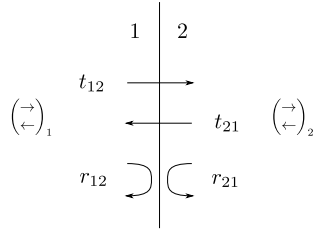


# Thinfilmm

Jeanne Colbois & Mario Geiger

27 janvier 2017

## 1 Matrice de transfert

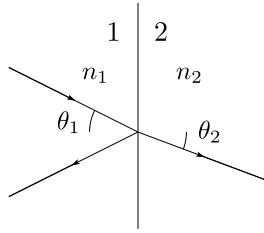


$\rightarrow_1$  est la phase et amplitude de l'onde incidente depuis la gauche.  $\leftarrow_1$  est la phase et amplitude de l'onde réfléchie vers la gauche.  $\rightarrow_2$  est celle de l'onde transmise et finalement  $\leftarrow_2$  est nul.

$$\begin{cases} \rightarrow_2 = t_{12} \rightarrow_1 + r_{21} \leftarrow_2 & \Rightarrow \rightarrow_1 = \frac{\rightarrow_2 - r_{21} \leftarrow_2}{t_{12}} \\ \leftarrow_1 = t_{21} \leftarrow_2 + r_{12} \rightarrow_1 & \Rightarrow \leftarrow_1 = t_{21} \leftarrow_2 + r_{12} \frac{\rightarrow_2 - r_{21} \leftarrow_2}{t_{12}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_1 = \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{21} \\ r_{12} & t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_2 \quad (2)$$

## 2 Fresnel



**Polarisation perpendiculaire**

$$\begin{cases} r_s = r_{12} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \\ t_s = t_{12} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \end{cases} \quad (3)$$

Avec  $\eta = n \cos \theta$ .

**Polarisation parallèle**

$$\begin{cases} r_p = r_{12} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \\ t_p = t_{12} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2n_1 / \cos \theta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \end{cases} \quad (4)$$

Avec  $\eta = n / \cos \theta$ .

### 3 Matrice de transfert de Fresnel

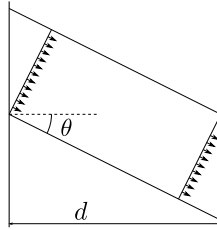
Polarisation perpendiculaire

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{21} \\ r_{12} & t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\eta_1} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \frac{2\eta_1 2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} - \frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_1)}{\eta_1 + \eta_2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\eta_1} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\eta_1} \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 \\ \eta_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_2 & -\eta_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Polarisation parallèle

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{21} \\ r_{12} & t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\frac{n_1}{n_2}\eta_2} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \frac{2\frac{n_1}{n_2}\eta_2 2\frac{n_2}{n_1}\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} - \frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_1)}{\eta_1 + \eta_2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\frac{n_1}{n_2}\eta_2} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 \\ \eta_1 & -1 \end{pmatrix} \frac{n_2}{\eta_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_2 & -\eta_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6}$$

### 4 Matrice de transfert de propagation



On a  $t_{12} = t_{21} = \psi$  et aucune réflexion.

$$\frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{21} \\ r_{12} & t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^{-1} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\psi = \exp(ikd \cos \theta) = \exp(ink_0 d \cos \theta) = \exp(in \frac{2\pi}{\lambda_0} d \cos \theta)$  où  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide et  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide.

### 5 Multi couches

$$\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{inc} \quad n_{inc}, \theta_{inc} \quad \left| \quad n_1, d_1 \quad \right| \quad n_2, d_2 \quad \left| \quad n_3, d_3 \quad \right| \quad n_{exit} \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit}$$

### Polarisation perpendiculaire

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{inc} &= \frac{1}{2\eta_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_1 & -\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^{-1} & 0 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\eta_1} \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 \\ \eta_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_2 & -\eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2^{-1} & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}}^{L_1} \\
&= \frac{1}{2\eta_2} \begin{pmatrix} \eta_2 & 1 \\ \eta_2 & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_3 & -\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_3^{-1} & 0 \\ 0 & \psi_3 \end{pmatrix} \frac{1}{2\eta_3} \begin{pmatrix} \eta_3 & 1 \\ \eta_3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_{exit} & -\eta_{exit} \end{pmatrix}}^{L_3} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit} \\
&= \frac{1}{2\eta_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_{exit} & -\eta_{exit} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta & -\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{-1} & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \frac{1}{2\eta} \begin{pmatrix} \eta & 1 \\ \eta & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\psi+\psi^{-1}}{2} & -\frac{\psi-\psi^{-1}}{2\eta} \\ -\eta\frac{\psi-\psi^{-1}}{2} & \frac{\psi+\psi^{-1}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \delta & -\frac{i \sin \delta}{\eta} \\ -\eta i \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

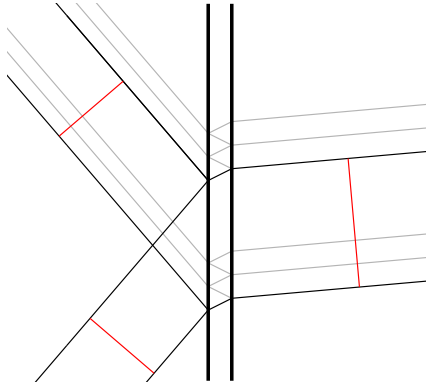
où  $\delta = n \frac{2\pi}{\lambda_0} d \cos \theta$

### Polarisation parallèle

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{inc} &= \frac{1}{2n_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\frac{n_1}{\eta_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_1 & -\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^{-1} & 0 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix} \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} \eta_1 & 1 \\ \eta_1 & -1 \end{pmatrix} \frac{n_2}{\eta_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_2 & -\eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_2^{-1} & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix}}^{L_1} \\
&= \frac{1}{2n_2} \begin{pmatrix} \eta_2 & 1 \\ \eta_2 & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\frac{n_3}{\eta_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_3 & -\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_3^{-1} & 0 \\ 0 & \psi_3 \end{pmatrix} \frac{1}{2n_3} \begin{pmatrix} \eta_3 & 1 \\ \eta_3 & -1 \end{pmatrix} \frac{n_{exit}}{\eta_{exit}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_{exit} & -\eta_{exit} \end{pmatrix}}^{L_3} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit} \\
&= \frac{1}{2n_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} L_1 L_2 L_3 \frac{n_{exit}}{\eta_{exit}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta_{exit} & -\eta_{exit} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit}
\end{aligned} \tag{10}$$

Les matrices  $L$  ont la même forme que dans le cas perpendiculaire.

## 6 Coefficients de transmittion et reflexion



$$\vec{E} = \vec{e} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) + \text{c.c.} \tag{11}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \frac{n}{c} \frac{\vec{k}}{k} \wedge \vec{E} \tag{12}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{n}{c} \vec{E} \wedge \left( \frac{\vec{k}}{k} \wedge \vec{E} \right) = \frac{n}{c} \vec{E}^2 \frac{\vec{k}}{k} \quad (13)$$

La surface du front d'onde incident est déformé après la transmission. Sa surface peut changer :

$$\frac{S_{exit}}{S_{inc}} = \frac{\cos \theta_{exit}}{\cos \theta_{inc}} \quad (14)$$

On relie alors les coefficients  $r$  et  $t$  à la réflectance et transmittance :  $R$  et  $T$  (proportionnelles à  $\vec{S}$ ) par :

$$R = \frac{S_{inc} \frac{n_{inc}}{c} \vec{E}_r^2}{S_{inc} \frac{n_{inc}}{c} \vec{E}_i^2} = \frac{S_{inc} \frac{n_{inc}}{c} |r|^2 \vec{E}_i^2}{S_{inc} \frac{n_{inc}}{c} \vec{E}_i^2} = |r|^2 \quad (15)$$

$$T = \frac{S_{exit} \frac{n_{exit}}{c} \vec{E}_t^2}{S_{inc} \frac{n_{inc}}{c} \vec{E}_i^2} = \frac{\cos \theta_{exit}}{\cos \theta_{inc}} \frac{n_{exit}}{n_{inc}} |t|^2 \quad (16)$$

**Polarisation perpendiculaire** Si on prend  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{inc} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$  on a alors :

$$\begin{pmatrix} 1/t \\ r/t \end{pmatrix} = \frac{1}{2\eta_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{exit} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Si on définit

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{exit} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1/t \\ r/t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{b+c/\eta_{inc}}{2} \\ \frac{b-c/\eta_{inc}}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{b+c/\eta_{inc}} \\ r = \frac{b-c/\eta_{inc}}{2} \frac{2}{b+c/\eta_{inc}} = \frac{b-c/\eta_{inc}}{b+c/\eta_{inc}} \end{cases} &\Rightarrow T = \frac{\eta_{exit}}{\eta_{inc}} \left| \frac{2}{b+c/\eta_{inc}} \right|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

**Polarisation parallèle** Si on prend  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{exit} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{pmatrix}_{inc} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$  on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1/t \\ r/t \end{pmatrix} = \frac{1}{2n_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} L_1 L_2 L_3 \frac{n_{exit}}{\eta_{exit}} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{exit} \end{pmatrix} \quad (20)$$

On peut écrire différemment le terme suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{inc}} \frac{n_{exit}}{\eta_{exit}} &= \frac{1}{\eta_{inc} \cos \theta_{inc}} \frac{n_{exit}}{n_{exit}/\cos \theta_{exit}} \\ &= \frac{1}{\eta_{inc}} \frac{\cos \theta_{exit}}{\cos \theta_{inc}} \end{aligned} \quad (21)$$

Pour avoir au final :

$$\begin{pmatrix} 1/t \\ r/t \end{pmatrix} = \frac{\cos \theta_{exit}}{\cos \theta_{inc}} \frac{1}{2\eta_{inc}} \begin{pmatrix} \eta_{inc} & 1 \\ \eta_{inc} & -1 \end{pmatrix} L_1 L_2 L_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{exit} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1/t \\ r/t \end{pmatrix} &= \frac{\cos \theta_{exit}}{\cos \theta_{inc}} \begin{pmatrix} \frac{b+c/\eta_{inc}}{2} \\ \frac{b-c/\eta_{inc}}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{b+c/\eta_{inc}} \frac{\cos \theta_{inc}}{\cos \theta_{exit}} \\ r = \frac{b-c/\eta_{inc}}{b+c/\eta_{inc}} \end{cases} &\Rightarrow T = \frac{\eta_{exit}}{\eta_{inc}} \left| \frac{2}{b+c/\eta_{inc}} \right|^2 \end{aligned} \quad (23)$$