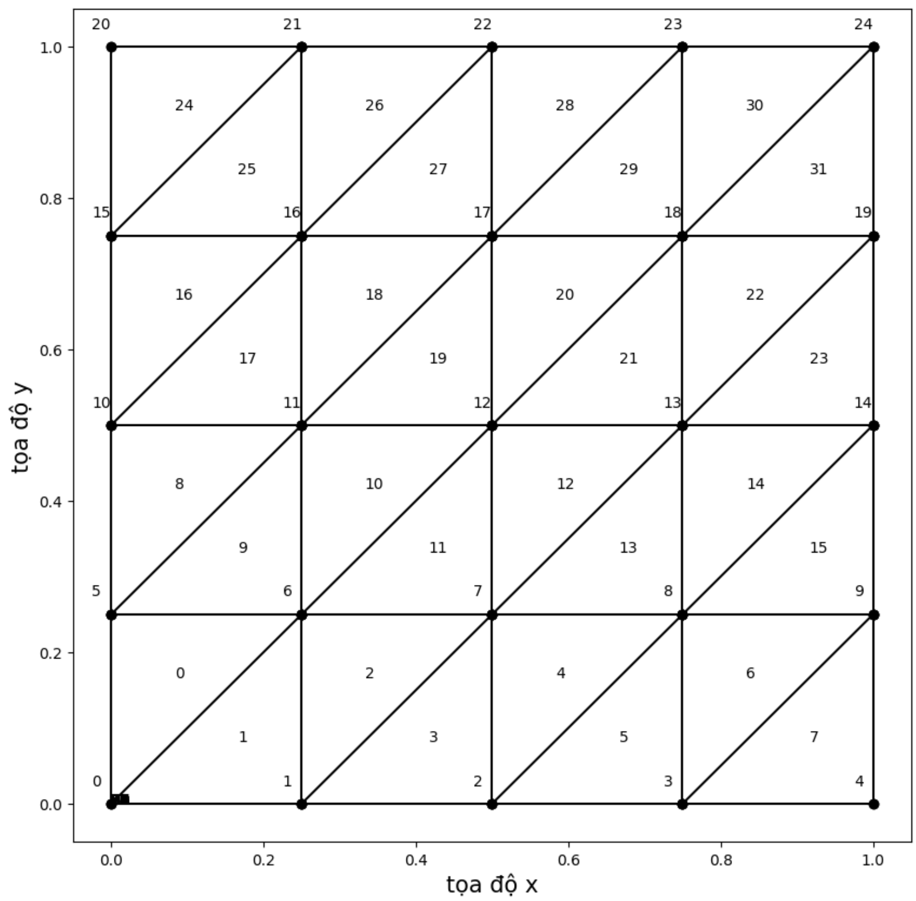
$$\sum_{j \in \text{Dir}} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = F(\varphi_i) - \sum_{j \in \text{Ind}} a(\varphi_j, \varphi_i) \tag{3.2}$$

là hệ phương trình tuyến tính gồm # Ind phương trình. Giải hệ trên ta thu được các u_i , $i = 1, \ldots, \#\text{Ind}$. Từ đó, ta tìm được hàm u_h thỏa mãn phương trình 3.1.

Ta có ma trận độ cứng:

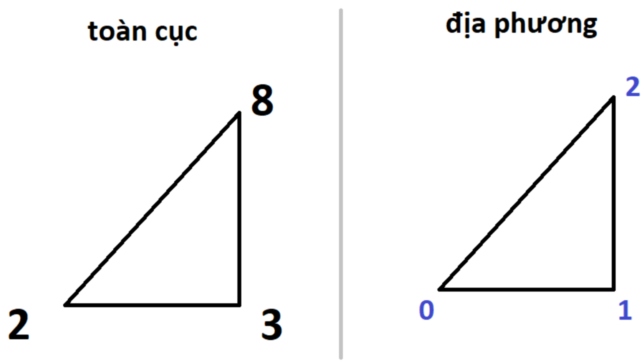
$$W = (w_{ij}),$$
$$w_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j.$$

Khi thực hiện, ngoài việc đánh số các đỉnh trong phân hoạch, ta còn đánh số cho các tam giác trong phân hoạch. Để có được hệ phương trình như 3.2, ta phải tính được ma trận ở vế trái và vector ở vế phải rồi giải hệ để ra được các tọa độ u_j ,$j \in$ Ind.



Tính ma trận ở vế trái

Để tính được ma trận độ cứng, taf sẽ duyệt tất cả các tam giác trong phân hoạch. Tại mỗi tam giác, ta sẽ tính toán trên tam giác đó rồi cộng vào ma trận W toàn cục.



Ví dụ:

Các hàm φ_i của ta là các hàm tuyến tính trên từng tam giác, ta duyệt tam giác số 5 trong hình trên. tam giác số 5 gồm 3 đỉnh là 2, 3, 8 (vị trí toàn cục). Ta đặt vị trí địa phương của 3 đỉnh 2, 3, 8 đối với tam giác số 5 là 0, 1, 2.

Gọi ϕ_1 là hàm tuyến tính trên tam giác số 5 sao cho nó bằng 1 tại đỉnh 1 của tam giác số 5 (tức là đỉnh 2 tại vị trí toàn cục) và bằng 0 tại 2 đỉnh còn lại. Tương tự, ta có ϕ_2, ϕ_3. Ta có :

$$\int_{\text{tam giác số 5}} \varphi_2\varphi_3 = \int_{\text{tam giác số 5}} \phi_0\phi_1$$
$$\int_{\text{tam giác số 5}} \varphi_2\varphi_8 = \int_{\text{tam giác số 5}} \phi_0\phi_2$$
$$\int_{\text{tam giác số 5}} \varphi_8\varphi_3 = \int_{\text{tam giác số 5}} \phi_1\phi_2$$

Như vậy, ở ma trận toàn cục, m_{23} được cộng thêm $\int_{\text{tam giác số 5}} \phi_0\phi_1$. Tương tự, với các vị trí còn lại.

Tổng quát, với mỗi tam giác, ta có ma trận độ cứng địa phương cỡ 3×3 rồi sau đó ta cộng vào các vị trí tương ứng của ma trận toàn cục.

Như vậy, sau khi duyệt qua tất cả các tam giác, ta sẽ có được ma trận độ cứng toàn cục. Để tính tích phân các hàm này, ta có thể dùng công thức cầu phương Gauss bậc 5. Nếu các hàm cơ sở chỉ là hàm đa thức bậc 1, bậc 2 thì kết quả thu được sẽ có độ chính xác cao.

Tính vector ở vế phải

Tương tự, ta cũng duyệt từng tam giác một rồi cộng vào vector vế phải toàn cục.

3.2 Thử nghiệm số

Xét bài toán biên Dirichlet

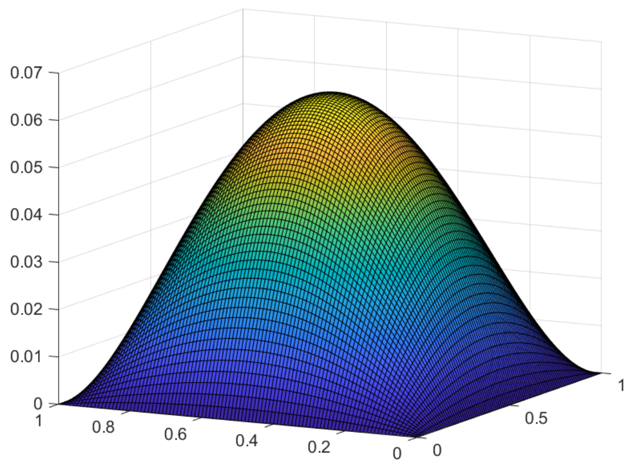
Tìm hàm $u(x,y)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} -\Delta u & = 2x(x-1) + 2y(y-1) \text{ trong } \Omega, \\ u & = 0 \qquad\qquad\qquad \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

với miền $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, và Γ là toàn bộ biên của Ω.

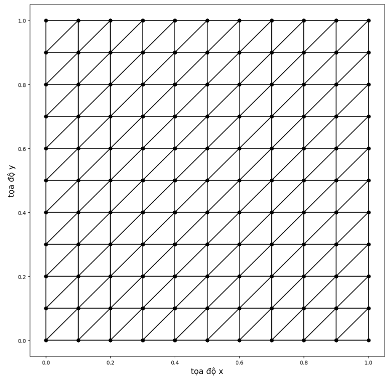
Nghiệm chính xác của bài toán là :

$$u(x,y) = x(1-x)y(1-y).$$



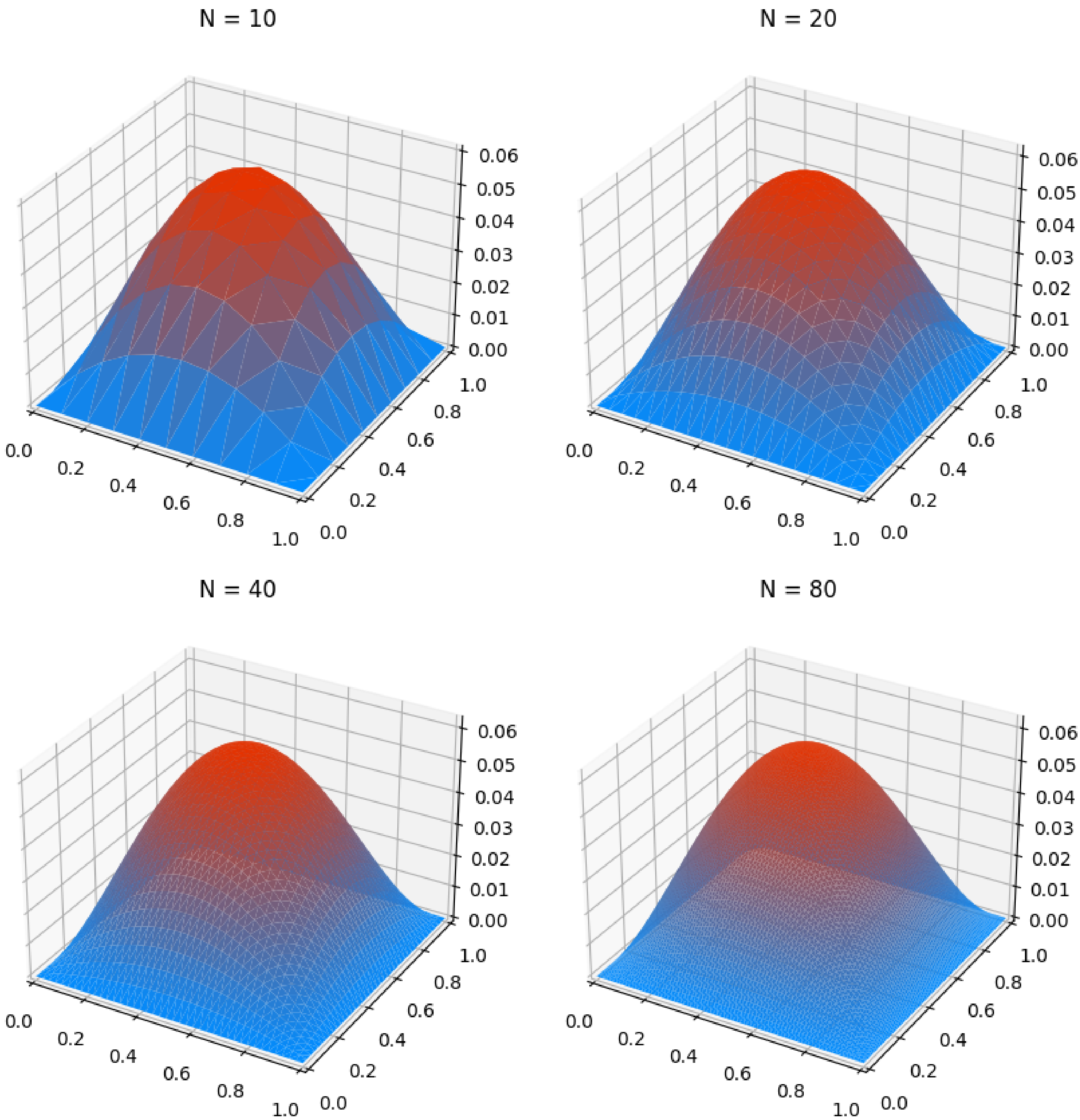
Hình 3.3: Nghiệm chính xác của bài toán

Để giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn, trước tiên chúng ta chia miền Ω thành N x N hình vuông với cạnh $h = \frac{1}{N}$, rồi mỗi hình vuông lại chia thành 2 tam giác (xem Hình cho trường hợp N = 10).



Hình 3.4: Lưới hình tam giác với N = 10

Dùng hàm cơ sở là các hàm tuyến tính trên từng tam giác. Nghiệm xấp xỉ:

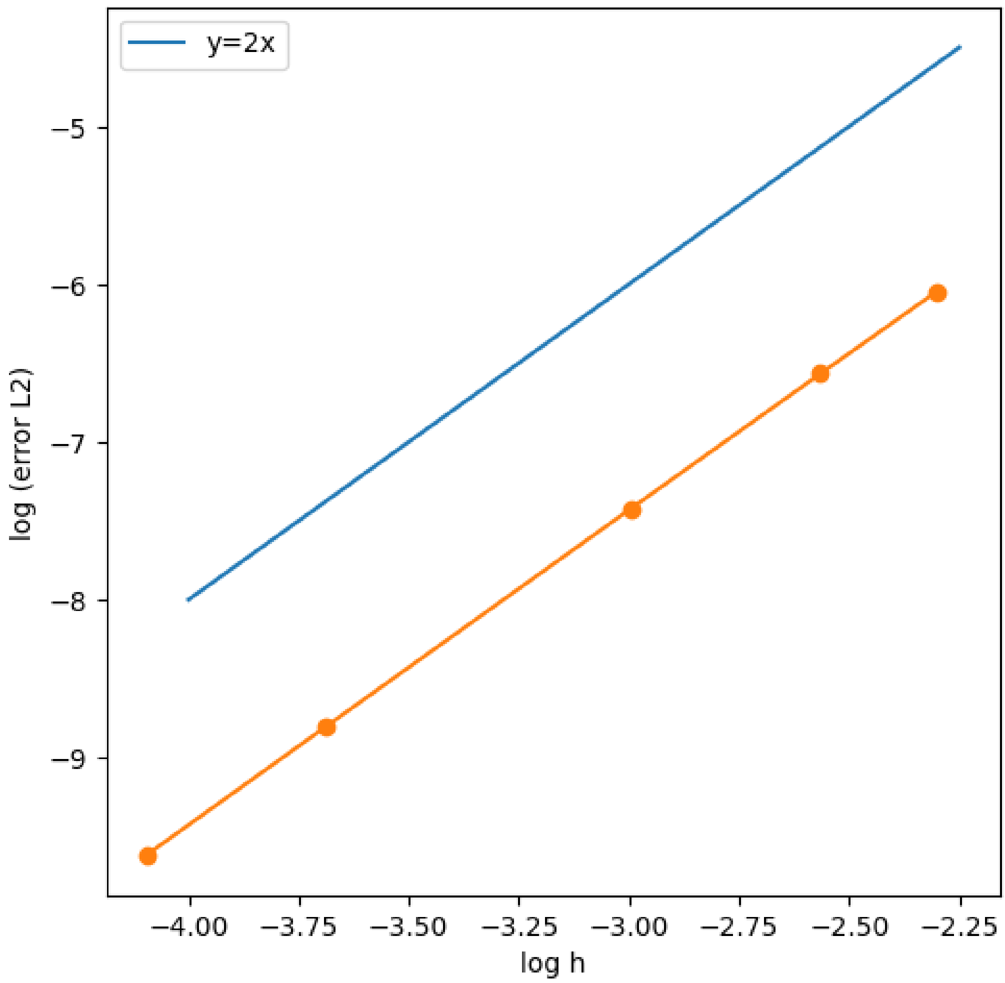


Hình 3.5: Nghiệm xấp xỉ với các bước lưới $h = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$

Sai số theo chuẩn L^2 được cho trong Bảng

h	$\|u - u_h\|_{L^2}$	Tỉ lệ giảm sai số
0.1	9.288815 e-4	
0.05	2.343704 e-4	3.963305
0.025	5.872824 e-5	3.990762
0.0125	1.469055e-5	3.997686
0.00625	3.6731709 e-6	3.999421

Từ bảng trên ta thấy sai số giảm khoảng 4 lần khi bước lưới giảm 1 nửa. Điều này phù hợp với ước lượng trong ước lượng (2.8).



Hình 3.6: Mối liên hệ giữa h và sai số theo thang logarit

Kết luận

Tóm lại, luận văn đã thực hiện các vấn đề sau: tìm hiểu và trình bày lại bài toán biên elliptic và dạng biến phân của nó, phương pháp xấp xỉ Galerkin, phương pháp phần tử hữu hạn và sai số nội suy; và cuối cùng là thực hiện thử nghiệm số trên python để minh họa các kết quả lí thuyết.

Một số hình ảnh trong bài viết được vẽ ở Geogebra:

https://www.geogebra.org/u/anthule2000.

Link code trong phần Thử nghiệm số ở Github:

https://github.com/anthule123/1.finite-element-method,

https://github.com/anthule123/easy-fem.

Tài liệu tham khảo

[1] S. C. Brenner, L. R. Scott, and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 3. Springer, 2008.

[2] N. G. Meyers and J. Serrin. H = w. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51:1055—1056, 1964.

[3] F.-J. Sayas. A gentle introduction to the finite element method. *Lecture notes, University of Delaware*, 2008.