



All-in at the River

Standard Code Library

Shanghai Jiao Tong University

Desprado2 fstqwq AntiLeaf

Contents

1 数学	1	
1.1 多项式	1	
1.1.1 FFT	1	
1.1.2 NTT	1	
1.1.3 任意模数卷积(MTT, 毛梯梯)	2	
1.1.4 多项式操作	3	
1.1.5 更优秀的多项式多点求值	5	
1.1.6 多项式快速插值	6	
1.1.7 拉格朗日反演(多项式复合逆)	8	
1.1.8 分治FFT	8	
1.1.9 半在线卷积	8	
1.1.10 常系数齐次线性递推 $O(k \log k \log n)$	8	
1.1.11 应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘	9	
1.2 插值	9	
1.2.1 牛顿插值	9	
1.2.2 拉格朗日(Lagrange)插值	10	
1.3 FWT快速沃尔什变换	10	
1.3.1 三行FWT	10	
1.4 线性代数	10	
1.4.1 矩阵乘法	10	
1.4.2 高斯消元	10	
1.4.3 行列式取模	11	
1.4.4 线性基(消成对角)	11	
1.4.5 线性代数知识	11	
1.4.6 矩阵树定理, BEST定理	11	
1.5 Berlekamp-Massey最小递推式	11	
1.5.1 优化矩阵快速幂DP	12	
1.5.2 求矩阵最小多项式	12	
1.5.3 求稀疏矩阵的行列式	12	
1.5.4 求稀疏矩阵的秩	12	
1.5.5 解稀疏方程组	12	
1.6 单纯形	13	
1.6.1 线性规划对偶原理	13	
1.7 博弈论	14	
1.7.1 SG定理	14	
1.7.2 纳什均衡	14	
1.7.3 经典博弈	14	
1.7.4 例题	14	
1.8 自适应Simpson积分	14	
1.9 常见数列	14	
1.9.1 斐波那契数 卢卡斯数	14	
1.9.2 伯努利数, 自然数幂次和	15	
1.9.3 分拆数	15	
1.9.4 斯特林数	15	
1.9.5 贝尔数	16	
1.9.6 欧拉数(Eulerian Number)	16	
1.9.7 卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数	16	
1.10 常用公式及结论	17	
1.10.1 方差	17	
1.10.2 min-max反演	17	
1.10.3 单位根反演(展开整除条件 $[n k]$)	17	
1.10.4 康托展开(排列的排名)	17	
1.10.5 连通图计数	17	
1.10.6 线性齐次线性常系数递推求通项	17	
1.11 常用生成函数变换	17	
2 数论	18	
2.1 $O(n)$ 预处理逆元	18	
2.2 线性筛	18	
2.3 杜教筛	18	
2.4 Powerful Number筛	18	
2.5 洲阁筛	19	
2.6 Miller-Rabin	20	
2.7 Pollard's Rho	20	
2.8 快速阶乘算法	21	
2.9 扩展欧几里德	21	
2.9.1 求通解的方法	21	
2.9.2 类欧几里德算法(直线下整点个数)	21	
2.10 中国剩余定理	21	
2.10.1 ex-CRT	21	
2.11 原根 阶	22	
2.12 常用数论公式	22	
2.12.1 莫比乌斯反演	22	
2.12.2 降幂公式	22	
2.12.3 其他常用公式	22	
3 图论	23	
3.1 最小生成树	23	
3.1.1 Boruvka算法	23	
3.1.2 动态最小生成树	23	
3.1.3 最小树形图	24	
3.1.4 Steiner Tree 斯坦纳树	25	
3.1.5 最小直径生成树	26	
3.2 最短路	27	
3.2.1 Dijkstra	27	
3.2.2 Johnson算法(负权图多源最短路)	27	
3.2.3 k 短路	27	
3.3 Tarjan算法	28	
3.3.1 强连通分量	28	
3.3.2 割点 点双	28	
3.3.3 桥 边双	29	
3.4 仙人掌	29	
3.4.1 仙人掌DP	29	
3.5 二分图	30	
3.5.1 匈牙利	30	
3.5.2 Hopcroft-Karp二分图匹配	30	
3.5.3 KM二分图最大权匹配	31	
3.5.4 二分图原理	32	
3.6 一般图匹配	32	
3.6.1 高斯消元	32	
3.6.2 带花树	33	
3.6.3 带权带花树	34	
3.6.4 原理	36	
3.7 支配树	36	
3.8 2-SAT	36	
3.9 最大流	37	
3.9.1 Dinic	37	
3.9.2 ISAP	37	
3.9.3 HLPP 最高标号预流推进	38	
3.10 费用流	39	
3.10.1 SPFA费用流	39	
3.10.2 Dijkstra费用流	40	
3.11 网络流原理	41	
3.11.1 最大流	41	
3.11.2 最小割	41	
3.11.3 费用流	41	
3.11.4 上下界网络流	41	
3.11.5 常见建图方法	41	
3.11.6 例题	41	
3.12 Prüfer序列	41	
3.13 弦图相关	42	
4 数据结构	43	
4.1 线段树	43	
4.1.1 非递归线段树	43	
4.1.2 线段树维护矩形并	43	
4.1.3 历史和	44	
4.2 陈丹琦分治	45	

4.2.1 动态图连通性(分治并查集)	45	6 动态规划	78
4.2.2 四维偏序	46	6.1 决策单调性 $O(n \log n)$	78
4.3 整体二分	46		
4.4 平衡树	47	7 计算几何	79
4.4.1 Treap	47	7.1 Delaunay三角剖分	79
4.4.2 无旋Treap/可持久化Treap	48		
4.4.3 Splay	49		
4.5 树链剖分	49	8 杂项	82
4.5.1 动态树形DP(最大权独立集)	49	8.1 $O(1)$ 快速乘	82
4.6 树分治	51	8.2 Kahan求和算法(减少浮点数累加的误差)	82
4.6.1 动态树分治	51	8.3 Python Decimal	82
4.6.2 紫荆花之恋	52	8.4 $O(n^2)$ 高精度	82
4.7 LCT动态树	55	8.5 笛卡尔树	85
4.7.1 不换根(弹飞绵羊)	55	8.6 GarsiaWachs算法($O(n \log n)$ 合并石子)	85
4.7.2 换根/维护生成树	55	8.7 常用NTT素数及原根	85
4.7.3 维护子树信息	57	8.8 xorshift	85
4.7.4 模板题:动态QTREE4	58	8.9 枚举子集	86
4.8 K-D树	60	8.10 STL	86
4.8.1 动态K-D树(定期重构)	60	8.10.1 vector	86
4.9 LCA最近公共祖先	61	8.10.2 list	86
4.9.1 Tarjan LCA $O(n + m)$	61	8.10.3 unordered_set/map	86
4.10 虚树	61	8.11 Public Based DataStructure(PB_DS)	86
4.11 长链剖分	63	8.11.1 哈希表	86
4.11.1 梯子剖分	63	8.11.2 堆	86
4.12 堆	64	8.11.3 平衡树	86
4.12.1 左偏树	64	8.12 rope	87
4.12.2 二叉堆	64	8.13 其他C++相关	87
4.13 莫队	64	8.13.1 <cmath>	87
4.13.1 莫队二次离线	64	8.13.2 <algorithm>	87
4.13.2 带修莫队在线化 $O(n^{\frac{5}{3}})$	66	8.13.3 std::tuple	87
4.13.3 莫队二次离线 在线化 $O((n + m)\sqrt{n})$	66	8.13.4 <complex>	87
4.14 常见根号思路	67	8.14 一些游戏	87
5 字符串	68	8.14.1 炉石传说	87
5.1 KMP	68	8.15 OEIS	87
5.1.1 ex-KMP	68	8.15.1 计数相关	87
5.2 AC自动机	68	8.15.2 线性递推数列	88
5.3 后缀数组	69	8.15.3 数论相关	88
5.3.1 倍增	69	8.15.4 其他	88
5.3.2 SA-IS	69	8.16 编译选项	88
5.3.3 SAMSA	70	8.17 注意事项	89
5.4 后缀平衡树	71	8.17.1 常见下毒手法	89
5.5 后缀自动机	71	8.17.2 场外相关	89
5.5.1 广义后缀自动机	71	8.17.3 做题策略与心态调节	89
5.5.2 区间本质不同子串计数	72	8.18 附录: VScode相关	89
5.6 回文树	75	8.18.1 插件	89
5.6.1 广义回文树	75	8.18.2 设置选项	89
5.7 Manacher马拉车	77	8.18.3 快捷键	89
5.8 字符串原理	77	8.19 附录: 骂人的艺术—梁实秋	90
		8.20 附录: Cheat Sheet	90

1 数学

1.1 多项式

1.1.1 FFT

```

1 // 使用时一定要注意double的精度是否足够(极限大概是10 ^ ↪ 14)
2
3 const double pi = acos((double)-1.);
4
5 // 手写复数类
6 // 支持加减乘三种运算
7 // += 运算符如果用的不多可以不重载
8 struct Complex {
9     double a, b; // 由于long double精度和double几乎相同,
    → 通常没有必要用long double
10
11     Complex(double a = 0., double b = 0.) : a(a), b(b)
    → {}
12
13     Complex operator + (const Complex &x) const {
14         return Complex(a + x.a, b + x.b);
15     }
16
17     Complex operator - (const Complex &x) const {
18         return Complex(a - x.a, b - x.b);
19     }
20
21     Complex operator * (const Complex &x) const {
22         return Complex(a * x.a - b * x.b, a * x.b + b * ↪ x.a);
23     }
24
25     Complex operator * (double x) const {
26         return Complex(a * x, b * x);
27     }
28
29     Complex &operator += (const Complex &x) {
30         return *this = *this + x;
31     }
32
33     Complex conj() const { // 共轭, 一般只有MTT需要用
34         return Complex(a, -b);
35     }
36 } omega[maxn], omega_inv[maxn];
37 const Complex ima = Complex(0, 1); // i = sqrt(-1)
38
39 int fft_n; // 要在主函数里初始化
40
41 // FFT初始化
42 void FFT_init(int n) {
43     fft_n = n;
44
45     for (int i = 0; i < n; i++) // 根据单位根的旋转性质
        → 可以节省计算单位根逆元的时间
        omega[i] = Complex(cos(2 * pi / n * i), sin(2 * ↪ pi / n * i));
46
47     omega_inv[0] = omega[0];
48     for (int i = 1; i < n; i++)
        omega_inv[i] = omega[n - i];
49
50     // 当然不存单位根也可以, 只不过在FFT次数较多时很可能
        → 会增大常数
51 }
52
53 // FFT主过程
54 void FFT(Complex *a, int n, int tp) {
55     for (int i = 1, j = 0, k; i < n - 1; i++) {

```

```

57         k = n;
58         do
59             j = (k >= 1);
60         while (j < k);
61
62         if (i < j)
63             swap(a[i], a[j]);
64     }
65
66     for (int k = 2, m = fft_n / 2; k <= n; k *= 2, m /= ↪ 2)
67         for (int i = 0; i < n; i += k)
68             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
69                 Complex u = a[i + j], v = (tp > 0 ?
                    → omega : omega_inv)[m * j] * a[i + j
                    → + k / 2];
70
71                 a[i + j] = u + v;
72                 a[i + j + k / 2] = u - v;
73             }
74
75         if (tp < 0)
76             for (int i = 0; i < n; i++) {
77                 a[i].a /= n;
78                 a[i].b /= n; // 一般情况下是不需要的, 只
                    → 有MTT时才需要
79         }
80     }

```

1.1.2 NTT

```

1 constexpr int p = 998244353; // p为模数
2
3 int ntt_n, omega[maxn], omega_inv[maxn]; // ntt_n要在主
    → 函数里初始化
4
5 void NTT_init(int n) {
6     ntt_n = n;
7
8     int wn = qpow(3, (p - 1) / n); // 这里的3代表模数的
    → 任意一个原根
9
10    omega[0] = omega_inv[0] = 1;
11
12    for (int i = 1; i < n; i++)
13        omega_inv[n - i] = omega[i] = (long
            → long)omega[i - 1] * wn % p;
14
15
16 void NTT(int *a, int n, int tp) { // n为变换长度,
    → tp为1或-1, 表示正/逆变换
17
18     for (int i = 1, j = 0, k; i < n - 1; i++) { // → O(n)旋转算法, 原理是模拟加1
19         k = n;
20         do
21             j = (k >= 1);
22         while (j < k);
23
24         if (i < j)
25             swap(a[i], a[j]);
26     }
27
28     for (int k = 2, m = ntt_n / 2; k <= n; k *= 2, m /= ↪ 2)
29         for (int i = 0; i < n; i += k)
30             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
31                 int w = (tp > 0 ? omega : omega_inv)[m
                    → * j];

```

```

32     int u = a[i + j], v = (long long)w *
33         ↪ a[i + j + k / 2] % p;
34     a[i + j] = u + v;
35     if (a[i + j] ≥ p)
36         a[i + j] -= p;
37
38     a[i + j + k / 2] = u - v;
39     if (a[i + j + k / 2] < 0)
40         a[i + j + k / 2] += p;
41 }
42
43 if (tp < 0) {
44     int inv = qpow(n, p - 2);
45     for (int i = 0; i < n; i++)
46         a[i] = (long long)a[i] * inv % p;
47 }

```

1.1.3 任意模数卷积(MTT, 毛梯梯)

三模数NTT和直接拆系数FFT都太慢了, 不要用.

MTT的原理就是拆系数FFT, 只不过优化了做变换的次数.

考虑要对 $A(x), B(x)$ 两个多项式做DFT, 可以构造两个复多项式

$$P(x) = A(x) + iB(x) \quad Q(x) = A(x) - iB(x)$$

只需要DFT一个, 另一个DFT实际上就是前者反转再取共轭, 再利用

$$A(x) = \frac{P(x) + Q(x)}{2} \quad B(x) = \frac{P(x) - Q(x)}{2i}$$

即可还原出 $A(x), B(x)$.

IDFT的道理更简单, 如果要对 $A(x)$ 和 $B(x)$ 做IDFT, 只需要对 $A(x) + iB(x)$ 做IDFT即可, 因为IDFT的结果必定为实数, 所以结果的实部和虚部就分别是 $A(x)$ 和 $B(x)$.

实际上任何同时对两个实序列进行DFT, 或者同时对结果为实序列的DFT进行逆变换时都可以按照上面的方法优化, 可以减少一半的DFT次数.

```

30     FFT(c, n, -1);
31
32     for (int i = 0; i < n; i++) {
33         a[i].a = c[i].a;
34         b[i].a = c[i].b;
35     }
36 }
37
38 Complex a[2][maxn], b[2][maxn], c[3][maxn];
39 int ans[maxn];
40
41 int main() {
42     int n, m;
43     scanf("%d%d%d", &n, &m, &p);
44     n++;
45     m++;
46
47     base = (int)(sqrt(p) + 0.5);
48
49     for (int i = 0; i < n; i++) {
50         int x;
51         scanf("%d", &x);
52         x %= p;
53
54         a[1][i].a = x / base;
55         a[0][i].a = x % base;
56     }
57
58     for (int i = 0; i < m; i++) {
59         int x;
60         scanf("%d", &x);
61         x %= p;
62
63         b[1][i].a = x / base;
64         b[0][i].a = x % base;
65     }
66
67     int N = 1;
68     while (N < n + m - 1)
69         N <<= 1;
70
71     FFT_init(N);
72
73     DFT(a[0], a[1], N);
74     DFT(b[0], b[1], N);
75
76     for (int i = 0; i < N; i++)
77         c[0][i] = a[0][i] * b[0][i];
78
79     for (int i = 0; i < N; i++)
80         c[1][i] = a[0][i] * b[1][i] + a[1][i] * b[0]
81             ↪ [i];
82
83     for (int i = 0; i < N; i++)
84         c[2][i] = a[1][i] * b[1][i];
85
86     FFT(c[1], N, -1);
87     IDFT(c[0], c[2], N);
88
89     for (int j = 2; ~j; j--)
90         for (int i = 0; i < n + m - 1; i++)
91             ans[i] = ((long long)ans[i] * base + (long
92                 ↪ long)(c[j][i].a + 0.5)) % p;
93
94     // 实际上就是c[2] * base ^ 2 + c[1] * base + c[0],
95     // 这样写可以改善地址访问连续性
96
97     for (int i = 0; i < n + m - 1; i++) {
98         if (i)
99

```

```

1 // 常量和复数类略
2
3 const Complex ima = Complex(0, 1);
4
5 int p, base;
6
7 // FFT略
8
9 void DFT(Complex *a, Complex *b, int n) {
10     static Complex c[maxn];
11
12     for (int i = 0; i < n; i++)
13         c[i] = Complex(a[i].a, b[i].a);
14
15     FFT(c, n, 1);
16
17     for (int i = 0; i < n; i++) {
18         int j = (n - i) & (n - 1);
19
20         a[i] = (c[i] + c[j].conj() * 0.5;
21         b[i] = (c[i] - c[j].conj() * -0.5 * ima;
22     }
23
24 void IDFT(Complex *a, Complex *b, int n) {
25     static Complex c[maxn];
26
27     for (int i = 0; i < n; i++)
28         c[i] = a[i] + ima * b[i];

```

```

96     printf(" ");
97
98     printf("%d", ans[i]);
99
100    return 0;
101}

```

1.1.4 多项式操作

```

1 // A为输入, C为输出, n为所需长度且必须是2^k
2 // 多项式求逆, 要求A常数项不为0
3 void get_inv(int *A, int *C, int n) {
4     static int B[maxn];
5
6     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
7     C[0] = qpow(A[0], p - 2); // 一般常数项都是1, 直接赋
→ 值为1就可以
8
9     for (int k = 2; k <= n; k *= 2) {
10        memcpy(B, A, sizeof(int) * k);
11        memset(B + k, 0, sizeof(int) * k);
12
13        NTT(B, k * 2, 1);
14        NTT(C, k * 2, 1);
15
16        for (int i = 0; i < k * 2; i++) {
17            C[i] = (2 - (long long)B[i] * C[i]) % p *
→ C[i] % p;
18            if (C[i] < 0)
19                C[i] += p;
20        }
21
22        NTT(C, k * 2, -1);
23
24        memset(C + k, 0, sizeof(int) * k);
25    }
26
27 // 开根
28 void get_sqrt(int *A, int *C, int n) {
29     static int B[maxn], D[maxn];
30
31     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
32     C[0] = 1; // 如果不是1就要考虑二次剩余
33
34     for (int k = 2; k <= n; k *= 2) {
35        memcpy(B, A, sizeof(int) * k);
36        memset(B + k, 0, sizeof(int) * k);
37
38        get_inv(C, D, k);
39
40        NTT(B, k * 2, 1);
41        NTT(D, k * 2, 1);
42
43        for (int i = 0; i < k * 2; i++)
44            B[i] = (long long)B[i] * D[i] % p;
45
46        NTT(B, k * 2, -1);
47
48        for (int i = 0; i < k; i++)
49            C[i] = (long long)(C[i] + B[i]) * inv_2 %
→ p; // inv_2是2的逆元
50    }
51
52 // 求导
53 void get_derivative(int *A, int *C, int n) {
54     for (int i = 1; i < n; i++)

```

```

57         C[i - 1] = (long long)A[i] * i % p;
58
59     C[n - 1] = 0;
60 }
61
62 // 不定积分, 最好预处理逆元
63 void get_integrate(int *A, int *C, int n) {
64     for (int i = 1; i < n; i++)
65         C[i] = (long long)A[i - 1] * qpow(i, p - 2) %
→ p;
66
67     C[0] = 0; // 不定积分没有常数项
68 }
69
70 // 多项式ln, 要求A常数项不为0
71 void get_ln(int *A, int *C, int n) { // 通常情况下A常数
→ 项都是1
72     static int B[maxn];
73
74     get_derivative(A, B, n);
75     memset(B + n, 0, sizeof(int) * n);
76
77     get_inv(A, C, n);
78
79     NTT(B, n * 2, 1);
80     NTT(C, n * 2, 1);
81
82     for (int i = 0; i < n * 2; i++)
83         B[i] = (long long)B[i] * C[i] % p;
84
85     NTT(B, n * 2, -1);
86
87     get_integrate(B, C, n);
88
89     memset(C + n, 0, sizeof(int) * n);
90 }
91
92 // 多项式exp, 要求A没有常数项
93 // 常数很大且总代码较长, 一般来说最好替换为分治FFT
94 // 分治FFT依据: 设 $G(x) = \exp F(x)$ , 则有
95 //  $\rightarrow g_i = \sum_{k=1}^{i-1} f_{i-k} * k * g_k$ 
96 void get_exp(int *A, int *C, int n) {
97     static int B[maxn];
98
99     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
100    C[0] = 1;
101
102    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
103        get_ln(C, B, k);
104
105    for (int i = 0; i < k; i++) {
106        B[i] = A[i] - B[i];
107        if (B[i] < 0)
108            B[i] += p;
109    }
110    (++B[0]) %= p;
111
112    NTT(B, k * 2, 1);
113    NTT(C, k * 2, 1);
114
115    for (int i = 0; i < k * 2; i++)
116        C[i] = (long long)C[i] * B[i] % p;
117
118    NTT(C, k * 2, -1);
119
120    memset(C + k, 0, sizeof(int) * k);
121 }
122
123 // 多项式k次幂, 在A常数项不为1时需要转化

```

```

124 // 常数较大且总代码较长，在时间要求不高时最好替换为暴力快
125 // →速幂
126 void get_pow(int *A, int *C, int n, int k) {
127     static int B[maxn];
128
129     get_ln(A, B, n);
130
131     for (int i = 0; i < n; i++)
132         B[i] = (long long)B[i] * k % p;
133
134     get_exp(B, C, n);
135 }
136
137 // 多项式除法，A / B，结果输出在C
138 // A的次数为n, B的次数为m
139 void get_div(int *A, int *B, int *C, int n, int m) {
140     static int f[maxn], g[maxn], gi[maxn];
141
142     if (n < m) {
143         memset(C, 0, sizeof(int) * m);
144         return;
145     }
146
147     int N = 1;
148     while (N < (n - m + 1))
149         N *= 2;
150
151     memset(f, 0, sizeof(int) * N * 2);
152     memset(g, 0, sizeof(int) * N * 2);
153     // memset(gi, 0, sizeof(int) * N);
154
155     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
156         f[i] = A[n - i - 1];
157     for (int i = 0; i < m && i < n - m + 1; i++)
158         g[i] = B[m - i - 1];
159
160     get_inv(g, gi, N);
161
162     for (int i = n - m + 1; i < N; i++)
163         gi[i] = 0;
164
165     NTT(f, N * 2, 1);
166     NTT(gi, N * 2, 1);
167
168     for (int i = 0; i < N * 2; i++)
169         f[i] = (long long)f[i] * gi[i] % p;
170
171     NTT(f, N * 2, -1);
172
173     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
174         C[i] = f[n - m - i];
175
176 // 多项式取模，余数输出到C，商输出到D
177 void get_mod(int *A, int *B, int *C, int *D, int n, int
178             m) {
179     static int b[maxn], d[maxn];
180
181     if (n < m) {
182         memcpy(C, A, sizeof(int) * n);
183
184         if (D)
185             memset(D, 0, sizeof(int) * m);
186
187         return;
188     }
189
190     get_div(A, B, d, n, m);
191
192     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
193         D[i] = d[i];
194
195     int N = 1;
196     while (N < n)
197         N *= 2;
198
199     memcpy(b, B, sizeof(int) * m);
200
201     NTT(b, N, 1);
202     NTT(d, N, 1);
203
204     for (int i = 0; i < N; i++)
205         b[i] = (long long)d[i] * b[i] % p;
206
207     NTT(b, N, -1);
208
209     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
210         C[i] = (A[i] - b[i] + p) % p;
211
212     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
213     memset(d, 0, sizeof(int) * N);
214
215 }
216
217 // 多点求值要用的数组
218 int q[maxn], ans[maxn]; // q是要代入的各个系数, ans是求
219 // →出的值
220 int tg[25][maxn * 2], tf[25][maxn]; // 辅助数组, tg是预
221 // →处理乘积
222 // tf是项数越来越少的f, tf[0]就是原来的函数
223 void pretreat(int l, int r, int k) { // 多点求值预处理
224     static int A[maxn], B[maxn];
225
226     int *g = tg[k] + l * 2;
227
228     if (r - l + 1 ≤ 200) { // 小范围暴力, 能跑得快点
229         g[0] = 1;
230
231         for (int i = l; i ≤ r; i++) {
232             for (int j = i - l + 1; j; j--) {
233                 g[j] = (g[j - 1] - (long long)g[j] *
234                     → q[i]) % p;
235                 if (g[j] < 0)
236                     g[j] += p;
237             }
238             g[0] = (long long)g[0] * (p - q[i]) % p;
239
240         }
241
242         return;
243     }
244
245     int mid = (l + r) / 2;
246
247     pretreat(l, mid, k + 1);
248     pretreat(mid + 1, r, k + 1);
249
250     if (!k)
251         return;
252
253     int N = 1;
254     while (N ≤ r - l + 1)
255         N *= 2;
256
257     int *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr = tg[k + 1] + (mid
258         → + 1) * 2;
259
260     memset(A, 0, sizeof(int) * N);

```

```

257     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
258
259     memcpy(A, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
260     memcpy(B, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
261
262     NTT(A, N, 1);
263     NTT(B, N, 1);
264
265     for (int i = 0; i < N; i++)
266         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
267
268     NTT(A, N, -1);
269
270     for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
271         g[i] = A[i];
272 }
273
274 void solve(int l, int r, int k) { // 多项式多点求值主过
→ 程
275     int *f = tf[k];
276
277     if (r - l + 1 <= 200) {
278         for (int i = l; i <= r; i++) {
279             int x = q[i];
280
281             for (int j = r - l; ~j; j--) {
282                 ans[i] = ((long long)ans[i] * x + f[j])
283                     → % p;
284             }
285
286             return;
287         }
288
289         int mid = (l + r) / 2;
290         int *ff = tf[k + 1], *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr =
→ tg[k + 1] + (mid + 1) * 2;
291
292         get_mod(f, gl, ff, nullptr, r - l + 1, mid - l +
→ 2);
293         solve(l, mid, k + 1);
294
295         memset(gl, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
296         memset(ff, 0, sizeof(int) * (mid - l + 1));
297
298         get_mod(f, gr, ff, nullptr, r - l + 1, r - mid +
→ 1);
299         solve(mid + 1, r, k + 1);
300
301         memset(gr, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
302         memset(ff, 0, sizeof(int) * (r - mid));
303     }
304 // f < x^n, m个询问, 询问是0-based, 当然改成1-based也很
→ 简单
305 void get_value(int *f, int *x, int *a, int n, int m) {
306     if (m <= n)
307         m = n + 1;
308     if (n < m - 1)
309         n = m - 1; // 补零方便处理
310
311     memcpy(tf[0], f, sizeof(int) * n);
312     memcpy(q, x, sizeof(int) * m);
313
314     pretreat(0, m - 1, 0);
315     solve(0, m - 1, 0);
316
317     if (a) // 如果a是nullptr, 代表不复制答案, 直接
→ 用ans数组
318     memcpy(a, ans, sizeof(int) * m);

```

319 }

1.1.5 更优秀的多项式多点求值

这个做法不需要写取模, 求逆也只有一次, 但是神乎其技, 完全搞不懂原理

清空和复制之类的地方容易抄错, 抄的时候要注意

```

1 int q[maxn], ans[maxn]; // q是要代入的各个系数, ans是求
→ 出的值
2 int tg[25][maxn * 2], tf[25][maxn]; // 辅助数组, tg是预
→ 处理乘积,
3 // tf是项数越来越少的f, tf[0]就是原来的函数
4
5 void pretreat(int l, int r, int k) { // 预处理
6     static int A[maxn], B[maxn];
7
8     int *g = tg[k] + l * 2;
9
10    if (r - l + 1 <= 1) { // 小范围暴力
11        g[0] = 1;
12
13        for (int i = l; i <= r; i++) {
14            for (int j = i - l + 1; j; j--) {
15                g[j] = (g[j - 1] - (long long)g[j] *
→ q[i]) % p;
16                if (g[j] < 0)
17                    g[j] += p;
18            }
19            g[0] = (long long)g[0] * (p - q[i]) % p;
20        }
21
22        reverse(g, g + r - l + 2);
23
24        return;
25    }
26
27    int mid = (l + r) / 2;
28
29    pretreat(l, mid, k + 1);
30    pretreat(mid + 1, r, k + 1);
31
32    int N = 1;
33    while (N <= r - l + 1)
34        N *= 2;
35
36    int *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr = tg[k + 1] + (mid
→ + 1) * 2;
37
38    memset(A, 0, sizeof(int) * N);
39    memset(B, 0, sizeof(int) * N);
40
41    memcpy(A, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
42    memcpy(B, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
43
44    NTT(A, N, 1);
45    NTT(B, N, 1);
46
47    for (int i = 0; i < N; i++)
48        A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
49
50    NTT(A, N, -1);
51
52    for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
53        g[i] = A[i];
54
55
56 void solve(int l, int r, int k) { // 主过程
57     static int a[maxn], b[maxn];
58

```

```

59     int *f = tf[k];
60
61     if (l == r) {
62         ans[l] = f[0];
63         return;
64     }
65
66     int mid = (l + r) / 2;
67     int *ff = tf[k + 1], *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr =
68     ↪ tg[k + 1] + (mid + 1) * 2;
69
70     int N = 1;
71     while (N < r - l + 2)
72         N *= 2;
73
74     memcpy(a, f, sizeof(int) * (r - l + 2));
75     memcpy(b, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
76     reverse(b, b + r - mid + 1);
77
78     NTT(a, N, 1);
79     NTT(b, N, 1);
80     for (int i = 0; i < N; i++)
81         b[i] = (long long)a[i] * b[i] % p;
82
83     reverse(b + 1, b + N);
84     NTT(b, N, 1);
85     int n_inv = qpow(N, p - 2);
86     for (int i = 0; i < N; i++)
87         b[i] = (long long)b[i] * n_inv % p;
88
89     for (int i = 0; i < mid - l + 2; i++)
90         ff[i] = b[i + r - mid];
91
92     memset(a, 0, sizeof(int) * N);
93     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
94
95     solve(l, mid, k + 1);
96
97     memset(ff, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
98
99     memcpy(a, f, sizeof(int) * (r - l + 2));
100    memcpy(b, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
101    reverse(b, b + mid - l + 2);
102
103    NTT(a, N, 1);
104    NTT(b, N, 1);
105    for (int i = 0; i < N; i++)
106        b[i] = (long long)a[i] * b[i] % p;
107
108    reverse(b + 1, b + N);
109    NTT(b, N, 1);
110    for (int i = 0; i < N; i++)
111        b[i] = (long long)b[i] * n_inv % p;
112
113    for (int i = 0; i < r - mid + 1; i++)
114        ff[i] = b[i + mid - l + 1];
115
116    memset(a, 0, sizeof(int) * N);
117    memset(b, 0, sizeof(int) * N);
118
119    solve(mid + 1, r, k + 1);
120
121    memset(gl, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
122    memset(gr, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
123    memset(ff, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
124
125 // f < x^n, m个询问, θ-based
126 void get_value(int *f, int *x, int *a, int n, int m) {

```

```

127     static int c[maxn], d[maxn];
128
129     if (m ≤ n)
130         m = n + 1;
131     if (n < m - 1)
132         n = m - 1; // 补零
133
134     memcpy(q, x, sizeof(int) * m);
135     pretreat(0, m - 1, 0);
136
137     int N = 1;
138     while (N < m)
139         N *= 2;
140
141     get_inv(tg[0], c, N);
142
143     fill(c + m, c + N, 0);
144     reverse(c, c + m);
145
146     memcpy(d, f, sizeof(int) * m);
147
148     NTT(c, N * 2, 1);
149     NTT(d, N * 2, 1);
150     for (int i = 0; i < N * 2; i++)
151         c[i] = (long long)c[i] * d[i] % p;
152     NTT(c, N * 2, -1);
153
154     for (int i = 0; i < m; i++)
155         tf[0][i] = c[i + n];
156
157     solve(0, m - 1, 0);
158
159     if (a) // 如果a是nullptr, 代表不复制答案, 直接
160     ↪ 用ans数组
161         memcpy(a, ans, sizeof(int) * m);
162

```

1.1.6 多项式快速插值

问题: 给出 n 个 x_i 与 y_i , 求一个 $n-1$ 次多项式满足 $F(x_i) = y_i$. 考虑拉格朗日插值:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} y_i$$

第一步要先对每个 i 求出

$$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

设

$$M(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

那么想要的是

$$\frac{M(x)}{x - x_i}$$

取 $x = x_i$ 时, 上下都为0, 使用洛必达法则, 则原式化为 $M'(x)$. 使用分治算出 $M(x)$, 使用多点求值即可算出每个

$$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j) = M'(x_i)$$

设

$$v_i = \frac{y_i}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

第二步要求出

$$\sum_{i=1}^n v_i \prod_{i \neq j} (x - x_j)$$

使用分治. 设

$$L(x) = \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (x - x_i), \quad R(x) = \prod_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n (x - x_i)$$

则原式化为

$$\left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} v_i \prod_{i \neq j, j \leq \lfloor n/2 \rfloor} (x - x_j) \right) R(x) +$$

$$\left(\sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n v_i \prod_{i \neq j, j > \lfloor n/2 \rfloor} (x - x_j) \right) L(x)$$

递归计算，复杂度 $O(n \log^2 n)$

注意由于整体和局部的 $M(x)$ 都要用到，要预处理一下

```

1 int qx[maxn], qy[maxn];
2 int th[25][maxn * 2], ansf[maxn]; // th存的是各阶数
3   ↪ 的M(x)
4
5 void pretreat2(int l, int r, int k) { // 预处理
6   static int A[maxn], B[maxn];
7   int *h = th[k] + l * 2;
8
9   if (l == r) {
10     h[0] = p - qx[l];
11     h[1] = 1;
12     return;
13   }
14
15   int mid = (l + r) / 2;
16
17   pretreat2(l, mid, k + 1);
18   pretreat2(mid + 1, r, k + 1);
19
20   int N = 1;
21   while (N <= r - l + 1)
22     N *= 2;
23
24   int *hl = th[k + 1] + l * 2, *hr = th[k + 1] +
25     ↪ + 1) * 2;
26
27   memset(A, 0, sizeof(int) * N);
28   memset(B, 0, sizeof(int) * N);
29
30   memcpy(A, hl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
31   memcpy(B, hr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
32
33   NTT(A, N, 1);
34   NTT(B, N, 1);
35
36   for (int i = 0; i < N; i++)
37     A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
38
39   NTT(A, N, -1);
40
41   for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
42     h[i] = A[i];
43
44 void solve2(int l, int r, int k) { // 分治
45   static int A[maxn], B[maxn], t[maxn];

```

```

46     if (l == r)
47         return;
48
49     int mid = (l + r) / 2;
50
51     solve2(l, mid, k + 1);
52     solve2(mid + 1, r, k + 1);
53
54     int *hl = th[k + 1] + l * 2, *hr = th[k + 1] + (mid
55     ↪ + 1) * 2;
56
57     int N = 1;
58
59     while (N < r - l + 1)
60         N *= 2;
61
62     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
63     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
64
65     memcpy(A, ansf + l, sizeof(int) * (mid - l + 1));
66     memcpy(B, hr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
67
68     NTT(A, N, 1);
69     NTT(B, N, 1);
70
71     for (int i = 0; i < N; i++)
72         t[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
73
74     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
75     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
76
77     memcpy(A, ansf + mid + 1, sizeof(int) * (r - mid));
78     memcpy(B, hl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
79
80     NTT(A, N, 1);
81     NTT(B, N, 1);
82
83     for (int i = 0; i < N; i++)
84         t[i] = (t[i] + (long long)A[i] * B[i]) % p;
85
86     NTT(t, N, -1);
87
88     memcpy(ansf + l, t, sizeof(int) * (r - l + 1));
89 }
90
91 // 主过程
92 // 如果x, y传nullptr表示询问已经存在了qx, qy里
93 void interpolation(int *x, int *y, int n, int *f =
94     ↪ nullptr) {
95     static int d[maxn];
96
97     if (x)
98         memcpy(qx, x, sizeof(int) * n);
99     if (y)
100        memcpy(qy, y, sizeof(int) * n);
101
102    pretreat2(0, n - 1, 0);
103
104    get_derivative(th[0], d, n + 1);
105
106    multipoint_eval(d, qx, nullptr, n, n);
107
108    for (int i = 0; i < n; i++)
109        ansf[i] = (long long)qy[i] * qpow(ans[i], p -
110        ↪ 2) % p;
111
112    solve2(0, n - 1, 0);
113
114    if (f)
115        memcpy(f, ansf, sizeof(int) * n);

```

113 }

1.1.7 拉格朗日反演(多项式复合逆)

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为复合逆, 则有

$$[x^n] g(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left(\frac{x}{f(x)} \right)^n$$

$$[x^n] h(g(x)) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] h'(x) \left(\frac{x}{f(x)} \right)^n$$

1.1.8 分治FFT

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (l == r)
3         return;
4
5     int mid = (l + r) / 2;
6
7     solve(l, mid);
8
9     int N = 1;
10    while (N <= r - l + 1)
11        N *= 2;
12
13    for (int i = l; i <= mid; i++)
14        B[i - l] = (long long)A[i] * fac_inv[i] % p;
15    fill(B + mid - l + 1, B + N, 0);
16    for (int i = 0; i < N; i++)
17        C[i] = fac_inv[i];
18
19    NTT(B, N, 1);
20    NTT(C, N, 1);
21
22    for (int i = 0; i < N; i++)
23        B[i] = (long long)B[i] * C[i] % p;
24
25    NTT(B, N, -1);
26
27    for (int i = mid + 1; i <= r; i++)
28        A[i] = (A[i] + B[i - l] * 2 % p * (long
29            → long)fac[i] % p) % p;
30
31    solve(mid + 1, r);
32 }
```

1.1.9 半在线卷积

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (r <= m)
3         return;
4
5     if (r - l == 1) {
6         if (l == m)
7             f[l] = a[m];
8         else
9             f[l] = (long long)f[l] * inv[l - m] % p;
10
11     for (int i = l, t = (long long)l * f[l] % p; i
12         → ≤ n; i += l)
13         g[i] = (g[i] + t) % p;
14
15     return;
16 }
17
18     int mid = (l + r) / 2;
19
20     solve(l, mid);
21 }
```

```

21
22     if (l == 0) {
23         for (int i = 1; i < mid; i++) {
24             A[i] = f[i];
25             B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
26         }
27         NTT(A, r, 1);
28         NTT(B, r, 1);
29         for (int i = 0; i < r; i++)
30             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
31         NTT(A, r, -1);
32
33         for (int i = mid; i < r; i++)
34             f[i] = (f[i] + A[i]) % p;
35     }
36     else {
37         for (int i = 0; i < r - l; i++) {
38             A[i] = f[i];
39             for (int i = l; i < mid; i++)
40                 B[i - l] = (c[i] + g[i]) % p;
41         NTT(A, r - l, 1);
42         NTT(B, r - l, 1);
43         for (int i = 0; i < r - l; i++)
44             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
45         NTT(A, r - l, -1);
46
47         for (int i = mid; i < r; i++)
48             f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
49
50         memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
51         memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
52
53         for (int i = l; i < mid; i++) {
54             A[i - l] = f[i];
55             for (int i = 0; i < r - l; i++)
56                 B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
57         NTT(A, r - l, 1);
58         NTT(B, r - l, 1);
59         for (int i = 0; i < r - l; i++)
60             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
61         NTT(A, r - l, -1);
62
63         for (int i = mid; i < r; i++)
64             f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
65     }
66
67     memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
68     memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
69
70     solve(mid, r);
71 }
```

1.1.10 常系数齐次线性递推 $O(k \log k \log n)$

如果只有一次这个操作可以照抄, 否则就开一个全局flag.

```

1 // 多项式取模, 余数输出到C, 商输出到D
2 void get_mod(int *A, int *B, int *C, int *D, int n, int
3 → m) {
4     static int b[maxn], d[maxn];
5     static bool flag = false;
6
7     if (n < m) {
8         memcpy(C, A, sizeof(int) * n);
9
10     if (D)
11         memset(D, 0, sizeof(int) * m);
12
13     return;
14 }
```

```

14
15     get_div(A, B, d, n, m);
16
17     if (D) { // D是商, 可以选择不要
18         for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
19             D[i] = d[i];
20     }
21
22     int N = 1;
23     while (N < n)
24         N *= 2;
25
26     if (!flag) {
27         memcpy(b, B, sizeof(int) * m);
28         NTT(b, N, 1);
29
30         flag = true;
31     }
32
33     NTT(d, N, 1);
34
35     for (int i = 0; i < N; i++)
36         d[i] = (long long)d[i] * b[i] % p;
37
38     NTT(d, N, -1);
39
40     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
41         C[i] = (A[i] - d[i] + p) % p;
42
43     // memset(b, 0, sizeof(int) * N);
44     memset(d, 0, sizeof(int) * N);
45 }

// g < x^n, f是输出答案的数组
46 void pow_mod(long long k, int *g, int n, int *f) {
47     static int a[maxn], t[maxn];
48
49     memset(f, 0, sizeof(int) * (n * 2));
50
51     f[0] = a[1] = 1;
52
53     int N = 1;
54     while (N < n * 2 - 1)
55         N *= 2;
56
57     while (k) {
58         NTT(a, N, 1);
59
60         if (k & 1) {
61             memcpy(t, f, sizeof(int) * N);
62
63             NTT(t, N, 1);
64             for (int i = 0; i < N; i++)
65                 t[i] = (long long)t[i] * a[i] % p;
66             NTT(t, N, -1);
67
68             get_mod(t, g, f, NULL, n * 2 - 1, n);
69         }
70
71         for (int i = 0; i < N; i++)
72             a[i] = (long long)a[i] * a[i] % p;
73         NTT(a, N, -1);
74
75         memcpy(t, a, sizeof(int) * (n * 2 - 1));
76         get_mod(t, g, a, NULL, n * 2 - 1, n);
77         fill(a + n - 1, a + N, 0);
78
79         k >>= 1;
80     }
81
82 }

```

```

84     memset(a, 0, sizeof(int) * (n * 2));
85 }
86
87 // f_n = \sum_{i=1}^m f_{n-i} a_i
88 // f是0~m-1项的初值
89 int linear_recurrence(long long n, int m, int *f, int
90     *a) {
91     static int g[maxn], c[maxn];
92
93     memset(g, 0, sizeof(int) * (m * 2 + 1));
94
95     for (int i = 0; i < m; i++)
96         g[i] = (p - a[m - i]) % p;
97     g[m] = 1;
98
99     pow_mod(n, g, m + 1, c);
100
101    int ans = 0;
102    for (int i = 0; i < m; i++)
103        ans = (ans + (long long)c[i] * f[i]) % p;
104
105    return ans;
106 }

```

1.1.11 应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘

问题: 求 $n! \pmod{p}$, $n < p$, p 是 NTT 模数.

考虑令 $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 那么我们可以写出连续 m 个数相乘的多项式:

$$f(x) = \prod_{i=1}^m (x + i)$$

那么显然就有

$$n! = \left(\prod_{k=0}^{m-1} f(km) \right) \prod_{i=m^2+1}^n i$$

$f(x)$ 的系数可以用倍增求(或者懒一点直接分治FFT), 然后 $f(km)$ 可以用多项式多点求值求出, 所以总复杂度就是 $O(\sqrt{n} \log^2 n)$.

当然如果 p 不变并且多次询问的话我们只需要取一个 m , 也就是预处理 $O(\sqrt{p} \log^2 p)$, 询问 $O(\sqrt{p})$.

1.2 插值

1.2.1 牛顿插值

牛顿插值的原理是二项式反演.

二项式反演:

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

可以用 e^x 和 e^{-x} 的麦克劳林展开式证明.

套用二项式反演的结论即可得到牛顿插值:

$$f(n) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} r_i$$

$$r_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f(j)$$

其中 k 表示 $f(n)$ 的最高次项系数.

实现时可以用 k 次差分替代右边的式子:

```

1 for (int i = 0; i <= k; i++)
2     r[i] = f(i);
3 for (int j = 0; j < k; j++)
4     for (int i = k; i > j; i--)
5         r[i] -= r[i - 1];

```

注意到预处理 r_i 的式子满足卷积形式,必要时可以用FFT优化至 $O(k \log k)$ 预处理.

1.2.2 拉格朗日(Lagrange)插值

$$f(x) = \sum_i f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

1.3 FWT快速沃尔什变换

```

// 注意FWT常数比较小, 这点与FFT/NTT不同
// 以下代码均以模质数情况为例, 其中n为变换长度, tp表示
// → 正/逆变换

// 按位或版本
void FWT_or(int *A, int n, int tp) {
    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
        for (int i = 0; i < n; i += k)
            for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
                if (tp > 0)
                    A[i + j + k / 2] = (A[i + j + k / 2] + A[i + j]) % p;
                else
                    A[i + j + k / 2] = (A[i + j] - A[i + j] + p) % p;
            }
}

// 按位与版本
void FWT_and(int *A, int n, int tp) {
    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
        for (int i = 0; i < n; i += k)
            for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
                if (tp > 0)
                    A[i + j] = (A[i + j] + A[i + j + k / 2]) % p;
                else
                    A[i + j] = (A[i + j] - A[i + j + k / 2] + p) % p;
            }
}

// 按位异或版本
void FWT_xor(int *A, int n, int tp) {
    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
        for (int i = 0; i < n; i += k)
            for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
                int a = A[i + j], b = A[i + j + k / 2];
                A[i + j] = (a + b) % p;
                A[i + j + k / 2] = (a - b + p) % p;
            }

    if (tp < 0) {
        int inv = qpow(n % p, p - 2); // n的逆元, 在不取
        // 模时需要用每层除以2代替
        for (int i = 0; i < n; i++)
            A[i] = A[i] * inv % p;
    }
}

```

1.3.1 三行FWT

```

1 void fwt_or(int *a, int n, int tp) {
2     for (int j = 0; (1 << j) < n; j++)
3         for (int i = 0; i < n; i++)
4             if (i >> j & 1) {
5                 if (tp > 0)
6                     a[i] += a[i ^ (1 << j)];
7                 else
8                     a[i] -= a[i ^ (1 << j)];
9             }
10
11 // and自然就是or反过来
12 void fwt_and(int *a, int n, int tp) {
13     for (int j = 0; (1 << j) < n; j++)
14         for (int i = 0; i < n; i++)
15             if (!(i >> j & 1)) {
16                 if (tp > 0)
17                     a[i] += a[i | (1 << j)];
18                 else
19                     a[i] -= a[i | (1 << j)];
20             }
21
22 }
23 // xor同理

```

1.4 线性代数

稀疏矩阵操作参见Berlekamp-Massey算法的应用(12页).

1.4.1 矩阵乘法

```

1 for (int i = 1; i <= n; i++)
2     for (int k = 1; k <= n; k++)
3         for (int j = 1; j <= n; j++)
4             a[i][j] += b[i][k] * c[k][j];
5 // 通过改善内存访问连续性, 显著提升速度

```

1.4.2 高斯消元

高斯-约当消元法 Gauss-Jordan 每次选取当前行绝对值最大的数作为代表元, 在做浮点数消元时可以很好地保证精度.

```

1 void Gauss_Jordan(int A[][maxn], int n) {
2     for (int i = 1; i <= n; i++) {
3         int ii = i;
4         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
5             if (fabs(A[j][i]) > fabs(A[ii][i]))
6                 ii = j;
7
8         if (ii != i) // 这里没有判是否无解, 如果有可能无
9             // 解的话要判一下
10            for (int j = i; j <= n + 1; j++)
11                swap(A[i][j], A[ii][j]);
12
13         for (int j = 1; j <= n; j++)
14             if (j != i) // 消成对角
15                 for (int k = n + 1; k >= i; k--)
16                     A[j][k] -= A[j][i] / A[i][i] * A[i]
17                         ^ [k];
18     }
19 }

```

解线性方程组 在矩阵的右边加上一列表示系数即可, 如果消成上三角的话最后要倒序回代.

求逆矩阵 维护一个矩阵 B , 初始设为 n 阶单位矩阵, 在消元的同时对 B 进行一样的操作, 当把 A 消成单位矩阵时 B 就是逆矩阵.

行列式 消成对角之后把代表元乘起来. 如果是任意模数, 要注意消元时每交换一次行列要取反一次.

1.4.3 行列式取模

```

1 int p;
2
3 int Gauss(int A[maxn][maxn], int n) {
4     int det = 1;
5
6     for (int i = 1; i <= n; i++) {
7         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
8             while (A[j][i]) {
9                 int t = (p - A[i][i]) / A[j][i] % p;
10                for (int k = i; k <= n; k++)
11                    A[i][k] = (A[i][k] + (long
12                        ↪ long)A[j][k] * t) % p;
13
14                swap(A[i], A[j]);
15                det = (p - det) % p; // 交换一次之后行列
16                ↪ 式取负
17            }
18
19            if (!A[i][i])
20                return 0;
21
22            det = (long long)det * A[i][i] % p;
23        }
24
25    return det;
26 }
```

1.4.4 线性基(消成对角)

```

1 void add(unsigned long long x) {
2     for (int i = 63; i >= 0; i--)
3         if (x >> i & 1) {
4             if (b[i])
5                 x ^= b[i];
6             else {
7                 b[i] = x;
8
9                 for (int j = i - 1; j >= 0; j--)
10                    if (b[j] && (b[i] >> j & 1))
11                        b[i] ^= b[j];
12
13                 for (int j = i + 1; j < 64; j++)
14                     if (b[j] >> i & 1)
15                         b[j] ^= b[i];
16
17                 break;
18             }
19         }
20 }
```

1.4.5 线性代数知识

行列式:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma_i}$$

逆矩阵:

$$B = A^{-1} \iff AB = 1$$

代数余子式:

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}|$$

也就是 A 去掉一行一列之后的行列式.

伴随矩阵:

$$A^* = C^T$$

即代数余子式矩阵的转置.

同时我们有

$$A^* = |A|A^{-1}$$

特征多项式:

$$P_A(x) = \det(Ix - A)$$

特征根: 特征多项式的所有 n 个根(可能有重根).

1.4.6 矩阵树定理, BEST定理

无向图 设图 G 的基尔霍夫矩阵 $L(G)$ 等于度数矩阵减去邻接矩阵, 则 G 的生成树个数等于 $L(G)$ 的任意一个代数余子式的值.

有向图 类似地定义 $L_{in}(G)$ 等于入度矩阵减去邻接矩阵(i 指向 j 有边, 则 $A_{i,j} = 1$), $L_{out}(G)$ 等于出度矩阵减去邻接矩阵.

则以 i 为根的内向树个数即为 L_{out} 的第 i 个主子式(即关于第 i 行第 i 列的余子式), 外向树个数即为 L_{in} 的第 i 个主子式.

(可以看出, 只有无向图才满足 $L(G)$ 的所有代数余子式都相等.)

BEST定理(有向图欧拉回路计数) 如果 G 是有向欧拉图, 则 G 的欧拉回路的个数等于以一个任意点为根的内/外向树个数乘以 $\prod_v (\deg(v) - 1)!$.

并且在欧拉图里, 无论以哪个结点为根, 无论内向树还是外向树, 个数都是一样的.

另外无向图欧拉回路计数是NP问题.

1.5 Berlekamp-Massey最小递推式

如果要求出一个次数为 k 的递推式, 则输入的数列需要至少有 $2k$ 项. 返回的内容满足 $\sum_{j=0}^{m-1} a_{i-j} c_j = 0$, 并且 $c_0 = 1$. 称为最小递推式. 如果不加最后的处理的话, 代码返回的结果会变成 $a_i = \sum_{j=0}^{m-1} c_{j-1} a_{i-j}$, 有时候这样会方便接着跑递推, 需要的话就删掉最后的处理.

(实际上Berlekamp-Massey是对每个前缀都求出了递推式, 但一般没啥用.)

```

1 vector<int> berlekamp_massey(const vector<int> &a) {
2     vector<int> v, last; // v is the answer, 0-based
3     int k = -1, delta = 0;
4
5     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
6
7         int tmp = 0;
8         for (int j = 0; j < (int)v.size(); j++)
9             tmp = (tmp + (long long)a[i - j - 1] *
10                  ↪ v[j]) % p;
11
12         if (a[i] == tmp)
13             continue;
14
15         if (k < 0) {
16             k = i;
17             delta = (a[i] - tmp + p) % p;
18             v = vector<int>(i + 1);
19
20             continue;
21         }
22
23         vector<int> u = v;
24         int val = (long long)(a[i] - tmp + p) *
25             ↪ qpow(delta, p - 2) % p;
26
27         if (v.size() < last.size() + i - k)
28             v.resize(last.size() + i - k);
```

```

27     v[i - k - 1] += val) %= p;
28
29     for (int j = 0; j < (int)last.size(); j++) {
30         v[i - k + j] = (v[i - k + j] - (long)
31             → long)val * last[j]) % p;
32         if (v[i - k + j] < 0)
33             v[i - k + j] += p;
34     }
35
36     if ((int)u.size() - i < (int)last.size() - k) {
37         last = u;
38         k = i;
39         delta = a[i] - tmp;
40         if (delta < 0)
41             delta += p;
42     }
43
44
45     for (auto &x : v) // 一般是需要最小递推式的, 所以处理
46         ← 一下
47         x = (p - x) % p;
48     v.insert(v.begin(), 1);
49
50     return v; // ∀i, ∑_{j=0}^m a_{i-j}v_j = 0
}

```

如果要求向量序列的递推式, 就把每位乘一个随机权值(或者说是乘一个随机行向量 v^T)变成求数列递推式即可.

如果是矩阵序列的话就随机一个行向量 u^T 和列向量 v , 然后把矩阵变成 $u^T A v$ 的数列就行了.

1.5.1 优化矩阵快速幂DP

如果 f_i 是一个向量, 并且转移是一个矩阵, 那显然 $\{f_i\}$ 是一个线性递推序列.

假设 f_i 有 n 维, 先暴力求出 $f_{0 \sim 2n-1}$, 然后跑Berlekamp-Massey, 最后调用前面的快速齐次线性递推(8页)即可. (快速齐次线性递推的结果是一个序列, 某个给定初值的结果就是点乘, 所以只需要跑一次.)

如果要求 f_m , 并且矩阵有 k 个非零项的话, 复杂度就是 $O(nk + n \log m \log n)$. (因为暴力求前 $2n-1$ 个 f_i 需要 $O(nk)$ 时间.)

1.5.2 求矩阵最小多项式

矩阵 A 的最小多项式是次数最小的并且 $f(A) = 0$ 的多项式 f .

实际上最小多项式就是 $\{A^i\}$ 的最小递推式, 所以直接调用Berlekamp-Massey就好了, 并且显然它的次数不超过 n .

瓶颈在于求出 A^i , 实际上我们只要处理 $A^i v$ 就行了, 每次对向量做递推.

假设 A 有 k 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$.

1.5.3 求稀疏矩阵的行列式

如果能求出特征多项式, 则常数项乘上 $(-1)^n$ 就是行列式, 但是最小多项式不一定就是特征多项式.

把 A 乘上一个随机对角阵 B (实际上就是每行分别乘一个随机数), 则 AB 的最小多项式有很大概率就是特征多项式, 最后再除掉 $\det B$ 就行了.

设 A 有 k 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$.

1.5.4 求稀疏矩阵的秩

设 A 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 首先随机一个 $n \times n$ 的对角阵 P 和一个 $m \times m$ 的对角阵 Q , 然后计算 $QAP^{-1}Q^T$ 的最小多项式即可.

实际上不用计算这个矩阵, 因为求最小多项式时要用它乘一个向量, 我们依次把这几个矩阵乘到向量里就行了. 答案就是最小多项式除掉所有 x 因子后剩下的次数.

设 A 有 k 个非零项, 复杂度为 $O(kn + n^2)$.

1.5.5 解稀疏方程组

问题 $Ax = b$, 其中 A 是一个 $n \times n$ 的满秩稀疏矩阵, b 和 x 是 $1 \times n$ 的列向量, A, b 已知, 需要解出 x .

做法 显然 $x = A^{-1}b$. 如果我们能求出 $\{A^i b\}(i \geq 0)$ 的最小递推式 $\{r_{0 \sim m-1}\}(m \leq n)$, 那么就有结论

$$A^{-1}b = -\frac{1}{r_{m-1}} \sum_{i=0}^{m-2} A^i b r_{m-2-i}$$

因为 A 是稀疏矩阵, 直接按定义递推出 $b \sim A^{2n-1}b$ 即可. 设 A 中有 k 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$.

```

1 vector<int> solve_sparse_equations(const
2     → vector<tuple<int, int, int>> &A, const vector<int>
3     → &b) {
4         int n = (int)b.size(); // 0-based
5
6         vector<vector<int>> f({b});
7
8         for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
9             vector<int> v(n);
10            auto &u = f.back();
11
12            for (auto [x, y, z] : A) // [x, y, value]
13                v[x] = (v[x] + (long long)u[y] * z) % p;
14
15            f.push_back(v);
16        }
17
18        vector<int> w(n);
19        mt19937 gen;
20        for (auto &x : w)
21            x = uniform_int_distribution<int>(1, p - 1)
22                → (gen);
23
24        vector<int> a(2 * n);
25        for (int i = 0; i < 2 * n; i++)
26            for (int j = 0; j < n; j++)
27                a[i] = (a[i] + (long long)f[i][j] * w[j]) %
28                    → p;
29
30        auto c = berlekamp_massey(a);
31        int m = (int)c.size();
32
33        vector<int> ans(n);
34
35        for (int i = 0; i < m - 1; i++)
36            for (int j = 0; j < n; j++)
37                ans[j] = (ans[j] + (long long)c[m - 2 - i]
38                    → * f[i][j]) % p;
39
40        int inv = qpow(p - c[m - 1], p - 2);
41
42        for (int i = 0; i < n; i++)
43            ans[i] = (long long)ans[i] * inv % p;
44
45        return ans;
46    }

```

1.6 单纯形

```

1 const double eps = 1e-10;
2
3 double A[maxn][maxn], x[maxn];
4 int n, m, t, id[maxn * 2];
5
6 // 方便起见, 这里附上主函数
7 int main() {
8     scanf("%d%d%d", &n, &m, &t);
9
10    for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
11        scanf("%lf", &A[0][i]);
12        id[i] = i;
13    }
14
15    for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
16        for (int j = 1; j ≤ n; j++) {
17            scanf("%lf", &A[i][j]);
18
19            scanf("%lf", &A[i][0]);
20        }
21
22    if (!initialize())
23        printf("Infeasible"); // 无解
24    else if (!simplex())
25        printf("Unbounded"); // 最优解无限大
26
27    else {
28        printf("%.15lf\n", -A[0][0]);
29        if (t) {
30            for (int i = 1; i ≤ m; i++)
31                x[id[i + n]] = A[i][0];
32            for (int i = 1; i ≤ n; i++)
33                printf("%.15lf ", x[i]);
34        }
35    }
36    return 0;
37}

```

// 初始化

// 对于初始解可行的问题, 可以把初始化省略掉

```

41 bool initialize() {
42     while (true) {
43         double t = 0.0;
44         int l = 0, e = 0;
45
46         for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
47             if (A[i][0] + eps < t) {
48                 t = A[i][0];
49                 l = i;
50             }
51
52         if (!l)
53             return true;
54
55         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
56             if (A[l][i] < -eps && (!e || id[i] <
57             → id[e])) {
58                 e = i;
59
60             if (!e)
61                 return false;
62
63             pivot(l, e);
64         }
65
66 // 求解
67 bool simplex() {

```

```

68     while (true) {
69         int l = 0, e = 0;
70         for (int i = 1; i ≤ n; i++)
71             if (A[0][i] > eps && (!e || id[i] < id[e]))
72                 e = i;
73
74         if (!e)
75             return true;
76
77         double t = 1e50;
78         for (int i = 1; i ≤ m; i++)
79             if (A[i][e] > eps && A[i][0] / A[i][e] < t)
80                 → {
81                     l = i;
82                     t = A[i][0] / A[i][e];
83                 }
84
85         if (!l)
86             return false;
87
88         pivot(l, e);
89     }
90
91 // 转轴操作, 本质是在凸包上沿着一条棱移动
92 void pivot(int l, int e) {
93     swap(id[e], id[n + l]);
94     double t = A[l][e];
95     A[l][e] = 1.0;
96
97     for (int i = 0; i ≤ n; i++)
98         A[l][i] /= t;
99
100    for (int i = 0; i ≤ m; i++) {
101        if (i != l) {
102            t = A[i][e];
103            A[i][e] = 0.0;
104            for (int j = 0; j ≤ n; j++)
105                A[i][j] -= t * A[l][j];
106        }
107    }

```

1.6.1 线性规划对偶原理

给定一个原始线性规划:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i,$$

$$x_j \geq 0$$

定义它的对偶线性规划为:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j,$$

$$y_i \geq 0$$

用矩阵可以更形象地表示为:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Subject to} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \iff \text{Subject to} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{x} \geq 0 & \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

1.7 博弈论

1.7.1 SG定理

对于一个平等游戏，可以为每个状态定义一个SG函数。

一个状态的SG函数等于所有它能一步到达的状态的SG函数的mex，也就是最小的没有出现过的自然数。

那么所有先手必败态的SG函数为0，先手必胜态的SG函数非0。

如果有一个游戏，它由若干个独立的子游戏组成，且每次行动时只能选一个子游戏进行操作，则这个游戏的SG函数就是所有子游戏的SG函数的异或和。（比如最经典的Nim游戏，每次只能选一堆取若干个石子。）

同时操作多个子游戏的结论参见1.7.3.经典博弈(14页)。

1.7.2 纳什均衡

纯策略，混合策略 纯策略是指你一定会选择某个选项，混合策略是指你对每个选项都有一个概率分布 p_i ，你会以相应的概率选择这个选项。

考虑这样的游戏：有几个人（当然也可以是两个）各自独立地做决定，然后同时公布每个人的决定，而每个人的收益和所有人的选择有关。

那么纳什均衡就是每个人都决定一个混合策略，使得在其他人都是纯策略的情况下，这个人最坏情况下（也就是说其他人的纯策略最针对他的时候）的收益是最大的。也就是说，收益函数对这个人的混合策略求一个偏导，结果是0（因为是极大值）。

纳什均衡点可能存在多个，不过在一个双人零和游戏中，纳什均衡点一定唯一存在。

1.7.3 经典博弈

1. 阶梯博弈

台阶的每层都有一些石子，每次可以选一层（但不能是第0层），把任意一个石子移到低一层。

结论 奇数层的石子数量进行异或和即可。

实际上只要路径长度唯一就可以，比如在树上博弈，然后石子向根节点方向移动，那么就是奇数深度的石子数量进行异或和。

2. 可以同时操作多个子游戏

如果某个游戏由若干个独立的子游戏组成，并且每次可以任意选几个（当然至少一个）子游戏进行操作，那么结论是：所有子游戏都必败时先手才会必败，否则先手必胜。

3. 每次最多操作 k 个子游戏(Nim-K)

如果每次最多操作 k 个子游戏，结论是：把所有子游戏的SG函数写成二进制表示，如果每一位上的1个数都是 $(k+1)$ 的倍数，则先手必败，否则先手必胜。

（实际上上面一条可以看做 $k = \infty$ 的情况，也就是所有SG值都是0时才会先手必败。）

如果要求整个游戏的SG函数，就按照上面的方法每个二进制位相加后 $\text{mod}(k+1)$ ，视为 $(k+1)$ 进制数后求值即可。（未验证）

4. 反Nim游戏(Anti-Nim)

和Nim游戏差不多，唯一的不同是取走最后一个石子的输。

分两种情况：

- 所有堆石子个数都是1：有偶数堆时先手必胜，否则先手必败。
- 存在某个堆石子数多于1：异或和不为0则先手必胜，否则先手必败。

当然石子个数实际上就是SG函数，所以判别条件全都改成SG函数也是一样的。

5. 威佐夫博弈

有两堆石子，每次要么从一堆中取任意个，要么从两堆中都取走相同数量。也等价于两个人移动一个只能向左上方走的皇后，不能动的输。

结论 设两堆石子分别有 a 个和 b 个，且 $a < b$ ，则先手必败当且仅当 $a = \left\lfloor (b-a)\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor$ 。

6. 删子树博弈

有一棵有根树，两个人轮流操作，每次可以选一个点（除了根节点）然后把它的子树都删掉，不能操作的输。

结论

$$SG(u) = \text{XOR}_{v \in \text{son}_u} (SG(v) + 1)$$

7. 无向图游戏

在一个无向图上的某个点上摆一个棋子，两个人轮流把棋子移动到相邻的点，并且每个点只能走一次，不能操作的输。

结论 如果某个点一定在最大匹配中，则先手必胜，否则先手必败。

1.7.4 例题

1. 黑白棋游戏

一些棋子排成一列，棋子两面分别是黑色和白色。两个人轮流动，每次可以选择一个白色朝上的棋子，把它和它左边的所有棋子都翻转，不能行动的输。

结论 只需要看最左边的棋子即可，因为每次操作最左边的棋子都一定会被翻转。

二维情况同理，如果每次是把左上角的棋子全部翻转，那么就只需要看左上角的那个棋子。

1.8 自适应Simpson积分

Forked from fstqwq's template.

```

1 // Adaptive Simpson's method : double simpson::solve
2   ↪ (double (*f)(double), double l, double r, double
3     ↪ eps) : integrates f over (l, r) with error eps.
4
5 double area (double (*f)(double), double l, double r)
6   ↪ {
7     double m = l + (r - l) / 2;
8     return (f(l) + 4 * f(m) + f(r)) * (r - l) / 6;
9   }
10
11 double solve (double (*f)(double), double l, double r,
12   ↪ double eps, double a) {
13   double m = l + (r - l) / 2;
14   double left = area(f, l, m), right = area(f, m, r);
15   if (fabs(left + right - a) ≤ 15 * eps)
16     return left + right + (left + right - a) /
17       ↪ 15.0;
18   return solve(f, l, m, eps / 2, left) + solve(f, m,
19             ↪ r, eps / 2, right);
20 }
21
22 double solve (double (*f)(double), double l, double r,
23   ↪ double eps) {
24   return solve(f, l, r, eps, area(f, l, r));
25 }
```

1.9 常见数列

查表参见8.15.OEIS(87页)。

1.9.1 斐波那契数 卢卡斯数

斐波那契数 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$

卢卡斯数 $L_0 = 2, L_1 = 1$

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$

通项公式 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$, $L_n = \phi^n + \hat{\phi}^n$

实际上有 $\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, 所以求通项的话写一个类然后快速幂就可以同时得到两者.

快速倍增法 $F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$, $F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

```

1 pair<int, int> fib(int n) { // 返回F(n)和F(n + 1)
2     if (n == 0)
3         return {0, 1};
4     auto p = fib(n >> 1);
5     int c = p.first * (2 * p.second - p.first);
6     int d = p.first * p.first + p.second * p.second;
7     if (n & 1)
8         return {d, c + d};
9     else
10        return {c, d};
11 }
```

1.9.2 伯努利数, 自然数幂次和

指数生成函数: $B(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i x^i}{i!} = \frac{x}{e^x - 1}$

$$B_n = [n=0] - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{B_i}{n-k+1}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = 0$$

$$S_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} i^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_{n-i} \frac{m^{i+1}}{i+1}$$

$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, ...

(除了 $B_1 = -\frac{1}{2}$ 以外, 伯努利数的奇数项都是0.)

自然数幂次和关于次数的EGF:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^n i^k}{k!} x^k \\ &= \sum_{i=0}^n e^{ix} \\ &= \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} \end{aligned}$$

1.9.3 分拆数

```

1 int b = sqrt(n);
2 ans[0] = tmp[0] = 1;
3
4 for (int i = 1; i <= b; ++i) {
5     for (int rep = 0; rep < 2; ++rep)
6         for (int j = i; j <= n - i * i; ++j)
7             add(tmp[j], tmp[j - i]);
8
9     for (int j = i * i; j <= n; ++j)
10        add(ans[j], tmp[j - i * i]);
11 }
12 // —
13
14 long long a[100010];
15 long long p[50005]; // 欧拉五边形数定理
16
17 int main() {
```

```

19     p[0] = 1;
20     p[1] = 1;
21     p[2] = 2;
22     int i;
23     for (i = 1; i < 50005; i++) { // 递推式系
24         a[2 * i] = i * (i * 3 - 1) / 2; // 五边形数
25         // 为1, 5, 12, 22 ... i*(3*i-1)/2
26         a[2 * i + 1] = i * (i * 3 + 1) / 2;
27     }
28     for (i = 3; i < 50005; i++) { //
29         p[n] = p[n-1] + p[n-2] - p[n-5] -
30         p[n-7] + p[12] + p[15] - ... + p[n-i*[3i-1]/2] + p[n-
31         i*[3i+1]/2]
32         p[i] = 0;
33         int j;
34         for (j = 2; a[j] <= i; j++) { // 可能为负数, 式
35             // 中加1000007
36             if (j & 2)
37                 p[i] = (p[i] + p[i - a[j]] + 1000007) %
38             // 1000007;
39             else
40                 p[i] = (p[i] - p[i - a[j]] + 1000007) %
41             // 1000007;
42     }
43     int n;
44     while (~scanf("%d", &n))
45         printf("%lld\n", p[n]);
46 }
```

1.9.4 斯特林数

1. 第一类斯特林数

$[n]_k$ 表示 n 个元素划分成 k 个轮换的方案数.

递推式: $[n]_k = [n-1]_{k-1} + (n-1)[n-1]_k$.

求同一行: 分治FFT $O(n \log^2 n)$, 或者倍增 $O(n \log n)$ (每次都是 $f(x) = g(x)g(x+d)$ 的形式, 可以用 $g(x)$ 反转之后做一个卷积求出后者).

$$\sum_{k=0}^n [n]_k x^k = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$$

求同一列: 用一个轮换的指数生成函数做 k 次幂

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n]_k \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1-x))^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)^k$$

2. 第二类斯特林数

$\{n\}_k$ 表示 n 个元素划分成 k 个子集的方案数.

递推式: $\{n\}_k = \{n-1\}_{k-1} + k \{n-1\}_k$.

求一个: 容斥, 狗都会做

$$\{n\}_k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(k-i)^n}{(k-i)!}$$

求同一行: FFT, 狗都会做

求同一列: 指数生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n\}_k \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^k$$

普通生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n\}_k x^n = x^k \left(\prod_{i=1}^k (1 - ix) \right)^{-1}$$

3. 斯特林反演

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k)$$

4. 幂的转换

上升幂与普通幂的转换

$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}$$

下降幂与普通幂的转换

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k = \sum_k \binom{x}{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} k!$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

另外, 多项式的点值表示的每项除以阶乘之后卷上 e^{-x} 乘上阶乘之后是牛顿插值表示, 或者不乘阶乘就是下降幂系数表示. 反过来的转换当然卷上 e^x 就行了. 原理是每次差分等价于乘以 $(1-x)$, 展开之后用一次卷积取代多次差分.

5. 斯特林多项式(斯特林数关于斜线的性质)

定义:

$$\sigma_n(x) = \frac{\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}}{x(x-1)\dots(x-n)}$$

$\sigma_n(x)$ 的最高次数是 x^{n-1} . (所以作为唯一的特例, $\sigma_0(x) = \frac{1}{x}$ 不是多项式.)

斯特林多项式实际上非常神奇, 它与两类斯特林数都有关系.

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix} = n^{k+1} \sigma_k(n)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix} = (-1)^{k+1} n^{k+1} \sigma_k(-(n-k))$$

不过它并不好求. 可以 $O(k^2)$ 直接计算前几个点值然后插值, 或者如果要推式子的话可以用后面提到的二阶欧拉数.

1.9.5 贝尔数

$$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5,$$

$$B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

递推式:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

指数生成函数:

$$B(x) = e^{e^x - 1}$$

Touchard同余:

$$B_{n+p} \equiv (B_n + B_{n+1}) \pmod{p}, p \text{ is a prime}$$

1.9.6 欧拉数(Eulerian Number)

1. 欧拉数

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$: n 个数的排列, 有 k 个上升的方案数.

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = (n-k) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = n!$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{n}$$

$$k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \binom{i}{n-k}$$

2. 二阶欧拉数

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$: 每个数都出现两次的多重排列, 并且每个数两次出现之间的数都比它要大. 在此前提下有 k 个上升的方案数.

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = (2n-k-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = (2n-1)!! = \frac{(2n)^n}{2^n}$$

3. 二阶欧拉数与斯特林数的关系

$$\begin{Bmatrix} x \\ x-n \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+n-k-1}{2n}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ x-n \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{2n}$$

1.9.7 卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数

1. 卡特兰数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

- n 个元素按顺序入栈, 出栈序列方案数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列数
- $n+1$ 个叶子的满二叉树个数

递推式:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n = C_{n-1} \frac{4n-2}{n+1}$$

普通生成函数:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

扩展: 如果有 n 个左括号和 m 个右括号, 方案数为

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{m-1}$$

2. 施罗德数

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i S_{n-i-1}$$

$$(n+1)s_n = (6n-3)s_{n-1} - (n-2)s_{n-2}$$

其中 S_n 是(大)施罗德数, s_n 是小施罗德数(也叫超级卡特兰数).

除了 $S_0 = s_0 = 1$ 以外, 都有 $S_i = 2s_i$.

施罗德数的组合意义:

- 从 $(0, 0)$ 走到 (n, n) , 每次可以走右, 上, 或者右上一步, 并且不能超过 $y = x$ 这条线的方案数
 - 长为 n 的括号序列, 每个位置也可以为空, 并且括号对数和空位置数加起来等于 n 的方案数
 - 凸 n 边形的任意剖分方案数
- (有些人会把大(而不是小)施罗德数叫做超级卡特兰数.)

3. 默慈金数

$$M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i} = \frac{(2n+3)M_n + 3nM_{n-1}}{n+3}$$

$$M_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} C_i$$

在圆上的 n 个不同的点之间画任意条不相交(包括端点)的弦的方案数.

也等价于在网格图上, 每次可以走右上, 右下, 正右方一步, 且不能走到 $y < 0$ 的位置, 在此前提下从 $(0, 0)$ 走到 $(n, 0)$ 的方案数.

扩展: 默慈金数画的弦不可以共享端点. 如果可以共享端点的话是 A054726, 后面的表里可以查到.

1.10 常用公式及结论

1.10.1 方差

m 个数的方差:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{m} - \bar{x}^2$$

随机变量的方差: $D^2(x) = E(x^2) - E^2(x)$

1.10.2 min-max 反演

$$\max(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$$

$$\min(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \max(T)$$

推广: 求第 k 大

$$k\text{-}\max(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min(T)$$

显然只有大小至少为 k 的子集才是有用的.

1.10.3 单位根反演(展开整除条件 $[n|k]$)

$$[n|k] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{ik}$$

$$\sum_{i \geq 0} [x^{ik}] f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(\omega_k^j)$$

1.10.4 康托展开(排列的排名)

求排列的排名: 先对每个数都求出它后面有几个数比它小(可以用树状数组预处理), 记为 c_i , 则排列的排名就是

$$\sum_{i=1}^n c_i (n-i)!$$

已知排名构造排列: 从前到后先分别求出 c_i , 有了 c_i 之后再用一个平衡树(需要维护排名)倒序处理即可.

1.10.5 连通图计数

设大小为 n 的满足一个限制 P 的简单无向图数量为 g_n , 满足限制 P 且连通的简单无向图数量为 f_n , 如果已知 $g_{1 \dots n}$ 求 f_n , 可以得到递推式

$$f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

这个递推式的意义就是用任意图的数量减掉不连通的数量, 而不连通的数量可以通过枚举 1 号点所在连通块大小来计算.

注意, 由于 $f_0 = 0$, 因此递推式的枚举下界取 0 和 1 都是可以的. 推一推式子会发现得到一个多项式求逆, 再仔细看看, 其实就是一个多项式 \ln .

1.10.6 线性齐次线性常系数递推求通项

- 定理 3.1: 设数列 $\{u_n : n \geq 0\}$ 满足 r 阶齐次线性常系数递推关系 $u_n = \sum_{j=1}^r c_j u_{n-j}$ ($n \geq r$). 则

$$(i). \quad U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n = \frac{h(x)}{1 - \sum_{j=1}^r c_j x^j}, \quad \deg(h(x)) < r.$$

(ii). 若特征多项式

$$c(x) = x^r - \sum_{j=1}^r c_j x^{r-j} = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_s)^{e_s},$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 互异, $e_1 + \dots + e_s = r$ 则 u_n 有表达式

$$u_n = p_1(n)\alpha_1^n + \dots + p_s(n)\alpha_s^n, \quad \deg(p_i) < e_i, i = 1, \dots, s.$$

多项式 p_1, \dots, p_s 的共 $e_1 + \dots + e_s = r$ 个系数可由初始值 u_0, \dots, u_{r-1} 唯一确定.



1.11 常用生成函数变换

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{i \geq 0} i x^i$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{k-1} x^i, \quad k > 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \frac{x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{(n-i)!} \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} k! (n-k)! \frac{(-1)^{i-k}}{(i-k)!} \end{aligned}$$

(用上面的方法可以把分子化成一个 n 次以内的多项式, 并且可以用一次卷积求出来.)

如果把 i^n 换成任意的一个 n 次多项式, 那么我们可以求出它的下降幂表示形式(或者说是牛顿插值)的系数 r_i , 发现用 r_k 替换掉上面的 $\binom{n}{k} k!$ 之后其余过程完全相同.

2 数论

2.1 $O(n)$ 预处理逆元

```
// 要求p为质数
1 inv[0] = inv[1] = 1;
2 for (int i = 2; i <= n; i++)
3     inv[i] = (long long)(p - (p / i)) * inv[p % i] % p;
4     → // p为模数
5 // i ^ -1 = -(p / i) * (p % i) ^ -1
```

2.2 线性筛

```

1 // 此代码以计算约数之和函数\sigma_1(对10^9+7取模)为例
2 // 适用于任何f(p^k)便于计算的积性函数
3 constexpr int p = 1000000007;
4
5 int prime[maxn / 10], sigma_one[maxn], f[maxn],
6    → g[maxn];
7 // f: 除掉最小质因子后剩下的部分
8 // g: 最小质因子的幂次, 在f(p^k)比较复杂时很有用,
9 // →但f(p^k)可以递推时就可以省略了
10 // 这里没有记录最小质因子, 但根据线性筛的性质, 每个合数只
11 // →会被它最小的质因子筛掉
12 bool notp[maxn]; // 顾名思义
13
14 void get_table(int n) {
15     sigma_one[1] = 1; // 积性函数必有f(1) = 1
16     for (int i = 2; i ≤ n; i++) {
17         if (!notp[i]) { // 质数情况
18             prime[++prime[0]] = i;
19             sigma_one[i] = i + 1;
20             f[i] = g[i] = 1;
21         }
22
23         for (int j = 1; j ≤ prime[0] && i * prime[j]
24             → ≤ n; j++) {
25             notp[i * prime[j]] = true;
26
27             if (i % prime[j]) { // 加入一个新的质因子,
28                 →这种情况很简单
29                 sigma_one[i * prime[j]] = (long
30                     → long)sigma_one[i] * (prime[j] + 1)
31                     → % p;
32                 f[i * prime[j]] = i;
33                 g[i * prime[j]] = 1;
34             }
35             else { // 再加入一次最小质因子, 需要再进行分类
36                 → 讨论
37                 f[i * prime[j]] = f[i];
38                 g[i * prime[j]] = g[i] + 1;
39                 // 对于f(p^k)可以直接递推的函数, 这里的判
40                 → 断可以改成
41                 // i / prime[j] % prime[j] != 0, 这样可
42                 → 以省下f[]的空间,
43                 // 但常数很可能稍大一些
44
45                 if (f[i] == 1) // 质数的幂次, 这
46                 → 里\sigma_1可以递推
47                 sigma_one[i * prime[j]] =
48                     → (sigma_one[i] + i * prime[j]) %
49                     → p;
50                 // 对于更一般的情况, 可以借助g[]计
51                 → 算f(p^k)
52             }
53             else sigma_one[i * prime[j]] = // 否则直
54                 → 接利用积性, 两半乘起来
55                 (long long)sigma_one[i * prime[j]]
56                     → f[i] * sigma_one[f[i]] % p;
57         }
58     }
59 }

```

```
40 |  
41 |  
42 |  
43 |  
44 |
```

2.3 杜教筛

$$S_\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{d=2}^n S_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

$$S_\mu(n) = 1 - \sum_{d=2}^n S_\mu\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

```

1 // 用于求可以用狄利克雷卷积构造出好求和的东西的函数的前缀
2 // → 和(有点绕)
3 // 有些题只要求 $n \leq 10^9$ , 这时就没必要开long long了, 但
4 // → 记得乘法时强转
5 // 常量/全局变量/数组定义
6 const int maxn = 5000005, table_size = 5000000, p =
7     → 1000000007, inv_2 = (p + 1) / 2;
8 bool notp[maxn];
9 int prime[maxn / 20], phi[maxn], tbl[100005];
10 // tbl用来顶替哈希表, 其实开到 $n^{\{1 / 3\}}$ 就够了, 不过保险
11 // → 起见开成 $\sqrt{n}$ 比较好
12 long long N;
13
14 // 主函数前面加上这么一句
15 memset(tbl, -1, sizeof(tbl));
16
17 // 线性筛预处理部分略去
18
19 // 杜教筛主过程 总计 $O(n^{\{2 / 3\}})$ 
20 // 递归调用自身
21 // 递推式还需具体情况具体分析, 这里以求欧拉函数前缀和(mod
22 // →  $10^9 + 7$ )为例
23 int S(long long n) {
24     if (n <= table_size)
25         return phi[n];
26     else if (~tbl[N / n])
27         return tbl[N / n];
28     // 原理: n除以所有可能的数的结果一定互不相同
29
30     int ans = 0;
31     for (long long i = 2, last; i <= n; i = last + 1) {
32         last = n / (n / i);
33         ans = (ans + (last - i + 1) % p * S(n / i)) %
34             → p; // 如果n是int范围的话记得强转
35     }
36
37     ans = (n % p * ((n + 1) % p) % p * inv_2 - ans + p)
38     → % p; // 同上
39     return tbl[N / n] = ans;
40 }

```

2.4 Powerful Number筛

注意 Powerful Number 篛只能求积性函数的前缀和。
本质上就是构造一个方便求前缀和的函数，然后做类似杜教筛的操作。
定义 Powerful Number 表示每个质因子幂次都大于 1 的数，显然最多有 \sqrt{n} 个。
设我们要求和的函数是 $f(n)$ ，构造一个方便求前缀和的积性函数 $g(n)$ 使得 $g(p) = f(p)$ 。
那么就存在一个积性函数 $h = f * g^{-1}$ ，也就是 $f = g * h$ 。可以证明 $h(p) = 0$ ，所以只有 Powerful Number 的 h 值不为 0。

$$S_f(i) = \sum_{d=1}^n h(d) S_g\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

只需要枚举每个 Powerful Number 作为 d , 然后用杜教筛计算 g 的前缀和.

求 $h(d)$ 时要先预处理 $h(p^k)$, 显然有

$$h(p^k) = f(p^k) - \sum_{i=1}^k g(p^i) h(p^{k-i})$$

处理完之后 DFS 就行了. (显然只需要筛 \sqrt{n} 以内的质数.)

复杂度取决于杜教筛的复杂度, 特殊题目构造的好也可以做到 $O(\sqrt{n})$.

例题:

- $f(p^k) = p^k(p^k - 1)$: $g(n) = \text{id}(n)\varphi(n)$.
- $f(p^k) = p \text{xor } k$: n 为偶数时 $g(n) = 3\varphi(n)$, 否则 $g(n) = \varphi(n)$.

2.5 洲阁筛

计算积性函数 $f(n)$ 的前 n 项之和时, 我们可以把所有项按照是否有 $> \sqrt{n}$ 的质因子分两类讨论, 最后将两部分的贡献加起来即可.

1. 有 $> \sqrt{n}$ 的质因子

显然 $> \sqrt{n}$ 的质因子幂次最多为 1, 所以这一部分的贡献就是

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} f(i) \sum_{d=\sqrt{n}+1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} [d \in \mathbb{P}] f(d)$$

我们可以 DP 后面的和式. 由于 $f(p)$ 是一个关于 p 的低次多项式, 我们可以对每个次幂分别 DP: 设 $g_{i,j}$ 表示 $[1, j]$ 中和前 i 个质数都互质的数的 k 次方之和. 设 \sqrt{n} 以内的质数总共有 m 个, 显然贡献就转换成了

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i^k g_{m, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor}$$

边界显然就是自然数幂次和, 转移是

$$g_{i,j} = g_{i-1,j} - p_i^k g_{i-1, \lfloor \frac{j}{p_i} \rfloor}$$

也就是减掉和第 i 个质数不互质的贡献.

在滚动数组的基础上再优化一下: 首先如果 $j < p_i$ 那肯定就只有一个数; 如果 $p_i \leq j < p_i^2$, 显然就有 $g_{i,j} = g_{i-1,j} - p_i^k$, 那么对每个 j 记下最大的 i 使得 $p_i^2 \leq j$, 比这个还大的情况就不需要递推了, 用到的时候再加上一个前缀和解决.

2. 所有质因子都 $\leq \sqrt{n}$

类似的道理, 我们继续 DP: $h_{i,j}$ 表示只含有第 i 到 m 个质数作为质因子的所有数的 $f(i)$ 之和. (这里不需要对每个次幂单独 DP 了; 另外倒着 DP 是为了方便卡上限.)

边界显然是 $h_{m+1,j} = 1$, 转移是

$$h_{i,j} = h_{i+1,j} + \sum_c f(p_i^c) h_{i+1, \lfloor \frac{j}{p_i^c} \rfloor}$$

跟上面一样的道理优化, 分成三段: $j < p_i$ 时 $h_{i,j} = 1$, $j < p_i^2$ 时 $h_{i,j} = h_{i+1,j} + f(p_i)$ (同样用前缀和解决), 再小的部分就老实递推.

预处理 \sqrt{n} 以内的部分之后跑两次 DP, 最后把两部分的贡献加起来就行了.

两部分的复杂度都是 $\Theta\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$ 的.

以下代码以洛谷 P5325 ($f(p^k) = p^k(p^k - 1)$) 为例.

```

1 constexpr int maxn = 200005, p = 1000000007;
2
3 long long N, val[maxn]; // 询问的n和存储所有整除结果的表
4 int sqrtn;
5
6 inline int getid(long long x) {
7     if (x <= sqrtn)
8         return x;
9
10    return val[0] - N / x + 1;
11}
12
13 bool notp[maxn];
14 int prime[maxn], prime_cnt, rem[maxn]; // 线性筛用数组
15
16 int f[maxn], pr[maxn], g[2][maxn], dp[maxn];
17 int l[maxn], r[maxn];
18
19 // 线性筛省略
20
21 inline int get_sum(long long n, int k) {
22     n %= p;
23
24     if (k == 1)
25         return n * (n + 1) % p * ((p + 1) / 2) % p;
26
27     else
28         return n * (n + 1) % p * (2 * n + 1) % p * ((p
29             - 1) / 6) % p;
30 }
31
32 void get_dp(long long n, int k, int *dp) {
33     for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
34         dp[j] = get_sum(val[j], k);
35
36     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++) {
37         long long lb = (long long)prime[i] * prime[i];
38         int pw = (k == 1 ? prime[i] : (int)(lb % p));
39
40         pr[i] = (pr[i - 1] + pw) % p;
41
42         for (int j = val[0]; j && val[j] >= lb; j--) {
43             int t = getid(val[j] / prime[i]);
44
45             int tmp = dp[t];
46             if (l[t] < i)
47                 tmp = (tmp - pr[min(i - 1, r[t])] +
48                     pr[l[t]]) % p;
49
50             dp[j] = (dp[j] - (long long)pw * tmp) % p;
51             if (dp[j] < 0)
52                 dp[j] += p;
53         }
54
55         for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
56             dp[j] = (dp[j] - pr[r[j]] + pr[l[j]]) % p;
57
58         dp[j] = (dp[j] + p - 1) % p; // 因为DP数组是
59             // 有1的, 但后面计算不应该有1
60     }
61
62     int calc1(long long n) {
63         get_dp(n, 1, g[0]);
64         get_dp(n, 2, g[1]);
65
66         int ans = 0;

```

```

67     for (int i = 1; i ≤ sqrtN; i++)
68         ans = (ans + (long long)f[i] * (g[1][getid(N /
69             → i)] - g[0][getid(N / i)])) % p;
70
71     if (ans < 0)
72         ans += p;
73
74     return ans;
75 }
76
77 int calc2(long long n) {
78     for (int j = 1; j ≤ val[0]; j++)
79         dp[j] = 1;
80
81     for (int i = 1; i ≤ prime_cnt; i++)
82         pr[i] = (pr[i - 1] + f[prime[i]]) % p;
83
84     for (int i = prime_cnt; i; i--) {
85         long long lb = (long long)prime[i] * prime[i];
86
87         for (int j = val[0]; j && val[j] ≥ lb; j--)
88             for (long long pc = prime[i]; pc ≤ val[j];
89                 → pc *= prime[i]) {
90                 int t = getid(val[j] / pc);
91
92                 int tmp = dp[t];
93                 if (r[t] > i)
94                     tmp = (tmp + pr[r[t]] - pr[max(i,
95                         → l[t])]) % p;
96
97                 dp[j] = (dp[j] + pc % p * ((pc - 1) %
98                     → p) % p * tmp) % p;
99             }
100 }
101
102 return (long long)(dp[val[0]] + pr[r[val[0]]] -
103     → pr[l[val[0]]] + p) % p;
104 }
105
106 int main() {
107
108     // ios::sync_with_stdio(false);
109
110     cin >> N;
111
112     sqrtN = (int)sqrt(N);
113
114     get_table(sqrtN);
115
116     for (int i = 1; i ≤ sqrtN; i++)
117         val[++val[0]] = i;
118
119     for (int i = 1; i ≤ sqrtN; i++)
120         val[++val[0]] = N / i;
121
122     sort(val + 1, val + val[0] + 1);
123
124     val[0] = unique(val + 1, val + val[0] + 1) - val -
125         → 1;
126
127     int li = 0, ri = 0;
128     for (int j = 1; j ≤ val[0]; j++) {
129         while (ri < prime_cnt && prime[ri + 1] ≤
130             → val[j])
131             ri++;
132
133         while (li ≤ prime_cnt && (long long)prime[li]
134             → * prime[li] ≤ val[j])
135             li++;
136     }

```

```

129         l[j] = li - 1;
130         r[j] = ri;
131     }
132
133     cout << (calc1(N) + calc2(N)) % p << endl;
134
135     return 0;
136 }

```

2.6 Miller-Rabin

```

1 // 复杂度可以认为是常数
2
3 // 封装好的函数体
4 // 需要调用check
5 bool Miller_Rabin(long long n) {
6     if (n == 1)
7         return false;
8     if (n == 2)
9         return true;
10    if (n % 2 == 0)
11        return false;
12
13    for (int i : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
14        → 31, 37}) {
15        if (i ≥ n)
16            break;
17        if (!check(n, i))
18            return false;
19    }
20
21    return true;
22}
23
24 // 用一个数检测
25 // 需要调用long long快速幂和O(1)快速乘
26 bool check(long long n, long long b) { // b: base
27     long long a = n - 1;
28     int k = 0;
29
30     while (a % 2 == 0) {
31         a /= 2;
32         k++;
33     }
34
35     long long t = qpow(b, a, n); // 这里的快速幂函数需要
36     → 写O(1)快速乘
37     if (t == 1 || t == n - 1)
38         return true;
39
40     while (k--) {
41         t = mul(t, t, n); // mul是O(1)快速乘函数
42         if (t == n - 1)
43             return true;
44     }
45
46     return false;
47 }

```

2.7 Pollard's Rho

```

1 // 注意, 虽然Pollard's Rho的理论复杂度是O( $n^{1/4}$ )的,
2 // 但实际跑起来比较慢, 一般用于做long long范围内的质因数
3 // 分解
4
5 // 封装好的函数体
6 // 需要调用solve

```

```

7 void factorize(long long n, vector<long long> &v) { // 
8     → v用于存分解出来的质因子，重复的会放多个
9     for (int i : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}) {
10        while (n % i == 0) {
11            v.push_back(i);
12            n /= i;
13        }
14    }
15    solve(n, v);
16    sort(v.begin(), v.end()); // 从小到大排序后返回
17}
18
19 // 递归过程
20 // 需要调用Pollard's Rho主过程，同时递归调用自身
21 void solve(long long n, vector<long long> &v) {
22     if (n == 1)
23         return;
24
25     long long p;
26     do
27         p = Pollards_Rho(n);
28     while (!p); // p是任意一个非平凡因子
29
30     if (p == n) {
31         v.push_back(p); // 说明n本身就是质数
32         return;
33     }
34
35     solve(p, v); // 递归分解两半
36     solve(n / p, v);
37
38 // Pollard's Rho主过程
39 // 需要使用Miller-Rabin作为子算法
40 // 同时需要调用O(1)快速乘和gcd函数
41 long long Pollards_Rho(long long n) {
42     // assert(n > 1);
43
44     if (Miller_Rabin(n))
45         return n;
46
47     long long c = rand() % (n - 2) + 1, i = 1, k = 2, x
48     → = rand() % (n - 3) + 2, u = 2; // 注意这里rand函
49     → 数需要重定义一下
50     while (true) {
51         i++;
52         x = (mul(x, x, n) + c) % n; // mul是O(1)快速乘函
53         → 数
54
55         long long g = gcd((u - x + n) % n, n);
56         if (g > 1 && g < n)
57             return g;
58
59         if (u == x)
60             return 0; // 失败，需要重新调用
61
62         if (i == k) {
63             u = x;
64             k *= 2;
65         }
66     }
67 }

```

2.8 快速阶乘算法

参见1.1.11.应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘(9页).

2.9 扩展欧几里德

```

1 void exgcd(LL a, LL b, LL &c, LL &x, LL &y) {
2     if (b == 0) {
3         c = a;
4         x = 1;
5         y = 0;
6         return;
7     }
8
9     exgcd(b, a % b, c, x, y);
10
11    LL tmp = x;
12    x = y;
13    y = tmp - (a / b) * y;

```

2.9.1 求通解的方法

假设我们已经找到了一组解 (p_0, q_0) 满足 $ap_0 + bq_0 = \gcd(a, b)$, 那么其他的解都满足

$$p = p_0 + \frac{b}{\gcd(p, q)} \times t \quad q = q_0 - \frac{a}{\gcd(p, q)} \times t$$

其中 t 为任意整数.

2.9.2 类欧几里德算法(直线下整点个数)

$a, b \geq 0, m > 0$, 计算 $\sum_{i=0}^{n-1} \lfloor \frac{a+bi}{m} \rfloor$.

```

1 int solve(int n, int a, int b, int m) {
2     if (!b)
3         return n * (a / m);
4     if (a ≥ m)
5         return n * (a / m) + solve(n, a % m, b, m);
6     if (b ≥ m)
7         return (n - 1) * n / 2 * (b / m) + solve(n, a,
8             → b % m, m);
9
10    return solve((a + b * n) / m, (a + b * n) % m, m,
11        → b);

```

2.10 中国剩余定理

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$M = \prod_i m_i, M_i = \frac{M}{m_i}$$

$$M'_i \equiv M_i^{-1} \pmod{m_i}$$

$$x \equiv \sum_i a_i M_i M'_i \pmod{M}$$

2.10.1 ex-CRT

设两个方程分别是 $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ 和 $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$.

将它们转化为不定方程 $x = m_1 p + a_1 = m_2 q + a_2$, 其中 p, q 是整数, 则有 $m_1 p - m_2 q = a_2 - a_1$.

当 $a_2 - a_1$ 不能被 $\gcd(m_1, m_2)$ 整除时无解, 否则可以通过扩展欧几里德解出来一组可行解 (p, q) .

则原来的两方程组成的模方程组的解为 $x \equiv b \pmod{M}$, 其中 $b = m_1 p + a_1$, $M = \text{lcm}(m_1, m_2)$.

2.11 原根阶

阶 最小的整数 k 使得 $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, 记为 $\delta_p(a)$.

显然 a 在阶以下的幂次是两两不同的.

一个性质: 如果 a, b 均与 p 互质, 则 $\delta_p(ab) = \delta_p(a)\delta_p(b)$ 的充分必要条件是 $\gcd(\delta_p(a), \delta_p(b)) = 1$.

另外, 如果 a 与 p 互质, 则有 $\delta_p(a^k) = \frac{\delta_p(a)}{\gcd(\delta_p(a), k)}$. (也就是环上一次跳 k 步的周期.)

原根 阶等于 $\varphi(p)$ 的数.

只有形如 $2, 4, p^k, 2p^k$ (p 是奇素数) 的数才有原根, 并且如果一个数 n 有原根, 那么原根的个数是 $\varphi(\varphi(n))$ 个.

暴力找原根代码:

```

1 def split(n): # 分解质因数
2     i = 2
3     a = []
4     while i * i <= n:
5         if n % i == 0:
6             a.append(i)
7
8             while n % i == 0:
9                 n /= i
10
11            i += 1
12
13        if n > 1:
14            a.append(n)
15
16    return a
17
18 def getg(p): # 找原根
19     def judge(g):
20         for i in d:
21             if pow(g, (p - 1) / i, p) == 1:
22                 return False
23         return True
24
25     d = split(p - 1)
26     g = 2
27
28     while not judge(g):
29         g += 1
30
31     return g
32
33 print(getg(int(input())))

```

2.12 常用数论公式

2.12.1 莫比乌斯反演

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

$$f(d) = \sum_{d|k} g(k) \Leftrightarrow g(d) = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) f(k)$$

2.12.2 降幂公式

$$a^k \equiv a^{k \bmod \varphi(p)+\varphi(p)}, k \geq \varphi(p)$$

2.12.3 其他常用公式

$$\mu * I = e \quad (e(n) = [n = 1])$$

$$\mu * id = \varphi$$

$$\sigma_0 = I * I, \sigma_1 = id * I, \sigma_k = id^{k-1} * I$$

$$\sum_{i=1}^n [(i, n) = 1] i = n \frac{\varphi(n) + e(n)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i [(i, j) = d] = S_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i, j) = d] = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^n f(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(j) = \sum_{i=1}^n g(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} f(j)$$

3 图论

3.1 最小生成树

3.1.1 Boruvka算法

思想: 每次选择连接每个连通块的最小边, 把连通块缩起来.

每次连通块个数至少减半, 所以迭代 $O(\log n)$ 次即可得到最小生成树.

一种比较简单的实现方法: 每次迭代遍历所有边, 用并查集维护连通性和每个连通块的最小边权.

应用: 最小异或生成树

3.1.2 动态最小生成树

动态最小生成树的离线算法比较容易, 而在线算法通常极为复杂.

一个跑得比较快的离线做法是对时间分治, 在每层分治时找出一定在不在MST上的边, 只带着不确定边继续递归.

简单起见, 找确定边的过程用Kruskal算法实现, 过程中的两种重要操作如下:

- Reduction: 待修改边标为 $+\infty$, 跑MST后把非树边删掉, 减少无用边
- Contraction: 待修改边标为 $-\infty$, 跑MST后缩除待修改边之外的所有MST边, 计算必须边

每轮分治需要Reduction-Contraction, 借此减少不确定边, 从而保证复杂度.

复杂度证明: 假设当前区间有 k 条待修改边, n 和 m 表示点数和边数, 那么最坏情况下R-C的效果为 $(n, m) \rightarrow (n, n + k - 1) \rightarrow (k + 1, 2k)$.

```

1 // 全局结构体与数组定义
2 struct edge { // 边的定义
3     int u, v, w, id; // id表示边在原图中的编号
4     bool vis; // 在Kruskal时用, 记录这条边是否是树边
5     bool operator < (const edge &e) const { return w <
6         → e.w; }
7 } e[20][maxn], t[maxn]; // 为了便于回滚, 在每层分治存一个
8 → 副本
9
10 // 用于存储修改的结构体, 表示第id条边的权值从u修改为v
11 struct A {
12     int id, u, v;
13 } a[maxn];
14
15 int id[20][maxn]; // 每条边在当前图中的编号
16 int p[maxn], size[maxn], stk[maxn], top; // p和size是并
17 → 查集数组, stk是用来撤销的栈
18 int n, m, q; // 点数, 边数, 修改数
19
20 // 方便起见, 附上可能需要用到的预处理代码
21 int main() {
22     for (int i = 1; i ≤ n; i++) { // 并查集初始化
23         p[i] = i;
24         size[i] = 1;
25     }
26
27     for (int i = 1; i ≤ m; i++) { // 读入与预标号
28         scanf("%d%d%d", &e[0][i].u, &e[0][i].v, &e[0]
29             → [i].w);
30         e[0][i].id = i;
31         id[0][i] = i;
32     }
33
34     for (int i = 1; i ≤ q; i++) { // 预处理出调用数组
35         scanf("%d%d", &a[i].id, &a[i].v);
36     }
37 }
```

```

35     a[i].u = e[0][a[i].id].w;
36     e[0][a[i].id].w = a[i].v;
37 }
38
39 for(int i = q; i; i--)
40     e[0][a[i].id].w = a[i].u;
41
42 CDQ(1, q, 0, m, 0); // 这是调用方法
43 }

44 // 分治主过程 O(nlog^2n)
45 // 需要调用Reduction和Contraction
46 void CDQ(int l, int r, int d, int m, long long ans) {
47     ← // CDQ分治
48     if (l == r) { // 区间长度已减小到1, 输出答案, 退出
49         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].v;
50         printf("%lld\n", ans + Kruskal(m, e[d]));
51         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].u;
52         return;
53     }
54
55     int tmp = top;
56
57     Reduction(l, r, d, m);
58     ans += Contraction(l, r, d, m); // R-C
59
60     int mid = (l + r) / 2;
61
62     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
63     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
64         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 准备好下一层要用的
65 → 数组
66
67     CDQ(l, mid, d + 1, m, ans);
68
69     for (int i = l; i ≤ mid; i++)
70         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].v; // 进行左边的修
71 → 改
72
73     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
74     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
75         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 重新准备下一层要用
76 → 的数组
77
78     CDQ(mid + 1, r, d + 1, m, ans);
79
80     for (int i = top; i > tmp; i--)
81         cut(stk[i]); // 撤销所有操作
82     top = tmp;
83
84 // Reduction(减少无用边): 待修改边标为 $+\infty$ , 跑MST后把非树边
85 → 删掉, 减少无用边
86 // 需要调用Kruskal
87 void Reduction(int l, int r, int d, int &m) {
88     for (int i = l; i ≤ r; i++)
89         e[d][id[d][a[i].id]].w = INF; // 待修改的边标为INF
90
91     Kruskal(m, e[d]);
92
93     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
94
95     int cnt = 0;
96     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
97         if (t[i].w == INF || t[i].vis) { // 非树边扔掉
98             id[d][t[i].id] = ++cnt; // 给边重新编号
99             e[d][cnt] = t[i];
99     }
99 }
```

```

100
101    for (int i = r; i >= l; i--) {
102        e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
103        // 改回去
104    }
105
106
107
108 // Contraction(缩必须边):待修改边标为- $\text{INF}$ ,跑MST后缩除待修
109 // →改边之外的所有树边
110 // 返回缩掉的边的总权值
111 // 需要调用Kruskal
112 long long Contraction(int l, int r, int d, int &m) {
113     long long ans = 0;
114
115     for (int i = l; i <= r; i++) {
116         e[d][id[d][a[i].id]].w = - $\text{INF}$ ; // 待修改边标
117         // →为- $\text{INF}$ 
118
119         Kruskal(m, e[d]);
120         copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
121
122         int cnt = 0;
123         for (int i = 1; i <= m; i++) {
124
125             if (t[i].w != - $\text{INF}$  && t[i].vis) { // 必须边
126                 ans += t[i].w;
127                 mergeset(t[i].u, t[i].v);
128             }
129             else { // 不确定边
130                 id[d][t[i].id] = ++cnt;
131                 e[d][cnt] = t[i];
132             }
133
134         for (int i = r; i >= l; i--) {
135             e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
136             // 改回去
137             e[d][id[d][a[i].id]].vis = false;
138
139         m = cnt;
140
141         return ans;
142
143
144 // Kruskal算法  $O(m \log n)$ 
145 // 方便起见,这里直接沿用进行过缩点的并查集,在过程结束后撤
146 // →销即可
147 long long Kruskal(int m, edge *e) {
148     int tmp = top;
149     long long ans = 0;
150
151     sort(e + 1, e + m + 1); // 比较函数在结构体中定义过
152     // →了
153
154     for (int i = 1; i <= m; i++) {
155         if (findroot(e[i].u) != findroot(e[i].v)) {
156             e[i].vis = true;
157             ans += e[i].w;
158             mergeset(e[i].u, e[i].v);
159         }
160         else
161             e[i].vis = false;
162
163     for (int i = top; i > tmp; i--)
164         cut(stk[i]); // 撤销所有操作

```

```

164     top = tmp;
165
166     return ans;
167 }
168
169 // 以下是并查集相关函数
170 int findroot(int x) { // 因为需要撤销,不写路径压缩
171     while (p[x] != x)
172         x = p[x];
173
174     return x;
175 }
176
177 void mergeset(int x, int y) { // 按size合并,如果想跑得更
178 // →快就写一个按秩合并
179     x = findroot(x); // 但是按秩合并要再开一个栈记录合并
180     // →之前的秩
181     y = findroot(y);
182
183     if (x == y)
184         return;
185
186     if (size[x] > size[y])
187         swap(x, y);
188
189     p[x] = y;
190     size[y] += size[x];
191     stk[++top] = x;
192
193 void cut(int x) { // 并查集撤销
194     int y = x;
195
196     do
197         size[y] = p[y] -= size[x];
198     while (p[y] != y);
199
200     p[x] = x;
201 }

```

3.1.3 最小树形图

对每个点找出最小的入边,如果是一个DAG那么就已经结束了.否则把环都缩起来,每个点的边权减去环上的边权之后再跑一遍,直到没有环为止.

可以用可并堆优化到 $O(m \log n)$,需要写一个带懒标记的左偏树.
 $O(nm)$ 版本

```

1 constexpr int maxn = 105, maxe = 10005, inf =
2     // → 0x3f3f3f3f;
3
4 struct edge {
5     int u, v, w;
6 } e[maxe];
7
8 int mn[maxn], pr[maxn], ufs[maxn], vis[maxn];
9 bool alive[maxn];
10
11 int edmonds(int n, int m, int rt) {
12     for (int i = 1; i <= n; i++)
13         alive[i] = true;
14
15     int ans = 0;
16
17     while (true) {
18         memset(mn, 63, sizeof(int) * (n + 1));
19         memset(pr, 0, sizeof(int) * (n + 1));
20         memset(ufs, 0, sizeof(int) * (n + 1));
21
22         for (int i = 1; i <= m; i++) {
23             if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
24                 mn[e[i].v] = e[i].w;
25                 pr[e[i].v] = e[i].u;
26             }
27         }
28
29         int cur = mn[rt];
30         while (cur < 0) {
31             int u = pr[-cur];
32             mn[u] = -cur;
33             cur = mn[u];
34         }
35
36         for (int i = 1; i <= n; i++) {
37             if (alive[i] && mn[i] < 0) {
38                 ans += mn[i];
39                 alive[i] = false;
40             }
41         }
42
43         for (int i = 1; i <= m; i++) {
44             if (mn[e[i].v] < 0) {
45                 mn[e[i].v] = 0;
46                 pr[e[i].v] = 0;
47             }
48         }
49
50         for (int i = 1; i <= n; i++) {
51             if (alive[i]) {
52                 mn[i] = 63;
53                 pr[i] = 0;
54             }
55         }
56
57         for (int i = 1; i <= m; i++) {
58             if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
59                 mn[e[i].v] = e[i].w;
60                 pr[e[i].v] = e[i].u;
61             }
62         }
63
64         for (int i = 1; i <= n; i++) {
65             if (alive[i] && mn[i] < 0) {
66                 ans += mn[i];
67                 alive[i] = false;
68             }
69         }
70
71         for (int i = 1; i <= m; i++) {
72             if (mn[e[i].v] < 0) {
73                 mn[e[i].v] = 0;
74                 pr[e[i].v] = 0;
75             }
76         }
77
78         for (int i = 1; i <= n; i++) {
79             if (alive[i]) {
80                 mn[i] = 63;
81                 pr[i] = 0;
82             }
83         }
84
85         for (int i = 1; i <= m; i++) {
86             if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
87                 mn[e[i].v] = e[i].w;
88                 pr[e[i].v] = e[i].u;
89             }
90         }
91
92         for (int i = 1; i <= n; i++) {
93             if (alive[i] && mn[i] < 0) {
94                 ans += mn[i];
95                 alive[i] = false;
96             }
97         }
98
99         for (int i = 1; i <= m; i++) {
100            if (mn[e[i].v] < 0) {
101                mn[e[i].v] = 0;
102                pr[e[i].v] = 0;
103            }
104        }
105
106        for (int i = 1; i <= n; i++) {
107            if (alive[i]) {
108                mn[i] = 63;
109                pr[i] = 0;
110            }
111        }
112
113        for (int i = 1; i <= m; i++) {
114            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
115                mn[e[i].v] = e[i].w;
116                pr[e[i].v] = e[i].u;
117            }
118        }
119
120        for (int i = 1; i <= n; i++) {
121            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
122                ans += mn[i];
123                alive[i] = false;
124            }
125        }
126
127        for (int i = 1; i <= m; i++) {
128            if (mn[e[i].v] < 0) {
129                mn[e[i].v] = 0;
130                pr[e[i].v] = 0;
131            }
132        }
133
134        for (int i = 1; i <= n; i++) {
135            if (alive[i]) {
136                mn[i] = 63;
137                pr[i] = 0;
138            }
139        }
140
141        for (int i = 1; i <= m; i++) {
142            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
143                mn[e[i].v] = e[i].w;
144                pr[e[i].v] = e[i].u;
145            }
146        }
147
148        for (int i = 1; i <= n; i++) {
149            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
150                ans += mn[i];
151                alive[i] = false;
152            }
153        }
154
155        for (int i = 1; i <= m; i++) {
156            if (mn[e[i].v] < 0) {
157                mn[e[i].v] = 0;
158                pr[e[i].v] = 0;
159            }
160        }
161
162        for (int i = 1; i <= n; i++) {
163            if (alive[i]) {
164                mn[i] = 63;
165                pr[i] = 0;
166            }
167        }
168
169        for (int i = 1; i <= m; i++) {
170            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
171                mn[e[i].v] = e[i].w;
172                pr[e[i].v] = e[i].u;
173            }
174        }
175
176        for (int i = 1; i <= n; i++) {
177            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
178                ans += mn[i];
179                alive[i] = false;
180            }
181        }
182
183        for (int i = 1; i <= m; i++) {
184            if (mn[e[i].v] < 0) {
185                mn[e[i].v] = 0;
186                pr[e[i].v] = 0;
187            }
188        }
189
190        for (int i = 1; i <= n; i++) {
191            if (alive[i]) {
192                mn[i] = 63;
193                pr[i] = 0;
194            }
195        }
196
197        for (int i = 1; i <= m; i++) {
198            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
199                mn[e[i].v] = e[i].w;
200                pr[e[i].v] = e[i].u;
201            }
202        }
203
204        for (int i = 1; i <= n; i++) {
205            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
206                ans += mn[i];
207                alive[i] = false;
208            }
209        }
210
211        for (int i = 1; i <= m; i++) {
212            if (mn[e[i].v] < 0) {
213                mn[e[i].v] = 0;
214                pr[e[i].v] = 0;
215            }
216        }
217
218        for (int i = 1; i <= n; i++) {
219            if (alive[i]) {
220                mn[i] = 63;
221                pr[i] = 0;
222            }
223        }
224
225        for (int i = 1; i <= m; i++) {
226            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
227                mn[e[i].v] = e[i].w;
228                pr[e[i].v] = e[i].u;
229            }
230        }
231
232        for (int i = 1; i <= n; i++) {
233            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
234                ans += mn[i];
235                alive[i] = false;
236            }
237        }
238
239        for (int i = 1; i <= m; i++) {
240            if (mn[e[i].v] < 0) {
241                mn[e[i].v] = 0;
242                pr[e[i].v] = 0;
243            }
244        }
245
246        for (int i = 1; i <= n; i++) {
247            if (alive[i]) {
248                mn[i] = 63;
249                pr[i] = 0;
250            }
251        }
252
253        for (int i = 1; i <= m; i++) {
254            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
255                mn[e[i].v] = e[i].w;
256                pr[e[i].v] = e[i].u;
257            }
258        }
259
260        for (int i = 1; i <= n; i++) {
261            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
262                ans += mn[i];
263                alive[i] = false;
264            }
265        }
266
267        for (int i = 1; i <= m; i++) {
268            if (mn[e[i].v] < 0) {
269                mn[e[i].v] = 0;
270                pr[e[i].v] = 0;
271            }
272        }
273
274        for (int i = 1; i <= n; i++) {
275            if (alive[i]) {
276                mn[i] = 63;
277                pr[i] = 0;
278            }
279        }
280
281        for (int i = 1; i <= m; i++) {
282            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
283                mn[e[i].v] = e[i].w;
284                pr[e[i].v] = e[i].u;
285            }
286        }
287
288        for (int i = 1; i <= n; i++) {
289            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
290                ans += mn[i];
291                alive[i] = false;
292            }
293        }
294
295        for (int i = 1; i <= m; i++) {
296            if (mn[e[i].v] < 0) {
297                mn[e[i].v] = 0;
298                pr[e[i].v] = 0;
299            }
300        }
301
302        for (int i = 1; i <= n; i++) {
303            if (alive[i]) {
304                mn[i] = 63;
305                pr[i] = 0;
306            }
307        }
308
309        for (int i = 1; i <= m; i++) {
310            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
311                mn[e[i].v] = e[i].w;
312                pr[e[i].v] = e[i].u;
313            }
314        }
315
316        for (int i = 1; i <= n; i++) {
317            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
318                ans += mn[i];
319                alive[i] = false;
320            }
321        }
322
323        for (int i = 1; i <= m; i++) {
324            if (mn[e[i].v] < 0) {
325                mn[e[i].v] = 0;
326                pr[e[i].v] = 0;
327            }
328        }
329
330        for (int i = 1; i <= n; i++) {
331            if (alive[i]) {
332                mn[i] = 63;
333                pr[i] = 0;
334            }
335        }
336
337        for (int i = 1; i <= m; i++) {
338            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
339                mn[e[i].v] = e[i].w;
340                pr[e[i].v] = e[i].u;
341            }
342        }
343
344        for (int i = 1; i <= n; i++) {
345            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
346                ans += mn[i];
347                alive[i] = false;
348            }
349        }
350
351        for (int i = 1; i <= m; i++) {
352            if (mn[e[i].v] < 0) {
353                mn[e[i].v] = 0;
354                pr[e[i].v] = 0;
355            }
356        }
357
358        for (int i = 1; i <= n; i++) {
359            if (alive[i]) {
360                mn[i] = 63;
361                pr[i] = 0;
362            }
363        }
364
365        for (int i = 1; i <= m; i++) {
366            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
367                mn[e[i].v] = e[i].w;
368                pr[e[i].v] = e[i].u;
369            }
370        }
371
372        for (int i = 1; i <= n; i++) {
373            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
374                ans += mn[i];
375                alive[i] = false;
376            }
377        }
378
379        for (int i = 1; i <= m; i++) {
380            if (mn[e[i].v] < 0) {
381                mn[e[i].v] = 0;
382                pr[e[i].v] = 0;
383            }
384        }
385
386        for (int i = 1; i <= n; i++) {
387            if (alive[i]) {
388                mn[i] = 63;
389                pr[i] = 0;
390            }
391        }
392
393        for (int i = 1; i <= m; i++) {
394            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
395                mn[e[i].v] = e[i].w;
396                pr[e[i].v] = e[i].u;
397            }
398        }
399
400        for (int i = 1; i <= n; i++) {
401            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
402                ans += mn[i];
403                alive[i] = false;
404            }
405        }
406
407        for (int i = 1; i <= m; i++) {
408            if (mn[e[i].v] < 0) {
409                mn[e[i].v] = 0;
410                pr[e[i].v] = 0;
411            }
412        }
413
414        for (int i = 1; i <= n; i++) {
415            if (alive[i]) {
416                mn[i] = 63;
417                pr[i] = 0;
418            }
419        }
420
421        for (int i = 1; i <= m; i++) {
422            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
423                mn[e[i].v] = e[i].w;
424                pr[e[i].v] = e[i].u;
425            }
426        }
427
428        for (int i = 1; i <= n; i++) {
429            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
430                ans += mn[i];
431                alive[i] = false;
432            }
433        }
434
435        for (int i = 1; i <= m; i++) {
436            if (mn[e[i].v] < 0) {
437                mn[e[i].v] = 0;
438                pr[e[i].v] = 0;
439            }
440        }
441
442        for (int i = 1; i <= n; i++) {
443            if (alive[i]) {
444                mn[i] = 63;
445                pr[i] = 0;
446            }
447        }
448
449        for (int i = 1; i <= m; i++) {
450            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
451                mn[e[i].v] = e[i].w;
452                pr[e[i].v] = e[i].u;
453            }
454        }
455
456        for (int i = 1; i <= n; i++) {
457            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
458                ans += mn[i];
459                alive[i] = false;
460            }
461        }
462
463        for (int i = 1; i <= m; i++) {
464            if (mn[e[i].v] < 0) {
465                mn[e[i].v] = 0;
466                pr[e[i].v] = 0;
467            }
468        }
469
470        for (int i = 1; i <= n; i++) {
471            if (alive[i]) {
472                mn[i] = 63;
473                pr[i] = 0;
474            }
475        }
476
477        for (int i = 1; i <= m; i++) {
478            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
479                mn[e[i].v] = e[i].w;
480                pr[e[i].v] = e[i].u;
481            }
482        }
483
484        for (int i = 1; i <= n; i++) {
485            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
486                ans += mn[i];
487                alive[i] = false;
488            }
489        }
490
491        for (int i = 1; i <= m; i++) {
492            if (mn[e[i].v] < 0) {
493                mn[e[i].v] = 0;
494                pr[e[i].v] = 0;
495            }
496        }
497
498        for (int i = 1; i <= n; i++) {
499            if (alive[i]) {
500                mn[i] = 63;
501                pr[i] = 0;
502            }
503        }
504
505        for (int i = 1; i <= m; i++) {
506            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
507                mn[e[i].v] = e[i].w;
508                pr[e[i].v] = e[i].u;
509            }
510        }
511
512        for (int i = 1; i <= n; i++) {
513            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
514                ans += mn[i];
515                alive[i] = false;
516            }
517        }
518
519        for (int i = 1; i <= m; i++) {
520            if (mn[e[i].v] < 0) {
521                mn[e[i].v] = 0;
522                pr[e[i].v] = 0;
523            }
524        }
525
526        for (int i = 1; i <= n; i++) {
527            if (alive[i]) {
528                mn[i] = 63;
529                pr[i] = 0;
530            }
531        }
532
533        for (int i = 1; i <= m; i++) {
534            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
535                mn[e[i].v] = e[i].w;
536                pr[e[i].v] = e[i].u;
537            }
538        }
539
540        for (int i = 1; i <= n; i++) {
541            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
542                ans += mn[i];
543                alive[i] = false;
544            }
545        }
546
547        for (int i = 1; i <= m; i++) {
548            if (mn[e[i].v] < 0) {
549                mn[e[i].v] = 0;
550                pr[e[i].v] = 0;
551            }
552        }
553
554        for (int i = 1; i <= n; i++) {
555            if (alive[i]) {
556                mn[i] = 63;
557                pr[i] = 0;
558            }
559        }
560
561        for (int i = 1; i <= m; i++) {
562            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
563                mn[e[i].v] = e[i].w;
564                pr[e[i].v] = e[i].u;
565            }
566        }
567
568        for (int i = 1; i <= n; i++) {
569            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
570                ans += mn[i];
571                alive[i] = false;
572            }
573        }
574
575        for (int i = 1; i <= m; i++) {
576            if (mn[e[i].v] < 0) {
577                mn[e[i].v] = 0;
578                pr[e[i].v] = 0;
579            }
580        }
581
582        for (int i = 1; i <= n; i++) {
583            if (alive[i]) {
584                mn[i] = 63;
585                pr[i] = 0;
586            }
587        }
588
589        for (int i = 1; i <= m; i++) {
590            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
591                mn[e[i].v] = e[i].w;
592                pr[e[i].v] = e[i].u;
593            }
594        }
595
596        for (int i = 1; i <= n; i++) {
597            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
598                ans += mn[i];
599                alive[i] = false;
600            }
601        }
602
603        for (int i = 1; i <= m; i++) {
604            if (mn[e[i].v] < 0) {
605                mn[e[i].v] = 0;
606                pr[e[i].v] = 0;
607            }
608        }
609
610        for (int i = 1; i <= n; i++) {
611            if (alive[i]) {
612                mn[i] = 63;
613                pr[i] = 0;
614            }
615        }
616
617        for (int i = 1; i <= m; i++) {
618            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
619                mn[e[i].v] = e[i].w;
620                pr[e[i].v] = e[i].u;
621            }
622        }
623
624        for (int i = 1; i <= n; i++) {
625            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
626                ans += mn[i];
627                alive[i] = false;
628            }
629        }
630
631        for (int i = 1; i <= m; i++) {
632            if (mn[e[i].v] < 0) {
633                mn[e[i].v] = 0;
634                pr[e[i].v] = 0;
635            }
636        }
637
638        for (int i = 1; i <= n; i++) {
639            if (alive[i]) {
640                mn[i] = 63;
641                pr[i] = 0;
642            }
643        }
644
645        for (int i = 1; i <= m; i++) {
646            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
647                mn[e[i].v] = e[i].w;
648                pr[e[i].v] = e[i].u;
649            }
650        }
651
652        for (int i = 1; i <= n; i++) {
653            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
654                ans += mn[i];
655                alive[i] = false;
656            }
657        }
658
659        for (int i = 1; i <= m; i++) {
660            if (mn[e[i].v] < 0) {
661                mn[e[i].v] = 0;
662                pr[e[i].v] = 0;
663            }
664        }
665
666        for (int i = 1; i <= n; i++) {
667            if (alive[i]) {
668                mn[i] = 63;
669                pr[i] = 0;
670            }
671        }
672
673        for (int i = 1; i <= m; i++) {
674            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
675                mn[e[i].v] = e[i].w;
676                pr[e[i].v] = e[i].u;
677            }
678        }
679
680        for (int i = 1; i <= n; i++) {
681            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
682                ans += mn[i];
683                alive[i] = false;
684            }
685        }
686
687        for (int i = 1; i <= m; i++) {
688            if (mn[e[i].v] < 0) {
689                mn[e[i].v] = 0;
690                pr[e[i].v] = 0;
691            }
692        }
693
694        for (int i = 1; i <= n; i++) {
695            if (alive[i]) {
696                mn[i] = 63;
697                pr[i] = 0;
698            }
699        }
700
701        for (int i = 1; i <= m; i++) {
702            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
703                mn[e[i].v] = e[i].w;
704                pr[e[i].v] = e[i].u;
705            }
706        }
707
708        for (int i = 1; i <= n; i++) {
709            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
710                ans += mn[i];
711                alive[i] = false;
712            }
713        }
714
715        for (int i = 1; i <= m; i++) {
716            if (mn[e[i].v] < 0) {
717                mn[e[i].v] = 0;
718                pr[e[i].v] = 0;
719            }
720        }
721
722        for (int i = 1; i <= n; i++) {
723            if (alive[i]) {
724                mn[i] = 63;
725                pr[i] = 0;
726            }
727        }
728
729        for (int i = 1; i <= m; i++) {
730            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
731                mn[e[i].v] = e[i].w;
732                pr[e[i].v] = e[i].u;
733            }
734        }
735
736        for (int i = 1; i <= n; i++) {
737            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
738                ans += mn[i];
739                alive[i] = false;
740            }
741        }
742
743        for (int i = 1; i <= m; i++) {
744            if (mn[e[i].v] < 0) {
745                mn[e[i].v] = 0;
746                pr[e[i].v] = 0;
747            }
748        }
749
750        for (int i = 1; i <= n; i++) {
751            if (alive[i]) {
752                mn[i] = 63;
753                pr[i] = 0;
754            }
755        }
756
757        for (int i = 1; i <= m; i++) {
758            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
759                mn[e[i].v] = e[i].w;
760                pr[e[i].v] = e[i].u;
761            }
762        }
763
764        for (int i = 1; i <= n; i++) {
765            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
766                ans += mn[i];
767                alive[i] = false;
768            }
769        }
770
771        for (int i = 1; i <= m; i++) {
772            if (mn[e[i].v] < 0) {
773                mn[e[i].v] = 0;
774                pr[e[i].v] = 0;
775            }
776        }
777
778        for (int i = 1; i <= n; i++) {
779            if (alive[i]) {
780                mn[i] = 63;
781                pr[i] = 0;
782            }
783        }
784
785        for (int i = 1; i <= m; i++) {
786            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
787                mn[e[i].v] = e[i].w;
788                pr[e[i].v] = e[i].u;
789            }
790        }
791
792        for (int i = 1; i <= n; i++) {
793            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
794                ans += mn[i];
795                alive[i] = false;
796            }
797        }
798
799        for (int i = 1; i <= m; i++) {
800            if (mn[e[i].v] < 0) {
801                mn[e[i].v] = 0;
802                pr[e[i].v] = 0;
803            }
804        }
805
806        for (int i = 1; i <= n; i++) {
807            if (alive[i]) {
808                mn[i] = 63;
809                pr[i] = 0;
810            }
811        }
812
813        for (int i = 1; i <= m; i++) {
814            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
815                mn[e[i].v] = e[i].w;
816                pr[e[i].v] = e[i].u;
817            }
818        }
819
820        for (int i = 1; i <= n; i++) {
821            if (alive[i] && mn[i] < 0) {
822                ans += mn[i];
823                alive[i] = false;
824            }
825        }
826
827        for (int i = 1; i <= m; i++) {
828            if (mn[e[i].v] < 0) {
829                mn[e[i].v] = 0;
830                pr[e[i].v] = 0;
831            }
832        }
833
834        for (int i = 1; i <= n; i++) {
835            if (alive[i]) {
836                mn[i] = 63;
837                pr[i] = 0;
838            }
839        }
840
841        for (int i = 1; i <= m; i++) {
842            if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
843                mn[e[i].v] = e[i].w;
844                pr[e[i].v] = e[i].u;
845            }
846        }
847
848        for (int i = 1; i &lt
```

```

20     memset(vis, 0, sizeof(int) * (n + 1));
21
22     mn[rt] = 0;
23
24     for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
25         if (e[i].u != e[i].v && e[i].w <
26             → mn[e[i].v]) {
27             mn[e[i].v] = e[i].w;
28             pr[e[i].v] = e[i].u;
29         }
30
31         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
32             if (!alive[i]) {
33                 if (mn[i] ≥ inf)
34                     return -1; // 不存在最小树形图
35
36             ans += mn[i];
37         }
38
39         bool flag = false;
40
41         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
42             if (!alive[i])
43                 continue;
44
45             int x = i;
46             while (x && !vis[x]) {
47                 vis[x] = i;
48                 x = pr[x];
49             }
50
51             if (x && vis[x] == i) {
52                 flag = true;
53                 for (int u = x; !ufs[u]; u = pr[u])
54                     ufs[u] = x;
55             }
56
57             for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
58                 e[i].w -= mn[e[i].v];
59
60                 if (ufs[e[i].u])
61                     e[i].u = ufs[e[i].u];
62                 if (ufs[e[i].v])
63                     e[i].v = ufs[e[i].v];
64             }
65
66             if (!flag)
67                 return ans;
68
69             for (int i = 1; i ≤ n; i++)
70                 if (ufs[i] && i != ufs[i])
71                     alive[i] = false;
72     }
73 }
```

$O(m \log n)$ 版本

(堆优化版本可以参考fstqwq的模板，在最后没有目录的部分。)

3.1.4 Steiner Tree 斯坦纳树

问题：一张图上有 k 个关键点，求让关键点两两连通的最小生成树

做法：状压 DP， $f_{i,S}$ 表示以 i 号点为树根， i 与 S 中的点连通的最小边权和

转移有两种：

1. 枚举子集：

$$f_{i,S} = \min_{T \subset S} \{f_{i,T} + f_{i,S \setminus T}\}$$

2. 新加一条边：

$$f_{i,S} = \min_{(i,j) \in E} \{f_{j,S} + w_{i,j}\}$$

第一种直接枚举子集 DP 就行了，第二种可以用 SPFA 或者 Dijkstra 松弛（显然负边一开始全选就行了，所以只需要处理非负边）。

复杂度 $O(n3^k + 2^k \text{SSSP}(n, m))$ ，其中 $\text{SSSP}(n, m)$ 可以是 nm 或者 $n^2 + m$ 或者 $m \log n$ 。

```

1 constexpr int maxn = 105, inf = 0x3f3f3f3f;
2
3 int dp[maxn][(1 << 10) + 1];
4 int g[maxn][maxn], a[15];
5 bool inq[maxn];
6
7 int main() {
8
9     int n, m, k;
10    scanf("%d%d%d", &n, &m, &k);
11
12    memset(g, 63, sizeof(g));
13
14    while (m--) {
15        int u, v, c;
16        scanf("%d%d%d", &u, &v, &c);
17
18        g[u][v] = g[v][u] = min(g[u][v], c); // 不要忘了
19        → 是双向边
20    }
21
22    memset(dp, 63, sizeof(dp));
23
24    for (int i = 0; i < k; i++) {
25        scanf("%d", &a[i]);
26
27        dp[a[i]][1 << i] = 0;
28    }
29
30    for (int s = 1; s < (1 << k); s++) {
31        for (int i = 1; i ≤ n; i++)
32            for (int t = (s - 1) & s; t; (~t) &= s)
33                dp[i][s] = min(dp[i][s], dp[i][t] +
34                    → dp[i][s ^ t]);
35
36    // SPFA
37    queue<int> q;
38    for (int i = 1; i ≤ n; i++)
39        if (dp[i][s] < inf) {
40            q.push(i);
41            inq[i] = true;
42        }
43
44    while (!q.empty()) {
45        int i = q.front();
46        q.pop();
47        inq[i] = false; // 最终结束时 inq 一定全 0，所
48        → 以不用清空
49
50        for (int j = 1; j ≤ n; j++)
51            if (dp[i][s] + g[i][j] < dp[j][s]) {
52                dp[j][s] = dp[i][s] + g[i][j];
53                if (!inq[j]) {
54                    q.push(j);
55                    inq[j] = true;
56                }
57            }
58    }
59 }
```

```
57
58     int ans = inf;
59     for (int i = 1; i <= n; i++)
60     |     ans = min(ans, dp[i][(1 << k) - 1]);
61
62     printf("%d\n", ans);
63
64     return 0;
65 }
```

```

for (int x = 1; x <= n; x++)
    for (int y = 1; y <= n; y++)
        if (g[x][y]) { // 如果 $g[x][y] = 0$ 说明没有边
            int w = g[x][y];

            for (int i = n - 1, j = n; i; i--)
                if (f[y][id[x][i]] > f[y][id[x]
                    → [j]]) {
                    long long tmp = f[x][id[x][i]]
                        → + f[y][id[x][j]] + w;
                    if (tmp < anse) {
                        anse = tmp;
                        u = x;
                        v = y;

                        disu = tmp / 2 - f[x][id[x]
                            → [i]];
                        disv = w - disu;
                    }
                j = i;
            }
        }

printf("%lld\n", min(ansv, anse) / 2); // 直径

memset(d, 63, sizeof(d));

if (ansv <= anse)
    d[o] = 0;
else {
    d[u] = disu;
    d[v] = disv;
}

for (int k = 1; k <= n; k++) { // Dijkstra
    int x = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (!vis[i] && d[i] < d[x])
            x = i;

    vis[x] = true;
    for (int y = 1; y <= n; y++)
        if (g[x][y] && !vis[y]) {
            if (d[y] > d[x] + g[x][y]) {
                d[y] = d[x] + g[x][y];
                pr[y] = x;
            }
            else if (d[y] == d[x] + g[x][y] &&
                → d[pr[y]] < d[x])
                pr[y] = x;
        }
    }

vector<pair<int, int>> vec;
for (int i = 1; i <= n; i++)
    if (pr[i])
        vec.emplace_back(i, pr[i]);

if (ansv > anse)
    vec.emplace_back(u, v);

return vec;
}

main() {

int n, m;
}

```

3.1.5 最小直径生成树

首先要找到图的绝对中心(可能在点上,也可能在某条边上),然后以绝对中心为起点建最短路树就是最小直径生成树.

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 505;
6 constexpr long long inf = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
7
8 int g[maxn][maxn], id[maxn][maxn], pr[maxn]; // g是邻接
9      ↳ 矩阵
10 long long f[maxn][maxn], d[maxn];
11 bool vis[maxn];
12
13 vector<pair<int, int>>
14     → minimum_diameter_spanning_tree(int n) { // 1-based
15         for (int i = 1; i ≤ n; i++)
16             for (int j = 1; j ≤ n; j++)
17                 g[i][j] *= 2; // 输入的边权都要乘2
18
19         memset(f, 63, sizeof(f));
20
21         for (int i = 1; i ≤ n; i++)
22             f[i][i] = 0;
23
24         for (int i = 1; i ≤ n; i++)
25             for (int j = 1; j ≤ n; j++)
26                 if (g[i][j])
27                     f[i][j] = g[i][j];
28
29         for (int k = 1; k ≤ n; k++)
30             for (int i = 1; i ≤ n; i++)
31                 for (int j = 1; j ≤ n; j++)
32                     f[i][j] = min(f[i][j], f[i][k] + f[k]
33                                     ↳ [j]);
34
35         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
36             for (int j = 1; j ≤ n; j++)
37                 id[i][j] = j; // 距离i第j近的点
38
39             sort(id[i] + 1, id[i] + n + 1, [&i] (int x, int
40                                         → y) {
41                 return f[i][x] < f[i][y];
42             });
43         }
44
45         int o = 0;
46         long long ansv = inf; // vertex
47
48         for (int i = 1; i ≤ n; i++)
49             if (f[i][id[i][n]] * 2 < ansv) {
50                 ansv = f[i][id[i][n]] * 2;
51                 o = i;
52             }
53
54         int u = 0, v = 0;
55         long long disu = -inf, disv = -inf, anse = inf;

```

```

116 scanf("%d%d", &n, &m);
117
118 while (m--) {
119     int x, y, z;
120     scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
121
122     g[x][y] = g[y][x] = z; // 无向图
123 }
124
125 auto vec = minimum_diameter_spanning_tree(n);
126 for (auto [x, y] : vec)
127     printf("%d %d\n", x, y);
128
129 return 0;
130

```

3.2 最短路

3.2.1 Dijkstra

参见3.2.3.k短路(27页), 注意那边是求到 t 的最短路.

3.2.2 Johnson算法(负权图多源最短路)

首先前提是图没有负环.

先任选一个起点 s , 跑一边SPFA, 计算每个点的势 $h_u = d_{s,u}$, 然后将每条边 $u \rightarrow v$ 的权值 w 修改为 $w + h[u] - h[v]$ 即可, 由最短路的性质显然修改后边权非负.

然后对每个起点跑Dijkstra, 再修正距离 $d_{u,v} = d'_{u,v} - h_u + h_v$ 即可, 复杂度 $O(nm \log n)$, 在稀疏图上是要优于Floyd的.

3.2.3 k短路

```

1 // 注意这是个多项式算法, 在k比较大时很有优势, 但k比较小时
2 // →最好还是用A*
3 // DAG和有环的情况都可以, 有重边或自环也无所谓, 但不能有
4 // →零环
5 // 以下代码以Dijkstra + 可持久化左偏树为例
6
7 constexpr int maxn = 1005, maxe = 10005, maxm = maxe *
8 //→ 30; //点数,边数,左偏树结点数
9
10 struct A { // 用来求最短路
11     int x, d;
12
13     A(int x, int d) : x(x), d(d) {}
14
15     bool operator < (const A &a) const {
16         return d > a.d;
17     }
18
19 struct node { // 左偏树结点
20     int w, i, d; // i: 最后一条边的编号 d: 左偏树附加信息
21     node *lc, *rc;
22
23     node() {}
24
25     node(int w, int i) : w(w), i(i), d(0) {}
26
27     void refresh(){
28         d = rc → d + 1;
29     }
30 } null[maxm], *ptr = null, *root[maxn];
31
32 struct B { // 维护答案用
33     int x, w; // x是结点编号, w表示之前已经产生的权值

```

```

33     node *rt; // 这个答案对应的堆顶,注意可能不等于任何一个结点的堆
34
35     B(int x, node *rt, int w) : x(x), w(w), rt(rt) {}
36
37     bool operator < (const B &a) const {
38         return w + rt → w > a.w + a.rt → w;
39     }
40 }
41
42 // 全局变量和数组定义
43 vector<int> G[maxn], W[maxn], id[maxn]; // 最开始要存反
44 //→ 向图, 然后把G清空作为儿子列表
45 bool vis[maxn], used[maxe]; // used表示边是否在最短路树
46 //→ 上
47 int u[maxe], v[maxe], w[maxe]; // 存下每条边,注意是有向
48 //→ 边
49 int d[maxn], p[maxn]; // p表示最短路树上每个点的父边
50 int n, m, k, s, t; // s, t分别表示起点和终点
51
52 // 以下是主函数中较关键的部分
53 for (int i = 0; i ≤ n; i++)
54     root[i] = null; // 一定要加上!!!
55
56 // (读入&建反向图)
57 Dijkstra();
58
59 // (清空G, W, id)
60
61 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
62     if (p[i]) {
63         used[p[i]] = true; // 在最短路树上
64         G[v[p[i]]].push_back(i);
65     }
66
67 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
68     w[i] = d[u[i]] - d[v[i]]; // 现在的w[i]表示这条边能
69 //→ 使路径长度增加多少
70     if (!used[i])
71         root[u[i]] = merge(root[u[i]], newnode(w[i],
72 //→ i));
73
74 dfs(t);
75
76 priority_queue<B> heap;
77 heap.push(B(s, root[s], 0)); // 初始状态是找贡献最小的边
78 //→ 加进去
79
80 printf("%d\n", d[s]); // 第1短路需要特判
81 while (--k) { // 其余k - 1短路径用二叉堆维护
82     if (heap.empty())
83         printf("-1\n");
84     else {
85         int x = heap.top().x, w = heap.top().w;
86         node *rt = heap.top().rt;
87         heap.pop();
88
89         printf("%d\n", d[s] + w + rt → w);
90
91         if (rt → lc != null || rt → rc != null)
92             heap.push(B(x, merge(rt → lc, rt → rc),
93 //→ w)); // pop掉当前边,换成另一条贡献大一
94 //→ 点的边
95         if (root[v[rt → i]] != null)
96             heap.push(B(v[rt → i], root[v[rt → i]], w
97 //→ + rt → w)); // 保留当前边,往后面再接上
98 //→ 另一条边
99     }
100 }
```

```

93 }
94 // 主函数到此结束
95
96
97 // Dijkstra预处理最短路  $O(m \log n)$ 
98 void Dijkstra() {
99     memset(d, 63, sizeof(d));
100    d[t] = 0;
101    priority_queue<A> heap;
102    heap.push(A(t, 0));
103
104    while (!heap.empty()) {
105        int x = heap.top().x;
106        heap.pop();
107
108        if (vis[x])
109            continue;
110
111        vis[x] = true;
112        for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
113            if (!vis[G[x][i]] && d[G[x][i]] > d[x] +
114                → W[x][i]) {
115                d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
116                p[G[x][i]] = id[x][i];
117
118                heap.push(A(G[x][i], d[G[x][i]]));
119            }
120    }
121
122 // dfs求出每个点的堆 总计 $O(m \log n)$ 
123 // 需要调用merge，同时递归调用自身
124 void dfs(int x) {
125     root[x] = merge(root[x], root[v[p[x]]]);
126
127     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
128         dfs(G[x][i]);
129 }
130
131 // 包装过的new node() O(1)
132 node *newnode(int w, int i) {
133     *ptr = node(w, i);
134     ptr → lc = ptr → rc = null;
135     return ptr;
136 }
137
138 // 带可持久化的左偏树合并 总计 $O(\log n)$ 
139 // 递归调用自身
140 node *merge(node *x, node *y) {
141     if (x == null)
142         return y;
143     if (y == null)
144         return x;
145
146     if (x → w > y → w)
147         swap(x, y);
148
149     node *z = newnode(x → w, x → i);
150     z → lc = x → lc;
151     z → rc = merge(x → rc, y);
152
153     if (z → lc → d < z → rc → d)
154         swap(z → lc, z → rc);
155     z → refresh();
156
157     return z;
158 }

```

3.3 Tarjan算法

3.3.1 强连通分量

```

1 int dfn[maxn], low[maxn], tim = 0;
2 vector<int> G[maxn], scc[maxn];
3 int sccid[maxn], scc_cnt = 0, stk[maxn];
4 bool instk[maxn];
5
6 void dfs(int x) {
7     dfn[x] = low[x] = ++tim;
8
9     stk[++stk[0]] = x;
10    instk[x] = true;
11
12    for (int y : G[x]) {
13        if (!dfn[y]) {
14            dfs(y);
15            low[x] = min(low[x], low[y]);
16        } else if (instk[y])
17            low[x] = min(low[x], dfn[y]);
18    }
19
20    if (dfn[x] == low[x]) {
21        scc_cnt++;
22
23        int u;
24        do {
25            u = stk[stk[0]--];
26            instk[u] = false;
27            sccid[u] = scc_cnt;
28            scc[scc_cnt].push_back(u);
29        } while (u != x);
30    }
31 }
32
33 void tarjan(int n) {
34     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
35         if (!dfn[i])
36             dfs(i);
37 }
38

```

3.3.2 割点 点双

```

1 vector<int> G[maxn], bcc[maxn];
2 int dfn[maxn], low[maxn], tim = 0, bccid[maxn], bcc_cnt
3 → = 0;
4 bool iscut[maxn];
5
6 pair<int, int> stk[maxn];
7 int stk_cnt = 0;
8
9 void dfs(int x, int pr) {
10    int child = 0;
11    dfn[x] = low[x] = ++tim;
12
13    for (int y : G[x]) {
14        if (!dfn[y]) {
15            stk[++stk_cnt] = make_pair(x, y);
16            child++;
17            dfs(y, x);
18            low[x] = min(low[x], low[y]);
19
20            if (low[y] ≥ dfn[x]) {
21                iscut[x] = true;
22                bcc_cnt++;
23            }
24        }
25    }
26 }
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38

```

```

24     auto pi = stk[stk_cnt--];
25
26     if (bccid[pi.first] != bcc_cnt) {
27         bcc[bcc_cnt].push_back(pi.first);
28         bccid[pi.first] = bcc_cnt;
29     }
30     if (bccid[pi.second] != bcc_cnt) {
31         bcc[bcc_cnt].push_back(pi.second);
32         bccid[pi.second] = bcc_cnt;
33     }
34
35     if (pi.first == x && pi.second ==
36         ~y)
37         break;
38     }
39 }
40 else if (dfn[y] < dfn[x] && y != pr) {
41     stk[++stk_cnt] = make_pair(x, y);
42     low[x] = min(low[x], dfn[y]);
43 }
44
45 if (!pr && child == 1)
46     iscut[x] = false;
47 }
48
49 void Tarjan(int n) {
50     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
51         if (!dfn[i])
52             dfs(i, 0);
53 }

```

3.3.3 桥 边双

```

1 int u[maxe], v[maxe];
2 vector<int> G[maxn]; // 存的是边的编号
3
4 int stk[maxn], top, dfn[maxn], low[maxn], tim, bcc_cnt;
5 vector<int> bcc[maxn];
6
7 bool isbridge[maxe];
8
9 void dfs(int x, int pr) { // 这里pr是入边的编号
10     dfn[x] = low[x] = ++tim;
11     stk[++top] = x;
12
13     for (int i : G[x]) {
14         int y = (u[i] == x ? v[i] : u[i]);
15
16         if (!dfn[y]) {
17             dfs(y, i);
18             low[x] = min(low[x], low[y]);
19
20             if (low[y] > dfn[x])
21                 bridge[i] = true;
22         }
23         else if (i != pr)
24             low[x] = min(low[x], dfn[y]);
25     }
26
27     if (dfn[x] == low[x]) {
28         bcc_cnt++;
29         int y;
30         do {
31             y = stk[top--];
32             bcc[bcc_cnt].push_back(y);
33         } while (y != x);
34     }

```

35 }

3.4 仙人掌

一般来说仙人掌问题都可以通过圆方树转成有两种点的树上问题来做。

3.4.1 仙人掌DP

```

1 struct edge {
2     int to, w, prev;
3 } e[maxn * 2];
4
5 vector<pair<int, int>> v[maxn];
6 vector<long long> d[maxn];
7 stack<int> stk;
8
9 int p[maxn];
10 bool vis[maxn], vise[maxn * 2];
11 int last[maxn], cnt;
12
13 long long f[maxn], g[maxn], sum[maxn];
14 int n, m, cnt;
15
16 void addedge(int x, int y, int w) {
17     v[x].push_back(make_pair(y, w));
18 }
19
20 void dfs(int x) {
21
22     vis[x] = true;
23
24     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev) {
25         if (vise[i ^ 1])
26             continue;
27
28         int y = e[i].to, w = e[i].w;
29
30         vise[i] = true;
31
32         if (!vis[y]) {
33             stk.push(i);
34             p[y] = x;
35             dfs(y);
36
37             if (!stk.empty() && stk.top() == i) {
38                 stk.pop();
39                 addedge(x, y, w);
40             }
41         }
42
43         else {
44             cnt++;
45
46             long long tmp = w;
47             while (!stk.empty()) {
48                 int i = stk.top();
49                 stk.pop();
50
51                 int yy = e[i].to, ww = e[i].w;
52
53                 addedge(cnt, yy, 0);
54
55                 d[cnt].push_back(tmp);
56
57                 tmp += ww;
58
59                 if (e[i ^ 1].to == y)
60                     break;
61             }
62         }
63     }
64 }

```

```

61     }
62
63     addedge(y, cnt, 0);
64
65     sum[cnt] = tmp;
66 }
67
68 }
69
70 void dp(int x) {
71
72     for (auto o : v[x]) {
73         int y = o.first, w = o.second;
74         dp(y);
75     }
76
77     if (x <= n) {
78         for (auto o : v[x]) {
79             int y = o.first, w = o.second;
80
81             f[x] += 2 * w + f[y];
82         }
83
84         g[x] = f[x];
85
86         for (auto o : v[x]) {
87             int y = o.first, w = o.second;
88
89             g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] - 2 * w + g[y]
90                         ↪ + w);
91         }
92     } else {
93         f[x] = sum[x];
94         for (auto o : v[x]) {
95             int y = o.first;
96
97             f[x] += f[y];
98         }
99
100        g[x] = f[x];
101
102        for (int i = 0; i < (int)v[x].size(); i++) {
103            int y = v[x][i].first;
104
105            g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] + g[y] +
106                         ↪ min(d[x][i], sum[x] - d[x][i]));
107        }
108    }

```

```

15     return true;
16 }
17
18     return false;
19 }
20
21 int hungary() {
22     int ans = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= n; i++)
25         if (!girl[i]) {
26             memset(vis, 0, sizeof(vis));
27             ans += dfs(i);
28         }
29
30     return ans;
31 }
32

```

3.5.2 Hopcroft-Karp二分图匹配

其实长得和Dinic差不多，或者说像匈牙利和Dinic的缝合怪。

```

1 vector<int> G[maxn];
2
3 int girl[maxn], boy[maxn]; // girl: 左边匹配右边 boy:
4     ↪ 右边匹配左边
5
6 bool vis[maxn]; // 右半的点是否已被访问
7 int dx[maxn], dy[maxn];
8 int q[maxn];
9
10 bool bfs(int n) {
11     memset(dx, -1, sizeof(int) * (n + 1));
12     memset(dy, -1, sizeof(int) * (n + 1));
13
14     int head = 0, tail = 0;
15     for (int i = 1; i <= n; i++)
16         if (!girl[i]) {
17             q[tail++] = i;
18             dx[i] = 0;
19         }
20
21     bool flag = false;
22
23     while (head != tail) {
24         int x = q[head++];
25
26         for (auto y : G[x])
27             if (dy[y] == -1) {
28                 dy[y] = dx[x] + 1;
29
30                 if (boy[y]) {
31                     if (dx[boy[y]] == -1) {
32                         dx[boy[y]] = dy[y] + 1;
33                         q[tail++] = boy[y];
34                     }
35                 } else
36                     flag = true;
37             }
38
39     }
40
41     return flag;
42 }
43
44 bool dfs(int x) {
45     for (int y : G[x])
46         if (!vis[y] && dy[y] == dx[x] + 1) {

```

3.5 二分图

3.5.1 匈牙利

```

1 vector<int> G[maxn];
2
3 int girl[maxn], boy[maxn]; // 男孩在左边，女孩在右边
4 bool vis[maxn];
5
6 bool dfs(int x) {
7     for (int y : G[x])
8         if (!vis[y]) {
9             vis[y] = true;
10
11             if (!boy[y] || dfs(boy[y])) {
12                 girl[x] = y;
13                 boy[y] = x;
14             }
15         }
16     }
17
18 }
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45

```

```

46     vis[y] = true;
47
48     if (boy[y] && !dfs(boy[y]))
49         continue;
50
51     girl[x] = y;
52     boy[y] = x;
53     return true;
54 }
55
56 return false;
57 }

58 int hopcroft_karp(int n) {
59     int ans = 0;
60
61     for (int x = 1; x ≤ n; x++) // 先贪心求出一组初始匹
→配, 当然不写贪心也行
62         for (int y : G[x])
63             if (!boy[y]) {
64                 girl[x] = y;
65                 boy[y] = x;
66                 ans++;
67                 break;
68             }
69
70     while (bfs(n)) {
71         memset(vis, 0, sizeof(bool) * (n + 1));
72
73         for (int x = 1; x ≤ n; x++)
74             if (!girl[x])
75                 ans += dfs(x);
76     }
77
78     return ans;
79 }
80

```

```

28     return true;
29 }

30 // bfs每个点
31 void bfs(int x) {
32     memset(q, 0, sizeof(q));
33     head = tail = 0;
34
35     q[tail++] = x;
36     visx[x] = true;
37
38     while (true) {
39         while (head != tail) {
40             int x = q[head++];
41
42             for (int y = 1; y ≤ N; y++)
43                 if (!visy[y]) {
44                     long long d = lx[x] + ly[y] - w[x]
→ [y];
45
46                     if (d < slack[y]) {
47                         p[y] = x;
48                         slack[y] = d;
49
50                     if (!slack[y] && check(y))
51                         return;
52                 }
53             }
54         }
55     }
56
57     long long d = INF;
58     for (int i = 1; i ≤ N; i++)
59         if (!visy[i])
60             d = min(d, slack[i]);
61
62     for (int i = 1; i ≤ N; i++) {
63         if (visx[i])
64             lx[i] -= d;
65
66         if (visy[i])
67             ly[i] += d;
68         else
69             slack[i] -= d;
70     }
71
72     for (int i = 1; i ≤ N; i++)
73         if (!visy[i] && !slack[i] && check(i))
74             return;
75 }
76
77 // 主过程
78 long long KM() {
79     for (int i = 1; i ≤ N; i++) {
80         // lx[i] = 0;
81         ly[i] = -INF;
82         // boy[i] = girl[i] = -1;
83
84         for (int j = 1; j ≤ N; j++)
85             ly[i] = max(ly[i], w[j][i]);
86     }
87
88     for (int i = 1; i ≤ N; i++) {
89         memset(slack, 0x3f, sizeof(slack));
90         memset(visx, 0, sizeof(visx));
91         memset(visy, 0, sizeof(visy));
92         bfs(i);
93     }
94 }

```

3.5.3 KM二分图最大权匹配

```

1 const long long INF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3f;
2
3 long long w[maxn][maxn], lx[maxn], ly[maxn],
→ slack[maxn];
4 // 边权 顶标 slack
5 // 如果要求最大权完美匹配就把不存在的边设为-INF, 否则所有
→ 边对0取max
6
7 bool visx[maxn], visy[maxn];
8
9 int boy[maxn], girl[maxn], p[maxn], q[maxn], head,
→ tail; // p : pre
10
11 int n, m, N, e;
12
13 // 增广
14 bool check(int y) {
15     visy[y] = true;
16
17     if (boy[y]) {
18         visx[boy[y]] = true;
19         q[tail++] = boy[y];
20         return false;
21     }
22
23     while (y) {
24         boy[y] = p[y];
25         swap(y, girl[p[y]]);
26     }
27

```

```

96 long long ans = 0;
97 for (int i = 1; i <= N; i++)
98 | ans += w[i][girl[i]];
99 return ans;
100 }

102 // 为了方便贴上主函数
103 int main() {
104
105     scanf("%d%d%d", &n, &m, &e);
106     N = max(n, m);
107
108     while (e--) {
109         int x, y, c;
110         scanf("%d%d%d", &x, &y, &c);
111         w[x][y] = max(c, 0);
112     }
113
114     printf("%lld\n", KM());
115
116     for (int i = 1; i <= n; i++) {
117         if (i > 1)
118             printf(" ");
119         printf("%d", w[i][girl[i]] > 0 ? girl[i] : 0);
120     }
121     printf("\n");
122
123     return 0;
124 }
```

3.5.4 二分图原理

- 最大匹配的可行边与必须边，关键点

以下的“残量网络”指网络流图的残量网络。

- 可行边：一条边的两个端点在残量网络中处于同一个SCC，不论是正向边还是反向边。
- 必须边：一条属于当前最大匹配的边，且残量网络中两个端点不在同一个SCC中。
- 关键点(必须点)：这里不考虑网络流图而只考虑原始的图，将匹配边改成从右到左之后从左边的每个未匹配点进行floodfill，左边没有被标记的点即为关键点。右边同理。

- 独立集

二分图独立集可以看成最小割问题，割掉最少的点使得S和T不连通，则剩下的点自然都在独立集中。

所以独立集输出方案就是求出不在最小割中的点，独立集的必须点/可行点就是最小割的不可行点/非必须点。

割点等价于割掉它与源点或汇点相连的边，可以通过设置中间的边权为无穷以保证不能割掉中间的边，然后按照上面的方法判断即可。

(由于一个点最多流出一个流量，所以中间的边权其实是可以任取的。)

- 二分图最大权匹配

二分图最大权匹配的对偶问题是最小顶标和问题，即：为图中的每个顶点赋予一个非负顶标，使得对于任意一条边，两端点的顶标和都要不小于边权，最小化顶标之和。

显然KM算法的原理实际上就是求最小顶标和。

3.6 一般图匹配

3.6.1 高斯消元

```

1 // 这个算法基于Tutte定理和高斯消元，思维难度相对小一些,
2 // → 也更方便进行可行边的判定
3 // 注意这个算法复杂度是满的，并且常数有点大，而带花树通常
4 // → 是跑不满的
5 // 以及，根据Tutte定理，如果求最大匹配的大小的话直接输
6 // → 出Tutte矩阵的秩/2即可
```

```

4 // 需要输出方案时才需要再写后面那些乱七八糟的东西
5
6
7 // 复杂度和常数所限，1s之内500已经是这个算法的极限了
8 const int maxn = 505, p = 1000000007; // p可以是任意10^9以内的质数
9
10 // 全局数组和变量定义
11 int A[maxn][maxn], B[maxn][maxn], t[maxn][maxn],
12 |→ id[maxn], a[maxn];
13 bool row[maxn] = {false}, col[maxn] = {false};
14 int n, m, girl[maxn]; // girl是匹配点，用来输出方案
15
16 // 为了方便使用，贴上主函数
17 // 需要调用高斯消元和eliminate
18 int main() {
19     srand(19260817);
20
21     scanf("%d%d", &n, &m); // 点数和边数
22     while (m--) {
23         int x, y;
24         scanf("%d%d", &x, &y);
25         A[x][y] = rand() % p;
26         A[y][x] = -A[x][y]; // Tutte矩阵是反对称矩阵
27     }
28
29     for (int i = 1; i <= n; i++)
30         id[i] = i; // 输出方案用的，因为高斯消元的时候会
31         → 交换列
32     memcpy(t, A, sizeof(t));
33     Gauss(A, NULL, n);
34
35     m = n;
36     n = 0; // 这里变量复用纯属个人习惯
37
38     for (int i = 1; i <= m; i++) {
39         if (A[id[i]][id[i]])
40             a[++n] = i; // 找出一个极大满秩子矩阵
41
42     for (int i = 1; i <= n; i++) {
43         for (int j = 1; j <= n; j++)
44             A[i][j] = t[a[i]][a[j]];
45
46     Gauss(A, B, n);
47
48     for (int i = 1; i <= n; i++) {
49         if (!girl[a[i]])
50             for (int j = i + 1; j <= n; j++)
51                 if (!girl[a[j]] && t[a[i]][a[j]] &&
52                     → B[j][i]) {
53                     // 注意上面那句if的写法，现在t是邻接
54                     → 矩阵的备份,
55                     // 逆矩阵j行i列不为0当且仅当这条边可
56                     → 行
57                     girl[a[i]] = a[j];
58                     girl[a[j]] = a[i];
59
60                     eliminate(i, j);
61                     eliminate(j, i);
62                     break;
63                 }
64
65     }
66
67     printf("%d\n", n / 2);
68     for (int i = 1; i <= m; i++)
69         printf("%d ", girl[i]);
70
71     return 0;
72 }
73
74 // 高斯消元 O(n^3)
```

134		
135	{	}

3.6.2 带花树

```

61     }
62 }
63 }
64
65     return false;
66 }
67
68 //缩奇环 O(n)
69 void shrink(int x, int y, int z) {
70     while (findroot(x) != z) {
71         p[x] = y;
72         y = girl[x];
73
74         if (t[y] == 2) {
75             t[y] = 1;
76             q[tail++] = y;
77         }
78
79         if (findroot(x) == x)
80             f[x] = z;
81         if (findroot(y) == y)
82             f[y] = z;
83
84         x = p[y];
85     }
86 }
87
88 //暴力找LCA O(n)
89 int LCA(int x, int y) {
90     tim++;
91     while (true) {
92         if (x) {
93             x = findroot(x);
94
95             if (vis[x] == tim)
96                 return x;
97             else {
98                 vis[x] = tim;
99                 x = p[girl[x]];
100            }
101        }
102        swap(x, y);
103    }
104 }
105
106 //并查集的查找 O(1)
107 int findroot(int x) {
108     return x == f[x] ? x : (f[x] = findroot(f[x]));
109 }

```

3.6.3 带权带花树

Forked from the template of Imperisble Night.
(有一说一这玩意实在太难写了，抄之前建议先想想算法是不是假的
或者有SB做法)

```

    }
}

return false;
}

//缩奇环 O(n)
void shrink(int x, int y, int z) {
    while (findroot(x) != z) {
        p[x] = y;
        y = girl[x];

        if (t[y] == 2) {
            t[y] = 1;
            q[tail++] = y;
        }

        if (findroot(x) == x)
            f[x] = z;
        if (findroot(y) == y)
            f[y] = z;

        x = p[y];
    }
}

//暴力找LCA O(n)
int LCA(int x, int y) {
    tim++;
    while (true) {
        if (x) {
            x = findroot(x);

            if (vis[x] == tim)
                return x;
            else {
                vis[x] = tim;
                x = p[girl[x]];
            }
        }
        swap(x, y);
    }
}

//并查集的查找 O(1)
int findroot(int x) {
    return x == f[x] ? x : (f[x] = findroot(f[x]));
}

3.6.3 带权带花树

Forked from the template of Imperisble Night.  

(有一说一这玩意实在太难写了，抄之前建议先想想算法是不是假的  

或者有SB做法)

//maximum weight blossom, change g[u][v].w to INF -  

→ g[u][v].w when minimum weight blossom is needed  

//type of ans is long long  

//replace all int to long long if weight of edge is  

→ long long

struct WeightGraph {
    static const int INF = INT_MAX;
    static const int MAXN = 400;
    struct edge{
        int u, v, w;
        edge() {}
    };
    int n, n_x;
    edge g[MAXN * 2 + 1][MAXN * 2 + 1];
    int lab[MAXN * 2 + 1];
    int match[MAXN * 2 + 1], slack[MAXN * 2 + 1];
    → st[MAXN * 2 + 1], pa[MAXN * 2 + 1];
    int flower_from[MAXN * 2 + 1][MAXN+1], S[MAXN * 2 +
    → 1], vis[MAXN * 2 + 1];
    vector<int> flower[MAXN * 2 + 1];
    queue<int> q;
    inline int e_delta(const edge &e){ // does not work
        → inside blossoms
        return lab[e.u] + lab[e.v] - g[e.u][e.v].w * 2;
    }
    inline void update_slack(int u, int x){
        if(!slack[x] || e_delta(g[u][x]) <
        → e_delta(g[slack[x]][x]))
            slack[x] = u;
    }
    inline void set_slack(int x){
        slack[x] = 0;
        for(int u = 1; u ≤ n; ++u)
            if(g[u][x].w > 0 && st[u] != x && S[st[u]] ==
            → 0)
                update_slack(u, x);
    }
    void q_push(int x){
        if(x ≤ n)q.push(x);
        else for(size_t i = 0; i < flower[x].size(); i+
        → +)
            q.push(flower[x][i]);
    }
    inline void set_st(int x, int b){
        st[x]=b;
        if(x > n) for(size_t i = 0; i <
        → flower[x].size(); ++i)
            set_st(flower[x][i], b);
    }
    inline int get_pr(int b, int xr){
        int pr = find(flower[b].begin(),
        → flower[b].end(), xr) - flower[b].begin();
        if(pr % 2 == 1){
            reverse(flower[b].begin() + 1,
            → flower[b].end());
            return (int)flower[b].size() - pr;
        } else return pr;
    }
    inline void set_match(int u, int v){
        match[u]=g[u][v].v;
        if(u > n){
            edge e=g[u][v];
            int xr = flower_from[u][e.u], pr=get_pr(u,
            → xr);
            for(int i = 0; i < pr; ++i)
                set_match(flower[u][i], flower[u][i ^
                → 1]);
            set_match(xr, v);
            rotate(flower[u].begin(),
            → flower[u].begin() + pr, flower[u].end());
        }
    }
    inline void augment(int u, int v){
        for(; ; ){
            int xnv=st[match[u]];
            set_match(u, v);
            if(!xnv) return;
            set_match(xnv, st[pa[xnv]]);
            u=st[pa[xnv]], v=xnv;
        }
    }
}

```

```

70 }
71 inline int get_lca(int u, int v){
72     static int t=0;
73     for(;; u || v; swap(u, v)){
74         if(u == 0) continue;
75         if(vis[u] == t) return u;
76         vis[u] = t;
77         u = st[match[u]];
78         if(u) u = st[pa[u]];
79     }
80     return 0;
81 }
82 inline void add_blossom(int u, int lca, int v){
83     int b = n + 1;
84     while(b <= n_x && st[b]) ++b;
85     if(b > n_x) ++n_x;
86     lab[b] = 0, S[b] = 0;
87     match[b] = match[lca];
88     flower[b].clear();
89     flower[b].push_back(lca);
90     for(int x = u, y; x != lca; x = st[pa[y]]) {
91         flower[b].push_back(x),
92         flower[b].push_back(y = st[match[x]]),
93         q_push(y);
94     }
95     reverse(flower[b].begin() + 1,
96             flower[b].end());
97     for(int x = v, y; x != lca; x = st[pa[y]]) {
98         flower[b].push_back(x),
99         flower[b].push_back(y = st[match[x]]),
100        q_push(y);
101    }
102    set_st(b, b);
103    for(int x = 1; x <= n_x; ++x) g[b][x].w = g[x]
104        ↪ [b].w = 0;
105    for(int x = 1; x <= n; ++x) flower_from[b][x] =
106        ↪ 0;
107    for(size_t i = 0 ; i < flower[b].size(); ++i){
108        int xs = flower[b][i];
109        for(int x = 1; x <= n_x; ++x)
110            if(g[b][x].w == 0 || e_delta(g(xs)[x])
111                ↪ < e_delta(g[b][x]))
112                g[b][x] = g[xs][x], g[x][b] = g[x]
113                    ↪ [xs];
114        for(int x = 1; x <= n; ++x)
115            if(flower_from[xs][x]) flower_from[b]
116                ↪ [x] = xs;
117    }
118    set_slack(b);
119 }
120 inline void expand_blossom(int b){ // S[b] == 1
121     for(size_t i = 0; i < flower[b].size(); ++i)
122         set_st(flower[b][i], flower[b][i]);
123     int xr = flower_from[b][g[b][pa[b]].u], pr =
124         ↪ get_pr(b, xr);
125     for(int i = 0; i < pr; i += 2){
126         int xs = flower[b][i], xns = flower[b][i +
127             ↪ 1];
128         pa[xs] = g[xns][xs].u;
129         S[xs] = 1, S[xns] = 0;
130         slack[xs] = 0, set_slack(xns);
131         q_push(xns);
132     }
133     S[xr] = 1, pa[xr] = pa[b];
134     for(size_t i = pr + 1; i < flower[b].size(); +
135         ↪ +i){
136         int xs = flower[b][i];
137         S[xs] = -1, set_slack(xs);
138     }

```

```

30     st[b] = 0;
31 }
32 inline bool on_found_edge(const edge &e){
33     int u = st[e.u], v = st[e.v];
34     if(S[v] == -1){
35         pa[v] = e.u, S[v] = 1;
36         int nu = st[match[v]];
37         slack[v] = slack[nu] = 0;
38         S[nu] = 0, q.push(nu);
39     }else if(S[v] == 0){
40         int lca = get_lca(u, v);
41         if(!lca) return augment(u, v), augment(v,
42             ↪ u), true;
43         else add_blossom(u, lca, v);
44     }
45     return false;
46 }
47 inline bool matching(){
48     memset(S + 1, -1, sizeof(int) * n_x);
49     memset(slack + 1, 0, sizeof(int) * n_x);
50     q = queue<int>();
51     for(int x = 1; x ≤ n_x; ++x)
52         if(st[x] == x && !match[x]) pa[x] = 0,
53             ↪ S[x] = 0, q.push(x);
54     if(q.empty()) return false;
55     for(;;){
56         while(q.size()){
57             int u = q.front(); q.pop();
58             if(S[st[u]] == 1) continue;
59             for(int v = 1; v ≤ n; ++v)
60                 if(g[u][v].w > 0 && st[u] != st[v])
61                     ↪ {
62                         if(e_delta(g[u][v]) == 0){
63                             if(on_found_edge(g[u]
64                                 ↪ [v])) return true;
65                         }else update_slack(u, st[v]);
66                     }
67             }
68             int d = INF;
69             for(int b = n + 1; b ≤ n_x; ++b)
70                 if(st[b] == b && S[b] == 1) d = min(d,
71                     ↪ lab[b]/2);
72             for(int x = 1; x ≤ n_x; ++x)
73                 if(st[x] == x && slack[x]){
74                     if(S[x] == -1) d = min(d,
75                         ↪ e_delta(g[slack[x]][x]));
76                     else if(S[x] == 0) d = min(d,
77                         ↪ e_delta(g[slack[x]][x])/2);
78                 }
79             for(int u = 1; u ≤ n; ++u){
80                 if(S[st[u]] == 0){
81                     if(lab[u] ≤ d) return 0;
82                     lab[u] -= d;
83                 }else if(S[st[u]] == 1) lab[u] += d;
84             }
85             for(int b = n+1; b ≤ n_x; ++b)
86                 if(st[b] == b){
87                     if(S[st[b]] == 0) lab[b] += d * 2;
88                     else if(S[st[b]] == 1) lab[b] -= d
89                         ↪ * 2;
90                 }
91             q = queue<int>();
92             for(int x = 1; x ≤ n_x; ++x)
93                 if(st[x] == x && slack[x] &&
94                     ↪ st[slack[x]] != x &&
95                     ↪ e_delta(g[slack[x]][x]) == 0)
96                     if(on_found_edge(g[slack[x]
97                         ↪ [x])) return true;
98             }
99         }
100     }
101 }
```

```

186     |     for(int b = n + 1; b <= n_x; ++b)
187     |     |     if(st[b] == b && S[b] == 1 && lab[b] ==
188     |     |     |     ~0)expand_blossom(b);
189     |
190     |     return false;
191 }
192 inline pair<long long, int> solve(){
193     memset(match + 1, 0, sizeof(int) * n);
194     n_x = n;
195     int n_matches = 0;
196     long long tot_weight = 0;
197     for(int u = 0; u <= n; ++u) st[u] = u,
198         |     flower[u].clear();
199     int w_max = 0;
200     for(int u = 1; u <= n; ++u)
201         |     for(int v = 1; v <= n; ++v){
202             |             flower_from[u][v] = (u == v ? u : 0);
203             |             w_max = max(w_max, g[u][v].w);
204         }
205     for(int u = 1; u <= n; ++u) lab[u] = w_max;
206     while(matching()) ++n_matches;
207     for(int u = 1; u <= n; ++u)
208         |     if(match[u] && match[u] < u)
209             |             tot_weight += g[u][match[u]].w;
210     return make_pair(tot_weight, n_matches);
211 }
212 inline void init(){
213     for(int u = 1; u <= n; ++u)
214         |     for(int v = 1; v <= n; ++v)
215             |             g[u][v]=edge(u, v, 0);
216 }
217 };

```

3.6.4 原理

设图 G 的Tutte矩阵是 \tilde{A} , 首先是最基础的引理:

- G 的最大匹配大小是 $\frac{1}{2}\text{rank } \tilde{A}$.
- $(\tilde{A}^{-1})_{i,j} \neq 0$ 当且仅当 $G - \{v_i, v_j\}$ 有完美匹配.
(考虑到逆矩阵与伴随矩阵的关系, 这是显然的.)

构造最大匹配的方法见板子. 对于更一般的问题, 可以借助构造方法转化为完美匹配问题.

设最大匹配的大小为 k , 新建 $n - 2k$ 个辅助点, 让它们和其他所有点连边, 那么如果一个点匹配了一个辅助点, 就说明它在原图的匹配中不匹配任何点.

- 最大匹配的可行边: 对原图中的任意一条边 (u, v) , 如果删掉 u, v 后新图仍然有完美匹配(也就是 $\tilde{A}_{u,v}^{-1} \neq 0$), 则它是一条可行边.
- 最大匹配的必须边: 待补充
- 最大匹配的必须点: 可以删掉这个点和一个辅助点, 然后判断剩下的图是否还有完美匹配, 如果有则说明它不是必须的, 否则是必须的. 只需要用到逆矩阵即可.
- 最大匹配的可行点: 显然对于任意一个点, 只要它不是孤立点, 就是可行点.

3.7 支配树

记得建反图!

```

1 vector<int> G[maxn], R[maxn], son[maxn]; // R是反图,
2     |     → son存的是sdom树上的儿子
3
4 int ufs[maxn];
5
6 int idom[maxn], sdom[maxn], anc[maxn]; // anc:
    |     → sdom的dfn最小的祖先

```

```

7 int p[maxn], dfn[maxn], id[maxn], tim;
8
9 int findufs(int x) {
10     if (ufs[x] == x)
11         return x;
12
13     int t = ufs[x];
14     ufs[x] = findufs(ufs[x]);
15
16     if (dfn[sdom[anc[x]]] > dfn[sdom[anc[t]]])
17         anc[x] = anc[t];
18
19     return ufs[x];
20 }
21
22 void dfs(int x) {
23     dfn[x] = ++tim;
24     id[tim] = x;
25     sdom[x] = x;
26
27     for (int y : G[x])
28         if (!dfn[y]) {
29             p[y] = x;
30             dfs(y);
31         }
32 }
33
34 void get_dominator(int n) {
35     for (int i = 1; i <= n; i++)
36         ufs[i] = anc[i] = i;
37
38 dfs(1);
39
40 for (int i = n; i > 1; i--) {
41     int x = id[i];
42
43     for (int y : R[x])
44         if (dfn[y]) {
45             findufs(y);
46             if (dfn[sdom[x]] > dfn[sdom[anc[y]]])
47                 sdom[x] = sdom[anc[y]];
48         }
49
50     son[sdom[x]].push_back(x);
51     ufs[x] = p[x];
52
53     for (int u : son[p[x]]) {
54         findufs(u);
55         idom[u] = (sdom[u] == sdom[anc[u]] ? p[x] :
56                     anc[u]);
57     }
58
59     son[p[x]].clear();
60
61     for (int i = 2; i <= n; i++) {
62         int x = id[i];
63
64         if (idom[x] != sdom[x])
65             idom[x] = idom[idom[x]];
66
67         son[idom[x]].push_back(x);
68     }
69 }

```

3.8 2-SAT

如果限制满足对称性(每个命题的逆否命题对应的边也存在), 那么可以使用Tarjan算法求SCC搞定.

具体来说就是，如果某个变量的两个点在同一SCC中则显然无解，否则按拓扑序倒序尝试选择每个SCC即可。

由于Tarjan算法的特性，找到SCC的顺序就是拓扑序倒序，所以判断完是否有解之后，每个变量只需要取SCC编号较小的那个。

```

1 if (!ok)
2     printf("IMPOSSIBLE\n");
3 else {
4     printf("POSSIBLE\n");
5
6     for (int i = 1; i <= n; i++)
7         printf("%d%c", sccid[i * 2 - 1] > sccid[i * 2],
8             i < n ? ' ' : '\n');
9 }
```

如果要字典序最小就用DFS，注意可以压位优化。另外代码是0-base的。

```

1 bool vis[maxn];
2 int stk[maxn], top;
3
4 // 主函数
5 for (int i = 0; i < n; i += 2)
6     if (!vis[i] && !vis[i ^ 1]) {
7         top = 0;
8         if (!dfs(i)) {
9             while (top)
10                 vis[stk[top--]] = false;
11
12             if (!dfs(i + 1))
13                 bad = true;
14             break;
15         }
16     }
17
18 // 最后stk中的所有元素就是选中的值
19
20 // dfs
21 bool dfs(int x) {
22     if (vis[x ^ 1])
23         return false;
24
25     if (vis[x])
26         return true;
27
28     vis[x] = true;
29     stk[++top] = x;
30
31     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
32         if (!dfs(G[x][i]))
33             return false;
34
35     return true;
36 }
```

```

10 memset(last, -1, sizeof(last));
11
12 void AddEdge(int x, int y, int z) {
13     e[len].to = y;
14     e[len].cap = z;
15     e[len].prev = last[x];
16     last[x] = len++;
17 }
18
19 void addedge(int x, int y, int z) {
20     AddEdge(x, y, z);
21     AddEdge(y, x, 0);
22 }
23
24 void bfs() {
25     int head = 0, tail = 0;
26     memset(d, -1, sizeof(int) * (t + 5));
27     q[tail++] = s;
28     d[s] = 0;
29
30     while (head != tail) {
31         int x = q[head++];
32         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
33             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == -1) {
34                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
35                 q[tail++] = e[i].to;
36             }
37     }
38 }
39
40 int dfs(int x, int a) {
41     if (x == t || !a)
42         return a;
43
44     int flow = 0, f;
45     for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
46         if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == d[x] + 1 &&
47             (f = dfs(e[i].to, min(e[i].cap, a))) > 0) {
48             e[i].cap -= f;
49             e[i ^ 1].cap += f;
50             flow += f;
51             a -= f;
52
53             if (!a)
54                 break;
55         }
56
57     return flow;
58 }
59
60 int Dinic() {
61     int flow = 0;
62     while (bfs(), ~d[t]) {
63         memcpy(cur, last, sizeof(int) * (t + 5));
64         flow += dfs(s, inf);
65     }
66     return flow;
67 }
```

3.9 最大流

3.9.1 Dinic

```

1 // 注意Dinic适用于二分图或分层图，对于一般稀疏图ISAP更
2 // 优，稠密图则HLPP更优
3
4 struct edge {
5     int to, cap, prev;
6 } e[maxn * 2];
7
8 int last[maxn], len, d[maxn], cur[maxn], q[maxn];
9
// main函数里要初始化
```

3.9.2 ISAP

可能有毒，慎用。

```

1 // 注意ISAP适用于一般稀疏图，对于二分图或分层图情
2 // 况Dinic比较优，稠密图则HLPP更优
3
4 // 边的定义
// 这里没有记录起点和反向边，因为反向边即为正向边xor 1,
// → 起点即为反向边的终点
```

```

5 struct edge {
6     int to, cap, prev;
7 } e[maxe * 2];
8
9 // 全局变量和数组定义
10 int last[maxn], cnte = 0, d[maxn], p[maxn], c[maxn],
11    ~cur[maxn], q[maxn];
12 int n, m, s, t; // s, t一定要开成全局变量
13
14 void AddEdge(int x, int y, int z) {
15     e[cnte].to = y;
16     e[cnte].cap = z;
17     e[cnte].prev = last[x];
18     last[x] = cnte++;
19 }
20
21 void addedge(int x, int y, int z) {
22     AddEdge(x, y, z);
23     AddEdge(y, x, 0);
24 }
25
26 // 预处理到t的距离标号
27 // 在测试数据组数较少时可以省略, 把所有距离标号初始化为0
28 void bfs() {
29     memset(d, -1, sizeof(d));
30
31     int head = 0, tail = 0;
32     d[t] = 0;
33     q[tail++] = t;
34
35     while (head != tail) {
36         int x = q[head++];
37         c[d[x]]++;
38
39         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
40             if (e[i ^ 1].cap && d[e[i].to] == -1) {
41                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
42                 q[tail++] = e[i].to;
43             }
44     }
45
46 // augment函数 O(n) 沿增广路增广一次, 返回增广的流量
47 int augment() {
48     int a = (~0u) >> 1; // INT_MAX
49
50     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
51         a = min(a, e[p[x]].cap);
52
53     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
54         e[p[x]].cap -= a;
55         e[p[x] ^ 1].cap += a;
56     }
57
58     return a;
59 }
60
61 // 主过程 O(n^2 m), 返回最大流的流量
62 // 注意这里的n是编号最大值, 在这个值不为n的时候一定要开个
63 // 变量记录下来并修改代码
64 int ISAP() {
65     bfs();
66
67     memcpy(cur, last, sizeof(cur));
68
69     int x = s, flow = 0;
70
71     while (d[s] < n) {
72         if (x == t) { // 如果走到了t就增广一次, 并返
73             // 回s重新找增广路
74         }
75     }
76 }
77
78 void addedge(int x, int y, int z) {
79     adde(x, y, z);
80     adde(y, x, 0);
81 }
82
83 void adde(int x, int y, int z) {
84     e[cnte].to = y;
85     e[cnte].cap = z;
86     e[cnte].prev = last[x];
87     last[x] = cnte++;
88 }
89
90 void adde(int x, int y, int z) {
91     e[cnte].to = y;
92     e[cnte].cap = z;
93     e[cnte].prev = last[x];
94     last[x] = cnte++;
95 }
96
97 void adde(int x, int y, int z) {
98     e[cnte].to = y;
99     e[cnte].cap = z;
100    e[cnte].prev = last[x];
101    last[x] = cnte++;
102 }
103
104 // 重要! main函数最前面一定要加上如下初始化
105 memset(last, -1, sizeof(last));
106

```

```

72     flow += augment();
73     x = s;
74 }
75
76     bool ok = false;
77     for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
78         if (e[i].cap && d[x] == d[e[i].to] + 1) {
79             p[e[i].to] = i;
80             x = e[i].to;
81         }
82         ok = true;
83     break;
84 }
85
86 if (!ok) { // 修改距离标号
87     int tmp = n - 1;
88     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
89         if (e[i].cap)
90             tmp = min(tmp, d[e[i].to] + 1);
91
92     if (!--c[d[x]])
93         break; // gap优化, 一定要加上
94
95     c[d[x]] = tmp++;
96     cur[x] = last[x];
97
98     if (x != s)
99         x = e[p[x] ^ 1].to;
100 }
101
102 return flow;
103 }
104
105 // 重要! main函数最前面一定要加上如下初始化
106 memset(last, -1, sizeof(last));

```

3.9.3 HLPP 最高标号预流推进

```

1 constexpr int maxn = 1205, maxe = 120005;
2
3 struct edge {
4     int to, cap, prev;
5 } e[maxe * 2];
6
7 int n, m, s, t;
8 int last[maxn], cnte;
9 int h[maxn], gap[maxn * 2];
10 long long ex[maxn]; // 多余流量
11 bool inq[maxn];
12
13 struct cmp {
14     bool operator()(int x, int y) const {
15         return h[x] < h[y];
16     }
17 };
18
19 priority_queue<int, vector<int>, cmp> heap;
20
21 void adde(int x, int y, int z) {
22     e[cnte].to = y;
23     e[cnte].cap = z;
24     e[cnte].prev = last[x];
25     last[x] = cnte++;
26 }
27
28 void addedge(int x, int y, int z) {
29     adde(x, y, z);
30     adde(y, x, 0);
31 }

```

```

32
33 bool bfs() {
34     static int q[maxn];
35
36     fill(h, h + n + 1, 2 * n); // 如果没有全局的n, 记得
37     // 改这里
38     int head = 0, tail = 0;
39     q[tail++] = t;
40     h[t] = 0;
41
42     while (head < tail) {
43         int x = q[head++];
44         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
45             if (e[i ^ 1].cap && h[e[i].to] > h[x] + 1)
46                 // {
47                 //     h[e[i].to] = h[x] + 1;
48                 //     q[tail++] = e[i].to;
49             }
50
51     return h[s] < 2 * n;
52 }
53 void push(int x) {
54     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
55         if (e[i].cap && h[x] == h[e[i].to] + 1) {
56             int d = min(ex[x], (long long)e[i].cap);
57
58             e[i].cap -= d;
59             e[i ^ 1].cap += d;
60             ex[x] -= d;
61             ex[e[i].to] += d;
62
63             if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
64                 // !inq[e[i].to]) {
65                 heap.push(e[i].to);
66                 inq[e[i].to] = true;
67             }
68
69             if (!ex[x])
70                 break;
71 }
72 void relabel(int x) {
73     h[x] = 2 * n;
74
75     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
76         if (e[i].cap)
77             h[x] = min(h[x], h[e[i].to] + 1);
78 }
79
80 long long hlpp() {
81     if (!bfs())
82         return 0;
83
84     // memset(gap, 0, sizeof(int) * 2 * n);
85     h[s] = n;
86
87     for (int i = 1; i <= n; i++)
88         gap[h[i]]++;
89
90     for (int i = last[s]; ~i; i = e[i].prev)
91         if (e[i].cap) {
92             int d = e[i].cap;
93
94             e[i].cap -= d;
95             e[i ^ 1].cap += d;
96             ex[s] -= d;
97             ex[e[i].to] += d;
98

```

```

99
100    if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
101        // !inq[e[i].to]) {
102        heap.push(e[i].to);
103        inq[e[i].to] = true;
104    }
105
106    while (!heap.empty()) {
107        int x = heap.top();
108        heap.pop();
109        inq[x] = false;
110
111        push(x);
112        if (ex[x]) {
113            if (!--gap[h[x]]) { // gap
114                for (int i = 1; i <= n; i++)
115                    if (i != s && i != t && h[i] >
116                        // h[x])
117                        h[i] = n + 1;
118
119            relabel(x);
120            ++gap[h[x]];
121            heap.push(x);
122            inq[x] = true;
123        }
124
125    }
126
127    return ex[t];
128
129 //记得初始化
130 memset(last, -1, sizeof(last));

```

3.10 费用流

3.10.1 SPFA费用流

```

1 constexpr int maxn = 20005, maxm = 200005;
2
3 struct edge {
4     int to, prev, cap, w;
5 } e[maxm * 2];
6
7 int last[maxn], cnte, d[maxn], p[maxn]; // 记得把last初
8 // 始化成-1, 不然会死循环
9 bool inq[maxn];
10
11 void spfa(int s) {
12
13     memset(d, -63, sizeof(d));
14     memset(p, -1, sizeof(p));
15
16     queue<int> q;
17
18     q.push(s);
19     d[s] = 0;
20
21     while (!q.empty()) {
22         int x = q.front();
23         q.pop();
24         inq[x] = false;
25
26         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
27             if (e[i].cap) {
28                 int y = e[i].to;
29
30                 if (d[x] + e[i].w > d[y]) {

```

```

30         p[y] = i;
31         d[y] = d[x] + e[i].w;
32         if (!inq[y]) {
33             q.push(y);
34             inq[y] = true;
35         }
36     }
37 }
38 }

39 }

40 int mcmf(int s, int t) {
41     int ans = 0;
42
43     while (spfa(s), d[t] > 0) {
44         int flow = 0x3f3f3f3f;
45         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
46             flow = min(flow, e[p[x]].cap);
47
48         ans += flow * d[t];
49
50         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
51             e[p[x]].cap -= flow;
52             e[p[x] ^ 1].cap += flow;
53         }
54     }
55
56     return ans;
57 }

58 void add(int x, int y, int c, int w) {
59     e[cnte].to = y;
60     e[cnte].cap = c;
61     e[cnte].w = w;
62
63     e[cnte].prev = last[x];
64     last[x] = cnte++;
65 }

66 void addedge(int x, int y, int c, int w) {
67     add(x, y, c, w);
68     add(y, x, 0, -w);
69 }

70 }
```

3.10.2 Dijkstra费用流

有的地方也叫原始-对偶费用流。

原理和求多源最短路的Johnson算法是一样的，都是给每个点维护一个势 h_u ，使得对任何有向边 $u \rightarrow v$ 都满足 $w + h_u - h_v \geq 0$ 。

如果有负费用则从 s 开始跑一遍SPFA初始化，否则可以直接初始化 $h_u = 0$ 。

每次增广时得到的路径长度就是 $d_{s,t} + h_t$ ，增广之后让所有 $h_u = h'_u + d'_{s,u}$ ，直到 $d_{s,t} = \infty$ (最小费用最大流)或 $d_{s,t} \geq 0$ (最小费用流)为止。

注意最大费用流要转成取负之后的最小费用流，因为Dijkstra求的是最短路。

```

1 struct edge {
2     int to, cap, prev, w;
3 } e[maxe * 2];
4
5 int last[maxn], cnte;
6
7 long long d[maxn], h[maxn];
8 int p[maxn];
9
10 bool vis[maxn];
11 int s, t;
12
13 void Adde(int x, int y, int z, int w) {
14     e[cnte].to = y;
```

```

15     e[cnte].cap = z;
16     e[cnte].w = w;
17     e[cnte].prev = last[x];
18     last[x] = cnte++;
19 }

20 void addedge(int x, int y, int z, int w) {
21     Adde(x, y, z, w);
22     Adde(y, x, 0, -w);
23 }

24 }

25 void dijkstra() {
26     memset(d, 63, sizeof(d));
27     memset(vis, 0, sizeof(vis));
28
29     priority_queue<pair<long long, int>> heap;
30
31     d[s] = 0;
32     heap.push(make_pair(0ll, s));
33
34     while (!heap.empty()) {
35         int x = heap.top().second;
36         heap.pop();
37
38         if (vis[x])
39             continue;
40
41         vis[x] = true;
42         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
43             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] > d[x] +
44                 e[i].w + h[x] - h[e[i].to]) {
45                 d[e[i].to] = d[x] + e[i].w + h[x] -
46                 h[e[i].to];
47                 p[e[i].to] = i;
48                 heap.push(make_pair(-d[e[i].to],
49                                     e[i].to));
50             }
51     }
52 }
```

```

53 pair<long long, long long> mcmf() {
54     /*
55     spfa();
56     for (int i = 1; i <= t; i++)
57         h[i] = d[i];
58     // 如果初始有负权就像这样跑一遍SPFA预处理
59     */
60
61     long long flow = 0, cost = 0;
62
63     while (dijkstra(), d[t] < 0x3f3f3f3f) {
64         for (int i = 1; i <= t; i++)
65             h[i] += d[i];
66
67         int a = 0x3f3f3f3f;
68
69         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
70             a = min(a, e[p[x]].cap);
71
72         flow += a;
73         cost += (long long)a * h[t];
74
75         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
76             e[p[x]].cap -= a;
77             e[p[x] ^ 1].cap += a;
78         }
79     }
80 }
```

```

81     return make_pair(flow, cost);
82 }
83
84 // 记得初始化
85 memset(last, -1, sizeof(last));

```

3.11 网络流原理

3.11.1 最大流

- 判断一条边是否必定满流

在残量网络中跑一遍Tarjan, 如果某条满流边的两端处于同一SCC中则说明它不一定满流. (因为可以找出包含反向边的环, 增广之后就不满流了.)

3.11.2 最小割

首先牢记最小割的定义: 选权值和尽量小的一些边, 使得删除这些边之后 s 无法到达 t .

- 最小割输出一种方案

在残量网络上从 S 开始 floodfill, 源点可达的记为 S 集, 不可达的记为 T , 如果一条边的起点在 S 集而终点在 T 集, 就将其加入最小割中.

- 最小割的可行边与必须边

- 可行边: 满流, 且残量网络上不存在 u 到 v 的路径, 也就是 u 和 v 不在同一 SCC 中. (实际上也就是最大流必定满流的边.)
- 必须边: 满流, 且残量网络上 S 可达 u , v 可达 T .

- 字典序最小的最小割

直接按字典序从小到大的顺序依次判断每条边能否在最小割中即可. 如果一条边是可行边, 我们就需要把它删掉, 同时进行退流, $u \rightarrow s$ 和 $t \rightarrow v$ 都退掉等同于这条边容量的流量.

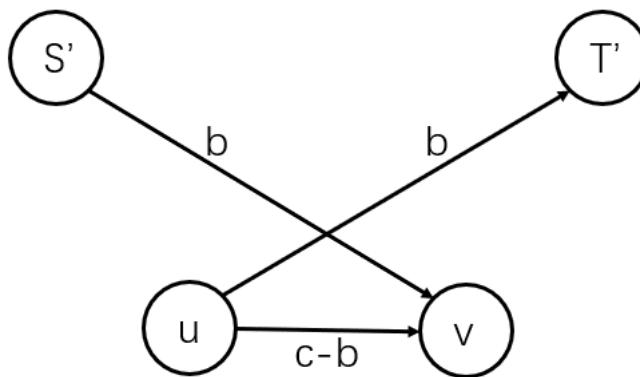
退流用Dinic实现即可.

3.11.3 费用流

3.11.4 上下界网络流

有源汇上下界最大流

新建超级源汇 S' , T' , 然后如图所示转化每一条边.



然后从 S' 到 S , 从 T 到 T' 分别连容量为正无穷的边即可.

因为附加边实际上算了两次流量, 所以最终答案应该减掉所有下界之和.

有源汇上下界最小流

按照上面的方法转换后先跑一遍最大流, 然后撤掉超级源汇和附加边, 反过来跑一次最大流退流, 最大流减去退掉的流量就是最小流.

无源汇上下界可行流

转化方法和上面的图是一样的, 只不过不需要考虑原有的源汇了.

在新图跑一遍最大流之后检查一遍辅助边, 如果有辅助边没满流则无解, 否则把每条边的流量加上 b 就是一组可行方案.

3.11.5 常见建图方法

- 最大流/费用流

流量不是很多的时候可以理解成很多条路径, 并且每条边可以经过的次数有限.

- 最小割

常用的模型是最大权闭合子图. 当然它并不是万能的, 因为限制条件可以带权值.

- 如果某些点全部在 S 集或者 T 集则获得一个正的收益
把这个条件建成一个点, 向要求的点连 ∞ 边, 然后 s 向它连 ∞ 边.
(如果是 T 集就都反过来)

那么如果它在 S 集就一定满足它要求的点都在 S 集, 反之如果是 T 集亦然.

- 如果两个点不在同一集合中则需要付出代价
建双向边, 那显然如果它们不在同一集合中就需要割掉中间的边, 付出对应的代价.

- 二分图, 如果相邻的两个点在同一集合则需要付出代价
染色后给一半的点反转源汇, 就转换成上面的问题了.

3.11.6 例题

- 费用流

- 序列上选尽量大的数, 但连续 k 个数中最多选 p 个.

费用流建图, 先建一条 $n + 1$ 个点的无限容量的链表示不选, 然后每个点往后面 k 个位置连边, 答案是流量为 p 的最大费用流. 因为条件等价于选 p 次并且每次选的所有数间隔都至少是 k .

- 还要求连续 k 个数中最少选 q 个.

任选一个位置把图前后切开就会发现通过截面的流量总和恰为 p . 注意到如果走了最开始的链就代表不选, 因此要限制至少有 q 的流量不走链, 那么只需要把链的容量改成 $p - q$ 就行了.

3.12 Prufer序列

对一棵有 $n \geq 2$ 个结点的树, 它的Prufer编码是一个长为 $n - 2$, 且每个数都在 $[1, n]$ 内的序列.

构造方法: 每次选取编号最小的叶子结点, 记录它的父亲, 然后把它删掉, 直到只剩两个点为止. (并且最后剩的两个点一定有一个是 n 号点.)

相应的, 由Prufer编码重构树的方法: 按顺序读入序列, 每次选取编号最小的且度数为 1 的结点, 把这个点和序列当前点连上, 然后两个点剩余度数同时 -1.

Prufer编码的性质

- 每个至少 2 个结点的树都唯一对应一个Prufer编码. (当然也可以做无根树哈希.)
- 每个点在Prufer序列中出现的次数恰好是度数 - 1. 所以如果给定某些点的度数然后求方案数, 就可以用简单的组合数解决.

最后, 构造和重构直接写都是 $O(n \log n)$ 的, 想优化成线性需要一些技巧.

线性求Prufer序列代码:

```

1 // 0-based
2 vector<vector<int>> adj;
3 vector<int> parent;
4
5 void dfs(int v) {
6     for (int u : adj[v]) {
7         if (u != parent[v]) parent[u] = v, dfs(u);
8     }
9 }
10
11 vector<int> pruefer_code() { // pruefer 是德语
12     int n = adj.size();
13     parent.resize(n), parent[n - 1] = -1;
14     dfs(n - 1);
15 }

```

```

16 int ptr = -1;
17 vector<int> degree(n);
18 for (int i = 0; i < n; i++) {
19     degree[i] = adj[i].size();
20     if (degree[i] == 1 && ptr == -1) ptr = i;
21 }
22
23 vector<int> code(n - 2);
24 int leaf = ptr;
25 for (int i = 0; i < n - 2; i++) {
26     int next = parent[leaf];
27     code[i] = next;
28     if (--degree[next] == 1 && next < ptr)
29         leaf = next;
30     else {
31         ptr++;
32         while (degree[ptr] != 1)
33             ptr++;
34         leaf = ptr;
35     }
36 }
37 return code;
38 }
```

线性重构树代码:

```

1 // 0-based
2 vector<pair<int, int>> pruefer_decode(vector<int> const
3     &code) {
4     int n = code.size() + 2;
5     vector<int> degree(n, 1);
6     for (int i : code) degree[i]++;
7
8     int ptr = 0;
9     while (degree[ptr] != 1) ptr++;
10    int leaf = ptr;
11
12    vector<pair<int, int>> edges;
13    for (int v : code) {
14        edges.emplace_back(leaf, v);
15        if (--degree[v] == 1 && v < ptr)
16            leaf = v;
17        else {
18            ptr++;
19            while (degree[ptr] != 1)
20                ptr++;
21            leaf = ptr;
22        }
23    }
24    edges.emplace_back(leaf, n - 1);
25    return edges;
}
```

3.13 弦图相关

Forked from the template of NEW CODE!!.

1. 团数 \leq 色数 , 弦图团数 = 色数
2. 设 $next(v)$ 表示 $N(v)$ 中最前的点 . 令 w^* 表示所有满足 $A \in B$ 的 w 中最后的一个点 , 判断 $v \cup N(v)$ 是否为极大团 , 只需判断是否存在一个 w , 满足 $Next(w) = v$ 且 $|N(v)|+1 \leq |N(w)|$ 即可 .
3. 最小染色 : 完美消除序列从后往前依次给每个点染色 , 给每个点染上可以染的最小的颜色
4. 最大独立集 : 完美消除序列从前往后能选就选
5. 弦图最大独立集数 = 最小团覆盖数 , 最小团覆盖 : 设最大独立集为 $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$, 则 $\{p_1 \cup N(p_1), \dots, p_t \cup N(p_t)\}$ 为最小团覆盖

4 数据结构

4.1 线段树

4.1.1 非递归线段树

- 如果 $M = 2^k$, 则只能维护 $[1, M - 2]$ 范围
- 找叶子: i 对应的叶子就是 $i + M$
- 单点修改: 找到叶子然后向上跳
- 区间查询: 左右区间各扩展一位, 转换成开区间查询

```

1 int query(int l, int r) {
2     l += M - 1;
3     r += M + 1;
4
5     int ans = 0;
6     while (l ^ r != 1) {
7         ans += sum[l ^ 1] + sum[r ^ 1];
8
9         l >>= 1;
10        r >>= 1;
11    }
12
13    return ans;
14 }
```

区间修改要标记永久化, 并且求区间和和求最值的代码不太一样.

区间加, 区间求和

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     int len = 1, cntl = 0, cntr = 0; // cntl, cntr 是左右
3     → 两边分别实际修改的区间长度
4     for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
5     → >>= 1, len <= 1) {
6         tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
7         if (~l & 1) tree[l ^ 1] += d * len, mark[l ^ 1]
8         → += d, cntl += len;
9         if (r & 1) tree[r ^ 1] += d * len, mark[r ^ 1]
10        → += d, cntr += len;
11    }
12
13    for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
14        tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
15
16    int query(int l, int r) {
17        int ans = 0, len = 1, cntl = 0, cntr = 0;
18        for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
19        → >>= 1, len <= 1) {
20            ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
21            if (~l & 1) ans += tree[l ^ 1], cntl += len;
22            if (r & 1) ans += tree[r ^ 1], cntr += len;
23        }
24
25        for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
26            ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
27
28        return ans;
29    }
30 }
```

区间加, 区间求最大值

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
3     → >>= 1) {
4         if (l < N) {
5             tree[l] = max(tree[l < 1], tree[l < 1 |
6             → 1]) + mark[l];
7
8         }
9     }
10 }
```

```

5         tree[r] = max(tree[r < 1], tree[r < 1 |
6             → 1]) + mark[r];
7     }
8
9     if (~l & 1) {
10         tree[l ^ 1] += d;
11         mark[l ^ 1] += d;
12     }
13     if (r & 1) {
14         tree[r ^ 1] += d;
15         mark[r ^ 1] += d;
16     }
17
18     for (; l; l >= 1, r >= 1)
19         if (l < N) tree[l] = max(tree[l < 1], tree[l
20         → < 1 | 1]) + mark[l],
21             tree[r] = max(tree[r < 1], tree[r
22             → < 1 | 1]) + mark[r];
23
24 void query(int l, int r) {
25     int maxl = -INF, maxr = -INF;
26
27     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >= 1, r
28     → >= 1) {
29         maxl += mark[l];
30         maxr += mark[r];
31
32         if (~l & 1)
33             maxl = max(maxl, tree[l ^ 1]);
34         if (r & 1)
35             maxr = max(maxr, tree[r ^ 1]);
36
37         while (l) {
38             maxl += mark[l];
39             maxr += mark[r];
40
41             l >= 1;
42             r >= 1;
43         }
44
45     }
46
47     return max(maxl, maxr);
48 }
```

4.1.2 线段树维护矩形并

为线段树的每个结点维护 $cover_i$ 表示这个区间被完全覆盖的次数. 更新时分情况讨论, 如果当前区间已被完全覆盖则长度就是区间长度, 否则长度是左右儿子相加.

```

1 constexpr int maxn = 100005, maxm = maxn * 70;
2
3 int lc[maxm], rc[maxm], cover[maxm], sum[maxm], root,
4     → seg_cnt;
5 int s, t, d;
6
7 void refresh(int l, int r, int o) {
8     if (cover[o])
9         sum[o] = r - l + 1;
10    else
11        sum[o] = sum[lc[o]] + sum[rc[o]];
12
13 void modify(int l, int r, int &o) {
14     if (!o)
15         o = ++seg_cnt;
16
17     if (s <= l && t >= r) {
18
19     }
20 }
```

```

18     cover[o] += d;
19     refresh(l, r, o);
20
21     return;
22 }
23
24 int mid = (l + r) / 2;
25
26 if (s <= mid)
27     modify(l, mid, lc[o]);
28 if (t > mid)
29     modify(mid + 1, r, rc[o]);
30
31 refresh(l, r, o);
32 }

33 struct modi {
34     int x, l, r, d;
35
36     bool operator < (const modi &o) {
37         return x < o.x;
38     }
39 } a[maxn * 2];
40
41 int main() {
42
43     int n;
44     scanf("%d", &n);
45
46     for (int i = 1; i <= n; i++) {
47         int lx, ly, rx, ry;
48         scanf("%d%d%d%d", &lx, &ly, &rx, &ry);
49
50         a[i * 2 - 1] = {lx, ly + 1, ry, 1};
51         a[i * 2] = {rx, ly + 1, ry, -1};
52     }
53
54     sort(a + 1, a + n * 2 + 1);
55
56     int last = -1;
57     long long ans = 0;
58
59     for (int i = 1; i <= n * 2; i++) {
60         if (last != -1)
61             ans += (long long)(a[i].x - last) * sum[1];
62         last = a[i].x;
63
64         s = a[i].l;
65         t = a[i].r;
66         d = a[i].d;
67
68         modify(1, 1e9, root);
69     }
70
71     printf("%lld\n", ans);
72
73     return 0;
74 }
```

4.1.3 历史和

EC-Final2020 G, 原题是询问某个区间有多少子区间, 满足子区间中数的种类数为奇数.

离线之后转化成枚举右端点并用线段树维护左端点, 然后就是一个支持区间反转(0/1互换)和询问历史的线段树.

“既然标记会复合 就说明在两个标记中间没有经过任何 pushup 操作

也就是说一个这两个标记对应着 相同的 0 的数量 以及 相同的 1 的数量

那么标记对于答案的影响只能是 $a * 0 + b * 1$
我们维护 a b 即可”

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = (1 << 20) + 5;
6
7 int cnt[maxn][2], mul[maxn][2];
8 bool rev[maxn];
9 long long sum[maxn];
10
11 int now;
12
13 void build(int l, int r, int o) {
14     cnt[o][0] = r - l + 1;
15
16     if (l == r)
17         return;
18
19     int mid = (l + r) / 2;
20
21     build(l, mid, o * 2);
22     build(mid + 1, r, o * 2 + 1);
23 }
24
25 void apply(int o, bool flip, long long w0, long long
26           ↪ w1) {
27     sum[o] += w0 * cnt[o][0] + w1 * cnt[o][1];
28
29     if (flip)
30         swap(cnt[o][0], cnt[o][1]);
31
32     if (rev[o])
33         swap(w0, w1);
34
35     mul[o][0] += w0;
36     mul[o][1] += w1;
37     rev[o] ^= flip;
38 }
39
40 void pushdown(int o) {
41     if (!mul[o][0] && !mul[o][1] && !rev[o])
42         return;
43
44     apply(o * 2, rev[o], mul[o][0], mul[o][1]);
45     apply(o * 2 + 1, rev[o], mul[o][0], mul[o][1]);
46
47     mul[o][0] = mul[o][1] = 0;
48     rev[o] = false;
49 }
50
51 void update(int o) {
52     cnt[o][0] = cnt[o * 2][0] + cnt[o * 2 + 1][0];
53     cnt[o][1] = cnt[o * 2][1] + cnt[o * 2 + 1][1];
54
55     sum[o] = sum[o * 2] + sum[o * 2 + 1];
56 }
57
58 int s, t;
59
60 void modify(int l, int r, int o) {
61     if (s <= l && t >= r) {
62         apply(o, true, 0, 0);
63         return;
64     }
65
66     int mid = (l + r) / 2;
67     pushdown(o);
68 }
```

```

67     if (s <= mid)
68         modify(l, mid, o * 2);
69     if (t > mid)
70         modify(mid + 1, r, o * 2 + 1);
71
72     update(o);
73 }
74
75
76 long long query(int l, int r, int o) {
77     if (s <= l && t >= r)
78         return sum[o];
79
80     int mid = (l + r) / 2;
81     pushdown(o);
82
83     long long ans = 0;
84     if (s <= mid)
85         ans += query(l, mid, o * 2);
86     if (t > mid)
87         ans += query(mid + 1, r, o * 2 + 1);
88
89     return ans;
90 }
91
92 vector<pair<int, int>> vec[maxn]; // pos, id
93
94 long long ans[maxn];
95 int a[maxn], last[maxn];
96
97 int main() {
98
99     int n;
100    scanf("%d", &n);
101
102    build(1, n, 1);
103
104    for (int i = 1; i <= n; i++)
105        scanf("%d", &a[i]);
106
107    int m;
108    scanf("%d", &m);
109
110    for (int i = 1; i <= m; i++) {
111        int l, r;
112        scanf("%d%d", &l, &r);
113
114        vec[r].emplace_back(l, i);
115    }
116
117    for (int i = 1; i <= n; i++) {
118        s = last[a[i]] + 1;
119        t = now = i;
120
121        modify(1, n, 1);
122        apply(1, false, 0, 1);
123
124        for (auto [l, k] : vec[i]) {
125            s = l;
126            ans[k] = query(1, n, 1);
127        }
128
129        last[a[i]] = i;
130    }
131
132    for (int i = 1; i <= m; i++)
133        printf("%lld\n", ans[i]);
134
135    return 0;
}

```

136 }

4.2 陈丹琦分治

4.2.1 动态图连通性(分治并查集)

```

1 vector<pair<int, int>> seg[(1 << 22) + 5];
2
3 int s, t;
4 pair<int, int> d;
5
6 void add(int l, int r, int o) {
7     if (s > t)
8         return;
9
10    if (s <= l && t >= r) {
11        seg[o].push_back(d);
12        return;
13    }
14
15    int mid = (l + r) / 2;
16
17    if (s <= mid)
18        add(l, mid, o * 2);
19    if (t > mid)
20        add(mid + 1, r, o * 2 + 1);
21 }
22
23 int ufs[maxn], sz[maxn], stk[maxn], top;
24
25 int findufs(int x) {
26     while (ufs[x] != x)
27         x = ufs[x];
28
29     return ufs[x];
30 }
31
32 void link(int x, int y) {
33     x = findufs(x);
34     y = findufs(y);
35
36     if (x == y)
37         return;
38
39     if (sz[x] < sz[y])
40         swap(x, y);
41
42     ufs[y] = x;
43     sz[x] += sz[y];
44     stk[++top] = y;
45 }
46
47 int ans[maxn];
48
49 void solve(int l, int r, int o) {
50     int tmp = top;
51
52     for (auto pi : seg[o])
53         link(pi.first, pi.second);
54
55     if (l == r)
56         ans[l] = top;
57     else {
58         int mid = (l + r) / 2;
59
60         solve(l, mid, o * 2);
61         solve(mid + 1, r, o * 2 + 1);
62     }
63 }

```

```

64     for (int i = top; i > tmp; i--) {
65         int x = stk[i];
66
67         sz[ufs[x]] -= sz[x];
68         ufs[x] = x;
69     }
70
71     top = tmp;
72 }
73
74 map<pair<int, int>, int> mp;

```

4.2.2 四维偏序

```

1 // 四维偏序
2
3 void CDQ1(int l, int r) {
4     if (l >= r)
5         return;
6
7     int mid = (l + r) / 2;
8
9     CDQ1(l, mid);
10    CDQ1(mid + 1, r);
11
12    int i = l, j = mid + 1, k = l;
13
14    while (i <= mid && j <= r) {
15        if (a[i].x < a[j].x) {
16            a[i].ins = true;
17            b[k++] = a[i++];
18        }
19        else {
20            a[j].ins = false;
21            b[k++] = a[j++];
22        }
23    }
24
25    while (i <= mid) {
26        a[i].ins = true;
27        b[k++] = a[i++];
28    }
29
30    while (j <= r) {
31        a[j].ins = false;
32        b[k++] = a[j++];
33    }
34
35    copy(b + l, b + r + 1, a + l); // 后面的分治会破坏排序, 所以要复制一份
36
37    CDQ2(l, r);
38 }
39
40 void CDQ2(int l, int r) {
41     if (l >= r)
42         return;
43
44     int mid = (l + r) / 2;
45
46     CDQ2(l, mid);
47     CDQ2(mid + 1, r);
48
49     int i = l, j = mid + 1, k = l;
50
51     while (i <= mid && j <= r) {
52         if (b[i].y < b[j].y) {
53             if (b[i].ins)
54                 add(b[i].z, 1); // 树状数组

```

```

55         t[k++] = b[i++];
56     }
57     else{
58         if (!b[j].ins)
59             ans += query(b[j].z - 1);
60
61         t[k++] = b[j++];
62     }
63 }
64
65 while (i <= mid) {
66     if (b[i].ins)
67         add(b[i].z, 1);
68
69     t[k++] = b[i++];
70 }
71
72 while (j <= r) {
73     if (!b[j].ins)
74         ans += query(b[j].z - 1);
75
76     t[k++] = b[j++];
77 }
78
79 for (i = l; i <= mid; i++)
80     if (b[i].ins)
81         add(b[i].z, -1);
82
83 copy(t + l, t + r + 1, b + l);
84 }
85

```

4.3 整体二分

修改和询问都要划分, 备份一下, 递归之前copy回去.

如果是满足可减性的问题(例如查询区间k小数)可以直接在划分的时候把询问的k修改一下. 否则需要维护一个全局的数据结构, 一般来说可以先递归右边再递归左边, 具体维护方法视情况而定.

以下代码以ZJOI K大数查询为例(区间都添加一个数, 询问区间k大数).

```

1 int op[maxn], ql[maxn], qr[maxn]; // 1: modify 2:
2                                     ↪ query
3 long long qk[maxn]; // 修改和询问可以一起存
4
5 int ans[maxn];
6
7 void solve(int l, int r, vector<int> v) { // 如果想常
8                                     ↪ 可用数组, 然后只需要传一个数组的l, r; 递归的时候类
9                                     ↪ 似归并反过来, 开两个辅助数组, 处理完再复制回去即可
10    if (v.empty())
11        return;
12
13    if (l == r) {
14        for (int i : v)
15            if (op[i] == 2)
16                ans[i] = l;
17
18        return;
19    }
20
21    int mid = (l + r) / 2;
22
23    vector<int> vl, vr;
24
25    for (int i : v) {
26        if (op[i] == 1) {
27            if (qk[i] <= mid)
28
```

```

25     vl.push_back(i);
26     else {
27         update(ql[i], qr[i], 1); // update是区间
28         ↪加
29         vr.push_back(i);
30     }
31     else {
32         long long tmp = query(ql[i], qr[i]);
33
34         if (qk[i] ≤ tmp) // 因为是k大数查询
35             vr.push_back(i);
36         else {
37             qk[i] == tmp;
38             vl.push_back(i);
39         }
40     }
41 }
42
43 for (int i : vr)
44     if (op[i] == 1)
45         update(ql[i], qr[i], -1);
46
v.clear();
48
49 solve(l, mid, vl);
50 solve(mid + 1, r, vr);
51 }
52
53 int main() {
54     int n, m;
55     scanf("%d%d", &n, &m);
56
57     M = 1;
58     while (M < n + 2)
59         M *= 2;
60
61     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
62         scanf("%d%d%d%lld", &op[i], &ql[i], &qr[i],
63               ↪&qk[i]);
64
vector<int> v;
65 for (int i = 1; i ≤ m; i++)
66     v.push_back(i);
67
solve(1, 1e9, v);
68
for (int i = 1; i ≤ m; i++)
69     if (op[i] == 2)
70         printf("%d\n", ans[i]);
71
return 0;
72 }
73
74 }
75

```

```

9     void refresh() {
10         size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
11         } // 更新子树大小(和附加信息, 如果有的话)
12     } null[maxn], *root = null, *ptr = null; // 数组名叫
13         ↪做null是为了方便开哨兵节点
14         // 如果需要删除而空间不能直接开下所有结点, 则需要再写一个
15         ↪垃圾回收
16         // 注意: 数组里的元素一定不能delete, 否则会导致RE
17         // 重要! 在主函数最开始一定要加上以下预处理:
18         null → ch[0] = null → ch[1] = null;
19         null → size = 0;
20
21         // 伪构造函数 O(1)
22         // 为了方便, 在结点类外面再定义一个伪构造函数
23         node *newnode(int x) { // 键值为x
24             *++ptr = node(x);
25             ptr → ch[0] = ptr → ch[1] = null;
26             return ptr;
27         }
28
29         // 插入键值 期望O(log n)
30         // 需要调用旋转
31         void insert(int x, node *&rt) { // rt为当前结点, 建议调
32             →用时传入root, 下同
33             if (rt == null) {
34                 rt = newnode(x);
35                 return;
36             }
37
38             int d = x > rt → key;
39             insert(x, rt → ch[d]);
40             rt → refresh();
41
42             if (rt → ch[d] → p < rt → p)
43                 rot(rt, d ^ 1);
44
45         // 删除一个键值 期望O(log n)
46         // 要求键值必须存在至少一个, 否则会导致RE
47         // 需要调用旋转
48         void erase(int x, node *&rt) {
49             if (x == rt → key) {
50                 if (rt → ch[0] != null && rt → ch[1] != null)
51                     ↪{
52                         int d = rt → ch[0] → p < rt → ch[1] →
53                           ↪p;
54                         rot(rt, d);
55                         erase(x, rt → ch[d]);
56                     }
57                 else
58                     rt = rt → ch[rt → ch[0] == null];
59             }
60             else
61                 erase(x, rt → ch[x > rt → key]);
62
63             if (rt != null)
64                 rt → refresh();
65
66         // 求元素的排名(严格小于键值的个数 + 1) 期望O(log n)
67         // 非递归
68         int rank(int x, node *rt) {
69             int ans = 1, d;
70             while (rt != null) {
71                 if ((d = x > rt → key))
72                     ans += rt → ch[0] → size + 1;
73
74                 rt = rt → ch[d];
75             }
76         }
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
609
610
611
612
613
614
615
616
617
617
618
619
619
620
621
622
623
623
624
625
625
626
626
627
627
628
628
629
629
629
629
630
630
630
630
631
631
631
631
632
632
632
632
633
633
633
633
634
634
634
634
635
635
635
635
636
636
636
636
637
637
637
637
638
638
638
638
639
639
639
639
640
640
640
640
641
641
641
641
642
642
642
642
643
643
643
643
644
644
644
644
645
645
645
645
646
646
646
646
647
647
647
647
648
648
648
648
649
649
649
649
650
650
650
650
651
651
651
651
652
652
652
652
653
653
653
653
654
654
654
654
655
655
655
655
656
656
656
656
657
657
657
657
658
658
658
658
659
659
659
659
660
660
660
660
661
661
661
661
662
662
662
662
663
663
663
663
664
664
664
664
665
665
665
665
666
666
666
666
667
667
667
667
668
668
668
668
669
669
669
669
670
670
670
670
671
671
671
671
672
672
672
672
673
673
673
673
674
674
674
674
675
675
675
675
676
676
676
676
677
677
677
677
678
678
678
678
679
679
679
679
680
680
680
680
681
681
681
681
682
682
682
682
683
683
683
683
684
684
684
684
685
685
685
685
686
686
686
686
687
687
687
687
688
688
688
688
689
689
689
689
690
690
690
690
691
691
691
691
692
692
692
692
693
693
693
693
694
694
694
694
695
695
695
695
696
696
696
696
697
697
697
697
698
698
698
698
699
699
699
699
700
700
700
700
701
701
701
701
702
702
702
702
703
703
703
703
704
704
704
704
705
705
705
705
706
706
706
706
707
707
707
707
708
708
708
708
709
709
709
709
710
710
710
710
711
711
711
711
712
712
712
712
713
713
713
713
714
714
714
714
715
715
715
715
716
716
716
716
717
717
717
717
718
718
718
718
719
719
719
719
720
720
720
720
721
721
721
721
722
722
722
722
723
723
723
723
724
724
724
724
725
725
725
725
726
726
726
726
727
727
727
727
728
728
728
728
729
729
729
729
730
730
730
730
731
731
731
731
732
732
732
732
733
733
733
733
734
734
734
734
735
735
735
735
736
736
736
736
737
737
737
737
738
738
738
738
739
739
739
739
740
740
740
740
741
741
741
741
742
742
742
742
743
743
743
743
744
744
744
744
745
745
745
745
746
746
746
746
747
747
747
747
748
748
748
748
749
749
749
749
750
750
750
750
751
751
751
751
752
752
752
752
753
753
753
753
754
754
754
754
755
755
755
755
756
756
756
756
757
757
757
757
758
758
758
758
759
759
759
759
760
760
760
760
761
761
761
761
762
762
762
762
763
763
763
763
764
764
764
764
765
765
765
765
766
766
766
766
767
767
767
767
768
768
768
768
769
769
769
769
770
770
770
770
771
771
771
771
772
772
772
772
773
773
773
773
774
774
774
774
775
775
775
775
776
776
776
776
777
777
777
777
778
778
778
778
779
779
779
779
780
780
780
780
781
781
781
781
782
782
782
782
783
783
783
783
784
784
784
784
785
785
785
785
786
786
786
786
787
787
787
787
788
788
788
788
789
789
789
789
790
790
790
790
791
791
791
791
792
792
792
792
793
793
793
793
794
794
794
794
795
795
795
795
796
796
796
796
797
797
797
797
798
798
798
798
799
799
799
799
800
800
800
800
801
801
801
801
802
802
802
802
803
803
803
803
804
804
804
804
805
805
805
805
806
806
806
806
807
807
807
807
808
808
808
808
809
809
809
809
810
810
810
810
811
811
811
811
812
812
812
812
813
813
813
813
814
814
814
814
815
815
815
815
816
816
816
816
817
817
817
817
818
818
818
818
819
819
819
819
820
820
820
820
821
821
821
821
822
822
822
822
823
823
823
823
824
824
824
824
825
825
825
825
826
826
826
826
827
827
827
827
828
828
828
828
829
829
829
829
830
830
830
830
831
831
831
831
832
832
832
832
833
833
833
833
834
834
834
834
835
835
835
835
836
836
836
836
837
837
837
837
838
838
838
838
839
839
839
839
840
840
840
840
841
841
841
841
842
842
842
842
843
843
843
843
844
844
844
844
845
845
845
845
846
846
846
846
847
847
847
847
848
848
848
848
849
849
849
849
850
850
850
850
851
851
851
851
852
852
852
852
853
853
853
853
854
854
854
854
855
855
855
855
856
856
856
856
857
857
857
857
858
858
858
858
859
859
859
859
860
860
860
860
861
861
861
861
862
862
862
862
863
863
863
863
864
864
864
864
865
865
865
865
866
866
866
866
867
867
867
867
868
868
868
868
869
869
869
869
870
870
870
870
871
871
871
871
872
872
872
872
873
873
873
873
874
874
874
874
875
875
875
875
876
876
876
876
877
877
877
877
878
878
878
878
879
879
879
879
880
880
880
880
881
881
881
881
882
882
882
882
883
883
883
883
884
884
884
884
885
885
885
885
886
886
886
886
887
887
887
887
888
888
888
888
889
889
889
889
890
890
890
890
891
891
891
891
892
892
892
892
893
893
893
893
894
894
894
894
895
895
895
895
896
896
896
896
897
897
897
897
898
898
898
898
899
899
899
899
900
900
900
900
901
901
901
901
902
902
902
902
903
903
903
903
904
904
904
904
905
905
905
905
906
906
906
906
907
907
907
907
908
908
908
908
909
909
909
909
910
910
910
910
911
911
911
911
912
912
912
912
913
913
913
913
914
914
914
914
915
915
915
915
916
916
916
916
917
917
917
917
918
918
918
918
919
919
919
919
920
920
920
920
921
921
921
921
922
922
922
922
923
923
923
923
924
924
924
924
925
925
925
925
926
926
926
926
927
927
927
927
928
928
928
928
929
929
929
929
930
930
930
930
931
931
931
931
932
932
932
932
933
933
933
933
934
934
934
934
935
935
935
935
936
936
936
936
937
937
937
937
938
938
938
938
939
939
939
939
940
940
940
940
941
941
941
941
942
942
942
942
943
943
943
943
944
944
944
944
945
945
945
945
946
946
946
946
947
947
947
947
948
948
948
948
949
949
949
949
950
950
950
950
951
951
951
951
952
952
952
952
953
953
953
953
954
954
954
954
955
955
955
955
956
956
956
956
957
957
957
957
958
958
958
958
959
959
959
959
960
960
960
960
961
961
961
961
962
962
962
962
963
963
963
963
964
964
964
964
965
965
965
965
966
966
966
966
967
967
967
967
968
968
968
968
969
969
969
969
970
970
970
970
971
971
971
971
972
972
972
972
973
973
973
973
974
974
974
974
975
975
975
975
976
976
976
976
977
977
977
977
978
978
978
978
979
979
979
979
980
980
980
980
981
981
981
981
982
982
982
982
983
983
983
983
984
984
984
984
985
985
985
985
986
986
986
986
987
987
987
987
988
988
988
988
989
989
989
989
990
990
990
990
991
991
991
991
992
992
992
992
993
993
993
993
994
994
994
994
995
995
995
995
996
996
996
996
997
997
997
997
998
998
998
998
999
999
999
999
1000
1000
1000
1000
1001
1001
1001
1001
1002
1002
1002
1002
1003
1003
1003
1003
1004
1004
1004
1004
1005
1005
1005
1005
1006
1006
1006
1006
1007
1007
1007
1007
1008
1008
1008
1008
1009
1009
1009
1009
1010
1010
1010
1010
1011
1011
1011
1011
1012
1012
1012
1012
1013
1013
1013
1013
1014
1014
1014
1014
1015
1015
1015
1015
1016
1016
1016
1016
1017
1017
1017
1017
1018
1018
1018
1018
1019
1019
1019
1019
1020
1020
1020
1020
1021
1021
1021
1021
1022
1022
1022
1022
1023
1023
1023
1023
1024
1024
1024
1024
1025
1025
1025
1025
1026
1026
1026
1026
1027
1027
1027
1027
1028
1028
1028
1028
1029
1029
1029
1029
1030
1030
1030
1030
1031
1031
1031
1031
1032
1032
1032
1032
1033
1033
1033
1033
1034
1034
1034
1034
1035
1035
1035
1035
1036
1036
1036
1036
1037
1037
1037
1037
1038
1038
1038
1038
1039
1039
1039
1039
1040
1040
1040
1040
1041
1041
1041
1041
1042
1042
1042
1042
1043
1043
1043
1043
1044
1044
1044
1044
1045
1045
1045
1045
1046
1046
1046
1046
1047
1047
1047
1047
1048
1048
1048
1048
1049
1049
1049
1049
1050
1050
1050
1050
1051
1051
1051
1051
1052
1052
1052
1052
1053
1053
1053
1053
1054
1054
1054
1054
1055
1055
1055
1055
1056
1056
1056
1056
1057
1057
1057
1057
1058
1058
1058
1058
1059
1059
1059
1059
1060
1060
1060
1060
1061
1061
1061
1061
1062
1062
1062
1062
1063
1063
1063
1063
1064
1064
1064
1064
1065
1065
1065
1065
1066
1066
1066
1066
1067
1067
1067
1067
1068
1068
1068
1068
1069
1069
1069
1069
1070
1070
1070
1070
1071
1071
1071
1071
1072
1072
1072
1072
1073
1073
1073
1073
1074
1074
1074
1074
1075
1075
1075
1075
1076
1076
1076
1076
1077
1077
1077
1077
1078
1078
1078
1078
1079
1079
1079
1079
1080
1080
1080
108
```

```

73     }
74
75     return ans;
76 }
77
78 // 返回排名第k(从1开始)的键值对应的指针 期望O(log n)
79 // 非递归
80 node *kth(int x, node *rt) {
81     int d;
82     while (rt != null) {
83         if ((d = x > rt) → ch[0] → size + 1)
84             return rt;
85
86         if ((d = x > rt) → ch[0] → size)
87             x = rt → ch[0] → size + 1;
88
89         rt = rt → ch[d];
90     }
91
92     return rt;
93 }
94
95 // 返回前驱(最大的比给定键值小的键值)对应的指针 期
96 // →望O(log n)
97 // 非递归
98 node *pred(int x, node *rt) {
99     node *y = null;
100    int d;
101
102    while (rt != null) {
103        if ((d = x > rt) → key))
104            y = rt;
105
106        rt = rt → ch[d];
107    }
108
109    return y;
110 }
111
112 // 返回后继(最小的比给定键值大的键值)对应的指针 期
113 // →望O(log n)
114 // 非递归
115 node *succ(int x, node *rt) {
116     node *y = null;
117     int d;
118
119     while (rt != null) {
120         if ((d = x < rt) → key))
121             y = rt;
122
123         rt = rt → ch[d ^ 1];
124     }
125
126     return y;
127 }
128
129 // 旋转(Treap版本) O(1)
130 // 平衡树基础操作
131 // 要求对应儿子必须存在, 否则会导致后续各种莫名其妙的问题
132 void rot(node *&x, int d) { // x为被转下去的结点, 会被修
133     // 改以维护树结构
134     node *y = x → ch[d ^ 1];
135
136     x → ch[d ^ 1] = y → ch[d];
137     y → ch[d] = x;
138
139     x → refresh();
140     (x = y) → refresh();
141 }

```

4.4.2 无旋Treap/可持久化Treap

```

1 struct node {
2     int val, size;
3     node *ch[2];
4
5     node(int val) : val(val), size(1) {}
6
7     inline void refresh() {
8         size = ch[0] → size + ch[1] → size;
9     }
10
11 } null[maxn];
12
13 node *copied(node *x) { // 如果不用可持久化的话, 直接用
14     // 就行了
15     return new node(*x);
16 }
17
18 node *merge(node *x, node *y) {
19     if (x == null)
20         return y;
21     if (y == null)
22         return x;
23
24     node *z;
25     if (rand() % (x → size + y → size) < x → size) {
26         z = copied(y);
27         z → ch[0] = merge(x, y → ch[0]);
28     }
29     else {
30         z = copied(x);
31         z → ch[1] = merge(x → ch[1], y);
32     }
33
34     z → refresh(); // 因为每次只有一边会递归到儿子, 所
35     // →以z不可能取到null
36     return z;
37 }
38 pair<node*, node*> split(node *x, int k) { // 左边大小
39     // →为k
40     if (x == null)
41         return make_pair(null, null);
42
43     pair<node*, node*> pi(null, null);
44
45     if (k ≤ x → ch[0] → size) {
46         pi = split(x → ch[0], k);
47
48         node *z = copied(x);
49         z → ch[0] = pi.second;
50         z → refresh();
51         pi.second = z;
52     }
53     else {
54         pi = split(x → ch[1], k - x → ch[0] → size -
55         // → 1);
56
57         node *y = copied(x);
58         y → ch[1] = pi.first;
59         y → refresh();
60         pi.first = y;
61     }
62 }
63

```

```

64 // 记得初始化null
65 int main() {
66     for (int i = 0; i <= n; i++)
67         null[i].ch[0] = null[i].ch[1] = null;
68     null → size = 0;
69
70     // do something
71
72     return 0;
73 }
```

4.4.3 Splay

如果插入的话可以直接找到底然后splay一下，也可以直接splay前驱后继。

```

1 #define dir(x) ((x) == (x) → p → ch[1])
2
3 struct node {
4     int size;
5     bool rev;
6     node *ch[2], *p;
7
8     node() : size(1), rev(false) {}
9
10    void pushdown() {
11        if (!rev)
12            return;
13
14        ch[0] → rev ≈ true;
15        ch[1] → rev ≈ true;
16        swap(ch[0], ch[1]);
17
18        rev=false;
19    }
20
21    void refresh() {
22        size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
23    }
24 } null[maxn], *root = null;
25
26 void rot(node *x, int d) {
27     node *y = x → ch[d ^ 1];
28
29     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
30         y → ch[d] → p = x;
31     ((y → p = x → p) != null ? x → p → ch[dir(x)] :
32         → root) = y;
33     (y → ch[d] = x) → p = y;
34
35     x → refresh();
36     y → refresh();
37 }
38
39 void splay(node *x, node *t) {
40     while (x → p != t) {
41         if (x → p → p == t) {
42             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
43             break;
44         }
45
46         if (dir(x) == dir(x → p))
47             rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
48         else
49             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
50     }
51 }
52
53 node *kth(int k, node *o) {
```

```

54     int d;
55     k++; // 因为最左边有一个哨兵
56
57     while (o != null) {
58         o → pushdown();
59
60         if (k == o → ch[0] → size + 1)
61             return o;
62
63         if ((d = k > o → ch[0] → size)) {
64             k -= o → ch[0] → size + 1;
65             o = o → ch[d];
66         }
67
68         return null;
69    }
70
71 void reverse(int l, int r) {
72     splay(kth(l - 1));
73     splay(kth(r + 1), root);
74
75     root → ch[1] → ch[0] → rev ≈ true;
76 }
77
78 int n, m;
79
80 int main() {
81     null → size = 0;
82     null → ch[0] = null → ch[1] = null → p = null;
83
84     scanf("%d%d", &n, &m);
85     root = null + n + 1;
86     root → ch[0] = root → ch[1] = root → p = null;
87
88     for (int i = 1; i <= n; i++) {
89         null[i].ch[1] = null[i].p = null;
90         null[i].ch[0] = root;
91         root → p = null + i;
92         (root = null + i) → refresh();
93     }
94
95     null[n + 2].ch[1] = null[n + 2].p = null;
96     null[n + 2].ch[0] = root; // 这里直接建成一条链的,
97                             // → 如果想减少常数也可以递归建一个平衡的树
98     root → p = null + n + 2; // 总之记得建两个哨兵, 这
99                             // → 样splay起来不需要特判
100    (root = null + n + 2) → refresh();
101
102    // Do something
103
104    return 0;
105 }
```

4.5 树链剖分

4.5.1 动态树形DP(最大权独立集)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, maxm = 262155, inf =
6     ↪ 0x3f3f3f3f;
7
8 struct binary_heap {
9     priority_queue<int> q, t;
10
11     binary_heap() {}
```

```

11 void push(int x) {
12     q.push(x);
13 }
14
15 void erase(int x) {
16     t.push(x);
17 }
18
19 int top() {
20     while (!t.empty() && q.top() == t.top()) {
21         q.pop();
22         t.pop();
23     }
24
25     return q.top();
26 }
27 } heap;
28
29 int pool[maxm][2][2], (*pt)[2][2] = pool;
30
31 void merge(int a[2][2], int b[2][2]) {
32     static int c[2][2];
33     memset(c, 0, sizeof(c));
34
35     for (int i = 0; i < 2; i++)
36         for (int j = 0; j < 2; j++)
37             for (int k = 0; k < 2; k++)
38                 if (!(j && k))
39                     for (int t = 0; t < 2; t++)
40                         c[i][t] = max(c[i][t], a[i][j]
41                                         + b[k][t]);
42
43     memcpy(a, c, sizeof(c));
44 }
45
46 vector<pair<int, int>> tw;
47
48 struct seg_tree {
49     int (*tr)[2][2], n;
50
51     int s, d[2];
52
53     seg_tree() {}
54
55     void update(int o) {
56         memcpy(tr[o], tr[o * 2], sizeof(int) * 4);
57         merge(tr[o], tr[o * 2 + 1]);
58     }
59
60     void build(int l, int r, int o) {
61         if (l == r) {
62             tr[o][0][0] = tw[l - 1].first;
63             tr[o][0][1] = tr[o][1][0] = -inf;
64             tr[o][1][1] = tw[l - 1].second;
65
66             return;
67         }
68
69         int mid = (l + r) / 2;
70
71         build(l, mid, o * 2);
72         build(mid + 1, r, o * 2 + 1);
73
74         update(o);
75     }
76
77     void modify(int l, int r, int o) {
78         if (l == r) {
79             tr[o][0][0] = d[0];
80             tr[o][0][1] = tr[o][1][0] = -inf;
81             tr[o][1][1] = d[1];
82
83             return;
84         }
85
86         int mid = (l + r) / 2;
87
88         if (s <= mid)
89             modify(l, mid, o * 2);
90         else
91             modify(mid + 1, r, o * 2 + 1);
92
93         update(o);
94     }
95
96     int getval() {
97         int ans = 0;
98         for (int i = 0; i < 2; i++)
99             for (int j = 0; j < 2; j++)
100                 ans = max(ans, tr[1][i][j]);
101
102     return ans;
103 }
104
105 pair<int, int> getpair() {
106     int ans[2] = {0};
107     for (int i = 0; i < 2; i++)
108         for (int j = 0; j < 2; j++)
109             ans[i] = max(ans[i], tr[1][i][j]);
110
111     return make_pair(ans[0], ans[1]);
112 }
113
114 void build(int len) {
115     n = len;
116     int N = 1;
117     while (N < n * 2)
118         N *= 2;
119
120     tr = pt;
121     pt += N;
122
123     build(1, n, 1);
124 }
125
126 void modify(int x, int dat[2]) {
127     s = x;
128     for (int i = 0; i < 2; i++)
129         d[i] = dat[i];
130     modify(1, n, 1);
131 }
132 } seg[maxn];
133
134 vector<int> G[maxn];
135
136 int p[maxn], d[maxn], sz[maxn], son[maxn], top[maxn];
137 int dp[maxn][2], dptr[maxn][2], w[maxn];
138
139 void dfs1(int x) {
140     d[x] = d[p[x]] + 1;
141     sz[x] = 1;
142
143     for (int y : G[x])
144         if (y != p[x]) {
145             p[y] = x;
146             dfs1(y);
147
148             if (sz[y] > sz[son[x]])

```

```

149     |     |     son[x] = y;
150
151     |     |     sz[x] += sz[y];
152 }
153
154 void dfs2(int x) {
155     if (x == son[p[x]]) {
156         top[x] = top[p[x]];
157     } else {
158         top[x] = x;
159
160         for (int y : G[x])
161             if (y != p[x])
162                 dfs2(y);
163
164         dp[x][1] = w[x];
165         for (int y : G[x])
166             if (y != p[x] && y != son[x]) {
167                 dp[x][1] += dptr[y][0];
168                 dp[x][0] += max(dptr[y][0], dptr[y][1]);
169             }
170
171         if (top[x] == x) {
172             tw.clear();
173
174             for (int u = x; u; u = son[u])
175                 tw.push_back(make_pair(dp[u][0], dp[u]
176                                         → [1]));
177
178             seg[x].build((int)tw.size());
179
180             tie(dptr[x][0], dptr[x][1]) = seg[x].getpair();
181
182             heap.push(seg[x].getval());
183         }
184
185
186 void modify(int x, int dat) {
187     dp[x][1] -= w[x];
188     dp[x][1] += (w[x] = dat);
189
190     while (x) {
191         if (p[top[x]]) {
192             dp[p[top[x]]][0] -= max(dptr[top[x]][0],
193                                         → dptr[top[x]][1]);
194             dp[p[top[x]]][1] -= dptr[top[x]][0];
195         }
196
197         heap.erase(seg[top[x]].getval());
198         seg[top[x]].modify(d[x] - d[top[x]] + 1,
199                           → dp[x]);
200         heap.push(seg[top[x]].getval());
201
202         tie(dptr[top[x]][0], dptr[top[x]][1]) =
203             → seg[top[x]].getpair();
204
205         if (p[top[x]]) {
206             dp[p[top[x]]][0] += max(dptr[top[x]][0],
207                                         → dptr[top[x]][1]);
208             dp[p[top[x]]][1] += dptr[top[x]][0];
209         }
210
211         x = p[top[x]];
212     }
213
214     int main() {
215         int n, m;

```

```

214     scanf("%d%d", &n, &m);
215
216     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
217         scanf("%d", &w[i]);
218
219     for (int i = 1; i < n; i++) {
220         int x, y;
221         scanf("%d%d", &x, &y);
222
223         G[x].push_back(y);
224         G[y].push_back(x);
225     }
226
227     dfs1(1);
228     dfs2(1);
229
230     while (m--) {
231         int x, dat;
232         scanf("%d%d", &x, &dat);
233
234         modify(x, dat);
235
236         printf("%d\n", heap.top());
237     }
238
239     return 0;
240 }

```

4.6 树分治

4.6.1 动态树分治

```

1 // 为了减小常数, 这里采用bfs写法, 实测预处理比dfs快将近一
2 →半
3 // 以下以维护一个点到每个黑点的距离之和为例
4
5 // 全局数组定义
6 vector<int> G[maxn], W[maxn];
7 int size[maxn], son[maxn], q[maxn];
8 int p[maxn], depth[maxn], id[maxn][20], d[maxn][20]; //
9 → id是对应层所在子树的根
10 int a[maxn], ca[maxn], b[maxn][20], cb[maxn][20]; // 维
11 → 护距离和用的
12 bool vis[maxn], col[maxn];
13
14 // 建树 总计O(n\log n)
15 // 需要调用找重心和预处理距离, 同时递归调用自身
16 void build(int x, int k, int s, int pr) { // 结点, 深度,
17   → 连通块大小, 点分树上的父亲
18   x = getcenter(x, s);
19   vis[x] = true;
20   depth[x] = k;
21   p[x] = pr;
22
23   for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
24       if (!vis[G[x][i]]) {
25           d[G[x][i]][k] = W[x][i];
26           p[G[x][i]] = x;
27
28           getdis(G[x][i], k, G[x][i]); // bfs每个子树,
29           → 预处理距离
30       }
31
32   for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
33       if (!vis[G[x][i]])
34           build(G[x][i], k + 1, size[G[x][i]], x); // → 递归建树
35
36 }

```

```

32 // 找重心 O(n)
33 int getcenter(int x, int s) {
34     int head = 0, tail = 0;
35     q[tail++] = x;
36
37     while (head != tail) {
38         x = q[head++];
39         size[x] = 1; // 这里不需要清空，因为以后要用的话
39         → 一定会重新赋值
40         son[x] = 0;
41
42         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
43             if (!vis[G[x][i]] && G[x][i] != p[x]) {
44                 p[G[x][i]] = x;
45                 q[tail++] = G[x][i];
46             }
47         }
48
49         for (int i = tail - 1; i; i--) {
50             x = q[i];
51             size[p[x]] += size[x];
52
53             if (size[x] > size[son[p[x]]])
54                 son[p[x]] = x;
55         }
56
57         x = q[0];
58         while (son[x] && size[son[x]] * 2 ≥ s)
59             x = son[x];
60
61         return x;
62     }
63
64 // 预处理距离 O(n)
65 // 方便起见，这里直接用了笨一点的方法，O(n log n)全存下来
66 void getdis(int x, int k, int rt) {
67     int head = 0, tail = 0;
68     q[tail++] = x;
69
70     while (head != tail) {
71         x = q[head++];
72         size[x] = 1;
73         id[x][k] = rt;
74
75         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
76             if (!vis[G[x][i]] && G[x][i] != p[x]) {
77                 p[G[x][i]] = x;
78                 d[G[x][i]][k] = d[x][k] + w[x][i];
79
80                 q[tail++] = G[x][i];
81             }
82         }
83
84         for (int i = tail - 1; i; i--)
85             size[p[q[i]]] += size[q[i]]; // 后面递归建树要用
85             → 到子问题大小
86     }
87
88 // 修改 O(log n)
89 void modify(int x) {
90     if (col[x])
91         ca[x]--;
92     else
93         ca[x]++; // 记得先特判自己作为重心的那层
94
95     for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
95         → k--) {
96         if (col[x])
97             a[u] -= d[x][k];
98             ca[u]--;

```

```

99
100    b[id[x][k]][k] -= d[x][k];
101    cb[id[x][k]][k]--;
102
103    } else {
104        a[u] += d[x][k];
105        ca[u]++;
106
107        b[id[x][k]][k] += d[x][k];
108        cb[id[x][k]][k]++;
109    }
110
111    col[x] = true;
112 }
113
114 // 询问 O(log n)
115 int query(int x) {
116     int ans = a[x]; // 特判自己是重心的那层
117
118     for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
118         → k--)
119         ans += a[u] - b[id[x][k]][k] + d[x][k] * (ca[u]
119             → - cb[id[x][k]][k]);
120
121     return ans;
122 }
123

```

4.6.2 紫荆花之恋

稍微重构了一下，修改了代码风格。

另外这个是BFS版本，跑得比DFS要快不少。（虽然主要复杂度并不在重构上）

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, maxk = 49;
6 constexpr double alpha = .75;
7
8 mt19937 rnd(23333333);
9
10 struct node {
11     int key, size, p;
12     node *ch[2];
13
14     node() {}
15
16     node(int key) : key(key), size(1), p(rnd()) {}
17
18     inline void update() {
19         size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
20     }
21 } null[maxn * maxk], *pt = null;
22
23 vector<node*> pool;
24
25 node *newnode(int val) {
26     node *x;
27
28     if (!pool.empty())
29         x = pool.back();
30         pool.pop_back();
31     else
32         x = ++pt;
33
34     *x = node(val);
35

```

```

36 x → ch[0] = x → ch[1] = null;
37
38 return x;
39 }
40
41 void rot(node *&x, int d) {
42     node *y = x → ch[d ^ 1];
43     x → ch[d ^ 1] = y → ch[d];
44     y → ch[d] = x;
45
46     x → update();
47     (x = y) → update();
48 }
49
50 void insert(node *&o, int x) {
51     if (o == null) {
52         o = newnode(x);
53         return;
54     }
55
56     int d = (x > o → key);
57
58     insert(o → ch[d], x);
59     o → update();
60
61     if (o → ch[d] → p < o → p)
62         rot(o, d ^ 1);
63 }
64
65 int get_order(node *o, int x) {
66     int ans = 0;
67
68     while (o != null) {
69         int d = (x > o → key);
70
71         if (d)
72             ans += o → ch[0] → size + 1;
73
74         o = o → ch[d];
75     }
76
77     return ans;
78 }
79
80 void destroy(node *x) {
81     if (x == null)
82         return;
83
84     pool.push_back(x);
85     destroy(x → ch[0]);
86     destroy(x → ch[1]);
87 }
88
89 struct my_tree { // 封装了一下，如果不卡内存直接换成PBDS就好了
90     node *rt;
91
92     my_tree() : rt(null) {}
93
94     void clear() {
95         ::destroy(rt);
96         rt = null;
97     }
98
99     void insert(int x) {
100         ::insert(rt, x);
101     }
102
103    int order_of_key(int x) { // less than x
104        return ::get_order(rt, x);
105    }
106
107    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
108    vector<pair<int, int>> G[maxn];
109
110    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
111        ↪ [maxk];
112    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
113    bool vis[maxn];
114
115    int w[maxn];
116
117    void destroy(int o) {
118        int head = 0, tail = 0;
119        q[tail++] = o;
120        vis[o] = false;
121
122        while (head != tail) {
123            int x = q[head++];
124            tr[x].clear();
125
126            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
127                tre[x][i].clear();
128                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
129            }
130
131            for (auto pi : G[x]) {
132                int y = pi.first;
133
134                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
135                    vis[y] = false;
136                    q[tail++] = y;
137                }
138            }
139        }
140
141        int getcenter(int o, int s) {
142            int head = 0, tail = 0;
143            q[tail++] = o;
144
145            while (head != tail) {
146                int x = q[head++];
147                sz[x] = 1;
148
149                for (auto pi : G[x]) {
150                    int y = pi.first;
151
152                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
153                        p[y] = x;
154                        q[tail++] = y;
155                    }
156                }
157            }
158
159            for (int i = s - 1; i; i--)
160                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
161
162            int x = o;
163            while (true) {
164                bool ok = false;
165
166                for (auto pi : G[x]) {
167                    int y = pi.first;
168
169                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
170                        ↪ {
171                        x = y;
172                        ok = true;
173                        break;
174                    }
175                }
176            }
177        }
178
179    }
180
181    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
182    vector<pair<int, int>> G[maxn];
183
184    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
185        ↪ [maxk];
186    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
187    bool vis[maxn];
188
189    int w[maxn];
190
191    void destroy(int o) {
192        int head = 0, tail = 0;
193        q[tail++] = o;
194        vis[o] = false;
195
196        while (head != tail) {
197            int x = q[head++];
198            tr[x].clear();
199
200            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
201                tre[x][i].clear();
202                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
203            }
204
205            for (auto pi : G[x]) {
206                int y = pi.first;
207
208                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
209                    vis[y] = false;
210                    q[tail++] = y;
211                }
212            }
213        }
214
215        int getcenter(int o, int s) {
216            int head = 0, tail = 0;
217            q[tail++] = o;
218
219            while (head != tail) {
220                int x = q[head++];
221                sz[x] = 1;
222
223                for (auto pi : G[x]) {
224                    int y = pi.first;
225
226                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
227                        p[y] = x;
228                        q[tail++] = y;
229                    }
230                }
231            }
232
233            for (int i = s - 1; i; i--)
234                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
235
236            int x = o;
237            while (true) {
238                bool ok = false;
239
240                for (auto pi : G[x]) {
241                    int y = pi.first;
242
243                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
244                        ↪ {
245                        x = y;
246                        ok = true;
247                        break;
248                    }
249                }
250            }
251        }
252
253    }
254
255    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
256    vector<pair<int, int>> G[maxn];
257
258    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
259        ↪ [maxk];
260    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
261    bool vis[maxn];
262
263    int w[maxn];
264
265    void destroy(int o) {
266        int head = 0, tail = 0;
267        q[tail++] = o;
268        vis[o] = false;
269
270        while (head != tail) {
271            int x = q[head++];
272            tr[x].clear();
273
274            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
275                tre[x][i].clear();
276                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
277            }
278
279            for (auto pi : G[x]) {
280                int y = pi.first;
281
282                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
283                    vis[y] = false;
284                    q[tail++] = y;
285                }
286            }
287        }
288
289        int getcenter(int o, int s) {
290            int head = 0, tail = 0;
291            q[tail++] = o;
292
293            while (head != tail) {
294                int x = q[head++];
295                sz[x] = 1;
296
297                for (auto pi : G[x]) {
298                    int y = pi.first;
299
300                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
301                        p[y] = x;
302                        q[tail++] = y;
303                    }
304                }
305            }
306
307            for (int i = s - 1; i; i--)
308                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
309
310            int x = o;
311            while (true) {
312                bool ok = false;
313
314                for (auto pi : G[x]) {
315                    int y = pi.first;
316
317                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
318                        ↪ {
319                        x = y;
320                        ok = true;
321                        break;
322                    }
323                }
324            }
325        }
326
327    }
328
329    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
330    vector<pair<int, int>> G[maxn];
331
332    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
333        ↪ [maxk];
334    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
335    bool vis[maxn];
336
337    int w[maxn];
338
339    void destroy(int o) {
340        int head = 0, tail = 0;
341        q[tail++] = o;
342        vis[o] = false;
343
344        while (head != tail) {
345            int x = q[head++];
346            tr[x].clear();
347
348            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
349                tre[x][i].clear();
350                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
351            }
352
353            for (auto pi : G[x]) {
354                int y = pi.first;
355
356                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
357                    vis[y] = false;
358                    q[tail++] = y;
359                }
360            }
361        }
362
363        int getcenter(int o, int s) {
364            int head = 0, tail = 0;
365            q[tail++] = o;
366
367            while (head != tail) {
368                int x = q[head++];
369                sz[x] = 1;
370
371                for (auto pi : G[x]) {
372                    int y = pi.first;
373
374                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
375                        p[y] = x;
376                        q[tail++] = y;
377                    }
378                }
379            }
380
381            for (int i = s - 1; i; i--)
382                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
383
384            int x = o;
385            while (true) {
386                bool ok = false;
387
388                for (auto pi : G[x]) {
389                    int y = pi.first;
390
391                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
392                        ↪ {
393                        x = y;
394                        ok = true;
395                        break;
396                    }
397                }
398            }
399        }
400
401    }
402
403    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
404    vector<pair<int, int>> G[maxn];
405
406    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
407        ↪ [maxk];
408    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
409    bool vis[maxn];
410
411    int w[maxn];
412
413    void destroy(int o) {
414        int head = 0, tail = 0;
415        q[tail++] = o;
416        vis[o] = false;
417
418        while (head != tail) {
419            int x = q[head++];
420            tr[x].clear();
421
422            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
423                tre[x][i].clear();
424                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
425            }
426
427            for (auto pi : G[x]) {
428                int y = pi.first;
429
430                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
431                    vis[y] = false;
432                    q[tail++] = y;
433                }
434            }
435        }
436
437        int getcenter(int o, int s) {
438            int head = 0, tail = 0;
439            q[tail++] = o;
440
441            while (head != tail) {
442                int x = q[head++];
443                sz[x] = 1;
444
445                for (auto pi : G[x]) {
446                    int y = pi.first;
447
448                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
449                        p[y] = x;
450                        q[tail++] = y;
451                    }
452                }
453            }
454
455            for (int i = s - 1; i; i--)
456                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
457
458            int x = o;
459            while (true) {
460                bool ok = false;
461
462                for (auto pi : G[x]) {
463                    int y = pi.first;
464
465                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
466                        ↪ {
467                        x = y;
468                        ok = true;
469                        break;
470                    }
471                }
472            }
473        }
474
475    }
476
477    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
478    vector<pair<int, int>> G[maxn];
479
480    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
481        ↪ [maxk];
482    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
483    bool vis[maxn];
484
485    int w[maxn];
486
487    void destroy(int o) {
488        int head = 0, tail = 0;
489        q[tail++] = o;
490        vis[o] = false;
491
492        while (head != tail) {
493            int x = q[head++];
494            tr[x].clear();
495
496            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
497                tre[x][i].clear();
498                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
499            }
500
501            for (auto pi : G[x]) {
502                int y = pi.first;
503
504                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
505                    vis[y] = false;
506                    q[tail++] = y;
507                }
508            }
509        }
510
511        int getcenter(int o, int s) {
512            int head = 0, tail = 0;
513            q[tail++] = o;
514
515            while (head != tail) {
516                int x = q[head++];
517                sz[x] = 1;
518
519                for (auto pi : G[x]) {
520                    int y = pi.first;
521
522                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
523                        p[y] = x;
524                        q[tail++] = y;
525                    }
526                }
527            }
528
529            for (int i = s - 1; i; i--)
530                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
531
532            int x = o;
533            while (true) {
534                bool ok = false;
535
536                for (auto pi : G[x]) {
537                    int y = pi.first;
538
539                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
540                        ↪ {
541                        x = y;
542                        ok = true;
543                        break;
544                    }
545                }
546            }
547        }
548
549    }
550
551    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
552    vector<pair<int, int>> G[maxn];
553
554    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
555        ↪ [maxk];
556    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
557    bool vis[maxn];
558
559    int w[maxn];
560
561    void destroy(int o) {
562        int head = 0, tail = 0;
563        q[tail++] = o;
564        vis[o] = false;
565
566        while (head != tail) {
567            int x = q[head++];
568            tr[x].clear();
569
570            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
571                tre[x][i].clear();
572                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
573            }
574
575            for (auto pi : G[x]) {
576                int y = pi.first;
577
578                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
579                    vis[y] = false;
580                    q[tail++] = y;
581                }
582            }
583        }
584
585        int getcenter(int o, int s) {
586            int head = 0, tail = 0;
587            q[tail++] = o;
588
589            while (head != tail) {
590                int x = q[head++];
591                sz[x] = 1;
592
593                for (auto pi : G[x]) {
594                    int y = pi.first;
595
596                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
597                        p[y] = x;
598                        q[tail++] = y;
599                    }
600                }
601            }
602
603            for (int i = s - 1; i; i--)
604                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
605
606            int x = o;
607            while (true) {
608                bool ok = false;
609
610                for (auto pi : G[x]) {
611                    int y = pi.first;
612
613                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
614                        ↪ {
615                        x = y;
616                        ok = true;
617                        break;
618                    }
619                }
620            }
621        }
622
623    }
624
625    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
626    vector<pair<int, int>> G[maxn];
627
628    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
629        ↪ [maxk];
630    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
631    bool vis[maxn];
632
633    int w[maxn];
634
635    void destroy(int o) {
636        int head = 0, tail = 0;
637        q[tail++] = o;
638        vis[o] = false;
639
640        while (head != tail) {
641            int x = q[head++];
642            tr[x].clear();
643
644            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
645                tre[x][i].clear();
646                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
647            }
648
649            for (auto pi : G[x]) {
650                int y = pi.first;
651
652                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
653                    vis[y] = false;
654                    q[tail++] = y;
655                }
656            }
657        }
658
659        int getcenter(int o, int s) {
660            int head = 0, tail = 0;
661            q[tail++] = o;
662
663            while (head != tail) {
664                int x = q[head++];
665                sz[x] = 1;
666
667                for (auto pi : G[x]) {
668                    int y = pi.first;
669
670                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
671                        p[y] = x;
672                        q[tail++] = y;
673                    }
674                }
675            }
676
677            for (int i = s - 1; i; i--)
678                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
679
680            int x = o;
681            while (true) {
682                bool ok = false;
683
684                for (auto pi : G[x]) {
685                    int y = pi.first;
686
687                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
688                        ↪ {
689                        x = y;
690                        ok = true;
691                        break;
692                    }
693                }
694            }
695        }
696
697    }
698
699    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
700    vector<pair<int, int>> G[maxn];
701
702    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
703        ↪ [maxk];
704    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
705    bool vis[maxn];
706
707    int w[maxn];
708
709    void destroy(int o) {
710        int head = 0, tail = 0;
711        q[tail++] = o;
712        vis[o] = false;
713
714        while (head != tail) {
715            int x = q[head++];
716            tr[x].clear();
717
718            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
719                tre[x][i].clear();
720                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
721            }
722
723            for (auto pi : G[x]) {
724                int y = pi.first;
725
726                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
727                    vis[y] = false;
728                    q[tail++] = y;
729                }
730            }
731        }
732
733        int getcenter(int o, int s) {
734            int head = 0, tail = 0;
735            q[tail++] = o;
736
737            while (head != tail) {
738                int x = q[head++];
739                sz[x] = 1;
740
741                for (auto pi : G[x]) {
742                    int y = pi.first;
743
744                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
745                        p[y] = x;
746                        q[tail++] = y;
747                    }
748                }
749            }
750
751            for (int i = s - 1; i; i--)
752                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
753
754            int x = o;
755            while (true) {
756                bool ok = false;
757
758                for (auto pi : G[x]) {
759                    int y = pi.first;
760
761                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
762                        ↪ {
763                        x = y;
764                        ok = true;
765                        break;
766                    }
767                }
768            }
769        }
770
771    }
772
773    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
774    vector<pair<int, int>> G[maxn];
775
776    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
777        ↪ [maxk];
778    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
779    bool vis[maxn];
780
781    int w[maxn];
782
783    void destroy(int o) {
784        int head = 0, tail = 0;
785        q[tail++] = o;
786        vis[o] = false;
787
788        while (head != tail) {
789            int x = q[head++];
790            tr[x].clear();
791
792            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
793                tre[x][i].clear();
794                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
795            }
796
797            for (auto pi : G[x]) {
798                int y = pi.first;
799
800                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
801                    vis[y] = false;
802                    q[tail++] = y;
803                }
804            }
805        }
806
807        int getcenter(int o, int s) {
808            int head = 0, tail = 0;
809            q[tail++] = o;
810
811            while (head != tail) {
812                int x = q[head++];
813                sz[x] = 1;
814
815                for (auto pi : G[x]) {
816                    int y = pi.first;
817
818                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
819                        p[y] = x;
820                        q[tail++] = y;
821                    }
822                }
823            }
824
825            for (int i = s - 1; i; i--)
826                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
827
828            int x = o;
829            while (true) {
830                bool ok = false;
831
832                for (auto pi : G[x]) {
833                    int y = pi.first;
834
835                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
836                        ↪ {
837                        x = y;
838                        ok = true;
839                        break;
840                    }
841                }
842            }
843        }
844
845    }
846
847    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
848    vector<pair<int, int>> G[maxn];
849
850    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
851        ↪ [maxk];
852    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
853    bool vis[maxn];
854
855    int w[maxn];
856
857    void destroy(int o) {
858        int head = 0, tail = 0;
859        q[tail++] = o;
860        vis[o] = false;
861
862        while (head != tail) {
863            int x = q[head++];
864            tr[x].clear();
865
866            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
867                tre[x][i].clear();
868                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
869            }
870
871            for (auto pi : G[x]) {
872                int y = pi.first;
873
874                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
875                    vis[y] = false;
876                    q[tail++] = y;
877                }
878            }
879        }
880
881        int getcenter(int o, int s) {
882            int head = 0, tail = 0;
883            q[tail++] = o;
884
885            while (head != tail) {
886                int x = q[head++];
887                sz[x] = 1;
888
889                for (auto pi : G[x]) {
890                    int y = pi.first;
891
892                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
893                        p[y] = x;
894                        q[tail++] = y;
895                    }
896                }
897            }
898
899            for (int i = s - 1; i; i--)
900                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
901
902            int x = o;
903            while (true) {
904                bool ok = false;
905
906                for (auto pi : G[x]) {
907                    int y = pi.first;
908
909                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
910                        ↪ {
911                        x = y;
912                        ok = true;
913                        break;
914                    }
915                }
916            }
917        }
918
919    }
920
921    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
922    vector<pair<int, int>> G[maxn];
923
924    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
925        ↪ [maxk];
926    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
927    bool vis[maxn];
928
929    int w[maxn];
930
931    void destroy(int o) {
932        int head = 0, tail = 0;
933        q[tail++] = o;
934        vis[o] = false;
935
936        while (head != tail) {
937            int x = q[head++];
938            tr[x].clear();
939
940            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
941                tre[x][i].clear();
942                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
943            }
944
945            for (auto pi : G[x]) {
946                int y = pi.first;
947
948                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
949                    vis[y] = false;
950                    q[tail++] = y;
951                }
952            }
953        }
954
955        int getcenter(int o, int s) {
956            int head = 0, tail = 0;
957            q[tail++] = o;
958
959            while (head != tail) {
960                int x = q[head++];
961                sz[x] = 1;
962
963                for (auto pi : G[x]) {
964                    int y = pi.first;
965
966                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
967                        p[y] = x;
968                        q[tail++] = y;
969                    }
970                }
971            }
972
973            for (int i = s - 1; i; i--)
974                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
975
976            int x = o;
977            while (true) {
978                bool ok = false;
979
980                for (auto pi : G[x]) {
981                    int y = pi.first;
982
983                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
984                        ↪ {
985                        x = y;
986                        ok = true;
987                        break;
988                    }
989                }
990            }
991        }
992
993    }
994
995    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
996    vector<pair<int, int>> G[maxn];
997
998    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
999        ↪ [maxk];
1000    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
1001    bool vis[maxn];
1002
1003    int w[maxn];
1004
1005    void destroy(int o) {
1006        int head = 0, tail = 0;
1007        q[tail++] = o;
1008        vis[o] = false;
1009
1010        while (head != tail) {
1011            int x = q[head++];
1012            tr[x].clear();
1013
1014            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
1015                tre[x][i].clear();
1016                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
1017            }
1018
1019            for (auto pi : G[x]) {
1020                int y = pi.first;
1021
1022                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
1023                    vis[y] = false;
1024                    q[tail++] = y;
1025                }
1026            }
1027        }
1028
1029        int getcenter(int o, int s) {
1030            int head = 0, tail = 0;
1031            q[tail++] = o;
1032
1033            while (head != tail) {
1034                int x = q[head++];
1035                sz[x] = 1;
1036
1037                for (auto pi : G[x]) {
1038                    int y = pi.first;
1039
1040                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
1041                        p[y] = x;
1042                        q[tail++] = y;
1043                    }
1044                }
1045            }
1046
1047            for (int i = s - 1; i; i--)
1048                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
1049
1050            int x = o;
1051            while (true) {
1052                bool ok = false;
1053
1054                for (auto pi : G[x]) {
1055                    int y = pi.first;
1056
1057                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
1058                        ↪ {
1059                        x = y;
1060                        ok = true;
1061                        break;
1062                    }
1063                }
1064            }
1065        }
1066
1067    }
1068
1069    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
1070    vector<pair<int, int>> G[maxn];
1071
1072    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
1073        ↪ [maxk];
1074    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
1075    bool vis[maxn];
1076
1077    int w[maxn];
1078
1079    void destroy(int o) {
1080        int head = 0, tail = 0;
1081        q[tail++] = o;
1082        vis[o] = false;
1083
1084        while (head != tail) {
1085            int x = q[head++];
1086            tr[x].clear();
1087
1088            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
1089                tre[x][i].clear();
1090                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
1091            }
1092
1093            for (auto pi : G[x]) {
1094                int y = pi.first;
1095
1096                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
1097                    vis[y] = false;
1098                    q[tail++] = y;
1099                }
1100            }
1101        }
1102
1103        int getcenter(int o, int s) {
1104            int head = 0, tail = 0;
1105            q[tail++] = o;
1106
1107            while (head != tail) {
1108                int x = q[head++];
1109                sz[x] = 1;
1110
1111                for (auto pi : G[x]) {
1112                    int y = pi.first;
1113
1114                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
1115                        p[y] = x;
1116                        q[tail++] = y;
1117                    }
1118                }
1119            }
1120
1121            for (int i = s - 1; i; i--)
1122                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
1123
1124            int x = o;
1125            while (true) {
1126                bool ok = false;
1127
1128                for (auto pi : G[x]) {
1129                    int y = pi.first;
1130
1131                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
1132                        ↪ {
1133                        x = y;
1134                        ok = true;
1135                        break;
1136                    }
1137                }
1138            }
1139        }
1140
1141    }
1142
1143    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
1144    vector<pair<int, int>> G[maxn];
1145
1146    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
1147        ↪ [maxk];
1148    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
1149    bool vis[maxn];
1150
1151    int w[maxn];
1152
1153    void destroy(int o) {
1154        int head = 0, tail = 0;
1155        q[tail++] = o;
1156        vis[o] = false;
1157
1158        while (head != tail) {
1159            int x = q[head++];
1160            tr[x].clear();
1161
1162            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
1163                tre[x][i].clear();
1164                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
1165            }
1166
1167            for (auto pi : G[x]) {
1168                int y = pi.first;
1169
1170                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
1171                    vis[y] = false;
1172                    q[tail++] = y;
1173                }
1174            }
1175        }
1176
1177        int getcenter(int o, int s) {
1178            int head = 0, tail = 0;
1179            q[tail++] = o;
1180
1181            while (head != tail) {
1182                int x = q[head++];
1183                sz[x] = 1;
1184
1185                for (auto pi : G[x]) {
1186                    int y = pi.first;
1187
1188                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
1189                        p[y] = x;
1190                        q[tail++] = y;
1191                    }
1192                }
1193            }
1194
1195            for (int i = s - 1; i; i--)
1196                sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
1197
1198            int x = o;
1199            while (true) {
1200                bool ok = false;
1201
1202                for (auto pi : G[x]) {
1203                    int y = pi.first;
1204
1205                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s
1206                        ↪ {
1207                        x = y;
1208                        ok = true;
1209                        break;
1210                    }
1211                }
1212            }
1213        }
1214
1215    }
1216
1217    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
1218    vector<pair<int, int>> G[maxn];
1219
1220    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
1221        ↪ [maxk];
1222    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
1223    bool vis[maxn];
1224
1225    int w[maxn];
1226
1227    void destroy(int o) {
1228        int head = 0, tail = 0;
1229        q[tail++] = o;
1230        vis[o] = false;
1231
1232        while (head != tail) {
1233            int x = q[head++];
1234            tr[x].clear();
1235
1236            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
1237                tre[x][i].clear();
1238                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
1239            }
1240
1241            for (auto pi : G[x]) {
1242                int y = pi.first;
1243
1244                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
1245                    vis[y] = false;
1246                    q[tail++] = y;
1247                }
1248            }
1249        }
1250
1251        int getcenter(int o, int s) {
1252            int head = 0, tail = 0;
1253            q[tail++] = o;
1254
1255            while (head != tail) {
1256                int x = q[head++];
1257                sz[x] = 1;
1258
1259                for (auto pi : G[x]) {
1260                    int y = pi.first;
1261
1262                    if (!vis[y] && y
```

```

172     }
173 
174     if (!ok)
175     | break;
176 
177 }
178 
179 return x;
180 }

181 void getdis(int st, int o, int k) {
182     int head = 0, tail = 0;
183     q[tail++] = st;
184 
185     while (head != tail) {
186         int x = q[head++];
187         sz[x] = 1;
188         rid[x][k] = st;
189 
190         tr[o].insert(d[x][k] - w[x]);
191         tre[st][k].insert(d[x][k] - w[x]);
192 
193         for (auto pi : G[x]) {
194             int y = pi.first, val = pi.second;
195 
196             if (!vis[y] && y != p[x]) {
197                 p[y] = x;
198                 d[y][k] = d[x][k] + val;
199                 q[tail++] = y;
200             }
201         }
202     }
203 }

204 for (int i = tail - 1; i; i--)
205     sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
206 
207 siz[st][k] = sz[st];
208 }

209 void rebuild(int x, int s, int pr) {
210     x = getcenter(x, s);
211     vis[x] = true;
212     p[x] = pr;
213     depth[x] = depth[pr] + 1;
214     sz[x] = s;
215 
216     tr[x].insert(-w[x]);
217 
218     for (auto pi : G[x]) {
219         int y = pi.first, val = pi.second;
220 
221         if (!vis[y]) {
222             p[y] = x;
223             d[y][depth[x]] = val;
224             getdis(y, x, depth[x]);
225         }
226     }
227 
228     for (auto pi : G[x]) {
229         int y = pi.first;
230 
231         if (!vis[y])
232             rebuild(y, sz[y], x);
233     }
234 }

235 long long add_node(int x, int nw) { // nw是边权
236     depth[x] = depth[p[x]] + 1;
237     sz[x] = 1;
238 }

239 
```

241 vis[x] = true;

242 tr[x].insert(-w[x]);

243 long long tmp = 0;

244 int goat = 0; // 替罪羊

245 for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],

246 ~k--) {
247 d[x][k] = d[p[x]][k] + nw;
248 rid[x][k] = (rid[p[x]][k] ? rid[p[x]][k] : x);

249 tmp += tr[u].order_of_key(w[x] - d[x][k] + 1);
250 tmp -= tre[rid[x][k]][k].order_of_key(w[x] -
251 ~d[x][k] + 1);
252
253 tr[u].insert(d[x][k] - w[x]);
254 tre[rid[x][k]][k].insert(d[x][k] - w[x]);
255
256 sz[u]++;
257 siz[rid[x][k]][k]++;
258
259 if (siz[rid[x][k]][k] > sz[u] * alpha + 5)
260 goat = u;
261 }
262
263 if (goat) {
264 destroy(goat);
265 rebuild(goat, sz[goat], p[goat]);
266 }
267
268 return tmp;
269 }

270 int main() {
271 null → ch[0] = null → ch[1] = null;
272 null → size = 0;
273
274 int n;
275 scanf("%*d%d", &n);
276
277 scanf("%*d%*d%d", &w[1]);
278 vis[1] = true;
279 sz[1] = 1;
280 tr[1].insert(-w[1]);
281
282 printf("0\n");
283
284 long long ans = 0;
285
286 for (int i = 2; i ≤ n; i++) {
287 int nw;
288 scanf("%d%d%d", &p[i], &nw, &w[i]);
289
290 p[i] ≈ (ans % 1000000000);
291
292 G[i].push_back(make_pair(p[i], nw));
293 G[p[i]].push_back(make_pair(i, nw));
294
295 ans += add_node(i, nw);
296
297 printf("%lld\n", ans);
298 }
299
300 return 0;
301 }

4.7 LCT动态树

4.7.1 不换根(弹飞绵羊)

```

1 #define isroot(x) ((x) != (x) -> p -> ch[0] && (x) !=  
2     -> (x) -> p -> ch[1]) // 判断是不是Splay的根  
3 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1]) // 判断它是它  
4     -> 父亲的左 / 右儿子  
5  
6 struct node { // 结点类定义  
7     int size; // Splay的子树大小  
8     node *ch[2], *p;  
9  
10    node() : size(1) {}  
11    void refresh() {  
12        size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;  
13    } // 附加信息维护  
14 } null[maxn];  
15  
16 // 在主函数开头加上这句初始化  
17 null -> size = 0;  
18  
19 // 初始化结点  
20 void initialize(node *x) {  
21     x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;  
22 }  
23  
24 // Access 均摊O(log n)  
25 // LCT核心操作，把结点到根的路径打通，顺便把与重儿子的连  
26     -> 边变成轻边  
27 // 需要调用splay  
28 node *access(node *x) {  
29     node *y = null;  
30  
31     while (x != null) {  
32         splay(x);  
33  
34         x -> ch[1] = y;  
35         (y = x) -> refresh();  
36  
37         x = x -> p;  
38     }  
39  
40     return y;  
41 }  
42  
43 // Link 均摊O(log n)  
44 // 把x的父亲设为y  
45 // 要求x必须为所在树的根节点否则会导致后续各种莫名其妙的  
46     -> 问题  
47 // 需要调用splay  
48 void link(node *x, node *y) {  
49     splay(x);  
50     x -> p = y;  
51 }  
52  
53 // Cut 均摊O(log n)  
54 // 把x与其父亲的连边断掉  
55 // x可以是所在树的根节点，这时此操作没有任何实质效果  
56 // 需要调用access和splay  
57 void cut(node *x) {  
58     access(x);  
59     splay(x);  
60  
61     x -> ch[0] -> p = null;  
62     x -> ch[0] = null;  
63  
64     x -> refresh();  
65 }  
66  
67 // Splay 均摊O(log n)

```

```

68 // 需要调用旋转
69 void splay(node *x) {
70     while (!isroot(x)) {
71         if (isroot(x -> p)) {
72             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
73             break;
74         }
75         if (dir(x) == dir(x -> p))
76             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
77         else
78             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
79         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
80     }
81
82     // 旋转(LCT版本) O(1)
83     // 平衡树基本操作
84     // 要求对应儿子必须存在，否则会导致后续各种莫名其妙的问题
85     void rot(node *x, int d) {
86         node *y = x -> ch[d ^ 1];
87
88         y -> p = x -> p;
89         if (!isroot(x))
90             x -> p -> ch[dir(x)] = y;
91
92         if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
93             y -> ch[d] -> p = x;
94         (y -> ch[d] = x) -> p = y;
95
96         x -> refresh();
97         y -> refresh();
98     }
99 }

```

4.7.2 换根/维护生成树

```

1 #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) -> p -> ch[0] != (x) && (x) -> p -> ch[1] != (x)))
2 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])
3
4 using namespace std;
5
6 const int maxn = 200005;
7
8 struct node{
9     int key, mx, pos;
10    bool rev;
11    node *ch[2], *p;
12
13    node(int key = 0): key(key), mx(key), pos(-1),
14          ~rev(false) {}
15
16    void pushdown() {
17        if (!rev)
18            return;
19
20        ch[0] -> rev ^= true;
21        ch[1] -> rev ^= true;
22        swap(ch[0], ch[1]);
23
24        if (pos != -1)
25            pos ^= 1;
26
27        rev = false;
28    }
29
30    void refresh() {
31        mx = key;
32        pos = -1;
33    }
34
35    void rotate(int d) {
36        node *y = ch[d ^ 1];
37
38        if (!isroot(y))
39            y -> p -> ch[dir(y)] = this;
40
41        if ((ch[d ^ 1] = y) -> pos != -1)
42            ch[d ^ 1] -> pos ^= 1;
43
44        if (y -> pos != -1)
45            y -> pos ^= 1;
46
47        if (y -> rev)
48            rev ^= 1;
49
50        if (y -> mx < mx)
51            mx = y -> mx;
52
53        if (y -> pos != -1)
54            pos = y -> pos;
55
56        if (y -> rev)
57            rev = true;
58
59        if (y -> mx < mx)
60            mx = y -> mx;
61
62        if (y -> pos != -1)
63            pos = y -> pos;
64
65        if (y -> rev)
66            rev = true;
67
68        if (y -> mx < mx)
69            mx = y -> mx;
70
71        if (y -> pos != -1)
72            pos = y -> pos;
73
74        if (y -> rev)
75            rev = true;
76
77        if (y -> mx < mx)
78            mx = y -> mx;
79
80        if (y -> pos != -1)
81            pos = y -> pos;
82
83        if (y -> rev)
84            rev = true;
85
86        if (y -> mx < mx)
87            mx = y -> mx;
88
89        if (y -> pos != -1)
90            pos = y -> pos;
91
92        if (y -> rev)
93            rev = true;
94
95        if (y -> mx < mx)
96            mx = y -> mx;
97
98        if (y -> pos != -1)
99            pos = y -> pos;
100
101        if (y -> rev)
102            rev = true;
103
104        if (y -> mx < mx)
105            mx = y -> mx;
106
107        if (y -> pos != -1)
108            pos = y -> pos;
109
110        if (y -> rev)
111            rev = true;
112
113        if (y -> mx < mx)
114            mx = y -> mx;
115
116        if (y -> pos != -1)
117            pos = y -> pos;
118
119        if (y -> rev)
120            rev = true;
121
122        if (y -> mx < mx)
123            mx = y -> mx;
124
125        if (y -> pos != -1)
126            pos = y -> pos;
127
128        if (y -> rev)
129            rev = true;
130
131        if (y -> mx < mx)
132            mx = y -> mx;
133
134        if (y -> pos != -1)
135            pos = y -> pos;
136
137        if (y -> rev)
138            rev = true;
139
140        if (y -> mx < mx)
141            mx = y -> mx;
142
143        if (y -> pos != -1)
144            pos = y -> pos;
145
146        if (y -> rev)
147            rev = true;
148
149        if (y -> mx < mx)
150            mx = y -> mx;
151
152        if (y -> pos != -1)
153            pos = y -> pos;
154
155        if (y -> rev)
156            rev = true;
157
158        if (y -> mx < mx)
159            mx = y -> mx;
160
161        if (y -> pos != -1)
162            pos = y -> pos;
163
164        if (y -> rev)
165            rev = true;
166
167        if (y -> mx < mx)
168            mx = y -> mx;
169
170        if (y -> pos != -1)
171            pos = y -> pos;
172
173        if (y -> rev)
174            rev = true;
175
176        if (y -> mx < mx)
177            mx = y -> mx;
178
179        if (y -> pos != -1)
180            pos = y -> pos;
181
182        if (y -> rev)
183            rev = true;
184
185        if (y -> mx < mx)
186            mx = y -> mx;
187
188        if (y -> pos != -1)
189            pos = y -> pos;
190
191        if (y -> rev)
192            rev = true;
193
194        if (y -> mx < mx)
195            mx = y -> mx;
196
197        if (y -> pos != -1)
198            pos = y -> pos;
199
200        if (y -> rev)
201            rev = true;
202
203        if (y -> mx < mx)
204            mx = y -> mx;
205
206        if (y -> pos != -1)
207            pos = y -> pos;
208
209        if (y -> rev)
210            rev = true;
211
212        if (y -> mx < mx)
213            mx = y -> mx;
214
215        if (y -> pos != -1)
216            pos = y -> pos;
217
218        if (y -> rev)
219            rev = true;
220
221        if (y -> mx < mx)
222            mx = y -> mx;
223
224        if (y -> pos != -1)
225            pos = y -> pos;
226
227        if (y -> rev)
228            rev = true;
229
230        if (y -> mx < mx)
231            mx = y -> mx;
232
233        if (y -> pos != -1)
234            pos = y -> pos;
235
236        if (y -> rev)
237            rev = true;
238
239        if (y -> mx < mx)
240            mx = y -> mx;
241
242        if (y -> pos != -1)
243            pos = y -> pos;
244
245        if (y -> rev)
246            rev = true;
247
248        if (y -> mx < mx)
249            mx = y -> mx;
250
251        if (y -> pos != -1)
252            pos = y -> pos;
253
254        if (y -> rev)
255            rev = true;
256
257        if (y -> mx < mx)
258            mx = y -> mx;
259
260        if (y -> pos != -1)
261            pos = y -> pos;
262
263        if (y -> rev)
264            rev = true;
265
266        if (y -> mx < mx)
267            mx = y -> mx;
268
269        if (y -> pos != -1)
270            pos = y -> pos;
271
272        if (y -> rev)
273            rev = true;
274
275        if (y -> mx < mx)
276            mx = y -> mx;
277
278        if (y -> pos != -1)
279            pos = y -> pos;
280
281        if (y -> rev)
282            rev = true;
283
284        if (y -> mx < mx)
285            mx = y -> mx;
286
287        if (y -> pos != -1)
288            pos = y -> pos;
289
290        if (y -> rev)
291            rev = true;
292
293        if (y -> mx < mx)
294            mx = y -> mx;
295
296        if (y -> pos != -1)
297            pos = y -> pos;
298
299        if (y -> rev)
300            rev = true;
301
302        if (y -> mx < mx)
303            mx = y -> mx;
304
305        if (y -> pos != -1)
306            pos = y -> pos;
307
308        if (y -> rev)
309            rev = true;
310
311        if (y -> mx < mx)
312            mx = y -> mx;
313
314        if (y -> pos != -1)
315            pos = y -> pos;
316
317        if (y -> rev)
318            rev = true;
319
320        if (y -> mx < mx)
321            mx = y -> mx;
322
323        if (y -> pos != -1)
324            pos = y -> pos;
325
326        if (y -> rev)
327            rev = true;
328
329        if (y -> mx < mx)
330            mx = y -> mx;
331
332        if (y -> pos != -1)
333            pos = y -> pos;
334
335        if (y -> rev)
336            rev = true;
337
338        if (y -> mx < mx)
339            mx = y -> mx;
340
341        if (y -> pos != -1)
342            pos = y -> pos;
343
344        if (y -> rev)
345            rev = true;
346
347        if (y -> mx < mx)
348            mx = y -> mx;
349
350        if (y -> pos != -1)
351            pos = y -> pos;
352
353        if (y -> rev)
354            rev = true;
355
356        if (y -> mx < mx)
357            mx = y -> mx;
358
359        if (y -> pos != -1)
360            pos = y -> pos;
361
362        if (y -> rev)
363            rev = true;
364
365        if (y -> mx < mx)
366            mx = y -> mx;
367
368        if (y -> pos != -1)
369            pos = y -> pos;
370
371        if (y -> rev)
372            rev = true;
373
374        if (y -> mx < mx)
375            mx = y -> mx;
376
377        if (y -> pos != -1)
378            pos = y -> pos;
379
380        if (y -> rev)
381            rev = true;
382
383        if (y -> mx < mx)
384            mx = y -> mx;
385
386        if (y -> pos != -1)
387            pos = y -> pos;
388
389        if (y -> rev)
390            rev = true;
391
392        if (y -> mx < mx)
393            mx = y -> mx;
394
395        if (y -> pos != -1)
396            pos = y -> pos;
397
398        if (y -> rev)
399            rev = true;
400
401        if (y -> mx < mx)
402            mx = y -> mx;
403
404        if (y -> pos != -1)
405            pos = y -> pos;
406
407        if (y -> rev)
408            rev = true;
409
410        if (y -> mx < mx)
411            mx = y -> mx;
412
413        if (y -> pos != -1)
414            pos = y -> pos;
415
416        if (y -> rev)
417            rev = true;
418
419        if (y -> mx < mx)
420            mx = y -> mx;
421
422        if (y -> pos != -1)
423            pos = y -> pos;
424
425        if (y -> rev)
426            rev = true;
427
428        if (y -> mx < mx)
429            mx = y -> mx;
430
431        if (y -> pos != -1)
432            pos = y -> pos;
433
434        if (y -> rev)
435            rev = true;
436
437        if (y -> mx < mx)
438            mx = y -> mx;
439
440        if (y -> pos != -1)
441            pos = y -> pos;
442
443        if (y -> rev)
444            rev = true;
445
446        if (y -> mx < mx)
447            mx = y -> mx;
448
449        if (y -> pos != -1)
450            pos = y -> pos;
451
452        if (y -> rev)
453            rev = true;
454
455        if (y -> mx < mx)
456            mx = y -> mx;
457
458        if (y -> pos != -1)
459            pos = y -> pos;
460
461        if (y -> rev)
462            rev = true;
463
464        if (y -> mx < mx)
465            mx = y -> mx;
466
467        if (y -> pos != -1)
468            pos = y -> pos;
469
470        if (y -> rev)
471            rev = true;
472
473        if (y -> mx < mx)
474            mx = y -> mx;
475
476        if (y -> pos != -1)
477            pos = y -> pos;
478
479        if (y -> rev)
480            rev = true;
481
482        if (y -> mx < mx)
483            mx = y -> mx;
484
485        if (y -> pos != -1)
486            pos = y -> pos;
487
488        if (y -> rev)
489            rev = true;
490
491        if (y -> mx < mx)
492            mx = y -> mx;
493
494        if (y -> pos != -1)
495            pos = y -> pos;
496
497        if (y -> rev)
498            rev = true;
499
500        if (y -> mx < mx)
501            mx = y -> mx;
502
503        if (y -> pos != -1)
504            pos = y -> pos;
505
506        if (y -> rev)
507            rev = true;
508
509        if (y -> mx < mx)
510            mx = y -> mx;
511
512        if (y -> pos != -1)
513            pos = y -> pos;
514
515        if (y -> rev)
516            rev = true;
517
518        if (y -> mx < mx)
519            mx = y -> mx;
520
521        if (y -> pos != -1)
522            pos = y -> pos;
523
524        if (y -> rev)
525            rev = true;
526
527        if (y -> mx < mx)
528            mx = y -> mx;
529
530        if (y -> pos != -1)
531            pos = y -> pos;
532
533        if (y -> rev)
534            rev = true;
535
536        if (y -> mx < mx)
537            mx = y -> mx;
538
539        if (y -> pos != -1)
540            pos = y -> pos;
541
542        if (y -> rev)
543            rev = true;
544
545        if (y -> mx < mx)
546            mx = y -> mx;
547
548        if (y -> pos != -1)
549            pos = y -> pos;
550
551        if (y -> rev)
552            rev = true;
553
554        if (y -> mx < mx)
555            mx = y -> mx;
556
557        if (y -> pos != -1)
558            pos = y -> pos;
559
560        if (y -> rev)
561            rev = true;
562
563        if (y -> mx < mx)
564            mx = y -> mx;
565
566        if (y -> pos != -1)
567            pos = y -> pos;
568
569        if (y -> rev)
570            rev = true;
571
572        if (y -> mx < mx)
573            mx = y -> mx;
574
575        if (y -> pos != -1)
576            pos = y -> pos;
577
578        if (y -> rev)
579            rev = true;
580
581        if (y -> mx < mx)
582            mx = y -> mx;
583
584        if (y -> pos != -1)
585            pos = y -> pos;
586
587        if (y -> rev)
588            rev = true;
589
590        if (y -> mx < mx)
591            mx = y -> mx;
592
593        if (y -> pos != -1)
594            pos = y -> pos;
595
596        if (y -> rev)
597            rev = true;
598
599        if (y -> mx < mx)
600            mx = y -> mx;
601
602        if (y -> pos != -1)
603            pos = y -> pos;
604
605        if (y -> rev)
606            rev = true;
607
608        if (y -> mx < mx)
609            mx = y -> mx;
610
611        if (y -> pos != -1)
612            pos = y -> pos;
613
614        if (y -> rev)
615            rev = true;
616
617        if (y -> mx < mx)
618            mx = y -> mx;
619
620        if (y -> pos != -1)
621            pos = y -> pos;
622
623        if (y -> rev)
624            rev = true;
625
626        if (y -> mx < mx)
627            mx = y -> mx;
628
629        if (y -> pos != -1)
630            pos = y -> pos;
631
632        if (y -> rev)
633            rev = true;
634
635        if (y -> mx < mx)
636            mx = y -> mx;
637
638        if (y -> pos != -1)
639            pos = y -> pos;
640
641        if (y -> rev)
642            rev = true;
643
644        if (y -> mx < mx)
645            mx = y -> mx;
646
647        if (y -> pos != -1)
648            pos = y -> pos;
649
650        if (y -> rev)
651            rev = true;
652
653        if (y -> mx < mx)
654            mx = y -> mx;
655
656        if (y -> pos != -1)
657            pos = y -> pos;
658
659        if (y -> rev)
660            rev = true;
661
662        if (y -> mx < mx)
663            mx = y -> mx;
664
665        if (y -> pos != -1)
666            pos = y -> pos;
667
668        if (y -> rev)
669            rev = true;
670
671        if (y -> mx < mx)
672            mx = y -> mx;
673
674        if (y -> pos != -1)
675            pos = y -> pos;
676
677        if (y -> rev)
678            rev = true;
679
680        if (y -> mx < mx)
681            mx = y -> mx;
682
683        if (y -> pos != -1)
684            pos = y -> pos;
685
686        if (y -> rev)
687            rev = true;
688
689        if (y -> mx < mx)
690            mx = y -> mx;
691
692        if (y -> pos != -1)
693            pos = y -> pos;
694
695        if (y -> rev)
696            rev = true;
697
698        if (y -> mx < mx)
699            mx = y -> mx;
700
701        if (y -> pos != -1)
702            pos = y -> pos;
703
704        if (y -> rev)
705            rev = true;
706
707        if (y -> mx < mx)
708            mx = y -> mx;
709
710        if (y -> pos != -1)
711            pos = y -> pos;
712
713        if (y -> rev)
714            rev = true;
715
716        if (y -> mx < mx)
717            mx = y -> mx;
718
719        if (y -> pos != -1)
720            pos = y -> pos;
721
722        if (y -> rev)
723            rev = true;
724
725        if (y -> mx < mx)
726            mx = y -> mx;
727
728        if (y -> pos != -1)
729            pos = y -> pos;
730
731        if (y -> rev)
732            rev = true;
733
734        if (y -> mx < mx)
735            mx = y -> mx;
736
737        if (y -> pos != -1)
738            pos = y -> pos;
739
740        if (y -> rev)
741            rev = true;
742
743        if (y -> mx < mx)
744            mx = y -> mx;
745
746        if (y -> pos != -1)
747            pos = y -> pos;
748
749        if (y -> rev)
750            rev = true;
751
752        if (y -> mx < mx)
753            mx = y -> mx;
754
755        if (y -> pos != -1)
756            pos = y -> pos;
757
758        if (y -> rev)
759            rev = true;
760
761        if (y -> mx < mx)
762            mx = y -> mx;
763
764        if (y -> pos != -1)
765            pos = y -> pos;
766
767        if (y -> rev)
768            rev = true;
769
770        if (y -> mx < mx)
771            mx = y -> mx;
772
773        if (y -> pos != -1)
774            pos = y -> pos;
775
776        if (y -> rev)
777            rev = true;
778
779        if (y -> mx < mx)
780            mx = y -> mx;
781
782        if (y -> pos != -1)
783            pos = y -> pos;
784
785        if (y -> rev)
786            rev = true;
787
788        if (y -> mx < mx)
789            mx = y -> mx;
790
791        if (y -> pos != -1)
792            pos = y -> pos;
793
794        if (y -> rev)
795            rev = true;
796
797        if (y -> mx < mx)
798            mx = y -> mx;
799
800        if (y -> pos != -1)
801            pos = y -> pos;
802
803        if (y -> rev)
804            rev = true;
805
806        if (y -> mx < mx)
807            mx = y -> mx;
808
809        if (y -> pos != -1)
810            pos = y -> pos;
811
812        if (y -> rev)
813            rev = true;
814
815        if (y -> mx < mx)
816            mx = y -> mx;
817
818        if (y -> pos != -1)
819            pos = y -> pos;
820
821        if (y -> rev)
822            rev = true;
823
824        if (y -> mx < mx)
825            mx = y -> mx;
826
827        if (y -> pos != -1)
828            pos = y -> pos;
829
830        if (y -> rev)
831            rev = true;
832
833        if (y -> mx < mx)
834            mx = y -> mx;
835
836        if (y -> pos != -1)
837            pos = y -> pos;
838
839        if (y -> rev)
840            rev = true;
841
842        if (y -> mx < mx)
843            mx = y -> mx;
844
845        if (y -> pos != -1)
846            pos = y -> pos;
847
848        if (y -> rev)
849            rev = true;
850
851        if (y -> mx < mx)
852            mx = y -> mx;
853
854        if (y -> pos != -1)
855            pos = y -> pos;
856
857        if (y -> rev)
858            rev = true;
859
860        if (y -> mx < mx)
861            mx = y -> mx;
862
863        if (y -> pos != -1)
864            pos = y -> pos;
865
866        if (y -> rev)
867            rev = true;
868
869        if (y -> mx < mx)
870            mx = y -> mx;
871
872        if (y -> pos != -1)
873            pos = y -> pos;
874
875        if (y -> rev)
876            rev = true;
877
878        if (y -> mx < mx)
879            mx = y -> mx;
880
881        if (y -> pos != -1)
882            pos = y -> pos;
883
884        if (y -> rev)
885            rev = true;
886
887        if (y -> mx < mx)
888            mx = y -> mx;
889
890        if (y -> pos != -1)
891            pos = y -> pos;
892
893        if (y -> rev)
894            rev = true;
895
896        if (y -> mx < mx)
897            mx = y -> mx;
898
899        if (y -> pos != -1)
900            pos = y -> pos;
901
902        if (y -> rev)
903            rev = true;
904
905        if (y -> mx < mx)
906            mx = y -> mx;
907
908        if (y -> pos != -1)
909            pos = y -> pos;
910
911        if (y -> rev)
912            rev = true;
913
914        if (y -> mx < mx)
915            mx = y -> mx;
916
917        if (y -> pos != -1)
918            pos = y -> pos;
919
920        if (y -> rev)
921            rev = true;
922
923        if (y -> mx < mx)
924            mx = y -> mx;
925
926        if (y -> pos != -1)
927            pos = y -> pos;
928
929        if (y -> rev)
930            rev = true;
931
932        if (y -> mx < mx)
933            mx = y -> mx;
934
935        if (y -> pos != -1)
936            pos = y -> pos;
937
938        if (y -> rev)
939            rev = true;
940
941        if (y -> mx < mx)
942            mx = y -> mx;
943
944        if (y -> pos != -1)
945            pos = y -> pos;
946
947        if (y -> rev)
948            rev = true;

```

```

32     if (ch[0] → mx > mx) {
33         mx = ch[0] → mx;
34         pos = 0;
35     }
36     if (ch[1] → mx > mx) {
37         mx = ch[1] → mx;
38         pos = 1;
39     }
40 }
41 null[maxn * 2];
42
43 void init(node *x, int k) {
44     x → ch[0] = x → ch[1] = x → p = null;
45     x → key = x → mx = k;
46 }
47
48 void rot(node *x, int d) {
49     node *y = x → ch[d ^ 1];
50     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
51         y → ch[d] → p = x;
52
53     y → p = x → p;
54     if (!isroot(x))
55         x → p → ch[dir(x)] = y;
56
57     (y → ch[d] = x) → p = y;
58
59     x → refresh();
60     y → refresh();
61 }
62
63 void splay(node *x) {
64     x → pushdown();
65
66     while (!isroot(x)) {
67         if (!isroot(x → p))
68             x → p → p → pushdown();
69         x → p → pushdown();
70         x → pushdown();
71
72         if (isroot(x → p)) {
73             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
74             break;
75         }
76
77         if (dir(x) == dir(x → p))
78             rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
79         else
80             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
81
82         rot(x → p, dir(x) ^ 1);
83     }
84 }
85
86 node *access(node *x) {
87     node *y = null;
88
89     while (x != null) {
90         splay(x);
91
92         x → ch[1] = y;
93         (y = x) → refresh();
94
95         x = x → p;
96     }
97
98     return y;
99 }
100
101 void makeroot(node *x) {
102     access(x);
103     splay(x);
104     x → rev ^= true;
105 }
106
107 void link(node *x, node *y) {
108     makeroot(x);
109     x → p = y;
110 }
111
112 void cut(node *x, node *y) {
113     makeroot(x);
114     access(y);
115     splay(y);
116
117     y → ch[0] → p = null;
118     y → ch[0] = null;
119     y → refresh();
120 }
121
122 node *getroot(node *x) {
123     x = access(x);
124     while (x → pushdown(), x → ch[0] != null)
125         x = x → ch[0];
126     splay(x);
127     return x;
128 }
129
130 node *getmax(node *x, node *y) {
131     makeroot(x);
132     x = access(y);
133
134     while (x → pushdown(), x → pos != -1)
135         x = x → ch[x → pos];
136     splay(x);
137
138     return x;
139 }
140
141 // 以下为主函数示例
142 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
143     init(null + n + i, w[i]);
144     if (getroot(null + u[i]) != getroot(null + v[i])) {
145         ans[q + 1] -= k;
146         ans[q + 1] += w[i];
147
148         link(null + u[i], null + n + i);
149         link(null + v[i], null + n + i);
150         vis[i] = true;
151     }
152     else {
153         int ii = getmax(null + u[i], null + v[i]) -
154             → null - n;
155         if (w[ii] ≥ w[i])
156             continue;
157
158         cut(null + u[ii], null + n + ii);
159         cut(null + v[ii], null + n + ii);
160
161         link(null + u[ii], null + n + i);
162         link(null + v[ii], null + n + i);
163
164         ans[q + 1] -= w[ii];
165         ans[q + 1] += w[i];
166     }
167 }

```

4.7.3 维护子树信息

```

1 // 这个东西虽然只需要抄板子但还是极其难写，常数极其巨大，  

2 // 没必要的时候就不要用  

3 // 如果维护子树最小值就需要套一个可删除的堆来维护，复杂度  

4 // 会变成 $O(n \log^2 n)$   

5 // 注意由于这道题与边权有关，需要边权拆点变点权  

6  

7 // 宏定义  

8 #define isroot(x) ((x) → p == null || ((x) != (x) → p  

9 // → ch[0] && (x) != (x) → p → ch[1]))  

10 #define dir(x) ((x) == (x) → p → ch[1])  

11  

12 // 节点类定义  

13 struct node { // 以维护子树中黑点到根距离和为例  

14     int w, chain_cnt, tree_cnt;  

15     long long sum, suml, sumr, tree_sum; // 由于换根需要  

16     // 子树反转，需要维护两个方向的信息  

17     bool rev, col;  

18     node *ch[2], *p;  

19  

20     node() : w(0), chain_cnt(0),  

21         → tree_cnt(0), sum(0), suml(0), sumr(0),  

22         → tree_sum(0), rev(false), col(false) {}  

23  

24     inline void pushdown() {  

25         if(!rev)  

26             return;  

27  

28         ch[0]→rev ≈ true;  

29         ch[1]→rev ≈ true;  

30         swap(ch[0], ch[1]);  

31         swap(suml, sumr);  

32  

33         rev = false;  

34     }  

35  

36     inline void refresh() { // 如果不想这样特判  

37         // 就pushdown一下  

38         // pushdown();  

39  

40         sum = ch[0] → sum + ch[1] → sum + w;  

41         suml = (ch[0] → rev ? ch[0] → sumr : ch[0] →  

42             → suml) + (ch[1] → rev ? ch[1] → sumr :  

43             → ch[1] → suml) + (tree_cnt + ch[1] →  

44             → chain_cnt) * (ch[0] → sum + w) + tree_sum;  

45         sumr = (ch[0] → rev ? ch[0] → suml : ch[0] →  

46             → sumr) + (ch[1] → rev ? ch[1] → suml :  

47             → ch[1] → sumr) + (tree_cnt + ch[0] →  

48             → chain_cnt) * (ch[1] → sum + w) + tree_sum;  

49         chain_cnt = ch[0] → chain_cnt + ch[1] →  

50             → chain_cnt + tree_cnt;  

51     }  

52     null[maxn * 2]; // 如果没有边权变点权就不用乘2了  

53  

54 // 封装构造函数  

55 node *newnode(int w) {  

56     node *x = nodes.front(); // 因为有删边加边，可以用一  

57     // 个队列维护可用结点  

58     nodes.pop();  

59     initialize(x);  

60     x → w = w;  

61     x → refresh();  

62     return x;  

63 }
64  

65 // 封装初始化函数  

66 // 记得在进行操作之前对所有结点调用一遍  

67 inline void initialize(node *x) {  

68     *x = node();  

69     x → ch[0] = x → ch[1] = x → p = null;

```

```

70 }  

71  

72 // 注意一下在Access的同时更新子树信息的方法  

73 node *access(node *x) {  

74     node *y = null;  

75  

76     while (x != null) {  

77         splay(x);  

78  

79         x → tree_cnt += x → ch[1] → chain_cnt - y →  

80             → chain_cnt;  

81         x → tree_sum += (x → ch[1] → rev ? x →  

82             → ch[1] → sumr : x → ch[1] → suml) - y →  

83             → suml;  

84         x → ch[1] = y;  

85  

86         (y = x) → refresh();  

87         x = x → p;  

88     }  

89  

90     return y;  

91 }  

92  

93 // 找到一个点所在连通块的根  

94 // 对比原版没有变化  

95 node *getroot(node *x) {  

96     x = access(x);  

97  

98     while (x → pushdown(), x → ch[0] != null)  

99         x = x → ch[0];  

100    splay(x);  

101  

102    return x;  

103 }  

104  

105 // 换根，同样没有变化  

106 void makeroott(node *x) {  

107     access(x);  

108     splay(x);  

109     x → rev ≈ true;  

110     x → pushdown();  

111  

112 // 连接两个点  

113 // !!! 注意这里必须把两者都变成根，因为只能修改根结点  

114 void link(node *x, node *y) {  

115     makeroott(x);  

116     makeroott(y);  

117  

118     x → p = y;  

119     y → tree_cnt += x → chain_cnt;  

120     y → tree_sum += x → suml;  

121     y → refresh();  

122  

123 // 删除一条边  

124 // 对比原版没有变化  

125 void cut(node *x, node *y) {  

126     makeroott(x);  

127     access(y);  

128     splay(y);  

129  

130     y → ch[0] → p = null;  

131     y → ch[0] = null;  

132     y → refresh();  

133  

134 // 修改/询问一个点，这里以询问为例  

135 // 如果是修改就在换根之后搞一些操作

```

```
122 long long query(node *x) {
123     makeroot(x);
124     return x -> suml;
125 }
126
127 // Splay函数
128 // 对比原版没有变化
129 void splay(node *x) {
130     x -> pushdown();
131
132     while (!isroot(x)) {
133         if (!isroot(x -> p))
134             x -> p -> p -> pushdown();
135         x -> p -> pushdown();
136         x -> pushdown();
137
138         if (isroot(x -> p)) {
139             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
140             break;
141         }
142
143         if (dir(x) == dir(x -> p))
144             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
145         else
146             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
147
148         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
149     }
150 }
151
152 // 旋转函数
153 // 对比原版没有变化
154 void rot(node *x, int d) {
155     node *y = x -> ch[d ^ 1];
156
157     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
158         y -> ch[d] -> p = x;
159
160     y -> p = x -> p;
161     if (!isroot(x))
162         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
163
164     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
165
166     x -> refresh();
167     y -> refresh();
168 }
```

```

void push(long long x) {
    if (x > (-INF) >> 2)
        q1.push(x);
}

void erase(long long x) {
    if (x > (-INF) >> 2)
        q2.push(x);
}

long long top() {
    if (empty())
        return -INF;

    while (!q2.empty() && q1.top() == q2.top()) {
        q1.pop();
        q2.pop();
    }

    return q1.top();
}

long long top2() {
    if (size() < 2)
        return -INF;

    long long a = top();
    erase(a);
    long long b = top();
    push(a);
    return a + b;
}

int size() {
    return q1.size() - q2.size();
}

bool empty() {
    return q1.size() == q2.size();
}

```

heap // 全局堆维护每条链的最大子段和

```

struct node {
    long long sum, maxsum, prefix, suffix;
    int key;
    binary_heap heap; // 每个点的堆存的是它的子树中到它的
    → 最远距离, 如果它是黑点的话还会包括自己
    node *ch[2], *p;
    bool rev;
    node(int k = 0): sum(k), maxsum(-INF),
    → prefix(-INF),
    → suffix(-INF), key(k), rev(false) {}
    inline void pushdown() {
        if (!rev)
            return;

        ch[0] → rev ≈ true;
        ch[1] → rev ≈ true;
        swap(ch[0], ch[1]);
        swap(prefix, suffix);
        rev = false;
    }
    inline void refresh() {
        pushdown();
        ch[0] → pushdown();
        ch[1] → pushdown();
        sum = ch[0] → sum + ch[1] → sum + key;
        prefix = max(ch[0] → prefix,
                     ch[0] → sum + key + ch[1] →
                     → prefix);
        suffix = max(ch[1] → suffix,

```

4.7.4 模板题:动态QTREE4(询问树上相距最远点)

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4 #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
5
6 #define isroot(x) ((x) → p == null || ((x) != (x) → p → ch[1]))
7 #define dir(x) ((x) == (x) → p → ch[1])
8
9 using namespace std;
10 using namespace __gnu_pbds;
11
12 constexpr int maxn = 100005;
13 constexpr long long INF = 1000000000000000000l;
14
15 struct binary_heap {
16     __gnu_pbds::priority_queue<long long, less<long
17         → long>, binary_heap_tag> q1, q2;
18     binary_heap() {}
```

```

87         ch[1] → sum + key + ch[0] →
88             ↵ suffix);
89     maxsum = max(max(ch[0] → maxsum, ch[1] →
90                     ↵ maxsum),
91                 ch[0] → suffix + key + ch[1] →
92                     ↵ prefix);
93
94     if (!heap.empty()) {
95         prefix = max(prefix,
96                         ch[0] → sum + key +
97                             ↵ heap.top());
98         suffix = max(suffix,
99                         ch[1] → sum + key +
100                            ↵ heap.top());
101        maxsum = max(maxsum, max(ch[0] → suffix,
102                                ch[1] → prefix) +
103                                    ↵ key +
104                                    ↵ heap.top());
105
106        if (heap.size() > 1) {
107            maxsum = max(maxsum, heap.top2() +
108                          ↵ key);
109        }
110    }
111 }
112 null[maxn < 1], *ptr = null;
113
114 void addedge(int, int, int);
115 void deledge(int, int);
116 void modify(int, int, int);
117 void modify_color(int);
118 node *newnode(int);
119 node *access(node *);
120 void makeroott(node *);
121 void link(node *, node *);
122 void cut(node *, node *);
123 void splay(node *);
124 void rot(node *, int);
125
126 queue<node *> freenodes;
127 tree<pair<int, int>, node *> mp;
128
129 bool col[maxn] = {false};
130 char c;
131 int n, m, k, x, y, z;
132
133 int main() {
134     null → ch[0] = null → ch[1] = null → p = null;
135     scanf("%d%d%d", &n, &m, &k);
136
137     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
138         newnode(0);
139
140     heap.push(0);
141
142     while (k--) {
143         scanf("%d", &x);
144
145         col[x] = true;
146         null[x].heap.push(0);
147     }
148
149     for (int i = 1; i < n; i++) {
150         scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
151
152         if (x > y)
153             swap(x, y);
154         addedge(x, y, z);
155
156         while (m--) {
157             scanf(" %c%d", &c, &x);
158
159             if (c == 'A') {
160                 scanf("%d", &y);
161
162                 if (x > y)
163                     swap(x, y);
164                 deledge(x, y);
165
166             else if (c == 'B') {
167                 scanf("%d%d", &y, &z);
168
169                 if (x > y)
170                     swap(x, y);
171                 addedge(x, y, z);
172
173             else if (c == 'C') {
174                 scanf("%d%d", &y, &z);
175
176                 if (x > y)
177                     swap(x, y);
178                 modify(x, y, z);
179
180             else
181                 modify_color(x);
182
183             printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
184                             ↵ -1));
185
186             return 0;
187         }
188
189         void addedge(int x, int y, int z) {
190             node *tmp;
191             if (freenodes.empty())
192                 tmp = newnode(z);
193             else {
194                 tmp = freenodes.front();
195                 freenodes.pop();
196                 *tmp = node(z);
197             }
198
199             tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
200
201             heap.push(tmp → maxsum);
202             link(tmp, null + x);
203             link(tmp, null + y);
204             mp[make_pair(x, y)] = tmp;
205
206         void deledge(int x, int y) {
207             node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
208
209             cut(tmp, null + x);
210             cut(tmp, null + y);
211
212             freenodes.push(tmp);
213             heap.erase(tmp → maxsum);
214             mp.erase(make_pair(x, y));
215
216         void modify(int x, int y, int z) {
217             node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
218             makeroott(tmp);
219             tmp → pushdown();
220
221             heap.erase(tmp → maxsum);
222             tmp → key = z;
223             tmp → refresh();
224             heap.push(tmp → maxsum);
225
226         }
227
228     }
229
230     while (m--) {
231         scanf(" %c%d", &c, &x);
232
233         if (c == 'A') {
234             scanf("%d", &y);
235
236             if (x > y)
237                 swap(x, y);
238             deledge(x, y);
239
240         else if (c == 'B') {
241             scanf("%d%d", &y, &z);
242
243             if (x > y)
244                 swap(x, y);
245             addedge(x, y, z);
246
247         else if (c == 'C') {
248             scanf("%d%d", &y, &z);
249
250             if (x > y)
251                 swap(x, y);
252             modify(x, y, z);
253
254         else
255             modify_color(x);
256
257         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
258                         ↵ -1));
259
260         return 0;
261     }
262
263     void addedge(int x, int y, int z) {
264         node *tmp;
265         if (freenodes.empty())
266             tmp = newnode(z);
267         else {
268             tmp = freenodes.front();
269             freenodes.pop();
270             *tmp = node(z);
271         }
272
273         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
274
275         heap.push(tmp → maxsum);
276         link(tmp, null + x);
277         link(tmp, null + y);
278         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
279
280     void deledge(int x, int y) {
281         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
282
283         cut(tmp, null + x);
284         cut(tmp, null + y);
285
286         freenodes.push(tmp);
287         heap.erase(tmp → maxsum);
288         mp.erase(make_pair(x, y));
289
290     void modify(int x, int y, int z) {
291         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
292         makeroott(tmp);
293         tmp → pushdown();
294
295         heap.erase(tmp → maxsum);
296         tmp → key = z;
297         tmp → refresh();
298         heap.push(tmp → maxsum);
299
300     }
301
302     while (m--) {
303         scanf(" %c%d", &c, &x);
304
305         if (c == 'A') {
306             scanf("%d", &y);
307
308             if (x > y)
309                 swap(x, y);
310             deledge(x, y);
311
312         else if (c == 'B') {
313             scanf("%d%d", &y, &z);
314
315             if (x > y)
316                 swap(x, y);
317             addedge(x, y, z);
318
319         else if (c == 'C') {
320             scanf("%d%d", &y, &z);
321
322             if (x > y)
323                 swap(x, y);
324             modify(x, y, z);
325
326         else
327             modify_color(x);
328
329         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
330                         ↵ -1));
331
332         return 0;
333     }
334
335     void addedge(int x, int y, int z) {
336         node *tmp;
337         if (freenodes.empty())
338             tmp = newnode(z);
339         else {
340             tmp = freenodes.front();
341             freenodes.pop();
342             *tmp = node(z);
343         }
344
345         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
346
347         heap.push(tmp → maxsum);
348         link(tmp, null + x);
349         link(tmp, null + y);
350         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
351
352     void deledge(int x, int y) {
353         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
354
355         cut(tmp, null + x);
356         cut(tmp, null + y);
357
358         freenodes.push(tmp);
359         heap.erase(tmp → maxsum);
360         mp.erase(make_pair(x, y));
361
362     void modify(int x, int y, int z) {
363         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
364         makeroott(tmp);
365         tmp → pushdown();
366
367         heap.erase(tmp → maxsum);
368         tmp → key = z;
369         tmp → refresh();
370         heap.push(tmp → maxsum);
371
372     }
373
374     while (m--) {
375         scanf(" %c%d", &c, &x);
376
377         if (c == 'A') {
378             scanf("%d", &y);
379
380             if (x > y)
381                 swap(x, y);
382             deledge(x, y);
383
384         else if (c == 'B') {
385             scanf("%d%d", &y, &z);
386
387             if (x > y)
388                 swap(x, y);
389             addedge(x, y, z);
390
391         else if (c == 'C') {
392             scanf("%d%d", &y, &z);
393
394             if (x > y)
395                 swap(x, y);
396             modify(x, y, z);
397
398         else
399             modify_color(x);
400
401         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
402                         ↵ -1));
403
404         return 0;
405     }
406
407     void addedge(int x, int y, int z) {
408         node *tmp;
409         if (freenodes.empty())
410             tmp = newnode(z);
411         else {
412             tmp = freenodes.front();
413             freenodes.pop();
414             *tmp = node(z);
415         }
416
417         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
418
419         heap.push(tmp → maxsum);
420         link(tmp, null + x);
421         link(tmp, null + y);
422         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
423
424     void deledge(int x, int y) {
425         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
426
427         cut(tmp, null + x);
428         cut(tmp, null + y);
429
430         freenodes.push(tmp);
431         heap.erase(tmp → maxsum);
432         mp.erase(make_pair(x, y));
433
434     void modify(int x, int y, int z) {
435         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
436         makeroott(tmp);
437         tmp → pushdown();
438
439         heap.erase(tmp → maxsum);
440         tmp → key = z;
441         tmp → refresh();
442         heap.push(tmp → maxsum);
443
444     }
445
446     while (m--) {
447         scanf(" %c%d", &c, &x);
448
449         if (c == 'A') {
450             scanf("%d", &y);
451
452             if (x > y)
453                 swap(x, y);
454             deledge(x, y);
455
456         else if (c == 'B') {
457             scanf("%d%d", &y, &z);
458
459             if (x > y)
460                 swap(x, y);
461             addedge(x, y, z);
462
463         else if (c == 'C') {
464             scanf("%d%d", &y, &z);
465
466             if (x > y)
467                 swap(x, y);
468             modify(x, y, z);
469
470         else
471             modify_color(x);
472
473         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
474                         ↵ -1));
475
476         return 0;
477     }
478
479     void addedge(int x, int y, int z) {
480         node *tmp;
481         if (freenodes.empty())
482             tmp = newnode(z);
483         else {
484             tmp = freenodes.front();
485             freenodes.pop();
486             *tmp = node(z);
487         }
488
489         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
490
491         heap.push(tmp → maxsum);
492         link(tmp, null + x);
493         link(tmp, null + y);
494         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
495
496     void deledge(int x, int y) {
497         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
498
499         cut(tmp, null + x);
500         cut(tmp, null + y);
501
502         freenodes.push(tmp);
503         heap.erase(tmp → maxsum);
504         mp.erase(make_pair(x, y));
505
506     void modify(int x, int y, int z) {
507         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
508         makeroott(tmp);
509         tmp → pushdown();
510
511         heap.erase(tmp → maxsum);
512         tmp → key = z;
513         tmp → refresh();
514         heap.push(tmp → maxsum);
515
516     }
517
518     while (m--) {
519         scanf(" %c%d", &c, &x);
520
521         if (c == 'A') {
522             scanf("%d", &y);
523
524             if (x > y)
525                 swap(x, y);
526             deledge(x, y);
527
528         else if (c == 'B') {
529             scanf("%d%d", &y, &z);
530
531             if (x > y)
532                 swap(x, y);
533             addedge(x, y, z);
534
535         else if (c == 'C') {
536             scanf("%d%d", &y, &z);
537
538             if (x > y)
539                 swap(x, y);
540             modify(x, y, z);
541
542         else
543             modify_color(x);
544
545         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
546                         ↵ -1));
547
548         return 0;
549     }
550
551     void addedge(int x, int y, int z) {
552         node *tmp;
553         if (freenodes.empty())
554             tmp = newnode(z);
555         else {
556             tmp = freenodes.front();
557             freenodes.pop();
558             *tmp = node(z);
559         }
560
561         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
562
563         heap.push(tmp → maxsum);
564         link(tmp, null + x);
565         link(tmp, null + y);
566         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
567
568     void deledge(int x, int y) {
569         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
570
571         cut(tmp, null + x);
572         cut(tmp, null + y);
573
574         freenodes.push(tmp);
575         heap.erase(tmp → maxsum);
576         mp.erase(make_pair(x, y));
577
578     void modify(int x, int y, int z) {
579         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
580         makeroott(tmp);
581         tmp → pushdown();
582
583         heap.erase(tmp → maxsum);
584         tmp → key = z;
585         tmp → refresh();
586         heap.push(tmp → maxsum);
587
588     }
589
590     while (m--) {
591         scanf(" %c%d", &c, &x);
592
593         if (c == 'A') {
594             scanf("%d", &y);
595
596             if (x > y)
597                 swap(x, y);
598             deledge(x, y);
599
600         else if (c == 'B') {
601             scanf("%d%d", &y, &z);
602
603             if (x > y)
604                 swap(x, y);
605             addedge(x, y, z);
606
607         else if (c == 'C') {
608             scanf("%d%d", &y, &z);
609
610             if (x > y)
611                 swap(x, y);
612             modify(x, y, z);
613
614         else
615             modify_color(x);
616
617         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
618                         ↵ -1));
619
620         return 0;
621     }
622
623     void addedge(int x, int y, int z) {
624         node *tmp;
625         if (freenodes.empty())
626             tmp = newnode(z);
627         else {
628             tmp = freenodes.front();
629             freenodes.pop();
630             *tmp = node(z);
631         }
632
633         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
634
635         heap.push(tmp → maxsum);
636         link(tmp, null + x);
637         link(tmp, null + y);
638         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
639
640     void deledge(int x, int y) {
641         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
642
643         cut(tmp, null + x);
644         cut(tmp, null + y);
645
646         freenodes.push(tmp);
647         heap.erase(tmp → maxsum);
648         mp.erase(make_pair(x, y));
649
650     void modify(int x, int y, int z) {
651         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
652         makeroott(tmp);
653         tmp → pushdown();
654
655         heap.erase(tmp → maxsum);
656         tmp → key = z;
657         tmp → refresh();
658         heap.push(tmp → maxsum);
659
660     }
661
662     while (m--) {
663         scanf(" %c%d", &c, &x);
664
665         if (c == 'A') {
666             scanf("%d", &y);
667
668             if (x > y)
669                 swap(x, y);
670             deledge(x, y);
671
672         else if (c == 'B') {
673             scanf("%d%d", &y, &z);
674
675             if (x > y)
676                 swap(x, y);
677             addedge(x, y, z);
678
679         else if (c == 'C') {
680             scanf("%d%d", &y, &z);
681
682             if (x > y)
683                 swap(x, y);
684             modify(x, y, z);
685
686         else
687             modify_color(x);
688
689         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
690                         ↵ -1));
691
692         return 0;
693     }
694
695     void addedge(int x, int y, int z) {
696         node *tmp;
697         if (freenodes.empty())
698             tmp = newnode(z);
699         else {
700             tmp = freenodes.front();
701             freenodes.pop();
702             *tmp = node(z);
703         }
704
705         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
706
707         heap.push(tmp → maxsum);
708         link(tmp, null + x);
709         link(tmp, null + y);
710         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
711
712     void deledge(int x, int y) {
713         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
714
715         cut(tmp, null + x);
716         cut(tmp, null + y);
717
718         freenodes.push(tmp);
719         heap.erase(tmp → maxsum);
720         mp.erase(make_pair(x, y));
721
722     void modify(int x, int y, int z) {
723         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
724         makeroott(tmp);
725         tmp → pushdown();
726
727         heap.erase(tmp → maxsum);
728         tmp → key = z;
729         tmp → refresh();
730         heap.push(tmp → maxsum);
731
732     }
733
734     while (m--) {
735         scanf(" %c%d", &c, &x);
736
737         if (c == 'A') {
738             scanf("%d", &y);
739
740             if (x > y)
741                 swap(x, y);
742             deledge(x, y);
743
744         else if (c == 'B') {
745             scanf("%d%d", &y, &z);
746
747             if (x > y)
748                 swap(x, y);
749             addedge(x, y, z);
750
751         else if (c == 'C') {
752             scanf("%d%d", &y, &z);
753
754             if (x > y)
755                 swap(x, y);
756             modify(x, y, z);
757
758         else
759             modify_color(x);
760
761         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
762                         ↵ -1));
763
764         return 0;
765     }
766
767     void addedge(int x, int y, int z) {
768         node *tmp;
769         if (freenodes.empty())
770             tmp = newnode(z);
771         else {
772             tmp = freenodes.front();
773             freenodes.pop();
774             *tmp = node(z);
775         }
776
777         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
778
779         heap.push(tmp → maxsum);
780         link(tmp, null + x);
781         link(tmp, null + y);
782         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
783
784     void deledge(int x, int y) {
785         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
786
787         cut(tmp, null + x);
788         cut(tmp, null + y);
789
790         freenodes.push(tmp);
791         heap.erase(tmp → maxsum);
792         mp.erase(make_pair(x, y));
793
794     void modify(int x, int y, int z) {
795         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
796         makeroott(tmp);
797         tmp → pushdown();
798
799         heap.erase(tmp → maxsum);
800         tmp → key = z;
801         tmp → refresh();
802         heap.push(tmp → maxsum);
803
804     }
805
806     while (m--) {
807         scanf(" %c%d", &c, &x);
808
809         if (c == 'A') {
810             scanf("%d", &y);
811
812             if (x > y)
813                 swap(x, y);
814             deledge(x, y);
815
816         else if (c == 'B') {
817             scanf("%d%d", &y, &z);
818
819             if (x > y)
820                 swap(x, y);
821             addedge(x, y, z);
822
823         else if (c == 'C') {
824             scanf("%d%d", &y, &z);
825
826             if (x > y)
827                 swap(x, y);
828             modify(x, y, z);
829
830         else
831             modify_color(x);
832
833         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
834                         ↵ -1));
835
836         return 0;
837     }
838
839     void addedge(int x, int y, int z) {
840         node *tmp;
841         if (freenodes.empty())
842             tmp = newnode(z);
843         else {
844             tmp = freenodes.front();
845             freenodes.pop();
846             *tmp = node(z);
847         }
848
849         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
850
851         heap.push(tmp → maxsum);
852         link(tmp, null + x);
853         link(tmp, null + y);
854         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
855
856     void deledge(int x, int y) {
857         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
858
859         cut(tmp, null + x);
860         cut(tmp, null + y);
861
862         freenodes.push(tmp);
863         heap.erase(tmp → maxsum);
864         mp.erase(make_pair(x, y));
865
866     void modify(int x, int y, int z) {
867         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
868         makeroott(tmp);
869         tmp → pushdown();
870
871         heap.erase(tmp → maxsum);
872         tmp → key = z;
873         tmp → refresh();
874         heap.push(tmp → maxsum);
875
876     }
877
878     while (m--) {
879         scanf(" %c%d", &c, &x);
880
881         if (c == 'A') {
882             scanf("%d", &y);
883
884             if (x > y)
885                 swap(x, y);
886             deledge(x, y);
887
888         else if (c == 'B') {
889             scanf("%d%d", &y, &z);
890
891             if (x > y)
892                 swap(x, y);
893             addedge(x, y, z);
894
895         else if (c == 'C') {
896             scanf("%d%d", &y, &z);
897
898             if (x > y)
899                 swap(x, y);
900             modify(x, y, z);
901
902         else
903             modify_color(x);
904
905         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
906                         ↵ -1));
907
908         return 0;
909     }
910
911     void addedge(int x, int y, int z) {
912         node *tmp;
913         if (freenodes.empty())
914             tmp = newnode(z);
915         else {
916             tmp = freenodes.front();
917             freenodes.pop();
918             *tmp = node(z);
919         }
920
921         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
922
923         heap.push(tmp → maxsum);
924         link(tmp, null + x);
925         link(tmp, null + y);
926         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
927
928     void deledge(int x, int y) {
929         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
930
931         cut(tmp, null + x);
932         cut(tmp, null + y);
933
934         freenodes.push(tmp);
935         heap.erase(tmp → maxsum);
936         mp.erase(make_pair(x, y));
937
938     void modify(int x, int y, int z) {
939         node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
940         makeroott(tmp);
941         tmp → pushdown();
942
943         heap.erase(tmp → maxsum);
944         tmp → key = z;
945         tmp → refresh();
946         heap.push(tmp → maxsum);
947
948     }
949
950     while (m--) {
951         scanf(" %c%d", &c, &x);
952
953         if (c == 'A') {
954             scanf("%d", &y);
955
956             if (x > y)
957                 swap(x, y);
958             deledge(x, y);
959
960         else if (c == 'B') {
961             scanf("%d%d", &y, &z);
962
963             if (x > y)
964                 swap(x, y);
965             addedge(x, y, z);
966
967         else if (c == 'C') {
968             scanf("%d%d", &y, &z);
969
970             if (x > y)
971                 swap(x, y);
972             modify(x, y, z);
973
974         else
975             modify_color(x);
976
977         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
978                         ↵ -1));
979
980         return 0;
981     }
982
983     void addedge(int x, int y, int z) {
984         node *tmp;
985         if (freenodes.empty())
986             tmp = newnode(z);
987         else {
988             tmp = freenodes.front();
989             freenodes.pop();
990             *tmp = node(z);
991         }
992
993         tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
994
995         heap.push(tmp → maxsum);
996         link(tmp, null + x);
997         link(tmp, null + y);
998         mp[make_pair(x, y)] = tmp;
999
1000    void deledge(int x, int y) {
1001        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1002
1003        cut(tmp, null + x);
1004        cut(tmp, null + y);
1005
1006        freenodes.push(tmp);
1007        heap.erase(tmp → maxsum);
1008        mp.erase(make_pair(x, y));
1009
1010    void modify(int x, int y, int z) {
1011        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1012        makeroott(tmp);
1013        tmp → pushdown();
1014
1015        heap.erase(tmp → maxsum);
1016        tmp → key = z;
1017        tmp → refresh();
1018        heap.push(tmp → maxsum);
1019
1020    }
1021
1022    while (m--) {
1023        scanf(" %c%d", &c, &x);
1024
1025        if (c == 'A') {
1026            scanf("%d", &y);
1027
1028            if (x > y)
1029                swap(x, y);
1030            deledge(x, y);
1031
1032        else if (c == 'B') {
1033            scanf("%d%d", &y, &z);
1034
1035            if (x > y)
1036                swap(x, y);
1037            addedge(x, y, z);
1038
1039        else if (c == 'C') {
1040            scanf("%d%d", &y, &z);
1041
1042            if (x > y)
1043                swap(x, y);
1044            modify(x, y, z);
1045
1046        else
1047            modify_color(x);
1048
1049        printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
1050                         ↵ -1));
1051
1052        return 0;
1053    }
1054
1055    void addedge(int x, int y, int z) {
1056        node *tmp;
1057        if (freenodes.empty())
1058            tmp = newnode(z);
1059        else {
1060            tmp = freenodes.front();
1061            freenodes.pop();
1062            *tmp = node(z);
1063        }
1064
1065        tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
1066
1067        heap.push(tmp → maxsum);
1068        link(tmp, null + x);
1069        link(tmp, null + y);
1070        mp[make_pair(x, y)] = tmp;
1071
1072    void deledge(int x, int y) {
1073        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1074
1075        cut(tmp, null + x);
1076        cut(tmp, null + y);
1077
1078        freenodes.push(tmp);
1079        heap.erase(tmp → maxsum);
1080        mp.erase(make_pair(x, y));
1081
1082    void modify(int x, int y, int z) {
1083        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1084        makeroott(tmp);
1085        tmp → pushdown();
1086
1087        heap.erase(tmp → maxsum);
1088        tmp → key = z;
1089        tmp → refresh();
1090        heap.push(tmp → maxsum);
1091
1092    }
1093
1094    while (m--) {
1095        scanf(" %c%d", &c, &x);
1096
1097        if (c == 'A') {
1098            scanf("%d", &y);
1099
1100            if (x > y)
1101                swap(x, y);
1102            deledge(x, y);
1103
1104        else if (c == 'B') {
1105            scanf("%d%d", &y, &z);
1106
1107            if (x > y)
1108                swap(x, y);
1109            addedge(x, y, z);
1110
1111        else if (c == 'C') {
1112            scanf("%d%d", &y, &z);
1113
1114            if (x > y)
1115                swap(x, y);
1116            modify(x, y, z);
1117
1118        else
1119            modify_color(x);
1120
1121        printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
1122                         ↵ -1));
1123
1124        return 0;
1125    }
1126
1127    void addedge(int x, int y, int z) {
1128        node *tmp;
1129        if (freenodes.empty())
1130            tmp = newnode(z);
1131        else {
1132            tmp = freenodes.front();
1133            freenodes.pop();
1134            *tmp = node(z);
1135        }
1136
1137        tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
1138
1139        heap.push(tmp → maxsum);
1140        link(tmp, null + x);
1141        link(tmp, null + y);
1142        mp[make_pair(x, y)] = tmp;
1143
1144    void deledge(int x, int y) {
1145        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1146
1147        cut(tmp, null + x);
1148        cut(tmp, null + y);
1149
1150        freenodes.push(tmp);
1151        heap.erase(tmp → maxsum);
1152        mp.erase(make_pair(x, y));
1153
1154    void modify(int x, int y, int z) {
1155        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1156        makeroott(tmp);
1157        tmp → pushdown();
1158
1159        heap.erase(tmp → maxsum);
1160        tmp → key = z;
1161        tmp → refresh();
1162        heap.push(tmp → maxsum);
1163
1164    }
1165
1166    while (m--) {
1167        scanf(" %c%d", &c, &x);
1168
1169        if (c == 'A') {
1170            scanf("%d", &y);
1171
1172            if (x > y)
1173                swap(x, y);
1174            deledge(x, y);
1175
1176        else if (c == 'B') {
1177            scanf("%d%d", &y, &z);
1178
1179            if (x > y)
1180                swap(x, y);
1181            addedge(x, y, z);
1182
1183        else if (c == 'C') {
1184            scanf("%d%d", &y, &z);
1185
1186            if (x > y)
1187                swap(x, y);
1188            modify(x, y, z);
1189
1190        else
1191            modify_color(x);
1192
1193        printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
1194                         ↵ -1));
1195
1196        return 0;
1197    }
1198
1199    void addedge(int x, int y, int z) {
1200        node *tmp;
1201        if (freenodes.empty())
1202            tmp = newnode(z);
1203        else {
1204            tmp = freenodes.front();
1205            freenodes.pop();
1206            *tmp = node(z);
1207        }
1208
1209        tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
1210
1211        heap.push(tmp → maxsum);
1212        link(tmp, null + x);
1213        link(tmp, null + y);
1214        mp[make_pair(x, y)] = tmp;
1215
1216    void deledge(int x, int y) {
1217        node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
1218
1219        cut(tmp, null + x);
1220        cut(tmp, null + y);
1221
1222        freenodes.push(tmp);
1223        heap.erase(tmp → maxsum);
1224        mp.erase(make_pair(x, y));
1225
1226    void modify(int x, int y, int z
```

```

222 void modify_color(int x) {
223     makeroot(null + x);
224     col[x] ^= true;
225
226     if (col[x])
227         null[x].heap.push(0);
228     else
229         null[x].heap.erase(0);
230
231     heap.erase(null[x].maxsum);
232     null[x].refresh();
233     heap.push(null[x].maxsum);
234 }
235
236 node *newnode(int k) {
237     *(++ptr) = node(k);
238     ptr → ch[0] = ptr → ch[1] = ptr → p = null;
239     return ptr;
240 }
241
242 node *access(node *x) {
243     splay(x);
244     heap.erase(x → maxsum);
245     x → refresh();
246
247     if (x → ch[1] != null) {
248         x → ch[1] → pushdown();
249         x → heap.push(x → ch[1] → prefix);
250         x → refresh();
251         heap.push(x → ch[1] → maxsum);
252     }
253
254     x → ch[1] = null;
255     x → refresh();
256     node *y = x;
257     x = x → p;
258
259     while (x != null) {
260         splay(x);
261         heap.erase(x → maxsum);
262
263         if (x → ch[1] != null) {
264             x → ch[1] → pushdown();
265             x → heap.push(x → ch[1] → prefix);
266             heap.push(x → ch[1] → maxsum);
267         }
268
269         x → heap.erase(y → prefix);
270         x → ch[1] = y;
271         (y = x) → refresh();
272         x = x → p;
273     }
274
275     heap.push(y → maxsum);
276     return y;
277 }
278
279 void makeroot(node *x) {
280     access(x);
281     splay(x);
282     x → rev ^= true;
283 }
284
285 void link(node *x, node *y) { // 新添一条虚边, 维护y对应的堆
286     makeroot(x);
287     makeroot(y);
288
289     x → pushdown();
290     x → p = y;
291     heap.erase(y → maxsum);
292     y → heap.push(x → prefix);
293
294     y → refresh();
295     heap.push(y → maxsum);
296 }
297
298 void cut(node *x, node *y) { // 断开一条实边, 一条链变成
299     // 两条链, 需要维护全局堆
300     makeroot(x);
301     access(y);
302     splay(y);
303
304     heap.erase(y → maxsum);
305     heap.push(y → ch[0] → maxsum);
306     y → ch[0] → p = null;
307     y → ch[0] = null;
308     y → refresh();
309     heap.push(y → maxsum);
310
311     void splay(node *x) {
312         x → pushdown();
313
314         while (!isroot(x)) {
315             if (!isroot(x → p))
316                 x → p → p → pushdown();
317
318             x → p → pushdown();
319
320             if (isroot(x → p)) {
321                 rot(x → p, dir(x) ^ 1);
322                 break;
323             }
324
325             if (dir(x) == dir(x → p))
326                 rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
327             else
328                 rot(x → p, dir(x) ^ 1);
329
330             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
331         }
332     }
333
334 void rot(node *x, int d) {
335     node *y = x → ch[d ^ 1];
336
337     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
338         y → ch[d] → p = x;
339
340     y → p = x → p;
341
342     if (!isroot(x))
343         x → p → ch[dir(x)] = y;
344
345     (y → ch[d] = x) → p = y;
346
347     x → refresh();
348     y → refresh();
349 }

```

4.8 K-D树

4.8.1 动态K-D树(定期重构)

```

1 int l[2], r[2], x[B + 10][2], w[B + 10];
2 int n, op, ans = 0, cnt = 0, tmp = 0;
3 int d;
4
5 struct node {
6     int x[2], l[2], r[2], w, sum;
7     node *ch[2];
8

```

```

9  bool operator < (const node &a) const {
10    return x[d] < a.x[d];
11  }
12
13  void refresh() {
14    sum = ch[0] → sum + ch[1] → sum + w;
15    l[0] = min(x[0], min(ch[0] → l[0], ch[1] →
16                → l[0]));
17    l[1] = min(x[1], min(ch[0] → l[1], ch[1] →
18                → l[1]));
19    r[0] = max(x[0], max(ch[0] → r[0], ch[1] →
20                → r[0]));
21    r[1] = max(x[1], max(ch[0] → r[1], ch[1] →
22                → r[1]));
23  }
24 } null[maxn], *root = null;
25
26 void build(int l, int r, int k, node *&rt) {
27   if (l > r) {
28     rt = null;
29     return;
30   }
31
32   int mid = (l + r) / 2;
33
34   d = k;
35   nth_element(null + l, null + mid, null + r + 1);
36
37   rt = null + mid;
38   build(l, mid - 1, k ^ 1, rt → ch[0]);
39   build(mid + 1, r, k ^ 1, rt → ch[1]);
40
41   rt → refresh();
42
43   void query(node *rt) {
44     if (l[0] ≤ rt → l[0] && l[1] ≤ rt → l[1] && rt
45       → r[0] ≤ r[0] && rt → r[1] ≤ r[1]) {
46       ans += rt → sum;
47       return;
48     }
49     else if (l[0] > rt → r[0] || l[1] > rt → r[1] ||
50              → r[0] < rt → l[0] || r[1] < rt → l[1])
51       return;
52
53     if (l[0] ≤ rt → x[0] && l[1] ≤ rt → x[1] && rt
54       → x[0] ≤ r[0] && rt → x[1] ≤ r[1])
55       ans += rt → w;
56
57     query(rt → ch[0]);
58     query(rt → ch[1]);
59   }
60
61   int main() {
62
63     null → l[0] = null → l[1] = 100000000;
64     null → r[0] = null → r[1] = -100000000;
65     null → sum = 0;
66     null → ch[0] = null → ch[1] = null;
67     scanf("%*d");
68
69     while (scanf("%d", &op) == 1 && op != 3) {
70       if (op == 1) {
71         tmp++;
72         scanf("%d%d%d", &x[tmp][0], &x[tmp][1],
73               → &w[tmp]);
74         x[tmp][0] ≈ ans;
75         x[tmp][1] ≈ ans;
76         w[tmp] ≈ ans;
77       }
78     }
79   }
80 }
```

```

71   if (tmp == B) {
72     for (int i = 1; i ≤ tmp; i++) {
73       null[cnt + i].x[0] = x[i][0];
74       null[cnt + i].x[1] = x[i][1];
75       null[cnt + i].w = w[i];
76     }
77
78     build(1, cnt + tmp, 0, root);
79     tmp = 0;
80   }
81 }
82 else {
83   scanf("%d%d%d", &l[0], &l[1], &r[0],
84         → &r[1]);
85   l[0] ≈ ans;
86   l[1] ≈ ans;
87   r[0] ≈ ans;
88   r[1] ≈ ans;
89   ans = 0;
90
91   for (int i = 1; i ≤ tmp; i++) {
92     if (l[0] ≤ x[i][0] && l[1] ≤ x[i][1]
93       → && x[i][0] ≤ r[0] && x[i][1] ≤
94       → r[1])
95       ans += w[i];
96   }
97
98   query(root);
99   printf("%d\n", ans);
100 }
```

4.9 LCA最近公共祖先

4.9.1 Tarjan LCA $O(n + m)$

```

1 vector<pair<int, int>> q[maxn];
2 int lca[maxn];
3
4 void dfs(int x) {
5   dfn[x] = ++tim; // 其实求LCA是用不到DFS序的，但是一般其他步骤要用
6   ufs[x] = x;
7
8   for (auto pi : q[x]) {
9     int y = pi.first, i = pi.second;
10    if (dfn[y])
11      lca[i] = findufs(y);
12  }
13
14  for (int y : G[x])
15    if (y != p[x]) {
16      p[y] = x;
17      dfs(y);
18    }
19
20  ufs[x] = p[x];
21 }
```

4.10 虚树

```

1 struct Tree {
2   vector<int> G[maxn], W[maxn];
3   int p[maxn], d[maxn], size[maxn], mn[maxn],
4       mx[maxn];
```

```

4   bool col[maxn];
5   long long ans_sum;
6   int ans_min, ans_max;
7
8   void add(int x, int y, int z) {
9     G[x].push_back(y);
10    W[x].push_back(z);
11  }
12
13  void dfs(int x) {
14    size[x] = col[x];
15    mx[x] = (col[x] ? d[x] : -inf);
16    mn[x] = (col[x] ? d[x] : inf);
17
18    for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
19      d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
20      dfs(G[x][i]);
21      ans_sum += (long long)size[x] * size[G[x]
22        ↪ [i]] * d[x];
23      ans_max = max(ans_max, mx[x] + mx[G[x][i]]
24        ↪ - (d[x] << 1));
25      ans_min = min(ans_min, mn[x] + mn[G[x][i]]
26        ↪ - (d[x] << 1));
27      size[x] += size[G[x][i]];
28      mx[x] = max(mx[x], mx[G[x][i]]);
29      mn[x] = min(mn[x], mn[G[x][i]]);
30    }
31  }
32
33  void clear(int x) {
34    G[x].clear();
35    W[x].clear();
36    col[x] = false;
37  }
38
39  void solve(int rt) {
40    ans_sum = 0;
41    ans_max = -inf;
42    ans_min = inf;
43    dfs(rt);
44    ans_sum <= 1;
45  }
46  virtree;
47
48  void dfs(int);
49  int LCA(int, int);
50
51  vector<int> G[maxn];
52  int f[maxn][20], d[maxn], dfn[maxn], tim = 0;
53
54  bool cmp(int x, int y) {
55    return dfn[x] < dfn[y];
56  }
57
58  int n, m, lgn = 0, a[maxn], s[maxn], v[maxn];
59
60  int main() {
61    scanf("%d", &n);
62
63    for (int i = 1, x, y; i < n; i++) {
64      scanf("%d%d", &x, &y);
65      G[x].push_back(y);
66      G[y].push_back(x);
67    }
68
69    G[n + 1].push_back(1);
70    dfs(n + 1);
71
72    lgn--;
73
74    for (int j = 1; j <= lgn; j++)
75      for (int i = 1; i <= n; i++)
76        f[i][j] = f[f[i][j - 1]][j - 1];
77
78    scanf("%d", &m);
79
80    while (m--) {
81      int k;
82      scanf("%d", &k);
83
84      for (int i = 1; i <= k; i++)
85        scanf("%d", &a[i]);
86
87      sort(a + 1, a + k + 1, cmp);
88      int top = 0, cnt = 0;
89      s[++top] = v[++cnt] = n + 1;
90      long long ans = 0;
91
92      for (int i = 1; i <= k; i++) {
93        virtree.col[a[i]] = true;
94        ans += d[a[i]] - 1;
95        int u = LCA(a[i], s[top]);
96
97        if (s[top] != u) {
98          while (top > 1 && d[s[top - 1]] ≥
99            ↪ d[u]) {
100            virtree.add(s[top - 1], s[top],
101              ↪ d[s[top]] - d[s[top - 1]]);
102            top--;
103          }
104
105          if (s[top] != u) {
106            virtree.add(u, s[top], d[s[top]] -
107              ↪ d[u]);
108            s[top] = v[++cnt] = u;
109          }
110
111          s[++top] = a[i];
112        }
113
114        virtree.add(s[i], s[i + 1], d[s[i + 1]] -
115          ↪ d[s[i]]);
116
117        virtree.solve(n + 1);
118        ans *= k - 1;
119        printf("%lld %d %d\n", ans - virtree.ans_sum,
120          ↪ virtree.ans_min, virtree.ans_max);
121
122        for (int i = 1; i <= k; i++)
123          virtree.clear(a[i]);
124        for (int i = 1; i <= cnt; i++)
125          virtree.clear(v[i]);
126
127      }
128
129      void dfs(int x) {
130        dfn[x] = ++tim;
131        d[x] = d[f[x][0]] + 1;
132
133        while ((1 << lgn) < d[x])
134          lgn++;
135
136        for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
137          if (G[x][i] != f[x][0]) {
138            f[G[x][i]][0] = x;
139            dfs(G[x][i]);
140          }
141      }
142    }
143  }
144
145  return 0;
146}

```

```

140     }
141 }
142
143 int LCA(int x, int y) {
144     if (d[x] != d[y]) {
145         if (d[x] < d[y])
146             swap(x, y);
147
148         for (int i = lgn; i ≥ 0; i--)
149             if (((d[x] - d[y]) > i) & 1)
150                 x = f[x][i];
151     }
152
153     if (x == y)
154         return x;
155
156     for (int i = lgn; i ≥ 0; i--)
157         if (f[x][i] != f[y][i]) {
158             x = f[x][i];
159             y = f[y][i];
160         }
161
162     return f[x][0];
163 }
```

```

42     v[x][h[x] - j - 1] += v[y][h[y] - j];
43
44     int t = v[x][h[x] - j - 1];
45     if (t > mx || (t == mx && h[x] - j - 1
46         ↪ > ans[x])) {
47         mx = t;
48         ans[x] = h[x] - j - 1;
49     }
50
51     v[y].clear();
52 }
53 }
```

4.11 长链剖分

```

1 // 顾名思义，长链剖分是取最深的儿子作为重儿子
2
3 // O(n)维护以深度为下标的子树信息
4 vector<int> G[maxn], v[maxn];
5 int n, p[maxn], h[maxn], son[maxn], ans[maxn];
6
7 // 原题题意：求每个点的子树中与它距离是几的点最多，相同的
8 // → 取最大深度
9 // 由于vector只能在后面加入元素，为了写代码方便，这里反过来存
10 // 或者开一个结构体维护倒过来的vector
11 void dfs(int x) {
12     h[x] = 1;
13
14     for (int y : G[x])
15         if (y != p[x]){
16             p[y] = x;
17             dfs(y);
18
19             if (h[y] > h[son[x]])
20                 son[x] = y;
21
22     if (!son[x]) {
23         v[x].push_back(1);
24         ans[x] = 0;
25         return;
26     }
27
28     h[x] = h[son[x]] + 1;
29     swap(v[x], v[son[x]]);
30
31     if (v[x][ans[son[x]]] == 1)
32         ans[x] = h[x] - 1;
33     else
34         ans[x] = ans[son[x]];
35
36     v[x].push_back(1);
37
38     int mx = v[x][ans[x]];
39     for (int y : G[x])
40         if (y != p[x] && y != son[x]) {
41             for (int j = 1; j ≤ h[y]; j++) {
```

4.11.1 梯子剖分

```

1 // 在线求一个点的第k祖先 O(n log n)-O(1)
2 // 理论基础：任意一个点x的k级祖先y所在长链长度一定≥k
3
4 // 全局数组定义
5 vector<int> G[maxn], v[maxn];
6 int d[maxn], mxd[maxn], son[maxn], top[maxn],
7     ↪ len[maxn];
7 int f[19][maxn], log_tbl[maxn];
8
9 // 在主函数中两遍dfs之后加上如下预处理
10 log_tbl[0] = -1;
11 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
12     log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
13 for (int j = 1; (1 << j) < n; j++)
14     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
15         f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
16
17 // 第一遍dfs，用于计算深度和找出重儿子
18 void dfs1(int x) {
19     mxd[x] = d[x];
20
21     for (int y : G[x])
22         if (y != f[0][x]){
23             f[0][y] = x;
24             d[y] = d[x] + 1;
25
26             dfs1(y);
27
28             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
29             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
30                 son[x] = y;
31         }
32
33 // 第二遍dfs，用于进行剖分和预处理梯子剖分(每条链向上延伸
34 // → 一倍)数组
35 void dfs2(int x) {
36     top[x] = (x == son[f[0][x]] ? top[f[0][x]] : x);
37
38     for (int y : G[x])
39         if (y != f[0][x])
40             dfs2(y);
41
42     if (top[x] == x) {
43         int u = x;
44         while (top[son[u]] == x)
45             u = son[u];
46
47         len[x] = d[u] - d[x];
48         for (int i = 0; i < len[x]; i++, u = f[0][u])
49             v[x].push_back(u);
50     }
51     u = x;
```

```

52     for (int i = 0; i < len[x] && u; i++, u = f[0]
53         ↪ [u])
54         v[x].push_back(u);
55     }
56
57 // 在线询问x的k级祖先 O(1)
58 // 不存在时返回0
59 int query(int x, int k) {
60     if (!k)
61         return x;
62     if (k > d[x])
63         return 0;
64
65     x = f[log_tbl[k]][x];
66     k ≈ 1 << log_tbl[k];
67     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] +
68         ↪ k];

```

```

42             ↪
43         }
44     };
45 }

```

4.12 堆

4.12.1 左偏树

参见3.2.3.k短路(27页).

4.12.2 二叉堆

```

1 struct my_binary_heap {
2     static constexpr int maxn = 100005;
3
4     int a[maxn], size;
5
6     my_binary_heap() : size(0) {}
7
8     void push(int val) {
9         a[++size] = val;
10
11        for (int x = size; x > 1; x /= 2) {
12            if (a[x] < a[x / 2])
13                swap(a[x], a[x / 2]);
14            else
15                break;
16        }
17    }
18
19    int &top() {
20        return a[1];
21    }
22
23    int pop() {
24        int res = a[1];
25        a[1] = a[size--];
26
27        for (int x = 1, son; ; x = son) {
28            if (x * 2 == size)
29                son = x * 2;
30            else if (x * 2 > size)
31                break;
32            else if (a[x * 2] < a[x * 2 + 1])
33                son = x * 2;
34            else
35                son = x * 2 + 1;
36
37            if (a[son] < a[x])
38                swap(a[x], a[son]);
39            else
40                break;
41        }

```

4.13 莫队

注意如果 n 和 q 不平衡, 块大小应该设为 $\frac{n}{\sqrt{q}}$.

另外如果裸的莫队要卡常可以按块编号奇偶性分别对右端点正序或者倒序排序, 期望可以减少一半的移动次数.

4.13.1 莫队二次离线

适用范围: 询问的是点对相关(或者其它可以枚举每个点和区间算贡献)的信息, 并且可以离线; 更新时可以使用一些牺牲修改复杂度来改善询问复杂度的数据结构(如单点修改询问区间和).

先按照普通的莫队将区间排序. 考虑区间移动的情况, 以 (l, r) 向右移动右端点到 (l, t) 为例.

对于每个 $i \in (r, t]$ 来说, 它都要对区间 $[l, i)$ 算贡献. 可以拆成 $[1, i)$ 和 $[1, l)$ 两部分, 那么前一部分因为都是 i 和 $[1, i)$ 做贡献的形式所以可以直接预处理.

考虑后一部分, i 和 $(1, l)$ 做贡献, 因为莫队的性质我们可以保证这样的询问次数不超过 $O((n + m)\sqrt{n})$, 因此我们可以对每个 l 记录下来哪些 i 要和它询问. 并且每次移动时询问的 i 都是连续的, 所以对每个 l 开一个vector记录下对应的区间和编号就行了.

剩余的三种情况(右端点左移或者移动左端点)都是类似的, 具体可以看代码.

例: Yuno loves sqrt technology II (询问区间逆序对数)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, B = 314;
6
7 struct Q {
8     int l, r, d, id;
9
10    Q() = default;
11
12    Q(int l, int r, int d, int id) : l(l), r(r), d(d),
13        ↪ id(id) {}
14
15    friend bool operator < (const Q &a, const Q &b) {
16        if (a.d != b.d)
17            ↪ return a.d < b.d;
18
19        return a.r < b.r;
20    }
21 } q[maxn]; // 结构体可以复用, d既可以作为左端点块编号, 也
22             ↪ 可以作为二次离线处理的倍数
23
24 int global_n, bid[maxn], L[maxn], R[maxn], cntb;
25
26 int sa[maxn], sb[maxn];
27
28 void addp(int x) { // sqrt(n)修改 O(1)查询
29     for (int k = bid[x]; k ≤ cntb; k++)
30         sb[k]++;
31
32     for (int i = x; i ≤ R[bid[x]]; i++)
33         sa[i]++;
34 }
35
36 int queryp(int x) {
37     if (!x)
38         ↪ return 0;
39
40     int res = 0;
41
42     for (int i = 1; i ≤ L[bid[x]]; i++)
43         res += sb[i];
44
45     for (int i = 1; i ≤ R[bid[x]] - L[bid[x]] + 1; i++)
46         res -= sa[i];
47
48     return res;
49 }

```

```

38     return sa[x] + sb[bid[x] - 1];
39 }
40
41 void adds(int x) {
42     for (int k = 1; k <= bid[x]; k++)
43         sb[k]++;
44
45     for (int i = L[bid[x]]; i <= x; i++)
46         sa[i]++;
47 }
48
49 int querys(int x) {
50     if (x > global_n)
51         return 0; // 为了防止越界就判一下
52     return sa[x] + sb[bid[x] + 1];
53 }
54
55 vector<Q> vp[maxn], vs[maxn]; // prefix, suffix
56
57 long long fp[maxn], fs[maxn]; // prefix, suffix
58
59 int a[maxn], b[maxn];
60
61 long long ta[maxn], ans[maxn];
62
63 int main() {
64
65     int n, m;
66     scanf("%d%d", &n, &m);
67
68     global_n = n;
69
70     for (int i = 1; i <= n; i++)
71         scanf("%d", &a[i]);
72
73     memcpy(b, a, sizeof(int) * (n + 1));
74     sort(b + 1, b + n + 1);
75
76     for (int i = 1; i <= n; i++)
77         a[i] = lower_bound(b + 1, b + n + 1, a[i]) - b;
78
79     for (int i = 1; i <= n; i++) {
80         bid[i] = (i - 1) / B + 1;
81
82         if (!L[bid[i]])
83             L[bid[i]] = i;
84
85         R[bid[i]] = i;
86         cntb = bid[i];
87     }
88
89     for (int i = 1; i <= m; i++) {
90         scanf("%d%d", &q[i].l, &q[i].r);
91
92         q[i].d = bid[q[i].l];
93         q[i].id = i;
94     }
95
96     sort(q + 1, q + m + 1);
97
98     int l = 2, r = 1; // l, r是上一个询问的端点
99
100    for (int i = 1; i <= m; i++) {
101        int s = q[i].l, t = q[i].r; // s, t是当前要调整
102                                // 到的端点
103
104        if (s < l)
105            vs[r + 1].push_back(Q(s, l - 1, 1, i));
106        else if (s > l)
107            vs[r + 1].push_back(Q(l, s - 1, -1, i));

```

```

107
108     l = s;
109
110     if (t > r)
111         vp[l - 1].push_back(Q(r + 1, t, 1, i));
112     else if (t < r)
113         vp[l - 1].push_back(Q(t + 1, r, -1, i));
114
115     r = t;
116
117
118     for (int i = 1; i <= n; i++) { // 第一遍正着处理, 解
119                                // 决关于前缀的询问
120         fp[i] = fp[i - 1] + querys(a[i] + 1);
121
122         adds(a[i]);
123
124         for (auto q : vp[i]) {
125             long long tmp = 0;
126             for (int k = q.l; k <= q.r; k++)
127                 tmp += querys(a[k] + 1);
128
129             ta[q.id] -= q.d * tmp;
130         }
131
132         memset(sa, 0, sizeof(sa));
133         memset(sb, 0, sizeof(sb));
134
135     for (int i = n; i; i--) { // 第二遍倒着处理, 解决关
136                                // 于后缀的询问
137         fs[i] = fs[i + 1] + queryp(a[i] - 1);
138
139         addp(a[i]);
140
141         for (auto q : vs[i]) {
142             long long tmp = 0;
143             for (int k = q.l; k <= q.r; k++)
144                 tmp += queryp(a[k] - 1);
145
146             ta[q.id] -= q.d * tmp;
147         }
148
149         l = 2;
150         r = 1;
151
152     for (int i = 1; i <= m; i++) { // 求出fs和fp之后再加
153                                // 上这部分的贡献
154         int s = q[i].l, t = q[i].r;
155
156         ta[i] += fs[s] - fs[l];
157         ta[i] += fp[t] - fp[r];
158
159         l = s;
160         r = t;
161
162         ta[i] += ta[i - 1]; // 因为算出来的是相邻两个询
163                                // 问之间的贡献, 所以要前缀和
164         ans[q[i].id] = ta[i];
165
166     for (int i = 1; i <= m; i++)
167         printf("%lld\n", ans[i]);
168
169 }

```

4.13.2 带修莫队在线化 $O(n^{\frac{5}{3}})$

最简单的带修莫队：块大小设成 $n^{\frac{2}{3}}$ ，排序时第一关键字是左端点块编号，第二关键字是右端点块编号，第三关键字是时间。（记得把时间压缩成只有修改的时间。）

现在要求在线的同时支持修改，仍然以 $B = n^{\frac{2}{3}}$ 分一块，预处理出两块之间的贡献，那么预处理复杂度就是 $O(n^{\frac{5}{3}})$ 。

修改时最简单的方法是直接把 $n^{\frac{2}{3}}$ 个区间全更新一遍。嫌慢的话可以给每个区间打一个懒标记，询问的时候如果解了再更新区间的信息。注意如果附加信息是可减的（比如每个数的出现次数），那么就只需要存 $O(n^{\frac{1}{3}})$ 个。

总复杂度仍然是 $O(n^{\frac{5}{3}})$ ，如果打懒标记的话是跑不太满的。如果附加信息可减则空间复杂度是 $O(n^{\frac{4}{3}})$ ，否则和时间复杂度同阶。

4.13.3 莫队二次离线 在线化 $O((n+m)\sqrt{n})$

和之前的道理是一样的， i 和 $[1, i]$ 的贡献这部分仍然可以预处理掉，而前后缀对区间的贡献那部分只保存块端点处的信息。

按照莫队二次离线的转移方法操作之后发现只剩两边散块的贡献没有解决。这时可以具体问题具体解决，例如求逆序对的话直接预处理出排序后的数组然后归并即可。

时空复杂度均为 $O(n\sqrt{n})$ 。

以下代码以强制在线求区间逆序对为例（洛谷上被卡常了，正常情况下极限数据应该在1.5s内。）

```

1 constexpr int maxn = 100005, B = 315, maxb = maxn / B +
2   ↪ 5;
3
4 int n, bid[maxn], L[maxb], R[maxb], cntb;
5
6 struct DS { // O(sqrt(n))修改 O(1)查询
7     int total;
8     int sa[maxn], sb[maxb];
9
10    void init(const DS &o) {
11        total = o.total;
12        memcpy(sa, o.sa, sizeof(int) * (n + 1));
13        memcpy(sb, o.sb, sizeof(int) * (cntb + 1));
14    }
15
16    void add(int x) {
17        total++;
18        for (int k = 1; k ≤ bid[x]; k++)
19            sb[k]++;
20        for (int i = L[bid[x]]; i ≤ x; i++)
21            sa[i]++;
22    }
23
24    int querys(int x) {
25        if (x > n)
26            return 0;
27
28        return sb[bid[x] + 1] + sa[x];
29    }
30
31    int queryp(int x) {
32        return total - querys(x + 1);
33    }
34 } pr[maxb];
35
36 int c[maxn]; // 树状数组
37
38 void addc(int x, int d) {
39     while (x) {
40         c[x] += d;
41         x -= x & -x;
42     }
43 }
```

```

43
44 int queryc(int x) {
45     int ans = 0;
46     while (x ≤ n) {
47         ans += c[x];
48         x += x & -x;
49     }
50     return ans;
51 }
52
53 long long fp[maxn], fs[maxn];
54
55 int rnk[maxn], val[maxn][B + 5];
56
57 long long dat[maxb][maxb];
58
59 int a[maxn];
60
61 int main() {
62
63     int m;
64     cin >> n >> m;
65
66     for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
67         cin >> a[i];
68
69         bid[i] = (i - 1) / B + 1;
70         if (!L[bid[i]])
71             L[bid[i]] = i;
72         R[bid[i]] = i;
73         cntb = bid[i];
74
75         rnk[i] = i;
76     }
77
78     for (int k = 1; k ≤ cntb; k++)
79         sort(rnk + L[k], rnk + R[k] + 1, [](int x, int
80           ↪ y) {return a[x] < a[y];}); // 每个块排序
81
82     for (int i = n; i; i--) {
83         for (int j = 2; i + j - 1 ≤ R[bid[i]]; j++) {
84             val[i][j] = val[i + 1][j - 1] + val[i][j -
85               ↪ 1] - val[i + 1][j - 2];
86             if (a[i] > a[i + j - 1])
87                 val[i][j]++; // 块内用二维前缀和预处理
88     }
89
90     for (int k = 1; k ≤ cntb; k++) {
91         for (int i = L[k]; i ≤ R[k]; i++) {
92             dat[k][k] += queryc(a[i] + 1); // 单块内的逆
93             → 序对直接用树状数组预处理
94             addc(a[i], 1);
95     }
96
97     for (int i = L[k]; i ≤ R[k]; i++)
98         addc(a[i], -1);
99
100    for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
101        if (i > 1 && i == L[bid[i]])
102            pr[bid[i]].init(pr[bid[i] - 1]);
103
104        fp[i] = fp[i - 1] + pr[bid[i]].querys(a[i] +
105          ↪ 1);
106
107        pr[bid[i]].add(a[i]);
108
109        for (int i = n; i; i--) {
110            fs[i] = fs[i + 1] + (n - i - queryc(a[i] + 1));
111        }
112    }
113 }
```

```

109     addc(a[i], 1);
110 }
111
112 for (int s = 1; s <= cntb; s++) {
113     for (int t = s + 1; t <= cntb; t++) {
114         dat[s][t] = dat[s][t - 1] + dat[t][t];
115
116         for (int i = L[t]; i <= R[t]; i++) // 块间的
117             // 逆序对用刚才处理的分块求出
118             dat[s][t] += pr[t - 1].querys(a[i] + 1)
119             // - pr[s - 1].querys(a[i] + 1);
120     }
121
122 long long ans = 0;
123
124 while (m--) {
125     long long s, t;
126     cin >> s >> t;
127
128     int l = s ^ ans, r = t ^ ans;
129
130     if (bid[l] == bid[r])
131         ans = val[l][r - l + 1];
132     else {
133         ans = dat[bid[l] + 1][bid[r] - 1];
134
135         ans += fp[r] - fp[L[bid[r]] - 1];
136         for (int i = L[bid[r]]; i <= r; i++)
137             ans -= pr[bid[l]].querys(a[i] + 1);
138
139         ans += fs[l] - fs[R[bid[l]] + 1];
140         for (int i = l; i <= R[bid[l]]; i++)
141             ans -= (a[i] - 1) - pr[bid[r] - 1].queryp(a[i] - 1);
142
143         int i = L[bid[l]], j = L[bid[r]], w = 0; // 手写归并
144
145         while (true) {
146             while (i <= R[bid[l]] && rnk[i] < l)
147                 i++;
148             while (j <= R[bid[r]] && rnk[j] > r)
149                 j++;
150
151             if (i > R[bid[l]] && j > R[bid[r]])
152                 break;
153
154             int x = (i <= R[bid[l]] ? a[rnk[i]] : (int)1e9), y = (j <= R[bid[r]] ? a[rnk[j]] : (int)1e9);
155
156             if (x < y) {
157                 ans += w;
158                 i++;
159             } else {
160                 j++;
161                 w++;
162             }
163         }
164
165         cout << ans << '\n';
166     }
167
168     return 0;
169 }
```

4.14 常见根号思路

1. 通用

- 出现次数大于 \sqrt{n} 的数不会超过 \sqrt{n} 个
- 对于带修改问题, 如果不方便分治或者二进制分组, 可以考虑对操作分块, 每次查询时暴力最后的 \sqrt{n} 个修改并更正答案
- **根号分治:** 如果分治时每个子问题需要 $O(N)$ (N 是全局问题的大小)的时间, 而规模较小的子问题可以 $O(n^2)$ 解决, 则可以使用根号分治
 - 规模大于 \sqrt{n} 的子问题用 $O(N)$ 的方法解决, 规模小于 \sqrt{n} 的子问题用 $O(n^2)$ 暴力
 - 规模大于 \sqrt{n} 的子问题最多只有 \sqrt{n} 个
 - 规模不大于 \sqrt{n} 的子问题大小的平方和也必定不会超过 $n\sqrt{n}$
- 如果输入规模之和不大于 n (例如给定多个小字符串与大字符串进行询问), 那么规模超过 \sqrt{n} 的问题最多只有 \sqrt{n} 个

2. 序列

- 某些维护序列的问题可以用分块/块状链表维护
- 对于静态区间询问问题, 如果可以快速将左/右端点移动一位, 可以考虑莫队
 - 如果强制在线可以分块预处理, 但是空间需要 $n\sqrt{n}$
 - * 例题: 询问区间中有几种数出现次数恰好为 k , 强制在线
 - 如果带修改可以试着想一想带修莫队, 但是复杂度高达 $n^{\frac{5}{3}}$
- 线段树可以解决的问题也可以用分块来做到 $O(1)$ 询问或是 $O(1)$ 修改, 具体要看哪种操作更多

3. 树

- 与序列类似, 树上也有树分块和树上莫队
 - 树上带修莫队很麻烦, 常数也大, 最好不要先考虑
 - 树分块不要想当然
- 树分治也可以套根号分治, 道理是一样的

4. 字符串

- 循环节长度大于 \sqrt{n} 的子串最多只有 $O(n)$ 个, 如果是极长子串则只有 $O(\sqrt{n})$ 个

5 字符串

5.1 KMP

```

1 char s[maxn], t[maxn];
2 int fail[maxn];
3 int n, m;
4
5 void init() { // 注意字符串是0-based, 但是fail是1-based
6     memset(fail, 0, sizeof(fail));
7
8     for (int i = 1; i < m; i++) {
9         int j = fail[i];
10        while (j && t[i] != t[j])
11            j = fail[j];
12
13        if (t[i] == t[j])
14            fail[i + 1] = j + 1;
15        else
16            fail[i + 1] = 0;
17    }
18}
19
20 int KMP() {
21     int cnt = 0, j = 0;
22
23     for (int i = 0; i < n; i++) {
24         while (j && s[i] != t[j])
25             j = fail[j];
26
27         if (s[i] == t[j])
28             j++;
29         if (j == m)
30             cnt++;
31     }
32
33     return cnt;
34}

```

5.1.1 ex-KMP

```

1 //全局变量与数组定义
2 char s[maxn], t[maxn];
3 int n, m, a[maxn];
4
5 // 主过程 O(n + m)
6 // 把t的每个后缀与s的LCP输出到a中, s的后缀和自己的LCP存
7 // →在nx中
8 // 0-based, s的长度是m, t的长度是n
9 void exKMP(const char *s, const char *t, int *a) {
10    static int nx[maxn];
11
12    memset(nx, 0, sizeof(nx));
13
14    int j = 0;
15    while (j + 1 < m && s[j] == t[j + 1])
16        j++;
17    nx[1] = j;
18
19    for (int i = 2, k = 1; i < m; i++) {
20        int pos = k + nx[k], len = nx[i - k];
21
22        if (i + len < pos)
23            nx[i] = len;
24        else {
25            j = max(pos - i, 0);
26            while (i + j < m && s[j] == s[i + j])
27                j++;
28            nx[i] = j;
29        }
30    }
31
32    for (int i = 0; i < m; i++)
33        a[i] = nx[i];
34}

```

```

27
28         nx[i] = j;
29         k = i;
30     }
31 }
32
33 j = 0;
34 while (j < n && j < m && s[j] == t[j])
35     j++;
36 a[0] = j;
37
38 for (int i = 1, k = 0; i < n; i++) {
39     int pos = k + a[k], len = nx[i - k];
40     if (i + len < pos)
41         a[i] = len;
42     else {
43         j = max(pos - i, 0);
44         while (j < m && i + j < n && s[j] == t[i + j])
45             j++;
46         a[i] = j;
47         k = i;
48     }
49 }
50

```

5.2 AC自动机

```

1 int ch[maxm][26], f[maxm][26], q[maxm], sum[maxm], cnt
2     = 0;
3
4 // 在字典树中插入一个字符串 O(n)
5 int insert(const char *c) {
6     int x = 0;
7     while (*c) {
8         if (!ch[x][*c - 'a'])
9             ch[x][*c - 'a'] = ++cnt;
10        x = ch[x][*c++ - 'a'];
11    }
12    return x;
13}
14
15 // 建AC自动机 O(n * sigma)
16 void getfail() {
17     int x, head = 0, tail = 0;
18
19     for (int c = 0; c < 26; c++)
20         if (ch[0][c])
21             q[tail++] = ch[0][c]; // 把根节点的儿子加入
22                             // 队列
23
24     while (head != tail) {
25         x = q[head++];
26
27         G[f[x][0]].push_back(x);
28         fill(f[x] + 1, f[x] + 26, cnt + 1);
29
30         for (int c = 0; c < 26; c++) {
31             if (ch[x][c]) {
32                 int y = f[x][0];
33
34                 f[ch[x][c]][0] = ch[y][c];
35                 q[tail++] = ch[x][c];
36             }
37         }
38     }
39     fill(f[0], f[0] + 26, cnt + 1);

```

40

```

} }
```

5.3 后缀数组

5.3.1 倍增

```

1 constexpr int maxn = 100005;
2
3 void get_sa(char *s, int n, int *sa, int *rank, int
4   ↪ *height) { // 1-base
5   static int buc[maxn], id[maxn], p[maxn], t[maxn *
6     ↪ 2];
7
8   int m = 300;
9
10  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
11    |  buc[rank[i]] = s[i]++;
12  for (int i = 1; i ≤ m; i++)
13    |  buc[i] += buc[i - 1];
14  for (int i = n; i; i--)
15    |  sa[buc[rank[i]]--] = i;
16
17  memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
18
19  for (int k = 1, cnt = 0; cnt != n; k *= 2, m = cnt)
20    ↪ {
21    |  cnt = 0;
22    |  for (int i = n; i > n - k; i--)
23      |    id[++cnt] = i;
24
25    |  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
26      |    if (sa[i] > k)
27        |      id[++cnt] = sa[i] - k;
28
29    |  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
30      |    buc[p[i]] = rank[id[i]]++;
31  for (int i = 1; i ≤ m; i++)
32    |    buc[i] += buc[i - 1];
33  for (int i = n; i; i--)
34    |    sa[buc[p[i]]--] = id[i];
35
36  memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
37
38  memcpy(t, rank, sizeof(int) * (max(n, m) + 1));
39
40  cnt = 0;
41  for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
42    |    if (t[sa[i]] != t[sa[i - 1]] || t[sa[i] +
43      |      ↪ k] != t[sa[i - 1] + k])
44      |      cnt++;
45
46    |    rank[sa[i]] = cnt;
47  }
48
49  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
50    |    sa[rank[i]] = i;
51
52  for (int i = 1, k = 0; i ≤ n; i++) { // 顺便
53    |    ↪ 求height
54    |    if (k)
55      |      k--;
56
57    |    while (s[i + k] == s[sa[rank[i] - 1] + k])
58      |      k++;
59
60    height[rank[i]] = k; // height[i] = lcp(sa[i],
61      |    ↪ sa[i - 1])
62
63 }
```

```

58 }
59
60 char s[maxn];
61 int sa[maxn], rank[maxn], height[maxn];
62
63 int main() {
64   cin >> (s + 1);
65
66   int n = strlen(s + 1);
67
68   get_sa(s, n, sa, rank, height);
69
70   for (int i = 1; i ≤ n; i++)
71     cout << sa[i] << (i < n ? ' ' : '\n');
72
73   for (int i = 2; i ≤ n; i++)
74     cout << height[i] << (i < n ? ' ' : '\n');
75
76   return 0;
77 }
```

5.3.2 SA-IS

```

1 // SA-IS求完的SA有效位只有1~n, 但它是0-based, 如果其他部
2   ↪ 分是1-based就抄一下封装
3
4 constexpr int maxn = 100005, l_type = 0, s_type = 1;
5
6 // 判断一个字符是否为LMS字符
7 bool is_lms(int *tp, int x) {
8   return x > 0 && tp[x] == s_type && tp[x - 1] ==
9     ↪ l_type;
10
11 // 判断两个LMS子串是否相同
12 bool equal_substr(int *s, int x, int y, int *tp) {
13   do {
14     if (s[x] != s[y])
15       |  return false;
16     x++;
17     y++;
18   } while (!is_lms(tp, x) && !is_lms(tp, y));
19
20   return s[x] == s[y];
21
22 // 诱导排序(从*型诱导到L型, 从L型诱导到S型)
23 // 调用之前应将*型按要求放入SA中
24 void induced_sort(int *s, int *sa, int *tp, int *buc,
25   ↪ int *lbuc, int *sbuc, int n, int m) {
26   for (int i = 0; i ≤ n; i++)
27     if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == l_type)
28       |  sa[lbuc[s[sa[i] - 1]]++] = sa[i] - 1;
29
30   for (int i = 1; i ≤ m; i++)
31     sbuc[i] = buc[i] - 1;
32
33   for (int i = n; ~i; i--)
34     if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == s_type)
35       |  sa[sbuc[s[sa[i] - 1]]--] = sa[i] - 1;
36
37 // s是输入字符串, n是字符串的长度, m是字符集的大小
38 int *sa_is(int *s, int len, int m) {
39   int n = len - 1;
40
41   int *tp = new int[n + 1];
42   int *pos = new int[n + 1];
43   int *name = new int[n + 1];
44 }
```

```

44 int *sa = new int[n + 1];
45 int *buc = new int[m + 1];
46 int *lbuc = new int[m + 1];
47 int *sbuc = new int[m + 1];
48
49 memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
50 memset(lbuc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
51 memset(sbuc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
52
53 for (int i = 0; i ≤ n; i++)
| buc[s[i]]++;
54
55 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
| buc[i] += buc[i - 1];
56
| lbuc[i] = buc[i - 1];
57 | sbuc[i] = buc[i] - 1;
58 }
59
60 tp[n] = s_type;
61 for (int i = n - 1; ~i; i--) {
| if (s[i] < s[i + 1])
| | tp[i] = s_type;
62 | else if (s[i] > s[i + 1])
| | tp[i] = l_type;
63 | else
| | tp[i] = tp[i + 1];
64 }
65
66 int cnt = 0;
67 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
| if (tp[i] == s_type && tp[i - 1] == l_type)
| | pos[cnt++] = i;
68
69 memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
70 for (int i = 0; i < cnt; i++)
| sa[sbuc[s[pos[i]]--]] = pos[i];
71 induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
72
73 memset(name, -1, sizeof(int) * (n + 1));
74 int lastx = -1, namecnt = 1;
75 bool flag = false;
76
77 for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
| int x = sa[i];
78
| if (is_lms(tp, x)) {
| | if (lastx ≥ 0 && !equal_substr(s, x,
| | | → lastx, tp))
| | | namecnt++;
79
| | if (lastx ≥ 0 && namecnt == name[lastx])
| | | flag = true;
80
| | name[x] = namecnt;
| | lastx = x;
81 }
82 name[n] = 0;
83
84 int *t = new int[cnt];
85 int p = 0;
86 for (int i = 0; i ≤ n; i++)
| if (name[i] ≥ 0)
| | t[p++] = name[i];
87
88 int *tsa;
89 if (!flag) {
| tsa = new int[cnt];
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111

```

```

112
113     for (int i = 0; i < cnt; i++)
| | tsa[t[i]] = i;
114 }
115 else
| | tsa = sais(t, cnt, namecnt);
116
117 lbuc[0] = sbuc[0] = 0;
118 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
| | lbuc[i] = buc[i - 1];
| | sbuc[i] = buc[i] - 1;
119 }
120
121 memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
122 for (int i = cnt - 1; ~i; i--)
| | sa[sbuc[s[pos[tsa[i]]]]--] = pos[tsa[i]];
123 induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
124
125 // 多组数据的时候最好delete掉
126 delete[] tp;
127 delete[] pos;
128 delete[] name;
129 delete[] buc;
130 delete[] lbuc;
131 delete[] sbuc;
132 delete[] t;
133 delete[] tsa;
134
135 return sa;
136 }
137
138
139
140
141
142 // 封装好的函数, 1-based
143 void get_sa(char *s, int n, int *sa, int *rnk, int
144 → *height) {
145     static int a[maxn];
146
147     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
| | a[i - 1] = s[i];
148
149     a[n] = '$';
150
151     int *t = sais(a, n + 1, 256);
152     memcpy(sa, t, sizeof(int) * (n + 1));
153     delete[] t;
154
155     sa[0] = 0;
156     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
| | rnk[++sa[i]] = i;
157
158     for (int i = 1, k = 0; i ≤ n; i++) { // 求height
159         if (k)
| | k--;
160
| | while (s[i + k] == s[sa[rnk[i] - 1] + k])
| | | k++;
161
162         height[rnk[i]] = k; // height[i] = lcp(sa[i],
163 → sa[i - 1])
164     }
165 }
166
167
168
169

```

5.3.3 SAMSA

```

1 bool vis[maxn * 2];
2 char s[maxn];
3 int n, id[maxn * 2], ch[maxn * 2][26], height[maxn],
→ tim = 0;
4
5 void dfs(int x) {

```

```

6   if (id[x]) {
7     height[tim++] = val[last];
8     sa[tim] = id[x];
9
10    last = x;
11  }
12
13  for (int c = 0; c < 26; c++)
14    if (ch[x][c])
15      dfs(ch[x][c]);
16
17  last = par[x];
18}
19
20 int main() {
21  last = ++cnt;
22
23  scanf("%s", s + 1);
24  n = strlen(s + 1);
25
26  for (int i = n; i-- >= 0) {
27    expand(s[i] - 'a');
28    id[last] = i;
29  }
30
31  vis[1] = true;
32  for (int i = 1; i <= cnt; i++)
33    if (id[i])
34      for (int x = i, pos = n; x && !vis[x]; x =
35        → par[x]) {
36        vis[x] = true;
37        pos -= val[x] - val[par[x]];
38        ch[par[x]][s[pos + 1] - 'a'] = x;
39      }
40
41  dfs(1);
42
43  for (int i = 1; i <= n; i++) {
44    if (i > 1)
45      printf(" ");
46    printf("%d", sa[i]); // 1-based
47  }
48  printf("\n");
49
50  for (int i = 1; i < n; i++) {
51    if (i > 1)
52      printf(" ");
53    printf("%d", height[i]);
54  }
55  printf("\n");
56
57  return 0;
}

```

5.5 后缀自动机

```

1 // 在字符集比较小的时候可以直接开go数组，否则需要用map或
2 // → 哈希表替换
3
4 // 全局变量与数组定义
5 int last, val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], sam_cnt;
6 int c[maxn], q[maxn]; // 用来桶排序
7
8 // 在主函数开头加上这句初始化
9 last = sam_cnt = 1;
10
11 // 以下是按val进行桶排序的代码
12 for (int i = 1; i <= sam_cnt; i++)
13   c[val[i] + 1]++;
14 for (int i = 1; i <= n; i++)
15   c[i] += c[i - 1]; // 这里n是串长
16 for (int i = 1; i <= sam_cnt; i++)
17   q[+c[val[i]]] = i;
18
19 // 加入一个字符 均摊O(1)
20 void extend(int c) {
21   int p = last, np = ++sam_cnt;
22   val[np] = val[p] + 1;
23
24   while (p && !go[p][c]) {
25     go[p][c] = np;
26     p = par[p];
27   }
28
29   if (!p)
30     par[np] = 1;
31   else {
32     int q = go[p][c];
33
34     if (val[q] == val[p] + 1)
35       par[np] = q;
36     else {
37       int nq = ++sam_cnt;
38       val[nq] = val[p] + 1;
39       memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
40
41       par[nq] = par[q];
42       par[np] = par[q] = nq;
43
44       while (p && go[p][c] == q) {
45         go[p][c] = nq;
46         p = par[p];
47       }
48     }
49   }
50
51   last = np;
52 }

```

5.4 后缀平衡树

如果不需要查询排名，只需要维护前驱后继关系的题目，可以直接用二分哈希+set去做。

一般的题目需要查询排名，这时候就需要写替罪羊树或者Treap维护tag。插入后缀时如果首字母相同只需比较各自删除首字母后的tag大小即可。

(Treap也具有重量平衡树的性质，每次插入后影响到的子树大小期望是 $O(\log n)$ 的，所以每次做完插入操作之后直接暴力重构子树内tag就行了。)

5.5.1 广义后缀自动机

下面的写法复杂度是 Σ 串长的，但是胜在简单。
如果建字典树然后BFS建自动机可以做到 $O(n|\Sigma|)$ (n 是字典树结点数)，但是后者写起来比较麻烦。

```

1 int extend(int p, int c) {
2   int np = 0;
3
4   if (!go[p][c]) {
5     np = ++sam_cnt;
6     val[np] = val[p] + 1;
7     while (p && !go[p][c]) {
8       go[p][c] = np;
9     }
10   }
11
12   last = np;
13 }

```

```

9     p = par[p];
10    }
11
12 if (!p)
13     par[np] = 1;
14 else {
15     int q = go[p][c];
16
17     if (val[q] == val[p] + 1) {
18         if (np)
19             par[np] = q;
20         else
21             return q;
22     }
23     else {
24         int nq = ++sam_cnt;
25         val[nq] = val[p] + 1;
26         memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
27
28         par[nq] = par[q];
29         par[q] = nq;
30         if (np)
31             par[np] = nq;
32
33         while (p && go[p][c] == q) {
34             go[p][c] = nq;
35             p = par[p];
36         }
37
38         if (!np)
39             return nq;
40     }
41 }
42
43 return np;
44 }
45 // 调用的时候直接last = 1然后一路调用last = extend(last,
46 // → c)就行了

```

5.5.2 区间本质不同子串计数(后缀自动机+LCT+线段树)

问题: 给定一个字符串 s , 多次询问 $[l, r]$ 区间的本质不同的子串个数, 可能强制在线.

做法: 考虑建出后缀自动机, 然后枚举右端点, 用线段树维护每个左端点的答案.

显然只有right集合在 $[l, r]$ 中的串才有可能有贡献, 所以我们可以只考虑每个串最大的right.

每次右端点+1时找到它对应的结点 u , 则 u 到根节点路径上的每个点, 它的right集合都会被 r 更新.

对于某个特定的左端点 l , 我们需要保证本质不同的子串左端点不能越过它; 因此对于一个结点 p , 我们知道它对应的子串长度 $(val_{par_p}, val_p]$ 之后, 在 p 的right集合最大值减去对应长度, 这样对应的 l 内全部+1即可; 这样询问时就只需要查询 r 对应的线段树中 $[l, r]$ 的区间和. (当然旧的right对应的区间也要减掉)

实际上可以发现更新时都是把路径分成若干个整段更新right集合, 因此可以用LCT维护这个过程.

时间复杂度 $O(n \log^2 n)$, 空间 $O(n)$, 当然如果强制在线的话, 就把线段树改成主席树, 空间复杂度就和时间复杂度同阶了.

```

1 int tim; // tim实际上就是当前的右端点
2
3 node *access(node *x) {
4     node *y = null;
5
6     while (x != null) {
7         splay(x);
8
9
10    }
11
12 if (!p)
13     par[np] = 1;
14 else {
15     int q = go[p][c];
16
17     if (val[q] == val[p] + 1) {
18         if (np)
19             par[np] = q;
20         else
21             return q;
22     }
23     else {
24         int nq = ++sam_cnt;
25         val[nq] = val[p] + 1;
26         memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
27
28         par[nq] = par[q];
29         par[q] = nq;
30         if (np)
31             par[np] = nq;
32
33         while (p && go[p][c] == q) {
34             go[p][c] = nq;
35             p = par[p];
36         }
37
38         if (!np)
39             return nq;
40     }
41 }
42
43 return np;
44 }
45 // 调用的时候直接last = 1然后一路调用last = extend(last,
46 // → c)就行了

```

```

9     x → ch[1] = null;
10    x → refresh();
11
12 if (x → val) // val记录的是上次访问时间, 也就
13     → 是right集合最大值
14     update(x → val - val[x → r] + 1, x → val
15             → - val[par[x → l]], -1);
16
17 x → val = tim;
18 x → lazy = true;
19
20 update(x → val - val[x → r] + 1, x → val -
21         → val[par[x → l]], 1);
22
23 x → ch[1] = y;
24
25 (y = x) → refresh();
26
27 x = x → p;
28
29 return y;
30
31 // 以下是main函数中的用法
32 for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
33     tim++;
34     access(null + id[i]);
35
36     if (i ≥ m) // 例题询问长度是固定的, 如果不固定的话就
37         → 按照右端点离线即可
38         ans[i - m + 1] = query(i - m + 1, i);
39 }

```

还有一份完整的代码, 因为写起来确实细节挺多的. 这份代码支持在尾部加一个字符或者询问区间有多少子串至少出现了两次, 并且强制在线.

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 200005, maxm = maxn * 17 * 15;
6
7 int mx[maxn][2], lc[maxn], rc[maxn], seg_cnt;
8 int root[maxn];
9
10 int s, t, d;
11
12 void modify_seg(int l, int r, int &o) {
13     int u = o;
14     o = ++seg_cnt;
15
16     mx[o][0] = max(mx[u][0], t);
17     mx[o][1] = max(mx[u][1], d);
18
19     if (l == r)
20         return;
21
22     lc[o] = lc[u];
23     rc[o] = rc[u];
24
25     int mid = (l + r) / 2;
26     if (s ≤ mid)
27         modify_seg(l, mid, lc[o]);
28     else
29         modify_seg(mid + 1, r, rc[o]);
30 }

```

```

32 int query_seg(int l, int r, int o, int k) {
33     if (s <= l && t >= r)
34         return mx[o][k];
35
36     int mid = (l + r) / 2, ans = 0;
37
38     if (s <= mid)
39         ans = max(ans, query_seg(l, mid, lc[o], k));
40     if (t > mid)
41         ans = max(ans, query_seg(mid + 1, r, rc[o],
42                                     k));
42
43     return ans;
44 }
45
46 int N;
47
48 void modify(int pos, int u, int v, int &rt) {
49     s = pos;
50     t = u;
51     d = v;
52
53     modify_seg(1, N, rt);
54 }
55
56 int query(int l, int r, int rt) {
57     s = l;
58     t = r;
59     int ans = query_seg(1, N, rt, 0);
60
61     s = 1;
62     t = l;
63     return max(ans, query_seg(1, N, rt, 1) - 1);
64 }
65
66 struct node {
67     int size, l, r, id, tim;
68     node *ch[2], *p;
69     bool tag;
70
71     node() = default;
72
73     void apply(int v) {
74         tim = v;
75         tag = true;
76     }
77
78     void pushdown() {
79         if (tag) {
80             ch[0] → tim = ch[1] → tim = tim;
81             ch[0] → tag = ch[1] → tag = true;
82
83             tag = false;
84         }
85     }
86
87     void update() {
88         size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
89         l = (ch[0] → l ? ch[0] → l : id);
90         r = (ch[1] → r ? ch[1] → r : id);
91     }
92 } null[maxn];
93
94 inline bool isroot(node *x) {
95     return x != x → p → ch[0] && x != x → p →
96             ch[1];
97 }
98
99 inline bool dir(node *x) {
    return x == x → p → ch[1];
100 }
101
102 void init(node *x, int i) {
103     *x = node();
104     x → ch[0] = x → ch[1] = x → p = null;
105     x → size = 1;
106     x → id = x → l = x → r = i;
107 }
108
109 void rot(node *x, int d) {
110     node *y = x → ch[d ^ 1];
111
112     y → p = x → p;
113     if (!isroot(x))
114         x → p → ch[dir(x)] = y;
115
116     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
117         y → ch[d] → p = x;
118     (y → ch[d] = x) → p = y;
119
120     x → update();
121     y → update();
122 }
123
124 void splay(node *x) {
125     x → pushdown();
126
127     while (!isroot(x)) {
128         if (!isroot(x → p))
129             x → p → p → pushdown();
130         x → p → pushdown();
131         x → pushdown();
132
133         if (isroot(x → p)) {
134             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
135             break;
136         }
137
138         if (dir(x) == dir(x → p))
139             rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
140         else
141             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
142
143         rot(x → p, dir(x) ^ 1);
144     }
145 }
146
147 void splay(node *x, node *rt) {
148     x → pushdown();
149
150     while (x → p != rt) {
151         if (x → p → p != rt)
152             x → p → p → pushdown();
153         x → p → pushdown();
154         x → pushdown();
155
156         if (x → p → p == rt) {
157             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
158             break;
159         }
160
161         if (dir(x) == dir(x → p))
162             rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
163         else
164             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
165
166         rot(x → p, dir(x) ^ 1);
167     }
168 }

```

```

169 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], sam_cnt,
170   → sam_last;
171
172 node *access(node *x, int r) {
173     root[r] = root[r - 1];
174
175     node *y = null;
176
177     while (x != null) {
178         splay(x);
179
180         x → pushdown();
181
182         x → ch[1] = null;
183         x → update();
184
185         if (x → tim && val[x → r]) { // last time
186             → visited
187             int right = x → tim, left = right - val[x
188               → r] + 1;
189             modify(left, val[x → r], right + 1,
190               → root[r]);
191
192         }
193
194         x → apply(r);
195         x → pushdown();
196
197         x → ch[1] = y;
198         (y = x) → update();
199
200         x = x → p;
201     }
202
203     return y;
204 }
205
206 void new_leaf(node *x, node *par) {
207     x → p = par;
208 }
209
210 void new_node(node **x, node *y, node *par) {
211     splay(y);
212
213     if (isroot(y) && y → p == par) {
214         assert(y → ch[0] == null);
215
216         y → ch[0] = x;
217         x → p = y;
218         y → update();
219     }
220
221     else {
222         splay(par, y);
223
224         assert(y → ch[0] == par);
225         assert(par → ch[1] == null);
226         par → ch[1] = x;
227         x → p = par;
228
229         par → update();
230         y → update();
231
232         x → tim = y → tim;
233     }
234
235     init(null + np, np);
236
237     while (p && !go[p][c]) {
238         go[p][c] = np;
239         p = par[p];
240     }
241
242     if (!p) {
243         par[np] = 1;
244         new_leaf(null + np, null + par[np]);
245     }
246     else {
247         int q = go[p][c];
248
249         if (val[q] == val[p] + 1) {
250             par[np] = q;
251             new_leaf(null + np, null + par[np]);
252         }
253         else {
254             int nq = ++sam_cnt;
255             val[nq] = val[p] + 1;
256             memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
257
258             init(null + nq, nq);
259
260             new_node(null + nq, null + q, null +
261               → par[q]);
262             new_leaf(null + np, null + nq);
263
264             par[nq] = par[q];
265             par[np] = par[q] = nq;
266
267             while (p && go[p][c] == q) {
268                 go[p][c] = nq;
269                 p = par[p];
270             }
271
272             sam_last = np;
273         }
274     }
275
276     char str[maxn];
277
278     int main() {
279
280         init(null, 0);
281
282         sam_last = sam_cnt = 1;
283         init(null + 1, 1);
284
285         int n, m;
286         scanf("%s%d", str + 1, &m);
287         n = strlen(str + 1);
288         N = n + m;
289
290         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
291             extend(str[i] - 'a');
292             access(null + sam_last, i);
293         }
294
295         int tmp = 0;
296
297         while (m--) {
298             int op;
299             scanf("%d", &op);
300
301             if (op == 1) {
302                 scanf(" %c", &str[++n]);
303             }
304         }
305     }
306 }

```

```

303     str[n] = (str[n] - 'a' + tmp) % 26 + 'a';
304
305     extend(str[n] - 'a');
306     access(null + sam_last, n);
307 }
308 else {
309     int l, r;
310     scanf("%d%d", &l, &r);
311
312     l = (l - 1 + tmp) % n + 1;
313     r = (r - 1 + tmp) % n + 1;
314
315     printf("%d\n", tmp = query(l, r, root[r]));
316 }
317
318 }
319
320 return 0;
321 }
```

5.6 回文树

```

1 // 定理：一个字符串本质不同的回文子串个数是O(n)的
2 // 注意回文树只需要开一倍结点，另外结点编号也是一个可用
   ↳ 的bfs序
3
4 // 全局数组定义
5 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], last, cnt;
6 char s[maxn];
7
8 // 重要！在主函数最前面一定要加上以下初始化
9 par[0] = cnt = 1;
10 val[1] = -1;
11 // 这个初始化和广义回文树不一样，写普通题可以用，广义回文
   ↳ 树就不要乱搞了
12
13 // extend函数 均摊O(1)
14 // 向后扩展一个字符
15 // 传入对应下标
16 void extend(int n) {
17     int p = last, c = s[n] - 'a';
18     while (s[n - val[p] - 1] != s[n])
19         p = par[p];
20
21     if (!go[p][c]) {
22         int q = ++cnt, now = p;
23         val[q] = val[p] + 2;
24
25         do
26             p = par[p];
27             while (s[n - val[p] - 1] != s[n]);
28
29         par[q] = go[p][c];
30         last = go[now][c] = q;
31     }
32     else
33         last = go[p][c];
34
35     // a[last]++;
36 }
```

5.6.1 广义回文树

(代码是梯子剖分的版本，压力不大的题目换成直接倍增就好了，常数只差不到一倍)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
```

```

4 constexpr int maxn = 1000005, mod = 1000000007;
5
6 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], fail[maxn][26],
   ↳ pam_last[maxn], pam_cnt;
7 int weight[maxn], pow_26[maxn];
8
9 int trie[maxn][26], trie_cnt, d[maxn], mxd[maxn],
   ↳ son[maxn], top[maxn], len[maxn], sum[maxn];
10 char chr[maxn];
11 int f[25][maxn], log_tbl[maxn];
12 vector<int> v[maxn];
13
14 vector<int> queries[maxn];
15
16 char str[maxn];
17 int n, m, ans[maxn];
18
19 int add(int x, int c) {
20     if (!trie[x][c]) {
21         trie[x][c] = ++trie_cnt;
22         f[0][trie[x][c]] = x;
23         chr[trie[x][c]] = c + 'a';
24     }
25
26     return trie[x][c];
27 }
28
29
30 int del(int x) {
31     return f[0][x];
32 }
33
34 void dfs1(int x) {
35     mxd[x] = d[x] = d[f[0][x]] + 1;
36
37     for (int i = 0; i < 26; i++)
38         if (trie[x][i])
39             int y = trie[x][i];
40
41             dfs1(y);
42
43             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
44             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
45                 son[x] = y;
46     }
47
48
49 void dfs2(int x) {
50     if (x == son[f[0][x]])
51         top[x] = top[f[0][x]];
52     else
53         top[x] = x;
54
55     for (int i = 0; i < 26; i++)
56         if (trie[x][i])
57             int y = trie[x][i];
58             dfs2(y);
59     }
60
61     if (top[x] == x) {
62         int u = x;
63         while (top[son[u]] == x)
64             u = son[u];
65
66         len[x] = d[u] - d[x];
67
68         for (int i = 0; i < len[x]; i++)
69             v[x].push_back(u);
70             u = f[0][u];
71     }
72
73     u = x;
```

```

74     for (int i = 0; i < len[x]; i++) { // 梯子剖
75         分, 要延长一倍
76         v[x].push_back(u);
77         u = f[0][u];
78     }
79 }
80
81 int get_anc(int x, int k) {
82     if (!k)
83         return x;
84     if (k > d[x])
85         return 0;
86
87     x = f[log_tbl[k]][x];
88     k = 1 << log_tbl[k];
89
90     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] +
91         → k];
92 }
93
94 char get_char(int x, int k) { // 查询x前面k个的字符是哪
95     →↑
96     return chr[get_anc(x, k)];
97 }
98
99 int getfail(int x, int p) {
100    if (get_char(x, val[p] + 1) == chr[x])
101        return p;
102    return fail[p][chr[x] - 'a'];
103 }
104
105 int extend(int x) {
106
107     int p = pam_last[f[0][x]], c = chr[x] - 'a';
108
109     p = getfail(x, p);
110
111     int new_last;
112
113     if (!go[p][c]) {
114         int q = ++pam_cnt, now = p;
115         val[q] = val[p] + 2;
116
117         p = getfail(x, par[p]);
118
119         par[q] = go[p][c];
120         new_last = go[now][c] = q;
121
122         for (int i = 0; i < 26; i++)
123             fail[q][i] = fail[par[q]][i];
124
125         if (get_char(x, val[par[q]]) ≥ 'a')
126             fail[q][get_char(x, val[par[q]]) - 'a'] =
127                 → par[q];
128
129         if (val[q] ≤ n)
130             weight[q] = (weight[par[q]] + (long long)n
131                 → - val[q] + 1) * pow_26[n - val[q]] %
132                 → mod;
133         else
134             weight[q] = weight[par[q]];
135
136         new_last = go[p][c];
137
138         pam_last[x] = new_last;
139
140         return weight[pam_last[x]];
141     }
142
143     queue<int> q;
144
145     q.push(1);
146
147     while (!q.empty()) {
148         int x = q.front();
149         q.pop();
150
151         sum[x] = sum[f[0][x]];
152         if (x > 1)
153             sum[x] = (sum[x] + extend(x)) % mod;
154
155         for (int i : queries[x])
156             ans[i] = sum[x];
157
158         for (int i = 0; i < 26; i++)
159             if (trie[x][i])
160                 q.push(trie[x][i]);
161     }
162
163     int main() {
164
165         pow_26[0] = 1;
166         log_tbl[0] = -1;
167
168         for (int i = 1; i ≤ 1000000; i++)
169             pow_26[i] = 26ll * pow_26[i - 1] % mod;
170             log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
171     }
172
173     int T;
174     scanf("%d", &T);
175
176     while (T--) {
177         scanf("%d%d%s", &n, &m, str);
178
179         trie_cnt = 1;
180         chr[1] = '#';
181
182         int last = 1;
183         for (char *c = str; *c; c++)
184             last = add(last, *c - 'a');
185
186         queries[last].push_back(0);
187
188         for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
189             int op;
190             scanf("%d", &op);
191
192             if (op == 1) {
193                 char c;
194                 scanf(" %c", &c);
195
196                 last = add(last, c - 'a');
197             }
198             else
199                 last = del(last);
200
201             queries[last].push_back(i);
202     }
203
204     dfs1(1);
205     dfs2(1);
206
207     for (int j = 1; j ≤ log_tbl[trie_cnt]; j++)
208         for (int i = 1; i ≤ trie_cnt; i++)
209             f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
210
211     par[0] = pam_cnt = 1;

```

```

212
213
214     for (int i = 0; i < 26; i++)
215         fail[0][i] = fail[1][i] = 1;
216
217     val[1] = -1;
218     pam_last[1] = 1;
219
220     bfs();
221
222     for (int i = 0; i ≤ m; i++)
223         printf("%d\n", ans[i]);
224
225     for (int j = 0; j ≤ log_tbl[trie_cnt]; j++)
226         memset(f[j], 0, sizeof(f[j]));
227
228     for (int i = 1; i ≤ trie_cnt; i++) {
229         chr[i] = 0;
230         d[i] = mxd[i] = son[i] = top[i] = len[i] =
231             → pam_last[i] = sum[i] = 0;
232         v[i].clear();
233         queries[i].clear();
234
235         memset(trie[i], 0, sizeof(trie[i]));
236     }
237     trie_cnt = 0;
238
239     for (int i = 0; i ≤ pam_cnt; i++) {
240         val[i] = par[i] = weight[i];
241
242         memset(go[i], 0, sizeof(go[i]));
243         memset(fail[i], 0, sizeof(fail[i]));
244     }
245     pam_cnt = 0;
246
247 }
248
249 return 0;
}

```

5.8 字符串原理

KMP和AC自动机的fail指针存储的都是它在串或者字典树上的最长后缀，因此要判断两个前缀是否互为后缀时可以直接用fail指针判断。当然它不能做子串问题，也不能做最长公共后缀。

后缀数组利用的主要性质是LCP长度可以按照字典序做RMQ的性质，与某个串的LCP长度 \geq 某个值的后缀形成一个区间。另外一个比较好用的性质是本质不同的子串个数 = 所有子串数 - 字典序相邻的串的height。

后缀自动机实际上可以接受的是所有后缀，如果把中间状态也算上的话就是所有子串。它的fail指针代表的也是当前串的后缀，不过注意每个状态可以代表很多状态，只要右端点在right集合中且长度处在 $(val_{par_p}, val_p]$ 中的串都被它代表。

后缀自动机的fail树也就是反串的后缀树。每个结点代表的串和后缀自动机同理，两个串的LCP长度也就是他们在后缀树上的LCA。

5.7 Manacher马拉车

```

1 // n为串长，回文半径输出到p数组中
2 // 数组要开串长的两倍
3 void manacher(const char *t, int n) {
4     static char s[maxn * 2];
5
6     for (int i = n; i--)
7         s[i * 2] = t[i];
8     for (int i = 0; i ≤ n; i++)
9         s[i * 2 + 1] = '#';
10
11    s[0] = '$';
12    s[(n + 1) * 2] = '\0';
13    n = n * 2 + 1;
14
15    int mx = 0, j = 0;
16
17    for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
18        p[i] = (mx > i ? min(p[j * 2 - i], mx - i) :
19            → 1);
20        while (s[i - p[i]] == s[i + p[i]])
21            p[i]++;
22
23        if (i + p[i] > mx) {
24            mx = i + p[i];
25            j = i;
26        }
27    }
}

```

6 动态规划

6.1 决策单调性 $O(n \log n)$

```

1 int a[maxn], q[maxn], p[maxn], g[maxn]; // 存左端点, 右端
2   点就是下一个左端点 - 1
3
4 long long f[maxn], s[maxn];
5
6 int n, m;
7
8 long long calc(int l, int r) {
9     if (r < l)
10        return 0;
11
12    int mid = (l + r) / 2;
13    if ((r - l + 1) % 2 == 0)
14        return (s[r] - s[mid]) - (s[mid] - s[l - 1]);
15    else
16        return (s[r] - s[mid]) - (s[mid - 1] - s[l -
17          - 1]);
18
19 int solve(long long tmp) {
20     memset(f, 63, sizeof(f));
21     f[0] = 0;
22
23     int head = 1, tail = 0;
24
25     for (int i = 1; i <= n; i++) {
26         f[i] = calc(1, i);
27         g[i] = 1;
28
29         while (head < tail && p[head + 1] <= i)
30             head++;
31         if (head <= tail) {
32             if (f[q[head]] + calc(q[head] + 1, i) <
33                 f[i]) {
34                 f[i] = f[q[head]] + calc(q[head] + 1,
35                   i);
36                 g[i] = g[q[head]] + 1;
37             }
38             while (head < tail && p[head + 1] <= i + 1)
39                 head++;
40             if (head <= tail)
41                 p[head] = i + 1;
42         }
43         f[i] += tmp;
44
45         int r = n;
46
47         while (head <= tail) {
48             if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, p[tail]) <
49                 f[i] + calc(i + 1, p[tail])) {
50                 r = p[tail] - 1;
51                 tail--;
52             }
53             else if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, r) <
54                 f[i] + calc(i + 1, r)) {
55                 if (r < n) {
56                     q[++tail] = i;
57                     p[tail] = r + 1;
58                 }
59                 break;
60             }
61             else {
62                 int L = p[tail], R = r;
63                 while (L < R) {
64                     int M = (L + R) / 2;
65
66                     if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, M) <
67                         f[i] + calc(i + 1, M))
68                         L = M + 1;
69                     else
70                         R = M;
71                 }
72             }
73             if (head > tail) {
74                 q[++tail] = i;
75                 p[tail] = i + 1;
76             }
77         }
78
79         return g[n];
80     }
81 }
```

```

if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, M) <= f[i] + calc(i + 1, M))
    L = M + 1;
else
    R = M;

q[++tail] = i;
p[tail] = L;

break;

}
if (head > tail) {
    q[++tail] = i;
    p[tail] = i + 1;
}

return g[n];
}
```

7 计算几何

7.1 Delaunay三角剖分

只要两个点同在某个三角形上，它们就互为一对最近点。注意返回的三角形似乎不保证顺序，所以要加边的话还是要加双向边。

如果要建V图的话求出每个三角形的外心就行了，每个点控制的区域就是所在三角形的外心连起来。

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 500005;
6
7 using ll = long long;
8
9 constexpr int INF = 0x3f3f3f3f;
10 constexpr ll LINF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
11 constexpr double eps = 1e-8;
12
13 template <class T>
14 int sgn(T x) {
15     return x > 0 ? 1 : x < 0 ? -1 : 0;
16 }
17
18 struct point {
19     ll x, y;
20
21     point() = default;
22
23     point(ll x, ll y) : x(x), y(y) {}
24
25     point operator - (const point &p) const {
26         return point(x - p.x, y - p.y);
27     }
28
29     ll cross(const point &p) const {
30         return x * p.y - y * p.x;
31     }
32
33     ll cross(const point &a, const point &b) const {
34         return (a - *this).cross(b - *this);
35     }
36
37     ll dot(const point &p) const {
38         return x * p.x + y * p.y;
39     }
40
41     ll dot(const point &a, const point &b) const {
42         return (a - *this).dot(b - *this);
43     }
44
45     ll abs2() const {
46         return this -> dot(*this);
47     }
48
49     bool operator == (const point &p) const {
50         return x == p.x && y == p.y;
51     }
52
53     bool operator < (const point &p) const {
54         if (x != p.x) return x < p.x;
55         return y < p.y;
56     }
57 };
58
59
60 const point inf_point = point(1e18, 1e18);

```

```

62
63     struct quad_edge {
64         point origin;
65         quad_edge *rot = nullptr;
66         quad_edge *onext = nullptr;
67         bool used = false;
68
69         quad_edge *rev() const {
70             return rot -> rot;
71         }
72         quad_edge *lnext() const {
73             return rot -> rev() -> onext -> rot;
74         }
75         quad_edge *oprev() const {
76             return rot -> onext -> rot;
77         }
78         point dest() const {
79             return rev() -> origin;
80         }
81     };
82
83     quad_edge *make_edge(point from, point to) {
84         quad_edge *e1 = new quad_edge;
85         quad_edge *e2 = new quad_edge;
86         quad_edge *e3 = new quad_edge;
87         quad_edge *e4 = new quad_edge;
88
89         e1 -> origin = from;
90         e2 -> origin = to;
91         e3 -> origin = e4 -> origin = inf_point;
92
93         e1 -> rot = e3;
94         e2 -> rot = e4;
95         e3 -> rot = e2;
96         e4 -> rot = e1;
97
98         e1 -> onext = e1;
99         e2 -> onext = e2;
100        e3 -> onext = e4;
101        e4 -> onext = e3;
102
103        return e1;
104    }
105
106    void splice(quad_edge *a, quad_edge *b) { // 拼接
107        swap(a -> onext -> rot -> onext, b -> onext -> rot
108            -> onext);
109        swap(a -> onext, b -> onext);
110    }
111
112    void delete_edge(quad_edge *e) {
113        splice(e, e -> oprev());
114        splice(e -> rev(), e -> rev() -> oprev());
115
116        delete e -> rev() -> rot;
117        delete e -> rev();
118        delete e -> rot;
119        delete e;
120    }
121
122    quad_edge *connect(quad_edge *a, quad_edge *b) {
123        quad_edge *e = make_edge(a -> dest(), b -> origin);
124
125        splice(e, a -> lnext());
126        splice(e -> rev(), b);
127
128        return e;
129    }
130
131    bool left_of(point p, quad_edge *e) {

```

```

131     return p.cross(e → origin, e → dest()) > 0;
132 }
133
134 bool right_of(point p, quad_edge *e) {
135     return p.cross(e → origin, e → dest()) < 0;
136 }
137
138 template <class T>
139 T det3(T a1, T a2, T a3, T b1, T b2, T b3, T c1, T c2,
140        → T c3) {
141     return a1 * (b2 * c3 - c2 * b3) - a2 * (b1 * c3 -
142           → c1 * b3) +
143           a3 * (b1 * c2 - c1 * b2);
144 }
145
146 bool in_circle(point a, point b, point c, point d) { // → 如果有__int128就直接计算行列式, 否则算角度
147 #if defined(__LP64__) || defined(__WIN64__)
148     __int128 det = -det3<__int128>(b.x, b.y, b.abs2(),
149           → c.x, c.y, c.abs2(), d.x, d.y, d.abs2());
150     det += det3<__int128>(a.x, a.y, a.abs2(), c.x, c.y,
151           → c.abs2(), d.x, d.y, d.abs2());
152     det -= det3<__int128>(a.x, a.y, a.abs2(), b.x, b.y,
153           → b.abs2(), d.x, d.y, d.abs2());
154     det += det3<__int128>(a.x, a.y, a.abs2(), b.x, b.y,
155           → b.abs2(), c.x, c.y, c.abs2());
156
157     return det > 0;
158 #else
159     auto ang = [] (point l, point mid, point r) {
160         ll x = mid.dot(l, r);
161         ll y = mid.cross(l, r);
162         long double res = atan2((long double)x, (long
163             → double)y);
164         return res;
165     };
166
167     long double kek = ang(a, b, c) + ang(c, d, a) -
168           → ang(b, c, d) - ang(d, a, b);
169
170     return kek > 1e-10;
171 #endif
172 }
173
174 pair<quad_edge*, quad_edge*> divide_and_conquer(int l,
175           → int r, vector<point> &p) {
176     if (r - l + 1 == 2) {
177         quad_edge *res = make_edge(p[l], p[r]);
178         return make_pair(res, res → rev());
179     }
180
181     if (r - l + 1 == 3) {
182         quad_edge *a = make_edge(p[l], p[l + 1]), *b =
183           → make_edge(p[l + 1], p[r]);
184         splice(a → rev(), b);
185
186         int sg = sgn(p[l].cross(p[l + 1], p[r]));
187
188         if (sg == 0)
189             return make_pair(a, b → rev());
190
191         quad_edge *c = connect(b, a);
192
193         if (sg == 1)
194             return make_pair(a, b → rev());
195         else
196             return make_pair(c → rev(), c);
197     }
198
199     int mid = (l + r) / 2;
200
201     quad_edge *ldo, *ldi, *rdo, *rdi;
202     tie(ldo, ldi) = divide_and_conquer(l, mid, p);
203     tie(rdi, rdo) = divide_and_conquer(mid + 1, r, p);
204
205     while (true) {
206         if (left_of(rdi → origin, ldi))
207             ldi = ldi → lnext();
208
209         else if (right_of(ldi → origin, rdi))
210             rdi = rdi → rev() → onext();
211
212         else
213             break;
214     }
215
216     quad_edge *basel = connect(rdi → rev(), ldi);
217     auto is_valid = [&basel] (quad_edge *e) {
218         return right_of(e → dest(), basel);
219     };
220
221     if (ldi → origin == ldo → origin)
222         ldo = basel → rev();
223     if (rdi → origin == rdo → origin)
224         rdo = basel;
225
226     while (true) {
227         quad_edge *lcand = basel → rev() → onext();
228         if (is_valid(lcand)) {
229             while (in_circle(basel → dest(), basel →
230                   → origin, lcand → dest(), lcand → onext(
231                   → dest())))
232                 quad_edge *t = lcand → onext();
233                 delete_edge(lcand);
234                 lcand = t;
235         }
236
237         quad_edge *rcand = basel → oprev();
238         if (is_valid(rcand)) {
239             while (in_circle(basel → dest(), basel →
240                   → origin, rcand → dest(), rcand →
241                   → oprev() → dest()))
242                 quad_edge *t = rcand → oprev();
243                 delete_edge(rcand);
244                 rcand = t;
245         }
246
247         if (!is_valid(lcand) && !is_valid(rcand))
248             break;
249
250         if (!is_valid(lcand) || (is_valid(rcand) &&
251             → in_circle(lcand → dest(), lcand → origin,
252             → rcand → origin, rcand → dest())))
253             basel = connect(rcand, basel → rev());
254         else
255             basel = connect(basel → rev(), lcand →
256               → rev());
257
258         return make_pair(ldo, rdo);
259     }
260
261     vector<tuple<point, point, point> >
262       → delaunay(vector<point> p) { // Delaunay 三角剖分
263         sort(p.begin(), p.end(), [] (const point &a, const
264             → point &b) {

```

```

249     return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);
250     // 实际上已经重载小于了，只是为了清晰
251 }
252
253 auto res = divide_and_conquer(0, (int)p.size() - 1,
254     ↪ p);
255
256 quad_edge *e = res.first;
257 vector<quad_edge*> edges = {e};
258
259 while (e → onext → dest().cross(e → dest(), e →
260     ↪ origin) < 0)
261     e = e → onext;
262
263 auto add = [&p, &e, &edges] () { // 修改 p, e, edges
264     quad_edge *cur = e;
265     do {
266         cur → used = true;
267         p.push_back(cur → origin);
268         edges.push_back(cur → rev());
269
270         cur = cur → lnext();
271     } while (cur != e);
272 };
273
274 add();
275 p.clear();
276
277 int kek = 0;
278 while (kek < (int)edges.size())
279     if (!(*e = edges[kek++]) → used)
280         add();
281
282 vector<tuple<point, point, point>> ans;
283 for (int i = 0; i < (int)p.size(); i += 3)
284     ans.push_back(make_tuple(p[i], p[i + 1], p[i +
285     ↪ 2]));
286
287 return ans; // 返回每个三角形
288
289 #define sq(x) ((x) * (ll)(x)) // 平方
290
291 ll dist(point p, point q) { // 两点间距离的平方
292     return (p - q).abs2();
293 }
294
295 ll sarea2(point p, point q, point r) { // 三角形面积的两
296     ↪ 倍(叉积)
297     return (q - p).cross(r - q);
298 }
299
300 point v[maxn];
301
302 int main() {
303     int n;
304     cin >> n;
305
306     // read the points, v[1 ~ n]
307
308     bool col_linear = true; // 如果给出的所有点都共线则
309     ↪ 需要特判
310     for (int i = 3; i ≤ n; i++)
311         if (sarea2(v[1], v[2], v[i]))
312             col_linear = false;
313
314     if (col_linear) {
315         // do something
316
317         auto triangles = delaunay(vector<point>(v + 1, v +
318             ↪ n + 1));
319
320         // do something
321
322         return 0;
323     }
324 }

```

8 杂项

8.1 $O(1)$ 快速乘

如果对速度要求很高并且不能用指令集，可以去看fstqwq的模板。

```

1 // long double 快速乘
2 // 在两数直接相乘会爆long long时才有必要使用
3 // 常数比直接long long乘法 + 取模大很多，非必要时不建议使用
4 // → 用
5 long long mul(long long a, long long b, long long p) {
6     a %= p;
7     b %= p;
8     return ((a * b - p * (long long)((long double)a / p
9         → * b + 0.5)) % p + p) % p;
10 }
11
12 // 指令集快速乘
13 // 试机记得测试能不能过编译
14 inline long long mul(const long long a, const long long
15     → b, const long long p) {
16     long long ans;
17     __asm__ __volatile__ ("\\tmulq %%rbx\\n\\tdivq %
18     → %rcx\\n" : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
19     return ans;
20 }
21
22 // int乘法取模，大概比直接做快一倍
23 inline int mul_mod(int a, int b, int p) {
24     int ans;
25     __asm__ __volatile__ ("\\tmull %%ebx\\n\\tdivl %
26     → %ecx\\n" : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
27     return ans;
28 }
```

8.2 Kahan求和算法(减少浮点数累加的误差)

当然一般来说是用不到的，累加被卡精度了才有必要考虑。

```

1 double kahanSum(vector<double> vec) {
2     double sum = 0, c = 0;
3     for (auto x : vec) {
4         double y = x - c;
5         double t = sum + y;
6         c = (t - sum) - y;
7         sum = t;
8     }
9     return sum;
10 }
```

8.3 Python Decimal

```

1 import decimal
2
3 decimal.getcontext().prec = 1234 # 有效数字位数
4
5 x = decimal.Decimal(2)
6 x = decimal.Decimal('50.5679') # 不要用float，因为float本身就不准确
7
8 x = decimal.Decimal('50.5679'). \
9     quantize(decimal.Decimal('0.00')) # 保留两位小数,
10    → 50.57
11 x = decimal.Decimal('50.5679'). \
12     quantize(decimal.Decimal('0.00'),           → decimal.ROUND_HALF_UP) # 四舍五入
13 # 第二个参数可选如下:
14 # ROUND_HALF_UP 四舍五入
```

```

14 # ROUND_HALF_DOWN 五舍六入
15 # ROUND_HALF_EVEN 银行家舍入法，舍入到最近的偶数
16 # ROUND_UP 向绝对值大的取整
17 # ROUND_DOWN 向绝对值小的取整
18 # ROUND_CEILING 向正无穷取整
19 # ROUND_FLOOR 向负无穷取整
20 # ROUND_05UP (away from zero if last digit after
21     → rounding towards zero would have been 0 or 5;
22     → otherwise towards zero)
23
24 print('%.f' % x) # 这样做只有float的精度
25 s = str(x)
26
27 decimal.is_finite(x) # x是否有穷(NaN也算)
28 decimal.is_infinite(x)
29 decimal.is_nan(x)
30 decimal.is_normal(x) # x是否正常
31 decimal.is_signed(x) # 是否为负数
32
33 decimal.fma(a, b, c) # a * b + c, 精度更高
34
35 x.exp(), x.ln(), x.sqrt(), x.log10()
```

8.4 $O(n^2)$ 高精度

```

1 // 注意如果只需要正数运算的话
2 // 可以只抄英文名的运算函数
3 // 按需自取
4 // 乘法O(n ^ 2), 除法O(10 * n ^ 2)
5
6 constexpr int maxn = 1005;
7
8 struct big_decimal {
9     int a[maxn];
10    bool negative;
11
12    big_decimal() {
13        memset(a, 0, sizeof(a));
14        negative = false;
15    }
16
17    big_decimal(long long x) {
18        memset(a, 0, sizeof(a));
19        negative = false;
20
21        if (x < 0) {
22            negative = true;
23            x = -x;
24        }
25
26        while (x) {
27            a[++a[0]] = x % 10;
28            x /= 10;
29        }
30
31    }
32
33    big_decimal(string s) {
34        memset(a, 0, sizeof(a));
35        negative = false;
36
37        if (s == "") {
38            return;
39        }
40
41        if (s[0] == '-') {
42            negative = true;
43            s = s.substr(1);
44        }
45        a[0] = s.size();
46    }
47
48    void print() {
49        cout << a[0];
50
51        for (int i = 1; i < a[0]; i++) {
52            cout << a[i];
53        }
54    }
55
56    void add(big_decimal b) {
57        int carry = 0;
58
59        for (int i = 0; i < a[0] || i < b.a[0]; i++) {
60            int sum = a[i] + b.a[i] + carry;
61            a[i] = sum % 10;
62            carry = sum / 10;
63        }
64
65        if (carry) {
66            a[a[0]] = carry;
67            a[0]++;
68        }
69    }
70
71    void sub(big_decimal b) {
72        int borrow = 0;
73
74        for (int i = 0; i < a[0] || i < b.a[0]; i++) {
75            int sum = a[i] - b.a[i] - borrow;
76            a[i] = sum % 10;
77            borrow = (sum < 0) ? 1 : 0;
78        }
79
80        if (borrow) {
81            a[a[0]] = borrow;
82            a[0]++;
83        }
84    }
85
86    void mult(big_decimal b) {
87        int carry = 0;
88
89        for (int i = 0; i < a[0]; i++) {
90            for (int j = 0; j < b.a[0]; j++) {
91                int sum = a[i] * b.a[j] + carry;
92                a[i + j + 1] += sum % 10;
93                carry = sum / 10;
94            }
95        }
96
97        if (carry) {
98            a[a[0] + 1] = carry;
99            a[0]++;
100       }
101   }
102
103   void div(big_decimal b) {
104       int quotient[1005];
105
106       int remainder = 0;
107
108       for (int i = 0; i < a[0]; i++) {
109           remainder *= 10;
110           remainder += a[i];
111
112           int q = remainder / b.a[0];
113           quotient[i] = q;
114
115           remainder -= q * b.a[0];
116       }
117
118       for (int i = 0; i < a[0]; i++) {
119           a[i] = quotient[i];
120       }
121   }
122
123   void pow(int n) {
124       big_decimal result;
125
126       for (int i = 0; i < n; i++) {
127           result *= *this;
128       }
129
130       *this = result;
131   }
132
133   void log() {
134       cout << "log not implemented";
135   }
136
137   void exp() {
138       cout << "exp not implemented";
139   }
140
141   void ln() {
142       cout << "ln not implemented";
143   }
144
145   void sqrt() {
146       cout << "sqrt not implemented";
147   }
148
149   void log10() {
150       cout << "log10 not implemented";
151   }
152
153   void abs() {
154       cout << "abs not implemented";
155   }
156
157   void floor() {
158       cout << "floor not implemented";
159   }
160
161   void ceil() {
162       cout << "ceil not implemented";
163   }
164
165   void round() {
166       cout << "round not implemented";
167   }
168
169   void trunc() {
170       cout << "trunc not implemented";
171   }
172
173   void mod() {
174       cout << "mod not implemented";
175   }
176
177   void gcd() {
178       cout << "gcd not implemented";
179   }
180
181   void lcm() {
182       cout << "lcm not implemented";
183   }
184
185   void modpow() {
186       cout << "modpow not implemented";
187   }
188
189   void modinv() {
190       cout << "modinv not implemented";
191   }
192
193   void modsqrt() {
194       cout << "modsqrt not implemented";
195   }
196
197   void modgcd() {
198       cout << "modgcd not implemented";
199   }
200
201   void modlcm() {
202       cout << "modlcm not implemented";
203   }
204
205   void modlcm() {
206       cout << "modlcm not implemented";
207   }
208
209   void modlcm() {
210       cout << "modlcm not implemented";
211   }
212
213   void modlcm() {
214       cout << "modlcm not implemented";
215   }
216
217   void modlcm() {
218       cout << "modlcm not implemented";
219   }
220
221   void modlcm() {
222       cout << "modlcm not implemented";
223   }
224
225   void modlcm() {
226       cout << "modlcm not implemented";
227   }
228
229   void modlcm() {
230       cout << "modlcm not implemented";
231   }
232
233   void modlcm() {
234       cout << "modlcm not implemented";
235   }
236
237   void modlcm() {
238       cout << "modlcm not implemented";
239   }
240
241   void modlcm() {
242       cout << "modlcm not implemented";
243   }
244
245   void modlcm() {
246       cout << "modlcm not implemented";
247   }
248
249   void modlcm() {
250       cout << "modlcm not implemented";
251   }
252
253   void modlcm() {
254       cout << "modlcm not implemented";
255   }
256
257   void modlcm() {
258       cout << "modlcm not implemented";
259   }
260
261   void modlcm() {
262       cout << "modlcm not implemented";
263   }
264
265   void modlcm() {
266       cout << "modlcm not implemented";
267   }
268
269   void modlcm() {
270       cout << "modlcm not implemented";
271   }
272
273   void modlcm() {
274       cout << "modlcm not implemented";
275   }
276
277   void modlcm() {
278       cout << "modlcm not implemented";
279   }
280
281   void modlcm() {
282       cout << "modlcm not implemented";
283   }
284
285   void modlcm() {
286       cout << "modlcm not implemented";
287   }
288
289   void modlcm() {
290       cout << "modlcm not implemented";
291   }
292
293   void modlcm() {
294       cout << "modlcm not implemented";
295   }
296
297   void modlcm() {
298       cout << "modlcm not implemented";
299   }
300
301   void modlcm() {
302       cout << "modlcm not implemented";
303   }
304
305   void modlcm() {
306       cout << "modlcm not implemented";
307   }
308
309   void modlcm() {
310       cout << "modlcm not implemented";
311   }
312
313   void modlcm() {
314       cout << "modlcm not implemented";
315   }
316
317   void modlcm() {
318       cout << "modlcm not implemented";
319   }
320
321   void modlcm() {
322       cout << "modlcm not implemented";
323   }
324
325   void modlcm() {
326       cout << "modlcm not implemented";
327   }
328
329   void modlcm() {
330       cout << "modlcm not implemented";
331   }
332
333   void modlcm() {
334       cout << "modlcm not implemented";
335   }
336
337   void modlcm() {
338       cout << "modlcm not implemented";
339   }
340
341   void modlcm() {
342       cout << "modlcm not implemented";
343   }
344
345   void modlcm() {
346       cout << "modlcm not implemented";
347   }
348
349   void modlcm() {
350       cout << "modlcm not implemented";
351   }
352
353   void modlcm() {
354       cout << "modlcm not implemented";
355   }
356
357   void modlcm() {
358       cout << "modlcm not implemented";
359   }
360
361   void modlcm() {
362       cout << "modlcm not implemented";
363   }
364
365   void modlcm() {
366       cout << "modlcm not implemented";
367   }
368
369   void modlcm() {
370       cout << "modlcm not implemented";
371   }
372
373   void modlcm() {
374       cout << "modlcm not implemented";
375   }
376
377   void modlcm() {
378       cout << "modlcm not implemented";
379   }
380
381   void modlcm() {
382       cout << "modlcm not implemented";
383   }
384
385   void modlcm() {
386       cout << "modlcm not implemented";
387   }
388
389   void modlcm() {
390       cout << "modlcm not implemented";
391   }
392
393   void modlcm() {
394       cout << "modlcm not implemented";
395   }
396
397   void modlcm() {
398       cout << "modlcm not implemented";
399   }
400
401   void modlcm() {
402       cout << "modlcm not implemented";
403   }
404
405   void modlcm() {
406       cout << "modlcm not implemented";
407   }
408
409   void modlcm() {
410       cout << "modlcm not implemented";
411   }
412
413   void modlcm() {
414       cout << "modlcm not implemented";
415   }
416
417   void modlcm() {
418       cout << "modlcm not implemented";
419   }
420
421   void modlcm() {
422       cout << "modlcm not implemented";
423   }
424
425   void modlcm() {
426       cout << "modlcm not implemented";
427   }
428
429   void modlcm() {
430       cout << "modlcm not implemented";
431   }
432
433   void modlcm() {
434       cout << "modlcm not implemented";
435   }
436
437   void modlcm() {
438       cout << "modlcm not implemented";
439   }
440
441   void modlcm() {
442       cout << "modlcm not implemented";
443   }
444
445   void modlcm() {
446       cout << "modlcm not implemented";
447   }
448
449   void modlcm() {
450       cout << "modlcm not implemented";
451   }
452
453   void modlcm() {
454       cout << "modlcm not implemented";
455   }
456
457   void modlcm() {
458       cout << "modlcm not implemented";
459   }
460
461   void modlcm() {
462       cout << "modlcm not implemented";
463   }
464
465   void modlcm() {
466       cout << "modlcm not implemented";
467   }
468
469   void modlcm() {
470       cout << "modlcm not implemented";
471   }
472
473   void modlcm() {
474       cout << "modlcm not implemented";
475   }
476
477   void modlcm() {
478       cout << "modlcm not implemented";
479   }
480
481   void modlcm() {
482       cout << "modlcm not implemented";
483   }
484
485   void modlcm() {
486       cout << "modlcm not implemented";
487   }
488
489   void modlcm() {
490       cout << "modlcm not implemented";
491   }
492
493   void modlcm() {
494       cout << "modlcm not implemented";
495   }
496
497   void modlcm() {
498       cout << "modlcm not implemented";
499   }
500
501   void modlcm() {
502       cout << "modlcm not implemented";
503   }
504
505   void modlcm() {
506       cout << "modlcm not implemented";
507   }
508
509   void modlcm() {
510       cout << "modlcm not implemented";
511   }
512
513   void modlcm() {
514       cout << "modlcm not implemented";
515   }
516
517   void modlcm() {
518       cout << "modlcm not implemented";
519   }
520
521   void modlcm() {
522       cout << "modlcm not implemented";
523   }
524
525   void modlcm() {
526       cout << "modlcm not implemented";
527   }
528
529   void modlcm() {
530       cout << "modlcm not implemented";
531   }
532
533   void modlcm() {
534       cout << "modlcm not implemented";
535   }
536
537   void modlcm() {
538       cout << "modlcm not implemented";
539   }
540
541   void modlcm() {
542       cout << "modlcm not implemented";
543   }
544
545   void modlcm() {
546       cout << "modlcm not implemented";
547   }
548
549   void modlcm() {
550       cout << "modlcm not implemented";
551   }
552
553   void modlcm() {
554       cout << "modlcm not implemented";
555   }
556
557   void modlcm() {
558       cout << "modlcm not implemented";
559   }
560
561   void modlcm() {
562       cout << "modlcm not implemented";
563   }
564
565   void modlcm() {
566       cout << "modlcm not implemented";
567   }
568
569   void modlcm() {
570       cout << "modlcm not implemented";
571   }
572
573   void modlcm() {
574       cout << "modlcm not implemented";
575   }
576
577   void modlcm() {
578       cout << "modlcm not implemented";
579   }
580
581   void modlcm() {
582       cout << "modlcm not implemented";
583   }
584
585   void modlcm() {
586       cout << "modlcm not implemented";
587   }
588
589   void modlcm() {
590       cout << "modlcm not implemented";
591   }
592
593   void modlcm() {
594       cout << "modlcm not implemented";
595   }
596
597   void modlcm() {
598       cout << "modlcm not implemented";
599   }
599
600   void modlcm() {
601       cout << "modlcm not implemented";
602   }
603
604   void modlcm() {
605       cout << "modlcm not implemented";
606   }
607
608   void modlcm() {
609       cout << "modlcm not implemented";
610   }
611
612   void modlcm() {
613       cout << "modlcm not implemented";
614   }
615
616   void modlcm() {
617       cout << "modlcm not implemented";
618   }
619
620   void modlcm() {
621       cout << "modlcm not implemented";
622   }
623
624   void modlcm() {
625       cout << "modlcm not implemented";
626   }
627
628   void modlcm() {
629       cout << "modlcm not implemented";
630   }
631
632   void modlcm() {
633       cout << "modlcm not implemented";
634   }
635
636   void modlcm() {
637       cout << "modlcm not implemented";
638   }
639
640   void modlcm() {
641       cout << "modlcm not implemented";
642   }
643
644   void modlcm() {
645       cout << "modlcm not implemented";
646   }
647
648   void modlcm() {
649       cout << "modlcm not implemented";
650   }
651
652   void modlcm() {
653       cout << "modlcm not implemented";
654   }
655
656   void modlcm() {
657       cout << "modlcm not implemented";
658   }
659
660   void modlcm() {
661       cout << "modlcm not implemented";
662   }
663
664   void modlcm() {
665       cout << "modlcm not implemented";
666   }
667
668   void modlcm() {
669       cout << "modlcm not implemented";
670   }
671
672   void modlcm() {
673       cout << "modlcm not implemented";
674   }
675
676   void modlcm() {
677       cout << "modlcm not implemented";
678   }
679
680   void modlcm() {
681       cout << "modlcm not implemented";
682   }
683
684   void modlcm() {
685       cout << "modlcm not implemented";
686   }
687
688   void modlcm() {
689       cout << "modlcm not implemented";
690   }
691
692   void modlcm() {
693       cout << "modlcm not implemented";
694   }
695
696   void modlcm() {
697       cout << "modlcm not implemented";
698   }
699
699
700   void modlcm() {
701       cout << "modlcm not implemented";
702   }
703
704   void modlcm() {
705       cout << "modlcm not implemented";
706   }
707
708   void modlcm() {
709       cout << "modlcm not implemented";
710   }
711
712   void modlcm() {
713       cout << "modlcm not implemented";
714   }
715
716   void modlcm() {
717       cout << "modlcm not implemented";
718   }
719
720   void modlcm() {
721       cout << "modlcm not implemented";
722   }
723
724   void modlcm() {
725       cout << "modlcm not implemented";
726   }
727
728   void modlcm() {
729       cout << "modlcm not implemented";
730   }
731
732   void modlcm() {
733       cout << "modlcm not implemented";
734   }
735
736   void modlcm() {
737       cout << "modlcm not implemented";
738   }
739
740   void modlcm() {
741       cout << "modlcm not implemented";
742   }
743
744   void modlcm() {
745       cout << "modlcm not implemented";
746   }
747
748   void modlcm() {
749       cout << "modlcm not implemented";
750   }
751
752   void modlcm() {
753       cout << "modlcm not implemented";
754   }
755
756   void modlcm() {
757       cout << "modlcm not implemented";
758   }
759
760   void modlcm() {
761       cout << "modlcm not implemented";
762   }
763
764   void modlcm() {
765       cout << "modlcm not implemented";
766   }
767
768   void modlcm() {
769       cout << "modlcm not implemented";
770   }
771
772   void modlcm() {
773       cout << "modlcm not implemented";
774   }
775
776   void modlcm() {
777       cout << "modlcm not implemented";
778   }
779
780   void modlcm() {
781       cout << "modlcm not implemented";
782   }
783
784   void modlcm() {
785       cout << "modlcm not implemented";
786   }
787
788   void modlcm() {
789       cout << "modlcm not implemented";
790   }
791
792   void modlcm() {
793       cout << "modlcm not implemented";
794   }
795
796   void modlcm() {
797       cout << "modlcm not implemented";
798   }
799
799
800   void modlcm() {
801       cout << "modlcm not implemented";
802   }
803
804   void modlcm() {
805       cout << "modlcm not implemented";
806   }
807
808   void modlcm() {
809       cout << "modlcm not implemented";
810   }
811
812   void modlcm() {
813       cout << "modlcm not implemented";
814   }
815
816   void modlcm() {
817       cout << "modlcm not implemented";
818   }
819
820   void modlcm() {
821       cout << "modlcm not implemented";
822   }
823
824   void modlcm() {
825       cout << "modlcm not implemented";
826   }
827
828   void modlcm() {
829       cout << "modlcm not implemented";
830   }
831
832   void modlcm() {
833       cout << "modlcm not implemented";
834   }
835
836   void modlcm() {
837       cout << "modlcm not implemented";
838   }
839
840   void modlcm() {
841       cout << "modlcm not implemented";
842   }
843
844   void modlcm() {
845       cout << "modlcm not implemented";
846   }
847
848   void modlcm() {
849       cout << "modlcm not implemented";
850   }
851
852   void modlcm() {
853       cout << "modlcm not implemented";
854   }
855
856   void modlcm() {
857       cout << "modlcm not implemented";
858   }
859
860   void modlcm() {
861       cout << "modlcm not implemented";
862   }
863
864   void modlcm() {
865       cout << "modlcm not implemented";
866   }
867
868   void modlcm() {
869       cout << "modlcm not implemented";
870   }
871
872   void modlcm() {
873       cout << "modlcm not implemented";
874   }
875
876   void modlcm() {
877       cout << "modlcm not implemented";
878   }
879
880   void modlcm() {
881       cout << "modlcm not implemented";
882   }
883
884   void modlcm() {
885       cout << "modlcm not implemented";
886   }
887
888   void modlcm() {
889       cout << "modlcm not implemented";
890   }
891
892   void modlcm() {
893       cout << "modlcm not implemented";
894   }
895
896   void modlcm() {
897       cout << "modlcm not implemented";
898   }
899
900   void modlcm() {
901       cout << "modlcm not implemented";
902   }
903
904   void modlcm() {
905       cout << "modlcm not implemented";
906   }
907
908   void modlcm() {
909       cout << "modlcm not implemented";
910   }
911
912   void modlcm() {
913       cout << "modlcm not implemented";
914   }
915
916   void modlcm() {
917       cout << "modlcm not implemented";
918   }
919
920   void modlcm() {
921       cout << "modlcm not implemented";
922   }
923
924   void modlcm() {
925       cout << "modlcm not implemented";
926   }
927
928   void modlcm() {
929       cout << "modlcm not implemented";
930   }
931
932   void modlcm() {
933       cout << "modlcm not implemented";
934   }
935
936   void modlcm() {
937       cout << "modlcm not implemented";
938   }
939
940   void modlcm() {
941       cout << "modlcm not implemented";
942   }
943
944   void modlcm() {
945       cout << "modlcm not implemented";
946   }
947
948   void modlcm() {
949       cout << "modlcm not implemented";
950   }
951
952   void modlcm() {
953       cout << "modlcm not implemented";
954   }
955
956   void modlcm() {
957       cout << "modlcm not implemented";
958   }
959
960   void modlcm() {
961       cout << "modlcm not implemented";
962   }
963
964   void modlcm() {
965       cout << "modlcm not implemented";
966   }
967
968   void modlcm() {
969       cout << "modlcm not implemented";
970   }
971
972   void modlcm() {
973       cout << "modlcm not implemented";
974   }
975
976   void modlcm() {
977       cout << "modlcm not implemented";
978   }
979
980   void modlcm() {
981       cout << "modlcm not implemented";
982   }
983
984   void modlcm() {
985       cout << "modlcm not implemented";
986   }
987
988   void modlcm() {
989       cout << "modlcm not implemented";
990   }
991
992   void modlcm() {
993       cout << "modlcm not implemented";
994   }
995
996   void modlcm() {
997       cout << "modlcm not implemented";
998   }
999
1000  void modlcm() {
1001      cout << "modlcm not implemented";
1002  }
1003
1004  void modlcm() {
1005      cout << "modlcm not implemented";
1006  }
1007
1008  void modlcm() {
1009      cout << "modlcm not implemented";
1010  }
1011
1012  void modlcm() {
1013      cout << "modlcm not implemented";
1014  }
1015
1016  void modlcm() {
1017      cout << "modlcm not implemented";
1018  }
1019
1020  void modlcm() {
1021      cout << "modlcm not implemented";
1022  }
1023
1024  void modlcm() {
1025      cout << "modlcm not implemented";
1026  }
1027
1028  void modlcm() {
1029      cout << "modlcm not implemented";
1030  }
1031
1032  void modlcm() {
1033      cout << "modlcm not implemented";
1034  }
1035
1036  void modlcm() {
1037      cout << "modlcm not implemented";
1038  }
1039
1040  void modlcm() {
1041      cout << "modlcm not implemented";
1042  }
1043
1044  void modlcm() {
1045      cout << "modlcm not implemented";
1046  }
1047
1048  void modlcm() {
1049      cout << "modlcm not implemented";
1050  }
1051
1052  void modlcm() {
1053      cout << "modlcm not implemented";
1054  }
1055
1056  void modlcm() {
1057      cout << "modlcm not implemented";
1058  }
1059
1060  void modlcm() {
1061      cout << "modlcm not implemented";
1062  }
1063
1064  void modlcm() {
1065      cout << "modlcm not implemented";
1066  }
1067
1068  void modlcm() {
1069      cout << "modlcm not implemented";
1070  }
1071
1072  void modlcm() {
1073      cout << "modlcm not implemented";
1074  }
1075
1076  void modlcm() {
1077      cout << "modlcm not implemented";
1078  }
1079
1080  void modlcm() {
1081      cout << "modlcm not implemented";
1082  }
1083
1084  void modlcm()
```

```

44     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
45         a[i] = s[a[0] - i] - '0';
46
47     while (a[0] && !a[a[0]])
48         a[0]--;
49 }
50
51 void input() {
52     string s;
53     cin >> s;
54     *this = s;
55 }
56
57 string str() const {
58     if (!a[0])
59         return "0";
60
61     string s;
62     if (negative)
63         s = "-";
64
65     for (int i = a[0]; i; i--)
66         s.push_back('0' + a[i]);
67
68     return s;
69 }
70
71 operator string() const {
72     return str();
73 }
74
75 big_decimal operator -() const {
76     big_decimal o = *this;
77     if (a[0])
78         o.negative ^= true;
79
80     return o;
81 }
82
83 friend big_decimal abs(const big_decimal &u) {
84     big_decimal o = u;
85     o.negative = false;
86     return o;
87 }
88
89 big_decimal &operator <= (int k) {
90     a[0] += k;
91
92     for (int i = a[0]; i > k; i--)
93         a[i] = a[i - k];
94
95     for (int i = k; i; i--)
96         a[i] = 0;
97
98     return *this;
99 }
100
101 friend big_decimal operator << (const big_decimal
102     &u, int k) {
103     big_decimal o = u;
104     return o <<= k;
105 }
106
107 big_decimal &operator >= (int k) {
108     if (a[0] < k)
109         return *this = big_decimal(0);
110
111     a[0] -= k;
112     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
113         a[i] = a[i + k];
114
115     for (int i = a[0] + 1; i <= a[0] + k; i++)
116         a[i] = 0;
117
118     return *this;
119 }
120
121 friend big_decimal operator >> (const big_decimal
122     &u, int k) {
123     big_decimal o = u;
124     return o >>= k;
125 }
126
127 friend int cmp(const big_decimal &u, const
128     big_decimal &v) {
129     if (u.negative || v.negative) {
130         if (u.negative && v.negative)
131             return -cmp(-u, -v);
132
133         if (u.negative)
134             return -1;
135
136         if (v.negative)
137             return 1;
138
139     if (u.a[0] != v.a[0])
140         return u.a[0] < v.a[0] ? -1 : 1;
141
142     for (int i = u.a[0]; i; i--)
143         if (u.a[i] != v.a[i])
144             return u.a[i] < v.a[i] ? -1 : 1;
145
146     return 0;
147 }
148
149 friend bool operator < (const big_decimal &u, const
150     big_decimal &v) {
151     return cmp(u, v) == -1;
152 }
153
154 friend bool operator > (const big_decimal &u, const
155     big_decimal &v) {
156     return cmp(u, v) == 1;
157 }
158
159 friend bool operator == (const big_decimal &u,
160     const big_decimal &v) {
161     return cmp(u, v) == 0;
162 }
163
164 friend bool operator ≤ (const big_decimal &u,
165     const big_decimal &v) {
166     return cmp(u, v) ≤ 0;
167 }
168
169 friend big_decimal decimal_plus(const big_decimal
170     &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数
171     big_decimal o;
172
173     o.a[0] = max(u.a[0], v.a[0]);

```

```

172     for (int i = 1; i <= u.a[0] || i <= v.a[0]; i++)
173         o.a[i] += u.a[i] + v.a[i];
174
175         if (o.a[i] >= 10) {
176             o.a[i + 1]++;
177             o.a[i] -= 10;
178         }
179     }
180
181     if (o.a[o.a[0] + 1])
182         o.a[0]++;
183
184     return o;
185 }
186
187 friend big_decimal decimal_minus(const big_decimal
188     &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数
189     // 的话可以直接调用
190     int k = cmp(u, v);
191
192     if (k == -1)
193         return -decimal_minus(v, u);
194     else if (k == 0)
195         return big_decimal(0);
196
197     big_decimal o;
198
199     o.a[0] = u.a[0];
200
201     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++) {
202         o.a[i] += u.a[i] - v.a[i];
203
204         if (o.a[i] < 0) {
205             o.a[i] += 10;
206             o.a[i + 1]--;
207         }
208     }
209
210     while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
211         o.a[0]--;
212
213     return o;
214 }
215
216 friend big_decimal decimal_multi(const big_decimal
217     &u, const big_decimal &v) {
218     big_decimal o;
219
220     o.a[0] = u.a[0] + v.a[0] - 1;
221
222     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++)
223         for (int j = 1; j <= v.a[0]; j++)
224             o.a[i + j - 1] += u.a[i] * v.a[j];
225
226     for (int i = 1; i <= o.a[0]; i++)
227         if (o.a[i] >= 10) {
228             o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
229             o.a[i] %= 10;
230         }
231
232         if (o.a[o.a[0] + 1])
233             o.a[0]++;
234
235     friend pair<big_decimal, big_decimal>
236     decimal_divide(big_decimal u, big_decimal v) {
237         if (v > u)
238             return make_pair(big_decimal(0), u);
239
240         big_decimal o;
241         o.a[0] = u.a[0] - v.a[0] + 1;
242
243         int m = v.a[0];
244         v <= u.a[0] - m;
245
246         for (int i = u.a[0]; i >= m; i--) {
247             while (u >= v) {
248                 u = u - v;
249                 o.a[i - m + 1]++;
250             }
251             v >= 1;
252         }
253
254         while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
255             o.a[0]--;
256
257         return make_pair(o, u);
258     }
259
260 friend big_decimal operator + (const big_decimal
261     &u, const big_decimal &v) {
262     if (u.negative || v.negative) {
263         if (u.negative && v.negative)
264             return -decimal_plus(-u, -v);
265
266         if (u.negative)
267             return v - (-u);
268
269         if (v.negative)
270             return u - (-v);
271     }
272
273     return decimal_plus(u, v);
274 }
275
276 friend big_decimal operator - (const big_decimal
277     &u, const big_decimal &v) {
278     if (u.negative || v.negative) {
279         if (u.negative && v.negative)
280             return -decimal_minus(-u, -v);
281
282         if (u.negative)
283             return -decimal_plus(-u, v);
284
285         if (v.negative)
286             return decimal_plus(u, -v);
287     }
288
289     return decimal_minus(u, v);
290 }
291
292 friend big_decimal operator * (const big_decimal
293     &u, const big_decimal &v) {
294     if (u.negative || v.negative) {
295         big_decimal o = decimal_multi(abs(u),
296             abs(v));
297
298         if (u.negative ^ v.negative)
299             return -o;
300         return o;
301     }
302
303     return decimal_multi(u, v);
304 }
```

```

300 }
301
302 big_decimal operator * (long long x) const {
303     if (x >= 10)
304         return *this * big_decimal(x);
305
306     if (negative)
307         return -(*this * x);
308
309     big_decimal o;
310
311     o.a[0] = a[0];
312
313     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
314         o.a[i] += a[i] * x;
315
316     if (o.a[i] >= 10) {
317         o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
318         o.a[i] %= 10;
319     }
320 }
321
322 if (o.a[a[0] + 1])
323     o.a[0]++;
324
325     return o;
326 }
327
328 friend pair<big_decimal, big_decimal>
329     decimal_div(const big_decimal &u, const
330     big_decimal &v) {
331     if (u.negative || v.negative) {
332         pair<big_decimal, big_decimal> o =
333             decimal_div(abs(u), abs(v));
334
335         if (u.negative ^ v.negative)
336             return make_pair(-o.first, -o.second);
337         return o;
338     }
339
340     return decimal_divide(u, v);
341
342 friend big_decimal operator / (const big_decimal
343     &u, const big_decimal &v) { // v不能是0
344     if (u.negative || v.negative) {
345         big_decimal o = abs(u) / abs(v);
346
347         if (u.negative ^ v.negative)
348             return -o;
349         return o;
350     }
351
352     return decimal_divide(u, v).first;
353
354 friend big_decimal operator % (const big_decimal
355     &u, const big_decimal &v) {
356     if (u.negative || v.negative) {
357         big_decimal o = abs(u) % abs(v);
358
359         if (u.negative ^ v.negative)
360             return -o;
361         return o;
362     }
363
364     return decimal_divide(u, v).second;
365 }

```

8.5 笛卡尔树

```

1 int s[maxn], root, lc[maxn], rc[maxn];
2
3 int top = 0;
4 s[++top] = root = 1;
5 for (int i = 2; i <= n; i++) {
6     s[top + 1] = 0;
7     while (top && a[i] < a[s[top]]) // 小根笛卡尔树
8         top--;
9
10    if (top)
11        rc[s[top]] = i;
12    else
13        root = i;
14
15    lc[i] = s[top + 1];
16    s[++top] = i;
17 }

```

8.6 GarsiaWachs算法($O(n \log n)$ 合并石子)

设序列是 $\{a_i\}$, 从左往右, 找到一个最小的且满足 $a_{k-1} \leq a_{k+1}$ 的 k , 找到后合并 a_k 和 a_{k-1} , 再从当前位置开始向左找最大的 j 满足 $a_j \geq a_k + a_{k-1}$ (当然是指合并前的), 然后把 $a_k + a_{k-1}$ 插到 j 的后面就行. 一直重复, 直到只剩下一堆石子就可以了.

另外在这个过程中, 可以假设 a_1 和 a_n 是正无穷的, 可省略边界的判别. 把 a_0 设为INF, a_{n+1} 设为INF-1, 可实现剩余一堆石子时自动结束.

8.7 常用NTT素数及原根

$p = r \times 2^k + 1$	r	k	最小原根
104857601	25	22	3
167772161	5	25	3
469762049	7	26	3
985661441	235	22	3
998244353	119	23	3
1004535809	479	21	3
1005060097*	1917	19	5
2013265921	15	27	31
2281701377	17	27	3
31525197391593473	7	52	3
180143985094819841	5	55	6
1945555039024054273	27	56	5
4179340454199820289	29	57	3

*注: 1005060097有点危险, 在变化长度大于 $524288 = 2^{19}$ 时不可用.

8.8 xorshift

```

1 ull k1, k2;
2 const int mod = 100000000;
3 ull xorShift128Plus() {
4     ull k3 = k1, k4 = k2;
5     k1 = k4;
6     k3 ^= (k3 << 23);
7     k2 = k3 ^ k4 ^ (k3 >> 17) ^ (k4 >> 26);
8     return k2 + k4;
9 }
10 void gen(ull _k1, ull _k2) {
11     k1 = _k1, k2 = _k2;
12     int x = xorShift128Plus() % threshold + 1;
13     // do sth
14 }

```

```

15
16
17 uint32_t xor128(void) {
18     static uint32_t x = 123456789;
19     static uint32_t y = 362436069;
20     static uint32_t z = 521288629;
21     static uint32_t w = 88675123;
22     uint32_t t;
23
24     t = x ^ (x << 11);
25     x = y; y = z; z = w;
26     return w = w ^ (w >> 19) ^ (t ^ (t >> 8));
27 }
```

8.9 枚举子集

(注意这是 $t \neq 0$ 的写法, 如果可以等于0需要在循环里手动break)

```

1 for (int t = s; t; (--t) &= s) {
2     // do something
3 }
```

8.10 STL

8.10.1 vector

- `vector(int nSize)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize
- `vector(int nSize, const T &value)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize, 且值均为value
- `vector(begin, end)`: 复制[begin, end)区间内另一个数组的元素到vector中
- `void assign(int n, const T &x)`: 设置向量中前n个元素的值为x
- `void assign(const_iterator first, const_iterator last)`: 向量中[first, last)中元素设置成当前向量元素
- `void emplace_back(Args&& ... args)`: 自动构造并push_back一个元素, 例如对一个存储pair的vector可以`v.emplace_back(x, y)`

8.10.2 list

- `assign()` 给list赋值
- `back()` 返回最后一个元素
- `begin()` 返回指向第一个元素的迭代器
- `clear()` 删除所有元素
- `empty()` 如果list是空的则返回true
- `end()` 返回末尾的迭代器
- `erase()` 删除一个元素
- `front()` 返回第一个元素
- `insert()` 插入一个元素到list中
- `max_size()` 返回list能容纳的最大元素数量
- `merge()` 合并两个list
- `pop_back()` 删除最后一个元素
- `pop_front()` 删除第一个元素
- `push_back()` 在list的末尾添加一个元素
- `push_front()` 在list的头部添加一个元素
- `rbegin()` 返回指向第一个元素的逆向迭代器
- `remove()` 从list删除元素
- `remove_if()` 按指定条件删除元素
- `rend()` 指向list末尾的逆向迭代器
- `resize()` 改变list的大小
- `reverse()` 把list的元素倒转
- `size()` 返回list中的元素个数
- `sort()` 给list排序
- `splice()` 合并两个list
- `swap()` 交换两个list
- `unique()` 删除list中重复的元

8.10.3 unordered_set/map

- `unordered_map<int, int, hash>`: 自定义哈希函数, 其中hash是一个带重载括号的类.

8.11 Public Based DataStructure(PB_DS)

8.11.1 哈希表

```

1 #include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include<ext/pb_ds/hash_policy.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 cc_hash_table<string, int> mp1; // 拉链法
6 gp_hash_table<string, int> mp2; // 查探法(快一些)
```

8.11.2 堆

默认也是大根堆, 和`std::priority_queue`保持一致.

```

1 #include<ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
2 using namespace __gnu_pbds;
3
4 __gnu_pbds::priority_queue<int> q;
5 __gnu_pbds::priority_queue<int, greater<int>,
   → pairing_heap_tag> pq;
```

效率参考:

- * 共有五种操作: push、pop、modify、erase、join
- * pairing_heap_tag: push和join为 $O(1)$, 其余为均摊 $\Theta(\log n)$
- * binary_heap_tag: 只支持push和pop, 均为均摊 $\Theta(\log n)$
- * binomial_heap_tag: push为均摊 $O(1)$, 其余为 $\Theta(\log n)$
- * rc_binomial_heap_tag: push为 $O(1)$, 其余为 $\Theta(\log n)$
- * thin_heap_tag: push为 $O(1)$, 不支持join, 其余为 $\Theta(\log n)$; 果只有increase_key, 那么modify为均摊 $O(1)$
- * “不支持”不是不能用, 而是用起来很慢 csdn.net/TRiddle

常用操作:

- `push()`: 向堆中压入一个元素, 返回迭代器
- `pop()`: 将堆顶元素弹出
- `top()`: 返回堆顶元素
- `size()`: 返回元素个数
- `empty()`: 返回是否非空
- `modify(point_iterator, const key)`: 把迭代器位置的key修改为传入的key
- `erase(point_iterator)`: 把迭代器位置的键值从堆中删除
- `join(__gnu_pbds::priority_queue &other)`: 把other合并到*`this`, 并把other清空

8.11.3 平衡树

```

1 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
   → tree_order_statistics_node_update> t;
6
7 // rb_tree_tag 红黑树(还有splay_tree_tag和ov_tree_tag,
   → 后者不知道是什么)
```

注意第五个参数要填`tree_order_statistics_node_update`才能使用排名操作.

- `insert(x)`: 向树中插入一个元素x, 返回`pair<point_iterator, bool>`
- `erase(x)`: 从树中删除一个元素/迭代器x, 返回一个`bool`表明是否删除成功
- `order_of_key(x)`: 返回x的排名, 0-based
- `find_by_order(x)`: 返回排名(0-based)所对应元素的迭代器
- `lower_bound(x) / upper_bound(x)`: 返回第一个 \geq 或者 $>$ x的元素的迭代器
- `join(x)`: 将x并入当前树, 前提是两棵树的类型一样, 并且二者值域不能重叠, x树会被删除
- `split(x, b)`: 分裂成两部分, 小于等于x的属于当前树, 其余的属于b树
- `empty()`: 返回是否为空
- `size()`: 返回大小

(注意平衡树不支持多重值, 如果需要多重值, 可以再开一个`unordered_map`来记录值出现的次数, 将x`<<32`后加上出现的次数后插入. 注意此时应该为long long类型.)

8.12 rope

```

1 #include <ext/rope>
2 using namespace __gnu_cxx;
3
4 push_back(x); // 在末尾添加x
5 insert(pos, x); // 在pos插入x, 自然支持整个char数组的一
   ↪ 次插入
6 erase(pos, x); // 从pos开始删除x个, 不要只传一个参数, 有
   ↪ 毒
7 copy(pos, len, x); // 从pos开始到pos + len为止的部分, 赋
   ↪ 值给x
8 replace(pos, x); // 从pos开始换成x
9 substr(pos, x); // 提取pos开始x个
10 at(x) / [x]; // 访问第x个元素

```

8.13 其他C++相关

8.13.1 <cmath>

- `std::log1p(x)`: (注意是数字1)返回 $\ln(1 + x)$ 的值, x非常接近0时比直接`exp`精确得多.
- `std::hypot(x, y[, z])`: 返回平方和的平方根, 或者说到原点的欧几里得距离.

8.13.2 <algorithm>

- `std::all_of(begin, end, f)`: 检查范围内元素调用函数f后是否全返回真. 类似地还有`std::any_of`和`std::none_of`.
- `std::for_each(begin, end, f)`: 对范围内所有元素调用一次f. 如果传入的是引用, 也可以用f修改. (例如`for_each(a, a + n, [<int &x]{cout << ++x << "\n";})`)
- `std::for_each_n(begin, n, f)`: 同上, 只不过范围改成了从begin开始的n个元素.
- `std::copy()`, `std::copy_n()`: 用法谁都会, 但标准里说如果元素是可平凡复制的(比如int), 那么它会避免批量赋值, 并且调用`std::memmove()`之类的快速复制函数. (一句话总结: 它跑得快)
- `std::rotate(begin, mid, end)`: 循环移动, 移动后mid位置的元素会跑到first位置. C++11起会返回begin位置的元素移动后的位置.
- `std::unique(begin, end)`: 去重, 返回去重后的end.
- `std::partition(begin, end, f)`: 把f为true的放在前面, false的放在后面, 返回值是第二部分的开头, 不保持相对顺序. 如果要保留相对顺序可以用`std::stable_partition()`, 比如写整体二分.

- `std::partition_copy(begin, end, begin_t, begin_f, f)`: 不修改原数组, 把true的扔到begin_t, false的扔到begin_f. 返回值是两部分结尾的迭代器的pair.
- `std::equal_range(begin, end, x)`: 在已经排好序的数组里找到等于x的范围.
- `std::minmax(a, b)`: 返回`pair(min(a, b), max(a, b))`. 比如`tie(l, r) = minmax(l, r)`.

8.13.3 std::tuple

- `std::make_tuple(...)`: 返回构造好的tuple
- `std::get<i>(tup)`: 返回tuple的第i项
- `std::tuple_cat(...)`: 传入几个tuple, 返回按顺序连起来的tuple
- `std::tie(x, y, z, ...)`: 把传入的变量的左值引用绑起来作为tuple返回, 例如可以`std::tie(x, y, z) = std::make_tuple(a, b, c)`.

8.13.4 <complex>

- `complex<double> imaginary = 1i, x = 2 + 3i`: 可以这样直接构造复数.
- `real/imag(x)`: 返回实部/虚部.
- `conj(x)`: 返回共轭复数.
- `arg(x)`: 返回辐角.
- `norm(x)`: 返回模的平方. (直接求模用`abs(x)`.)
- `polar(len, theta)`: 用绝对值和辐角构造复数.

8.14 一些游戏

8.14.1 炉石传说

两个随从 (a_i, h_i) 和 (a_j, h_j) 皇城PK, 最后只有 $a_i \times h_i$ 较大的一方才有可能活下来, 当然也有可能一起死.

8.15 OEIS

如果没有特殊说明, 那么以下数列都从第0项开始, 除非没有定义也没有好的办法解释第0项的意义.

8.15.1 计数相关

1. 卡特兰数(A000108)

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, ...
性质见1.9.7.卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数(16页).

2. (大)施罗德数(A006318)

1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, 206098, 1037718, 5293446, 27297738, 142078746, 745387038, ... (0-based)
性质同样见1.9.7.卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数(16页).

3. 小施罗德数(A001003)

1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049, 518859, 2646723, 13648869, 71039373, 372693519, ... (0-based)
性质位置同上.
小施罗德数除了第0项以外都是施罗德数的一半.

4. 默慈金数(Motzkin numbers, A001006)

1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, 2356779, ... (0-based)
性质位置同上.

5. 将点按顺序排成一圈后不自交的树的个数(A001764)

1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, 43263, 246675, 1430715, 8414640, 50067108, 300830572, 1822766520, ... (0-based)
 $a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{2^{n+1}}$

也就是说, 在圆上按顺序排列的n个点之间连n - 1条不相交(除端点外)的弦, 组成一棵树的方案数.

也等于每次只能向右或向上，并且不能高于 $y = 2x$ 这条直线，从 $(0, 0)$ 走到 $(n, 2n)$ 的方案数.

扩展：如果改成不能高于 $y = kx$ 这条直线，走到 (n, kn) 的方案数，那么答案就是 $\frac{\binom{(k+1)n}{n}}{kn+1}$.

6. n 个点的圆上画不相交的弦的方案数(A054726)

1, 1, 2, 8, 48, 352, 2880, 25216, 231168, 2190848, 21292032, 211044352, 2125246464, 21681954816, ... (0-based)

$a_n = 2^n s_{n-2}$ ($n > 2$)， s_n 是上面的小施罗德数.

和上面的区别在于，这里可以不连满 $n - 1$ 条边. 另外默慈金数画的弦不能共享端点，但是这里可以.

7. Wedderburn-Etherington numbers(A001190)

0, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 46, 98, 207, 451, 983, 2179, 4850, 10905, 24631, 56011, 127912, 293547, ... (0-based)

每个结点都有0或者2个儿子，且总共有 n 个叶子结点的二叉树方案数. (无标号)

同时也是 $n - 1$ 个结点的无标号二叉树个数.

$$A(x) = x + \frac{A(x)^2 + A(x^2)}{2} = 1 - \sqrt{1 - 2x - A(x^2)}$$

8. 划分数(A000041)

1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, 792, 1002, ... (0-based)

9. 贝尔数(A000110)

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, ... (0-based)

10. 错位排列数(A0000166)

1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, ... (0-based)

11. 交替阶乘(A005165)

0, 1, 1, 5, 19, 101, 619, 4421, 35899, 326981, 3301819, 36614981, 442386619, 5784634181, 81393657019, ...

$$n! - (n-1)! + (n-2)! - \dots 1! = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i)!$$

$a_0 = 0, a_n = n! - a_{n-1}$.

8.15.2 线性递推数列

1. Lucas数(A000032)

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, ...

2. 斐波那契数(A000045)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

3. 泰波那契数(Tribonacci, A000071)

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, ...

$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$.

4. Pell数(A0000129)

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, ...

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

5. 帕多万(Padovan)数(A0000931)

1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833, 31572, ...

$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0, a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$.

6. Jacobsthal numbers(A001045)

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, 87381, 174763, ...

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

同时也是最接近 $\frac{2^n}{3}$ 的整数.

7. 佩林数(A001608)

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853, ...

$a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2, a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

8.15.3 数论相关

1. Carmichael数, 伪质数(A002997)

561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973, 75361, 101101, 115921, 126217, 162401, 172081, 188461, 252601, 278545, 294409, 314821, 334153, 340561, 399001, 410041, 449065, 488881, 512461, ...

满足 \forall 与 n 互质的 a ，都有 $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 的所有合数 n 被称为Carmichael数.

Carmichael数在 10^8 以内只有255个.

2. 反质数(A002182)

1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 7560, 10080, 15120, 20160, 25200, 27720, 45360, 50400, 55440, 83160, 110880, 166320, 221760, 277200, 332640, 498960, 554400, 665280, 720720, 1081080, 1441440, 2162160, ...

比所有更小的数的约数数量都更多的数.

3. 前 n 个质数的乘积(A002110)

1, 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, 9699690, 223092870, 6469693230, 200560490130, 7420738134810, ...

4. 梅森素数(A000668)

3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, 618970019642690137449562111, 162259276829213363391578010288127, 170141183460469231731687303715884105727

p 是质数，同时 $2^p - 1$ 也是质数.

8.15.4 其他

1. 伯努利数(A027641)

见1.9.2.伯努利数, 自然数幂次和(15页).

2. 四个柱子的汉诺塔(A007664)

0, 1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, 41, 49, 65, 81, 97, 113, 129, 161, 193, 225, 257, 289, 321, 385, 449, ...

差分之后可以发现其实现是1次+1, 2次+2, 3次+4, 4次+8...的规律.

3. 乌拉姆数(Ulam numbers, A002858)

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, 72, 77, 82, 87, 97, 99, 102, 106, 114, 126, 131, 138, 145, 148, 155, 175, 177, 180, 182, 189, 197, 206, 209, 219, 221, 236, 238, 241, 243, 253, 258, 260, 273, 282, 309, 316, 319, 324, 339 ...

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n$ 表示在所有 $> a_{n-1}$ 的数中，最小的，能被表示成(前面的两个不同的元素的和)的数.

8.16 编译选项

- `-O2 -g -std=c++17`: 狗都知道
- `-Wall -Wextra -Wshadow -Wconversion`: 更多警告
– `-Werror`: 强制将所有Warning变成Error
- `-fsanitize=(address/undefined)`: 检查有符号整数溢出(算ub)/数组越界
– 注意无符号类型溢出不算ub.
- `-fno-ms-extensions`: 关闭一些和msvc保持一致的特性，例如，不标返回值类型的函数会报CE而不是默认为`int`.
– 但是不写return的话它还是管不了.

8.17 注意事项

8.17.1 常见下毒手法

- 0/1base是不是搞混了
- 高精度高低位搞反了吗
- 线性筛抄对了吗
- 快速乘抄对了吗
- $i \leq n, j \leq m$
- sort比较函数是不是比了个寂寞
- 该取模的地方都取模了吗
- 边界情况(+1-1之类的)有没有想清楚
- 特判是否有必要, 确定写对了吗

8.17.2 场外相关

- 安顿好之后查一下附近的咖啡店, 打印店, 便利店之类的位置, 以备不时之需
- 热身赛记得检查一下编译注意事项中的代码能否过编译, 还有熟悉比赛场地, 清楚洗手间在哪儿, 测试打印机(如果可以)
- 比赛前至少要翻一遍板子, 尤其要看原理与例题
- 比赛前一两天不要摸鱼, 要早睡, 有条件最好洗个澡; 比赛当天不要起太晚, 维持好的状态
- 赛前记得买咖啡, 最好直接安排三人份, 记得要咖啡因比较足的; 如果主办方允许, 就带些巧克力之类的高热量零食
- 入场之后记得检查机器, 尤其要逐个检查键盘按键有没有坏的; 如果可以的话, 调一下gedit设置
- 开赛之前调整好心态, 比赛而已, 不必心急.

8.17.3 做题策略与心态调节

- 拿到题后立刻按照商量好的顺序读题, 前半小时最好跳过题意太复杂的题(除非被过穿了)
- 签到题写完不要激动, 稍微检查一下最可能的下毒点再交, 避免无谓的罚时

一两行的那种傻逼题就算了

- 读完题及时输出题意, 一方面避免重复读题, 一方面也可以让队友有一个初步印象, 方便之后决定开题顺序
- 如果不能确定题意就不要贸然输出甚至上机, 尤其是签到题, 因为样例一般都很弱
- 一个题如果卡了很久又有其他题可以写, 那不妨先放掉写更容易的题, 不要在一棵树上吊死

不要被一两道题搞得心态爆炸, 一方面急也没有意义, 一方面你很可能真的离AC就差一步

- 榜是不会骗人的, 一个题如果被不少人过了就说明这个题很可能并没有那么难; 如果不是有十足的把握就不要轻易开没什么人交的题; 另外不要忘记最后一小时会封榜

想不出题/找不出毒自然容易犯困, 一定不要放任自己昏昏欲睡, 最好去洗手间冷静一下, 没有条件的站起来踱步

- 思考的时候不要挂机, 一定要在草稿纸上画一画, 最好说出声来最容易断掉思路

出完算法一定要check一下样例和一些trivial的情况, 不然容易写了半天发现写了个假算法

- 上机前有时间就提前给需要思考怎么写的地方打草稿, 不要浪费机时

查毒时如果最难的地方反复check也没有问题, 就从头到脚仔仔细查一遍, 不要放过任何细节, 即使是并查集和sort这种东西也不能想当然

- 后半场如果时间不充裕就不要冒险开难题, 除非真的无事可做

如果是没写过的东西也不要轻举妄动, 在有其他好写的题的时候就等一会再说

- 大多数时候都要听队长安排, 虽然不一定最正确但可以保持组织性

任何时候都不要着急, 着急不能解决问题, 不要当皓国王

- 输了游戏, 还有人生; 赢了游戏, 还有人生.

8.18 附录: VScode相关

8.18.1 插件

- Chinese (Simplified) (简体中文语言包)
- C/C++
- C++ Intellisense (前提是让用)
- Better C++ Syntax
- Python
- Pylance (前提是让用)
- Rainbow Brackets (前提是让用)

8.18.2 设置选项

- Editor: Insert Spaces (取消勾选, 改为tab缩进)
- Editor: Line Warp (开启折行)
- 改配色, “深色+: 默认深色”
- 自动保存(F1 → “auto”)
- Terminal → Integrated: Cursor Style (修改终端光标形状)
- Terminal → Integrated: Cursor Blinking (终端光标闪烁)
- 字体改为Cascadia Code/Mono SemiLight (Windows可用)

8.18.3 快捷键

- F1 / Ctrl+Shift+P: 万能键, 打开命令面板
- F8: 下一个Error Shift+F8: 上一个Error
- Ctrl+\: 水平分栏, 最多3栏
- Ctrl+1/2/3: 切到对应栏
- Ctrl+[/]: 当前行向左/右缩进
- Alt+F12: 查看定义的缩略图(显示小窗, 不跳过去)
- Ctrl+H: 查找替换
- Ctrl+D: 下一个匹配的也被选中(用于配合Ctrl+F)
- Ctrl+U: 回退上一个光标操作(防止光标飞了找不回去)
- Ctrl+/: 切换行注释
- Ctrl+(键盘左上角的倒引号): 显示终端

更多快捷键参见最后两页, 分别是Windows和Linux下的快捷键列表.

8.19 附录：骂人的艺术—梁实秋

古今中外没有一个不骂人的人。骂人就是有道德观念的意思，因为在骂人的时候，至少在骂人者自己总觉得那人有该骂的地方。何者该骂，何者不该骂，这个抉择的标准，是极道德的。所以根本不骂人，大可不必。骂人是一种发泄感情的方法，尤其是那一种怨怒的感情。想骂人的时候而不骂，时常在身体上弄出毛病，所以想骂人时，骂骂何妨？

但是，骂人是一种高深的学问，不是人人都可以随便试的。有因为骂人挨嘴巴的，有因为骂人吃官司的，有因为骂人反被人骂的，这些都是不会骂人的原故。今以研究所得，公诸同好，或可为骂人时之助乎？

1. 知己知彼

骂人是和动手打架一样的，你如其敢打人一拳，你先要自己忖度下，你得起别人的一拳否。这叫做知己知彼。骂人也是一样。譬如你骂他是“屈死”，你先要反省，自己和“屈死”有无分别。你骂别人荒唐，你自己想想曾否吃喝嫖赌。否则别人回敬你一二句，你就受不了。所以别人有着某种短处，而足下也正有同病，那么你在骂他的时候只得割爱。

2. 无骂不如己者

要骂人须要挑比你大一点的人物，比你漂亮一点的或者比你坏得万倍而比你得势的人物，总之，你要骂人，那人无论在好的一方面或坏的一方面都要能胜过你，你才不吃亏。你骂大人物，就怕他不理你，他一回骂，你就算骂着了。因为身份相同的人才肯对骂。在坏的一方面胜过你的，你骂他就如教训一般，他既便回骂，一般人仍不会理会他的。假如你骂一个无关痛痒的人，你越骂他他越得意，时常可以把一个无名小卒骂出名了，你看冤与不冤？

3. 适可而止

骂大人物骂到他回骂的时候，便不可再骂；再骂则一般人对你必无同情，以为你是无理取闹。骂小人物骂到他不能回骂的时候，便不可再骂；再骂下去则一般人对你也必无同情，以为你是欺负弱者。

4. 旁敲侧击

他偷东西，你骂他是贼；他抢东西，你骂他是盗，这是笨伯。骂人必须先明虚实掩映之法，须要烘托旁衬，旁敲侧击，于要紧处只一语便得，所谓杀人于咽喉处着刀。越要骂他你越要原谅他，即便说些恭维话亦不为过，这样的骂法才能显得你所骂的句句是真实确凿，让旁人看起来也可见得你的度量。

5. 态度镇定

骂人最忌浮躁。一语不合，面红筋跳，暴躁如雷，此灌夫骂座，泼妇骂街之术，不足以言骂人。善骂者必须态度镇静，行若无事。普通一般骂人，谁的声音高便算谁占理，谁的来势猛便算谁骂赢，惟真善骂人者，乃能避其锋而击其懈。你等他骂得疲倦的时候，你只消轻轻的回敬他一句，让他再狂吼一阵。在他暴躁不堪的时候，你不妨对他冷笑几声，包管你不费力气，把他气得死去活来，骂得他针针见血。

6. 出言典雅

8.20 附录：Cheat Sheet

见后面几页。

骂人要骂得微妙含蓄，你骂他一句要使他不甚觉得是骂，等到想过一遍才慢慢觉悟这句话不是好话，让他笑着的面孔由白而红，由红而紫，由紫而灰，这才是骂人的上乘。欲达到此种目的，深刻之用意固不可少，而典雅之言词则尤为重要。言词典雅可使听者不致刺耳。如要骂人骂得典雅，则首先要在骂时万万别提起女人身上的某一部分，万万不要涉及生理学范围。骂人一骂到生理学范围以内，底下再有什么话都不好说了。譬如你骂某甲，千万别提起他的令堂令妹。因为那样一来，便无是非可言，并且你自己也不免有令堂令妹，他若回敬起来，岂非势均力敌，半斤八两？再者骂人的时候，最好不要加入以种种难堪的名词，称呼起来总要客气，即使他是极卑鄙的小人，你也不妨称他先生，越客气，越骂得有力量。骂得时节最好引用他自己的词句，这不但可以使他难堪，还可以减轻他对你骂的力量。俗语少用，因为俗语一览无遗，不若典雅古文曲折含蓄。

7. 以退为进

两人对骂，而自己亦有理屈之处，则处于开骂伊始，特宜注意，最好是毅然将自己理屈之处完全承认下来，即使道歉认错均不妨事。先把自己理屈之处轻轻遮掩过去，然后你再重整旗鼓，着着逼人，方可无后顾之忧。即使自己没有理屈的地方，也绝不可自行夸张，务必谦逊不遑，把自己的位置降到一个不可再降的位置，然后骂起人来，自有一种公正光明的态度。否则你骂他一两句，他便以你个人的事反唇相讥，一场对骂，会变成两人私下口角，是非曲直，无从判断。所以骂人者自己要低声下气，此所谓以退为进。

8. 预设埋伏

你把这句话骂过去，你便要想看，他将用什么话骂回来。有眼光的骂人者，便处处留神，或是先将他要骂你的话替他说出来，或是预先安设埋伏，令他骂回来的话失去效力。他骂你的话，你替他说出来，这便等于缴了他的械一般。预设埋伏，便是在要攻击你的地方，你先轻轻的安下话根，然后他骂过来就等于枪弹打在沙包上，不能中伤。

9. 小题大做

如对方有该骂之处，而题目身小，不值一骂，或你所知不多，不足一骂，那时节你便可用小题大做的方法，来扩大题目。先用诚恳而怀疑的态度引申对方的意思，由不紧要之点引到大题目上去，处处用严谨的逻辑逼他说出不逻辑的话来，或是逼他说出合于逻辑但不合乎理的话来，然后你再大举骂他，骂到体无完肤为止，而原来惹动你的小题目，轻轻一提便了。

10. 远交近攻

一个时候，只能骂一个人，或一种人，或一派人。决不宜多树敌。所以骂人的时候，万勿连累旁人，即使必须牵涉多人，你也要表示好意，否则回骂之声纷至沓来，使你无从应付。

骂人的艺术，一时所能想起来的有上面十条，信手拈来，并无条理。我做此文的用意，是助人骂人。同时也是想把骂人的技术揭破一点，供爱骂人者参考。挨骂的人看看，骂人的心理原来是这样的，也算是揭破一张黑幕给你瞧瞧！

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Definitions		Series
$f(n) = O(g(n))$	iff \exists positive c, n_0 such that $0 \leq f(n) \leq cg(n) \forall n \geq n_0$.	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. In general: $\sum_{i=1}^n i^m = \frac{1}{m+1} \left[(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{i=1}^n ((i+1)^{m+1} - i^{m+1} - (m+1)i^m) \right]$ $\sum_{i=1}^{n-1} i^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$
$f(n) = \Omega(g(n))$	iff \exists positive c, n_0 such that $f(n) \geq cg(n) \geq 0 \forall n \geq n_0$.	
$f(n) = \Theta(g(n))$	iff $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \Omega(g(n))$.	
$f(n) = o(g(n))$	iff $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$.	
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	iff $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ such that $ a_n - a < \epsilon, \forall n \geq n_0$.	
$\sup S$	least $b \in \mathbb{R}$ such that $b \geq s, \forall s \in S$.	Geometric series: $\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}, \quad c \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1 - c}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1 - c}, \quad c < 1,$ $\sum_{i=0}^n i c^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(c-1)^2}, \quad c \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i c^i = \frac{c}{(1-c)^2}, \quad c < 1.$
$\inf S$	greatest $b \in \mathbb{R}$ such that $b \leq s, \forall s \in S$.	
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_i \mid i \geq n, i \in \mathbb{N}\}$.	Harmonic series: $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad \sum_{i=1}^n i H_i = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_i \mid i \geq n, i \in \mathbb{N}\}$.	$\sum_{i=1}^n H_i = (n+1)H_n - n, \quad \sum_{i=1}^n \binom{i}{m} H_i = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right).$
$\binom{n}{k}$	Combinations: Size k subsets of a size n set.	
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	Stirling numbers (1st kind): Arrangements of an n element set into k cycles.	1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad 3. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$	Stirling numbers (2nd kind): Partitions of an n element set into k non-empty sets.	4. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad 5. \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$
$\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$	1st order Eulerian numbers: Permutations $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ on $\{1, 2, \dots, n\}$ with k ascents.	6. $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}, \quad 7. \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$
$\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$	2nd order Eulerian numbers.	8. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad 9. \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$
C_n	Catalan Numbers: Binary trees with $n+1$ vertices.	10. $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}, \quad 11. \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1,$
14. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$	15. $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!H_{n-1},$	12. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad 13. \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\},$
18. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix},$	19. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2},$	16. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad 17. \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\},$
22. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1,$	23. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1-k \end{smallmatrix} \right\rangle,$	20. $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!, \quad 21. C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$
25. $\left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } k=0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	26. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 2^n - n - 1,$	24. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$
28. $x^n = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{x+k}{n},$	29. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^m \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n (-1)^k,$	27. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\rangle = 3^n - (n+1)2^n + \binom{n+1}{2},$
31. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k!,$	32. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1,$	30. $m! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{k}{n-m},$
34. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (2n-1-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$		33. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{for } n \neq 0,$
36. $\left\{ \begin{smallmatrix} x \\ x-n \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n},$	37. $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right\} (m+1)^{n-k},$	35. $\sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \frac{(2n)^n}{2^n},$

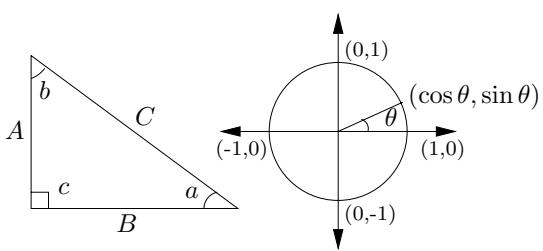
Theoretical Computer Science Cheat Sheet		
Identities Cont.		Trees
38. $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} n^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$,	39. $\begin{bmatrix} x \\ x-n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{2n}$,	Every tree with n vertices has $n-1$ edges.
40. $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$,	41. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$,	Kraft inequality: If the depths of the leaves of a binary tree are d_1, \dots, d_n : $\sum_{i=1}^n 2^{-d_i} \leq 1,$
42. $\begin{Bmatrix} m+n+1 \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^m k \begin{Bmatrix} n+k \\ k \end{Bmatrix}$,	43. $\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m k(n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}$,	and equality holds only if every internal node has 2 sons.
44. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$,	45. $(n-m)! \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{m-k}$, for $n \geq m$,	
46. $\begin{Bmatrix} n \\ n-m \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} m-n \\ m+k \end{bmatrix} \binom{m+n}{n+k} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}$,	47. $\begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} m-n \\ m+k \end{bmatrix} \binom{m+n}{n+k} \begin{Bmatrix} m+k \\ k \end{Bmatrix}$,	
48. $\begin{Bmatrix} n \\ \ell+m \end{Bmatrix} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-k \\ m \end{Bmatrix} \binom{n}{k}$,	49. $\begin{bmatrix} n \\ \ell+m \end{bmatrix} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-k \\ m \end{bmatrix} \binom{n}{k}$.	
Recurrences		
<p>Master method: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, $a \geq 1, b > 1$</p> <p>If $\exists \epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.</p> <p>If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.</p> <p>If $\exists \epsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, and $\exists c < 1$ such that $af(n/b) \leq cf(n)$ for large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$.</p> <p>Substitution (example): Consider the following recurrence $T_{i+1} = 2^{2^i} \cdot T_i^2$, $T_1 = 2$.</p> <p>Note that T_i is always a power of two. Let $t_i = \log_2 T_i$. Then we have $t_{i+1} = 2^i + 2t_i$, $t_1 = 1$.</p> <p>Let $u_i = t_i/2^i$. Dividing both sides of the previous equation by 2^{i+1} we get $\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} = \frac{2^i}{2^{i+1}} + \frac{t_i}{2^i}$.</p> <p>Substituting we find $u_{i+1} = \frac{1}{2} + u_i$, $u_1 = \frac{1}{2}$,</p> <p>which is simply $u_i = i/2$. So we find that T_i has the closed form $T_i = 2^{i2^{i-1}}$.</p> <p>Summing factors (example): Consider the following recurrence $T(n) = 3T(n/2) + n$, $T(1) = 1$.</p> <p>Rewrite so that all terms involving T are on the left side $T(n) - 3T(n/2) = n$.</p> <p>Now expand the recurrence, and choose a factor which makes the left side “telescope”</p>	$1(T(n) - 3T(n/2) = n)$ $3(T(n/2) - 3T(n/4) = n/2)$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $3^{\log_2 n-1}(T(2) - 3T(1) = 2)$ <p>Let $m = \log_2 n$. Summing the left side we get $T(n) - 3^m T(1) = T(n) - 3^m = T(n) - n^k$ where $k = \log_2 3 \approx 1.58496$. Summing the right side we get</p> $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{n}{2^i} 3^i = n \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i.$ <p>Let $c = \frac{3}{2}$. Then we have</p> $\begin{aligned} n \sum_{i=0}^{m-1} c^i &= n \left(\frac{c^m - 1}{c - 1} \right) \\ &= 2n(c^{\log_2 n} - 1) \\ &= 2n(c^{(k-1)\log_c n} - 1) \\ &= 2n^k - 2n, \end{aligned}$ <p>and so $T(n) = 3n^k - 2n$. Full history recurrences can often be changed to limited history ones (example): Consider</p> $T_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} T_j, \quad T_0 = 1.$ <p>Note that</p> $T_{i+1} = 1 + \sum_{j=0}^i T_j.$ <p>Subtracting we find</p> $\begin{aligned} T_{i+1} - T_i &= 1 + \sum_{j=0}^i T_j - 1 - \sum_{j=0}^{i-1} T_j \\ &= T_i. \end{aligned}$ <p>And so $T_{i+1} = 2T_i = 2^{i+1}$.</p>	<p>Generating functions:</p> <ol style="list-style-type: none"> Multiply both sides of the equation by x^i. Sum both sides over all i for which the equation is valid. Choose a generating function $G(x)$. Usually $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i g_i$. Rewrite the equation in terms of the generating function $G(x)$. Solve for $G(x)$. The coefficient of x^i in $G(x)$ is g_i. <p>Example: $g_{i+1} = 2g_i + 1$, $g_0 = 0$.</p> <p>Multiply and sum: $\sum_{i \geq 0} g_{i+1} x^i = \sum_{i \geq 0} 2g_i x^i + \sum_{i \geq 0} x^i$.</p> <p>We choose $G(x) = \sum_{i \geq 0} x^i g_i$. Rewrite in terms of $G(x)$:</p> $\frac{G(x) - g_0}{x} = 2G(x) + \sum_{i \geq 0} x^i.$ <p>Simplify: $\frac{G(x)}{x} = 2G(x) + \frac{1}{1-x}.$</p> <p>Solve for $G(x)$:</p> $G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$ <p>Expand this using partial fractions:</p> $\begin{aligned} G(x) &= x \left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right) \\ &= x \left(2 \sum_{i \geq 0} 2^i x^i - \sum_{i \geq 0} x^i \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} (2^{i+1} - 1)x^{i+1}. \end{aligned}$ <p>So $g_i = 2^i - 1$.</p>

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

$\pi \approx 3.14159, e \approx 2.71828, \gamma \approx 0.57721, \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -.61803$				
i	2^i	p_i	General	Probability
1	2	2	Bernoulli Numbers ($B_i = 0$, odd $i \neq 1$): $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30},$ $B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$	Continuous distributions: If $\Pr[a < X < b] = \int_a^b p(x) dx,$ then p is the probability density function of X . If $\Pr[X < a] = P(a),$
2	4	3		then P is the distribution function of X . If P and p both exist then $P(a) = \int_{-\infty}^a p(x) dx.$
3	8	5	Change of base, quadratic formula: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$	Expectation: If X is discrete $E[g(X)] = \sum_x g(x) \Pr[X = x].$
4	16	7	Euler's number e :	If X continuous then $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP(x).$
5	32	11	$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$	Variance, standard deviation: $\text{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2,$ $\sigma = \sqrt{\text{VAR}[X]}.$
6	64	13	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$	For events A and B : $\Pr[A \vee B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \wedge B]$
7	128	17	$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$	$\Pr[A \wedge B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B],$ iff A and B are independent.
8	256	19	$(1 + \frac{1}{n})^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - O\left(\frac{1}{n^3}\right).$	$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \wedge B]}{\Pr[B]}$
9	512	23	Harmonic numbers: $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \dots$	For random variables X and Y : $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y],$ if X and Y are independent.
10	1,024	29		$E[X + Y] = E[X] + E[Y],$ $E[cX] = cE[X].$
11	2,048	31		Bayes' theorem:
12	4,096	37		$\Pr[A_i B] = \frac{\Pr[B A_i] \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[A_j] \Pr[B A_j]}.$
13	8,192	41		Inclusion-exclusion:
14	16,384	43		$\Pr\left[\bigvee_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[X_i] + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \Pr\left[\bigwedge_{j=1}^k X_{i_j}\right].$
15	32,768	47		Moment inequalities:
16	65,536	53	$\ln n < H_n < \ln n + 1,$	$\Pr[X \geq \lambda E[X]] \leq \frac{1}{\lambda},$
17	131,072	59	$H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$	$\Pr[X - E[X] \geq \lambda \cdot \sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$
18	262,144	61	Factorial, Stirling's approximation: $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, \dots$	Geometric distribution: $\Pr[X = k] = pq^{k-1}, \quad q = 1 - p,$
19	524,288	67		$E[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$
20	1,048,576	71		
21	2,097,152	73		
22	4,194,304	79		
23	8,388,608	83		
24	16,777,216	89	Ackermann's function and inverse: $a(i, j) = \begin{cases} 2^j & i = 1 \\ a(i-1, 2) & j = 1 \\ a(i-1, a(i, j-1)) & i, j \geq 2 \end{cases}$	
25	33,554,432	97		
26	67,108,864	101		
27	134,217,728	103	$\alpha(i) = \min\{j \mid a(j, j) \geq i\}.$	
28	268,435,456	107	Binomial distribution: $\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p,$	
29	536,870,912	109	$E[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$	
30	1,073,741,824	113	Poisson distribution: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad E[X] = \lambda.$	
31	2,147,483,648	127	Normal (Gaussian) distribution: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad E[X] = \mu.$	
32	4,294,967,296	131	The "coupon collector": We are given a random coupon each day, and there are n different types of coupons. The distribution of coupons is uniform. The expected number of days to pass before we collect all n types is $nH_n.$	
Pascal's Triangle				
	1			
	1 1			
	1 2 1			
	1 3 3 1			
	1 4 6 4 1			
	1 5 10 10 5 1			
	1 6 15 20 15 6 1			
	1 7 21 35 35 21 7 1			
	1 8 28 56 70 56 28 8 1			
	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1			
	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1			

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Trigonometry



Pythagorean theorem:

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

Definitions:

$$\sin a = A/C, \quad \cos a = B/C,$$

$$\csc a = C/A, \quad \sec a = C/B,$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{A}{B}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{B}{A}.$$

Area, radius of inscribed circle:

$$\frac{1}{2}AB, \quad \frac{AB}{A+B+C}.$$

Identities:

$$\sin x = \frac{1}{\csc x},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x},$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x,$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$\sin x = \sin(\pi - x),$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x),$$

$$\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$\cot x = -\cot(\pi - x),$$

$$\csc x = \cot \frac{x}{2} - \cot x,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x},$$

$$\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y,$$

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

Euler's equation:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{i\pi} = -1.$$

v2.02 ©1994 by Steve Seiden

sseiden@acm.org

<http://www.csc.lsu.edu/~seiden>

Matrices

Multiplication:

$$C = A \cdot B, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Determinants: $\det A \neq 0$ iff A is non-singular.

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B,$$

$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n \text{sign}(\pi) a_{i,\pi(i)}.$$

2×2 and 3×3 determinant:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd.$$

Permanents:

$$\text{perm } A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}.$$

Hyperbolic Functions

Definitions:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

Identities:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1,$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1, \quad \sinh(-x) = -\sinh x,$$

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x},$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2 \sinh^2 \frac{x}{2} = \cosh x - 1, \quad 2 \cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1.$$

$$\theta \quad \sin \theta \quad \cos \theta \quad \tan \theta$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{\pi}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1$$

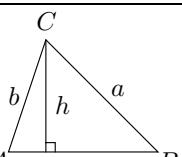
$$\frac{\pi}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad 1 \quad 0 \quad \infty$$

... in mathematics you don't understand things, you just get used to them.

– J. von Neumann

More Trig.



Law of cosines:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Area:

$$A = \frac{1}{2}hc,$$

$$= \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$$

Heron's formula:

$$A = \sqrt{s \cdot s_a \cdot s_b \cdot s_c},$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$s_a = s - a,$$

$$s_b = s - b,$$

$$s_c = s - c.$$

More identities:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$= \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

$$\cot \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}},$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$

$$= \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\tan x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

$$= -i \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1},$$

$$\sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cosh ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\tanh ix = \frac{\sinh ix}{\cosh ix}.$$

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Theoretical Computer Science Cheat Sheet										
Number Theory	Graph Theory									
<p>The Chinese remainder theorem: There exists a number C such that:</p> $C \equiv r_1 \pmod{m_1}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $C \equiv r_n \pmod{m_n}$ <p>if m_i and m_j are relatively prime for $i \neq j$.</p> <p>Euler's function: $\phi(x)$ is the number of positive integers less than x relatively prime to x. If $\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ is the prime factorization of x then</p> $\phi(x) = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i-1} (p_i - 1).$ <p>Euler's theorem: If a and b are relatively prime then</p> $1 \equiv a^{\phi(b)} \pmod{b}.$ <p>Fermat's theorem:</p> $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$ <p>The Euclidean algorithm: if $a > b$ are integers then</p> $\gcd(a, b) = \gcd(a \bmod b, b).$ <p>If $\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ is the prime factorization of x then</p> $S(x) = \sum_{d x} d = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}.$ <p>Perfect Numbers: x is an even perfect number iff $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$ and $2^n - 1$ is prime.</p> <p>Wilson's theorem: n is a prime iff</p> $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$ <p>Möbius inversion:</p> $\mu(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1. \\ 0 & \text{if } i \text{ is not square-free.} \\ (-1)^r & \text{if } i \text{ is the product of } r \text{ distinct primes.} \end{cases}$ <p>If</p> $G(a) = \sum_{d a} F(d),$ <p>then</p> $F(a) = \sum_{d a} \mu(d) G\left(\frac{a}{d}\right).$ <p>Prime numbers:</p> $p_n = n \ln n + n \ln \ln n - n + n \frac{\ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$ $\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!n}{(\ln n)^3} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^4}\right).$	<p>Definitions:</p> <ul style="list-style-type: none"> <i>Loop</i>: An edge connecting a vertex to itself. <i>Directed</i>: Each edge has a direction. <i>Simple</i>: Graph with no loops or multi-edges. <i>Walk</i>: A sequence $v_0 e_1 v_1 \dots e_\ell v_\ell$. <i>Trail</i>: A walk with distinct edges. <i>Path</i>: A trail with distinct vertices. <i>Connected</i>: A graph where there exists a path between any two vertices. <i>Component</i>: A maximal connected subgraph. <i>Tree</i>: A connected acyclic graph. <i>Free tree</i>: A tree with no root. <i>DAG</i>: Directed acyclic graph. <i>Eulerian</i>: Graph with a trail visiting each edge exactly once. <i>Hamiltonian</i>: Graph with a cycle visiting each vertex exactly once. <i>Cut</i>: A set of edges whose removal increases the number of components. <i>Cut-set</i>: A minimal cut. <i>Cut edge</i>: A size 1 cut. <i>k-Connected</i>: A graph connected with the removal of any $k-1$ vertices. <i>k-Tough</i>: $\forall S \subseteq V, S \neq \emptyset$ we have $k \cdot c(G-S) \leq S$. <i>k-Regular</i>: A graph where all vertices have degree k. <i>k-Factor</i>: A k-regular spanning subgraph. <i>Matching</i>: A set of edges, no two of which are adjacent. <i>Clique</i>: A set of vertices, all of which are adjacent. <i>Ind. set</i>: A set of vertices, none of which are adjacent. <i>Vertex cover</i>: A set of vertices which cover all edges. <i>Planar graph</i>: A graph which can be embedded in the plane. <i>Plane graph</i>: An embedding of a planar graph. <p style="text-align: right;">$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$</p> <p>If G is planar then $n - m + f = 2$, so $f \leq 2n - 4$, $m \leq 3n - 6$.</p> <p>Any planar graph has a vertex with degree ≤ 5.</p>	<p>Notation:</p> <ul style="list-style-type: none"> $E(G)$: Edge set $V(G)$: Vertex set $c(G)$: Number of components $G[S]$: Induced subgraph $\deg(v)$: Degree of v $\Delta(G)$: Maximum degree $\delta(G)$: Minimum degree $\chi(G)$: Chromatic number $\chi_E(G)$: Edge chromatic number G^c: Complement graph K_n: Complete graph K_{n_1, n_2}: Complete bipartite graph $r(k, \ell)$: Ramsey number <p>Geometry</p> <p>Projective coordinates: triples (x, y, z), not all x, y and z zero. $(x, y, z) = (cx, cy, cz) \quad \forall c \neq 0$.</p> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%;">Cartesian</td> <td style="width: 50%;">Projective</td> </tr> <tr> <td>(x, y)</td> <td>$(x, y, 1)$</td> </tr> <tr> <td>$y = mx + b$</td> <td>$(m, -1, b)$</td> </tr> <tr> <td>$x = c$</td> <td>$(1, 0, -c)$</td> </tr> </table> <p>Distance formula, L_p and L_∞ metric:</p> $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$ $[x_1 - x_0 ^p + y_1 - y_0 ^p]^{1/p},$ $\lim_{p \rightarrow \infty} [x_1 - x_0 ^p + y_1 - y_0 ^p]^{1/p}.$ <p>Area of triangle (x_0, y_0), (x_1, y_1) and (x_2, y_2):</p> $\frac{1}{2} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$ <p>Angle formed by three points:</p> $\cos \theta = \frac{(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)}{\ell_1 \ell_2}.$ <p>Line through two points (x_0, y_0) and (x_1, y_1):</p> $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ <p>Area of circle, volume of sphere:</p> $A = \pi r^2, \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3.$ <p>If I have seen farther than others, it is because I have stood on the shoulders of giants. – Issac Newton</p>	Cartesian	Projective	(x, y)	$(x, y, 1)$	$y = mx + b$	$(m, -1, b)$	$x = c$	$(1, 0, -c)$
Cartesian	Projective									
(x, y)	$(x, y, 1)$									
$y = mx + b$	$(m, -1, b)$									
$x = c$	$(1, 0, -c)$									

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

π	Calculus
<p>Wallis' identity:</p> $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$ <p>Brouncker's continued fraction expansion:</p> $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\cdots}}}}$ <p>Gregory's series:</p> $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ <p>Newton's series:</p> $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \cdots$ <p>Sharp's series:</p> $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \right)$ <p>Euler's series:</p> $\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{12} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots\end{aligned}$	<p>Derivatives:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx},$ 2. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$ 3. $\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$ 4. $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx},$ 5. $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(\frac{du}{dx}) - u(\frac{dv}{dx})}{v^2},$ 6. $\frac{d(e^{cu})}{dx} = ce^{cu} \frac{du}{dx},$ 7. $\frac{d(c^u)}{dx} = (\ln c)c^u \frac{du}{dx},$ 8. $\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx},$ 10. $\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx},$ 12. $\frac{d(\cot u)}{dx} = \csc^2 u \frac{du}{dx},$ 14. $\frac{d(\csc u)}{dx} = -\cot u \csc u \frac{du}{dx},$ 16. $\frac{d(\arccos u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx},$ 18. $\frac{d(\operatorname{arccot} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx},$ 20. $\frac{d(\operatorname{arccsc} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx},$ 22. $\frac{d(\cosh u)}{dx} = \sinh u \frac{du}{dx},$ 24. $\frac{d(\coth u)}{dx} = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx},$ 26. $\frac{d(\operatorname{csch} u)}{dx} = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx},$ 28. $\frac{d(\operatorname{arccosh} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ 30. $\frac{d(\operatorname{arccoth} u)}{dx} = \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{dx},$ 32. $\frac{d(\operatorname{arccsch} u)}{dx} = \frac{-1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}.$ <p>Integrals:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int cu \, dx = c \int u \, dx,$ 2. $\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx,$ 3. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1,$ 4. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x,$ 5. $\int e^x \, dx = e^x,$ 6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,$ 7. $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx,$ 8. $\int \sin x \, dx = -\cos x,$ 9. $\int \cos x \, dx = \sin x,$ 10. $\int \tan x \, dx = -\ln \cos x ,$ 11. $\int \cot x \, dx = \ln \cos x ,$ 12. $\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x ,$ 13. $\int \csc x \, dx = \ln \csc x + \cot x ,$ 14. $\int \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0,$
<p>The reasonable man adapts himself to the world; the unreasonable persists in trying to adapt the world to himself. Therefore all progress depends on the unreasonable. – George Bernard Shaw</p>	

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Calculus Cont.

15. $\int \arccos \frac{x}{a} dx = \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0,$
16. $\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2), \quad a > 0,$
17. $\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2a} (ax - \sin(ax) \cos(ax)),$
18. $\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2a} (ax + \sin(ax) \cos(ax)),$
19. $\int \sec^2 x dx = \tan x,$
20. $\int \csc^2 x dx = -\cot x,$
21. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
22. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,$
23. $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
24. $\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
25. $\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
26. $\int \csc^n x dx = -\frac{\cot x \csc^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
27. $\int \sinh x dx = \cosh x, \quad 28. \int \cosh x dx = \sinh x,$
29. $\int \tanh x dx = \ln |\cosh x|, \quad 30. \int \coth x dx = \ln |\sinh x|, \quad 31. \int \operatorname{sech} x dx = \arctan \sinh x, \quad 32. \int \operatorname{csch} x dx = \ln |\tanh \frac{x}{2}|,$
33. $\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2}x, \quad 34. \int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) + \frac{1}{2}x, \quad 35. \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x,$
36. $\int \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, \quad a > 0,$
37. $\int \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |a^2 - x^2|,$
38. $\int \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{if } \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} > 0 \text{ and } a > 0, \\ x \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{if } \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} < 0 \text{ and } a > 0, \end{cases}$
39. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right), \quad a > 0,$
40. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
41. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
42. $\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
43. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
44. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, \quad 45. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}},$
46. $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{a^2 \pm x^2} \right|,$
47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|, \quad a > 0,$
48. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a+bx} \right|,$
49. $\int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2},$
50. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx,$
51. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0,$
52. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$
53. $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2},$
54. $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
55. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$
56. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2},$
57. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
58. $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|,$
59. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|}, \quad a > 0,$
60. $\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2},$
61. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}} \right|,$

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Calculus Cont.

- 62.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|}, \quad a > 0,$ **63.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x},$
64. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2},$ **65.** $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4} dx = \mp \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{3a^2 x^3},$
66. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|, & \text{if } b^2 > 4ac, \\ \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, & \text{if } b^2 < 4ac, \end{cases}$
67. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right|, & \text{if } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, & \text{if } a < 0, \end{cases}$
68. $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ax - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$
69. $\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$
70. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right|, & \text{if } c > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}}, & \text{if } c < 0, \end{cases}$
71. $\int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} dx = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}a^2)(x^2 + a^2)^{3/2},$
72. $\int x^n \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x^n \cos(ax) + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos(ax) dx,$
73. $\int x^n \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x^n \sin(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin(ax) dx,$
74. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,$
75. $\int x^n \ln(ax) dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right),$
76. $\int x^n (\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln ax)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln ax)^{m-1} dx.$

$$\begin{array}{llll}
x^1 & x^1 & = & x^{\bar{1}} \\
x^2 & x^2 + x^1 & = & x^{\bar{2}} - x^{\bar{1}} \\
x^3 & x^3 + 3x^2 + x^1 & = & x^{\bar{3}} - 3x^{\bar{2}} + x^{\bar{1}} \\
x^4 & x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x^1 & = & x^{\bar{4}} - 6x^{\bar{3}} + 7x^{\bar{2}} - x^{\bar{1}} \\
x^5 & x^5 + 15x^4 + 25x^3 + 10x^2 + x^1 & = & x^{\bar{5}} - 15x^{\bar{4}} + 25x^{\bar{3}} - 10x^{\bar{2}} + x^{\bar{1}} \\
x^{\bar{1}} & x^1 & x^{\bar{1}} & x^1 \\
x^{\bar{2}} & x^2 + x^1 & x^{\bar{2}} & x^2 - x^1 \\
x^{\bar{3}} & x^3 + 3x^2 + 2x^1 & x^{\bar{3}} & x^3 - 3x^2 + 2x^1 \\
x^{\bar{4}} & x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1 & x^{\bar{4}} & x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x^1 \\
x^{\bar{5}} & x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x^1 & x^{\bar{5}} & x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x^1
\end{array}$$

Finite Calculus

Difference, shift operators:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\mathrm{E} f(x) = f(x+1).$$

Fundamental Theorem:

$$f(x) = \Delta F(x) \Leftrightarrow \sum f(x) \delta x = F(x) + C.$$

$$\sum_a^b f(x) \delta x = \sum_{i=a}^{b-1} f(i).$$

Differences:

$$\Delta(cu) = c\Delta u, \quad \Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v,$$

$$\Delta(uv) = u\Delta v + \mathrm{E} v \Delta u,$$

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1},$$

$$\Delta(H_x) = x^{-1}, \quad \Delta(2^x) = 2^x,$$

$$\Delta(c^x) = (c-1)c^x, \quad \Delta(\binom{x}{m}) = \binom{x}{m-1}.$$

Sums:

$$\sum cu \delta x = c \sum u \delta x,$$

$$\sum(u+v) \delta x = \sum u \delta x + \sum v \delta x,$$

$$\sum u \Delta v \delta x = uv - \sum \mathrm{E} v \Delta u \delta x,$$

$$\sum x^n \delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \sum x^{-1} \delta x = H_x,$$

$$\sum c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1}, \quad \sum \binom{x}{m} \delta x = \binom{x}{m+1}.$$

Falling Factorial Powers:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1), \quad n > 0,$$

$$x^{\underline{0}} = 1,$$

$$x^{\bar{n}} = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+|n|)}, \quad n < 0,$$

$$x^{\underline{n+m}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}.$$

Rising Factorial Powers:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1), \quad n > 0,$$

$$x^{\overline{0}} = 1,$$

$$x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x-1)\cdots(x-|n|)}, \quad n < 0,$$

$$x^{\overline{n+m}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}.$$

Conversion:

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}} = 1/(x+1)^{\overline{-n}},$$

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}} = 1/(x-1)^{\underline{-n}},$$

$$x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}},$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k,$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Series

Taylor's series:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

Expansions:

$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} x^i,$
$\frac{1}{1-cx}$	$= 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i,$
$\frac{1}{1-x^n}$	$= 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} x^{ni},$
$\frac{x}{(1-x)^2}$	$= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} ix^i,$
$x^k \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1-x} \right)$	$= x + 2^nx^2 + 3^nx^3 + 4^nx^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i,$
e^x	$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i},$
$\ln \frac{1}{1-x}$	$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i},$
$\sin x$	$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$
$\cos x$	$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!},$
$\tan^{-1} x$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)},$
$(1+x)^n$	$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$
$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$	$= 1 + (n+1)x + \binom{n+2}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+n}{i} x^i,$
$\frac{x}{e^x - 1}$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!},$
$\frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$	$= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} x^i,$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$	$= 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} x^i,$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^n$	$= 1 + (2+n)x + \binom{4+n}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i+n}{i} x^i,$
$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$	$= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i,$
$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^2$	$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{H_{i-1} x^i}{i},$
$\frac{x}{1-x-x^2}$	$= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i,$
$\frac{F_n x}{1 - (F_{n-1} + F_{n+1})x - (-1)^n x^2}$	$= F_n x + F_{2n} x^2 + F_{3n} x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} F_{ni} x^i.$

Ordinary power series:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Exponential power series:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}.$$

Dirichlet power series:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^x}.$$

Binomial theorem:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Difference of like powers:

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

For ordinary power series:

$$\alpha A(x) + \beta B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i,$$

$$x^k A(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i,$$

$$\frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i,$$

$$A(cx) = \sum_{i=0}^{\infty} c^i a_i x^i,$$

$$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i,$$

$$xA'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i,$$

$$\int A(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{i} x^i,$$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} x^{2i},$$

$$\frac{A(x) - A(-x)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i+1}.$$

Summation: If $b_i = \sum_{j=0}^i a_j$ then

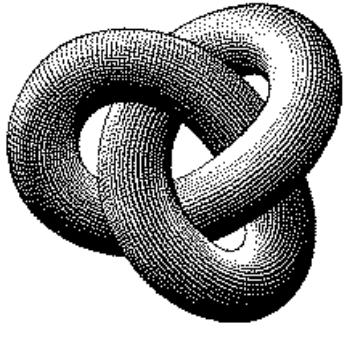
$$B(x) = \frac{1}{1-x} A(x).$$

Convolution:

$$A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i.$$

God made the natural numbers;
all the rest is the work of man.
— Leopold Kronecker

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Series	Escher's Knot																																																																																																				
<p>Expansions:</p> $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (H_{n+i} - H_n) \binom{n+i}{i} x^i,$ $x^{\frac{n}{k}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$ $\left(\ln \frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \frac{n! x^i}{i!},$ $\tan x = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)B_{2i}x^{2i-1}}{(2i)!},$ $\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i^x},$ $\zeta(x) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-x}},$ $\zeta^2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(i)}{i^x} \quad \text{where } d(n) = \sum_{d n} 1,$ $\zeta(x)\zeta(x-1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S(i)}{i^x} \quad \text{where } S(n) = \sum_{d n} d,$ $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n} }{(2n)!} \pi^{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$ $\frac{x}{\sin x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(4^i - 2)B_{2i}x^{2i}}{(2i)!},$ $\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(2i+n-1)!}{i!(n+i)!} x^i,$ $e^x \sin x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i/2} \sin \frac{i\pi}{4}}{i!} x^i,$ $\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4i)!}{16^i \sqrt{2}(2i)!(2i+1)!} x^i,$ $\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4^i i!^2}{(i+1)(2i+1)!} x^{2i}.$																																																																																																					
	Stieltjes Integration																																																																																																				
	<p>If G is continuous in the interval $[a, b]$ and F is nondecreasing then</p> $\int_a^b G(x) dF(x)$ <p>exists. If $a \leq b \leq c$ then</p> $\int_a^c G(x) dF(x) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_b^c G(x) dF(x).$ <p>If the integrals involved exist</p> $\int_a^b (G(x) + H(x)) dF(x) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_a^b H(x) dF(x),$ $\int_a^b G(x) d(F(x) + H(x)) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_a^b G(x) dH(x),$ $\int_a^b c \cdot G(x) dF(x) = \int_a^b G(x) d(c \cdot F(x)) = c \int_a^b G(x) dF(x),$ $\int_a^b G(x) dF(x) = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b F(x) dG(x).$																																																																																																				
<p>Cramer's Rule</p> <p>If we have equations:</p> $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$ $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n$ <p>Let $A = (a_{i,j})$ and B be the column matrix (b_i). Then there is a unique solution iff $\det A \neq 0$. Let A_i be A with column i replaced by B. Then</p> $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$	<p>Fibonacci Numbers</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>00</td><td>47</td><td>18</td><td>76</td><td>29</td><td>93</td><td>85</td><td>34</td><td>61</td><td>52</td></tr> <tr><td>86</td><td>11</td><td>57</td><td>28</td><td>70</td><td>39</td><td>94</td><td>45</td><td>02</td><td>63</td></tr> <tr><td>95</td><td>80</td><td>22</td><td>67</td><td>38</td><td>71</td><td>49</td><td>56</td><td>13</td><td>04</td></tr> <tr><td>59</td><td>96</td><td>81</td><td>33</td><td>07</td><td>48</td><td>72</td><td>60</td><td>24</td><td>15</td></tr> <tr><td>73</td><td>69</td><td>90</td><td>82</td><td>44</td><td>17</td><td>58</td><td>01</td><td>35</td><td>26</td></tr> <tr><td>68</td><td>74</td><td>09</td><td>91</td><td>83</td><td>55</td><td>27</td><td>12</td><td>46</td><td>30</td></tr> <tr><td>37</td><td>08</td><td>75</td><td>19</td><td>92</td><td>84</td><td>66</td><td>23</td><td>50</td><td>41</td></tr> <tr><td>14</td><td>25</td><td>36</td><td>40</td><td>51</td><td>62</td><td>03</td><td>77</td><td>88</td><td>99</td></tr> <tr><td>21</td><td>32</td><td>43</td><td>54</td><td>65</td><td>06</td><td>10</td><td>89</td><td>97</td><td>78</td></tr> <tr><td>42</td><td>53</td><td>64</td><td>05</td><td>16</td><td>20</td><td>31</td><td>98</td><td>79</td><td>87</td></tr> </table> <p>Definitions:</p> $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad F_0 = F_1 = 1,$ $F_{-i} = (-1)^{i-1} F_i,$ $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^i - \hat{\phi}^i),$ <p>Cassini's identity: for $i > 0$:</p> $F_{i+1}F_{i-1} - F_i^2 = (-1)^i.$ <p>Additive rule:</p> $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n,$ $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n.$ <p>Calculation by matrices:</p> $\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$	00	47	18	76	29	93	85	34	61	52	86	11	57	28	70	39	94	45	02	63	95	80	22	67	38	71	49	56	13	04	59	96	81	33	07	48	72	60	24	15	73	69	90	82	44	17	58	01	35	26	68	74	09	91	83	55	27	12	46	30	37	08	75	19	92	84	66	23	50	41	14	25	36	40	51	62	03	77	88	99	21	32	43	54	65	06	10	89	97	78	42	53	64	05	16	20	31	98	79	87
00	47	18	76	29	93	85	34	61	52																																																																																												
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63																																																																																												
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04																																																																																												
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15																																																																																												
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26																																																																																												
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30																																																																																												
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41																																																																																												
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99																																																																																												
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78																																																																																												
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87																																																																																												
<p>Improvement makes strait roads, but the crooked roads without Improvement, are roads of Genius. – William Blake (The Marriage of Heaven and Hell)</p>	<p>The Fibonacci number system: Every integer n has a unique representation</p> $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m},$ <p>where $k_i \geq k_{i+1} + 2$ for all i, $1 \leq i < m$ and $k_m \geq 2$.</p>																																																																																																				

Visual Studio Code

Keyboard shortcuts for Windows

General	Ctrl+M	Toggle Tab moves focus
Search and replace	Ctrl+F	New File
	Ctrl+H	Open File...
	F3 / Shift+F3	Save
	Alt+Shift+F3	Save As...
	Ctrl+D	Close
	Ctrl+K Ctrl+D	Close All
	Alt+C / R / W	Reopen closed editor
Multi-cursor and selection	Ctrl+E	Keep preview mode editor open
	Ctrl+T	Open next
	Ctrl+Shift+Tab	Open previous
	Ctrl+K P	Copy path of active file
	Ctrl+K R	Reveal active file in Explorer
	Ctrl+K O	Show active file in new window/instance
Basic editing	Ctrl+X	Cut line (empty selection)
	Ctrl+C	Copy line (empty selection)
	Alt+↑ / ↓	Move line up/down
	Shift+Alt+↑ / ↓	Copy line up/down
	Ctrl+Shift+K	Delete line
	Ctrl+Enter	Insert line below
	Ctrl+Shift+Enter	Insert line above
	Ctrl+Shift+\	Jump to matching bracket
	Ctrl+] / [Indent/outdent line
	Home / End	Go to beginning/end of line
	Ctrl+Home	Go to beginning of file
	Ctrl+End	Go to end of file
	Ctrl+↑ / ↓	Scroll line up/down
	Alt+PgUp / PgDn	Scroll page up/down
Rich languages editing	Ctrl+Shift+[Fold (collapse) region
	Ctrl+K Ctrl+[Unfold (collapse) region
	Ctrl+K Ctrl+]	Fold (collapse) all subregions
	Ctrl+K Ctrl+0	Unfold (collapse) all subregions
	Ctrl+K Ctrl+J	Fold (collapse) all regions
	Ctrl+K Ctrl+C	Add line comment
	Ctrl+K Ctrl+U	Remove line comment
	Ctrl+/	Toggle line comment
	Shift+Alt+A	Toggle block comment
	Alt+Z	Toggle word wrap
Navigation	Ctrl+T	Show all Symbols
	Ctrl+G	Go to Line...
	Ctrl+P	Go to File...
	Ctrl+Shift+O	Go to Symbol...
	Ctrl+Shift+M	Show Problems panel
	F8	Go to next error or warning
	Shift+F8	Go to previous error or warning
	Ctrl+Shift+Tab	Navigate editor group history
	Alt+← / →	Go back / forward
File management	Ctrl+N	Ctrl+O
	Ctrl+S	Open File...
	Ctrl+Shift+S	Save
	Ctrl+K S	Save All
	Ctrl+E	Close
	Ctrl+K Ctrl+W	Close All
	Ctrl+Shift+T	Reopen closed editor
	Ctrl+K Enter	Keep preview mode editor open
	Ctrl+T	Open next
	Ctrl+Shift+Tab	Open previous
	Ctrl+K P	Copy path of active file
	Ctrl+K R	Reveal active file in Explorer
	Ctrl+K O	Show active file in new window/instance
Display	F11	Toggle full screen
	Shift+Alt+0	Toggle editor layout (horizontal/vertical)
	Ctrl+/-	Zoom in/out
	Ctrl+B	Toggle Sidebar visibility
	Ctrl+Shift+E	Show Explorer / Toggle focus
	Ctrl+Shift+F	Show Search
	Ctrl+Shift+G	Show Source Control
	Ctrl+Shift+D	Show Debug
	Ctrl+Shift+X	Show Extensions
	Ctrl+Shift+H	Replace in files
	Ctrl+Shift+J	Toggle Search details
	Ctrl+Shift+U	Show Output panel
	Ctrl+Shift+V	Open Markdown preview to the side
	Ctrl+K V	Zen Mode (Esc Esc to exit)
	Ctrl+K Z	Open Markdown preview
Debug	F12	Go to Definition
	Alt+F12	Peek Definition
	Ctrl+K F12	Open Definition to the side
	Ctrl+.	Format document
	Ctrl+K Ctrl+F	Format selection
	F9	Toggle breakpoint
	F5	Start/Continue
	Shift+F5	Stop
	F11 / Shift+F11	Step into/out
	F10	Step over
	Ctrl+K Ctrl+I	Show hover
Integrated terminal	Ctrl+`	Show integrated terminal
	Ctrl+Shift+`	Create new terminal
	Ctrl+C	Copy selection
	Ctrl+V	Paste into active terminal
	Ctrl+↑ / ↓	Scroll up/down
	Shift+PgUp / PgDn	Scroll page up/down
	Ctrl+Home / End	Scroll to top/bottom
Other operating systems' keyboard shortcuts and additional unassigned shortcuts available at aka.ms/vscodekeybindings		

Visual Studio Code

Editor management

Multi-cursor and selection

Alt+Click	Insert cursor*
Shift+Alt+↑ / ↓	Insert cursor above/below
Ctrl+U	Undo last cursor operation
Shift+Alt+I	Insert cursor at end of each line selected
Ctrl+L	Select current line
Ctrl+Shift+L	Select all occurrences of current selection
Ctrl+F2	Select all occurrences of current word
Shift+Alt+→	Expand selection
Shift+Alt+←	Shrink selection
Shift+Alt + drag mouse	Column (box) selection
Ctrl+,	Keyboard Shortcuts

Display

F1	Toggle full screen
Shift+Alt+0	Toggle editor layout (horizontal/vertical)
Ctrl+= / -	Zoom in/out
Ctrl+B	Toggle Sidebar visibility
Ctrl+Shift+E	Show Explorer / Toggle focus
Ctrl+Shift+F	Show Search
Ctrl+Shift+G	Show Source Control
Ctrl+Shift+D	Show Debug
Ctrl+Shift+X	Show Extensions
Ctrl+Shift+H	Replace in files
Ctrl+Shift+J	Toggle Search details
Ctrl+Shift+C	Open new command prompt/terminal
Ctrl+K Ctrl+H	Show Output panel
Ctrl+Shift+V	Open Markdown preview
Ctrl+K V	Open Markdown preview to the side
Ctrl+K Z	Zen Mode (Esc Esc to exit)

File management

Ctrl+N	New File
Ctrl+O	Open File...
Ctrl+S	Save
Ctrl+Shift+S	Save As...
Ctrl+W	Close
Ctrl+K Ctrl+W	Close All
Ctrl+Shift+T	Reopen closed editor
Ctrl+K Enter	Keep preview mode editor open
Ctrl+Tab	Open next
Ctrl+Shift+Tab	Open previous
Ctrl+K P	Copy path of active file
Ctrl+K R	Reveal active file in Explorer
Ctrl+K O	Show active file in new window-instance

Debug

F9	Toggle breakpoint
F5	Start / Continue
F11 / Shift+F11	Step into/out
F10	Step over
Shift+F5	Stop
Ctrl+K Ctrl+I	Show hover

Integrated terminal

Ctrl+`	Show integrated terminal
Ctrl+Shift+`	Create new terminal
Ctrl+Shift+C	Copy selection
Ctrl+Shift+V	Paste into active terminal
Shift+ PgUp / PgDn	Scroll up/down
Shift+ Home / End	Scroll page up/down
Shift+ Home / End	Scroll to top/bottom

Navigation

Ctrl+T	Show all Symbols
Ctrl+G	Go to Line...
Ctrl+P	Go to File...
Ctrl+Shift+O	Go to Symbol...
Ctrl+Shift+M	Show Problems panel
F8	Go to next error or warning
Shift+F8	Go to previous error or warning
Ctrl+Shift+Tab	Navigate editor group history
Ctrl+Alt+-	Go back
Ctrl+Shift+-	Go forward
Ctrl+M	Toggle Tab moves focus

* The Alt+Click gesture may not work on some Linux distributions.
 You can change the modifier key for the "editor.multiCursorModifier" setting.
 Ctrl+Click with the "editor.multiCursorModifier" setting.



2019 Halloween

TRICK OR TREAT