



All-in at the River

Standard Code Library

Shanghai Jiao Tong University

Desprado2 fstqwq AntiLeaf

Last Commit: May 30, 2024 (5.30 added bostan-mori & last-commit)

Contents

1 数学	1	
1.1 多项式	1	
1.1.1 FFT	1	
1.1.2 NTT	1	
1.1.3 任意模数卷积 (MTT, 毛梯梯)	1	
1.1.4 多项式操作	2	
1.1.5 多点求值应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘	4	
1.1.6 多项式快速插值	4	
1.1.7 Bostan-Mori (求多项式分式第 n 项)	5	
1.1.8 快速线性递推 $O(k \log k \log n)$	5	
1.1.9 多项式复合逆	6	
1.1.10 分治 FFT	7	
1.1.11 半在线卷积	8	
1.2 插值	8	
1.2.1 牛顿插值	8	
1.2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值	8	
1.3 FWT 快速沃尔什变换	9	
1.3.1 三行 FWT	9	
1.4 线性代数	9	
1.4.1 矩阵乘法	9	
1.4.2 高斯消元	9	
1.4.3 行列式取模	9	
1.4.4 线性基 (消成对角)	10	
1.4.5 线性代数知识	10	
1.4.6 矩阵树定理, BEST 定理	10	
1.5 $O(k^2 \log n)$ 齐次线性递推	10	
1.6 Berlekamp-Massey 最小递推式	11	
1.6.1 优化矩阵快速幂 DP	11	
1.6.2 求矩阵最小多项式	11	
1.6.3 求稀疏矩阵的行列式	11	
1.6.4 求稀疏矩阵的秩	11	
1.6.5 解稀疏方程组	11	
1.7 单纯形	12	
1.7.1 线性规划对偶原理	13	
1.8 博弈论	13	
1.8.1 SG 定理	13	
1.8.2 纳什均衡	13	
1.8.3 经典博弈	13	
1.8.4 例题	14	
1.9 自适应 Simpson 积分	14	
1.10 常见数列	14	
1.10.1 斐波那契数卢卡斯数	14	
1.10.2 伯努利数, 自然数幂次和	14	
1.10.3 分拆数	14	
1.10.4 斯特林数	15	
1.10.5 贝尔数	15	
1.10.6 欧拉数 (Eulerian Number)	16	
1.10.7 卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数	16	
1.11 常用公式及结论	16	
1.11.1 方差	16	
1.11.2 min-max 反演	16	
1.11.3 单位根反演 (展开整除条件 $[n k]$)	16	
1.11.4 康托展开 (排列的排名)	17	
1.11.5 连通图计数	17	
1.11.6 常系数齐次线性递推求通项	17	
1.12 常用生成函数变换	17	
2 数论	18	
2.1 $O(n)$ 预处理逆元	18	
2.2 线性筛	18	
2.3 杜教筛	18	
2.4 Powerful Number 筛	18	
2.5 洲阁筛	19	
2.6 min25 筛	20	
2.7 Miller-Rabin	21	
2.8 Pollard's Rho	22	
2.9 快速阶乘算法	22	
2.10 扩展欧几里德 exgcd	22	
2.10.1 求通解的方法	23	
2.10.2 类欧几里德算法 (直线下整点个数)	23	
2.11 中国剩余定理	23	
2.11.1 ex-CRT	23	
2.12 二次剩余	23	
2.13 原根阶	23	
2.14 常用数论公式	24	
2.14.1 莫比乌斯反演	24	
2.14.2 降幂公式	24	
2.14.3 其他常用公式	24	
3 图论	25	
3.1 最小生成树	25	
3.1.1 Boruvka 算法	25	
3.1.2 动态最小生成树	25	
3.1.3 最小树形图	26	
3.1.4 Steiner Tree 斯坦纳树	27	
3.1.5 最小直径生成树	28	
3.2 最短路	29	
3.2.1 Dijkstra	29	
3.2.2 Johnson 算法 (负权图多源最短路)	29	
3.2.3 k 短路	29	
3.3 Tarjan 算法	30	
3.3.1 强连通分量	30	
3.3.2 割点点双	30	
3.3.3 桥边双	31	
3.4 欧拉回路	31	
3.5 仙人掌	31	
3.5.1 仙人掌 DP	31	
3.6 二分图	32	
3.6.1 匈牙利	32	
3.6.2 Hopcroft-Karp 二分图匹配	32	
3.6.3 KM 二分图最大权匹配	33	
3.6.4 二分图原理	34	
3.7 一般图匹配	34	
3.7.1 高斯消元	34	
3.7.2 带花树	35	
3.7.3 带权带花树	36	
3.7.4 原理	38	
3.8 支配树	38	
3.9 2-SAT	39	
3.10 最大流	39	
3.10.1 Dinic	39	
3.10.2 ISAP	40	
3.10.3 HLPP 最高标号预流推进	41	
3.11 费用流	42	
3.11.1 SPFA 费用流	42	
3.11.2 Dijkstra 费用流	42	
3.11.3 预流推进费用流 (可处理负环) $O(nm \log C)$	43	
3.12 网络流原理	45	
3.12.1 最大流	45	
3.12.2 最小割	45	
3.12.3 上下界网络流	45	
3.12.4 常见建图方法	46	
3.12.5 例题	46	
3.13 Prufer 序列	46	
3.14 弦图相关	46	
3.15 其他	47	
3.15.1 Stoer-Wagner 全局最小割	47	

4 数据结构	48		
4.1 线段树	48	5.6.1 广义回文树	80
4.1.1 非递归线段树	48	5.7 Manacher 马拉车	81
4.1.2 线段树维护矩形并	48	5.8 字符串原理	82
4.1.3 历史和	49		
4.2 陈丹琦分治	50		
4.2.1 动态图连通性 (分治并查集)	50	6 动态规划	83
4.2.2 四维偏序	51	6.1 决策单调性 $O(n \log n)$	83
4.3 整体二分	51	6.2 例题	83
4.4 平衡树	52	6.2.1 103388A Assigning Prizes 容斥	83
4.4.1 Treap	52		
4.4.2 无旋 Treap / 可持久化 Treap	53		
4.4.3 Splay	54		
4.5 树链剖分	54		
4.5.1 动态树形 DP (最大权独立集)	54	7 计算几何	85
4.6 树分治	56	7.1 Delaunay 三角剖分	85
4.6.1 动态树分治	56	7.2 最近点对	87
4.6.2 紫荆花之恋	57		
4.7 LCT动态树	60		
4.7.1 不换根 (弹飞绵羊)	60	8 杂项	88
4.7.2 换根/维护生成树	60	8.1 $O(1)$ 快速乘	88
4.7.3 维护子树信息	62	8.2 Kahan求和算法 (减少浮点数累加的误差)	88
4.7.4 模板题: 动态QTREE4	63	8.3 Python Decimal	88
4.8 K-D树	65	8.4 $O(n^2)$ 高精度	88
4.8.1 动态 K-D 树 (定期重构)	65	8.5 笛卡尔树	91
4.9 LCA 最近公共祖先	66	8.6 GarsiaWachs 算法 ($O(n \log n)$ 合并石子)	91
4.9.1 Tarjan LCA $O(n + m)$	66	8.7 常用 NTT 素数及原根	91
4.10 虚树	66	8.8 xorshift	91
4.11 长链剖分	68	8.9 枚举子集	92
4.11.1 梯子剖分	68	8.10 STL	92
4.12 堆	69	8.10.1 vector	92
4.12.1 左偏树	69	8.10.2 list	92
4.12.2 二叉堆	69	8.10.3 unordered_set/map	92
4.13 莫队	69	8.10.4 自定义 Hash	92
4.13.1 莫队二次离线	69	8.11 Public Based DataStructure (PB_DS)	92
4.13.2 带修莫队在线化 $O(n^{\frac{5}{3}})$	71	8.11.1 哈希表	92
4.13.3 莫队二次离线在线化 $O((n + m)\sqrt{n})$	71	8.11.2 堆	92
4.14 常见根号思路	72	8.11.3 平衡树	93
5 字符串	73	8.12 rope	93
5.1 KMP	73	8.13 其他 C++ 相关	93
5.1.1 ex-KMP	73	8.13.1 <cmath>	93
5.2 AC 自动机	73	8.13.2 <algorithm>	93
5.3 后缀数组	73	8.13.3 std::tuple	93
5.3.1 倍增	73	8.13.4 <complex>	93
5.3.2 SA-IS	74	8.14 一些游戏	93
5.3.3 SAMSA	75	8.14.1 德州扑克	93
5.4 后缀平衡树	76	8.14.2 炉石传说	96
5.5 后缀自动机	76	8.15 OEIS	96
5.5.1 广义后缀自动机	76	8.15.1 计数相关	96
5.5.2 区间本质不同子串计数	76	8.15.2 线性递推数列	97
5.6 回文树	79	8.15.3 数论相关	97
		8.15.4 其他	97
		8.16 编译选项	97
		8.17 附录: VScode 相关	98
		8.17.1 插件	98
		8.17.2 设置选项	98
		8.17.3 快捷键	98
		8.18 附录: 骂人的艺术—梁实秋	99
		8.19 附录: Cheat Sheet	99

1 数学

1.1 多项式

1.1.1 FFT

```

1 using cp = complex<double>;
2 const double PI = acos(-1.0);
3
4 vector<cp> omega[25];
5
6 void fft_init(int n) {
7     for (int k = 2, d = 0; k <= n; k *= 2, d++) {
8         omega[d].resize(k + 1);
9         for (int i = 0; i <= k; i++)
10             omega[d][i] = polar(1.0, 2 * PI * i / k);
11     }
12 }
13
14 void fft(cp* a, int n, int t) {
15     for (int i = 1, j = 0; i < n - 1; i++) {
16         int k = n;
17         do
18             j ^= (k >>= 1);
19         while (j < k);
20
21         if (i < j)
22             swap(a[i], a[j]);
23     }
24
25     for (int k = 1, d = 0; k < n; k *= 2, d++) {
26         for (int i = 0; i < n; i += k * 2)
27             for (int j = 0; j < k; j++) {
28                 cp w = omega[d][t > 0 ? j : k * 2 - j];
29                 cp u = a[i + j], v = w * a[i + j + k];
30                 a[i + j] = u + v;
31                 a[i + j + k] = u - v;
32             }
33
34     if (t < 0)
35         for (int i = 0; i < n; i++)
36             a[i] /= n;
37 }

```

```

22
23     for (int i = 1, j = 0; i < n - 1; i++) {
24         int k = n;
25         do
26             j ^= (k >>= 1);
27         while (j < k);
28
29         if (i < j)
30             swap(a[i], a[j]);
31     }
32
33     for (int k = 1, d = 0; k < n; k *= 2, d++) {
34         if (d == 16)
35             for (int i = 0; i < n; i++)
36                 a[i] %= p;
37
38         for (int i = 0; i < n; i += k * 2)
39             for (int j = 0; j < k; j++) {
40                 int w = omega[d][t > 0 ? j : k * 2 - j];
41                 ull u = a[i + j], v = w * a[i + j + k];
42                 a[i + j] = u + v;
43                 a[i + j + k] = u - v + p;
44             }
45
46         if (t > 0) {
47             for (int i = 0; i < n; i++)
48                 c[i] = a[i] % p;
49         } else {
50             int inv = qpow(n, p - 2);
51             for (int i = 0; i < n; i++)
52                 c[i] = a[i] * inv % p;
53         }
54     }
55 }

```

1.1.3 任意模数卷积 (MTT, 毛梯梯)

三模数 NTT 和直接拆系数 FFT 都太慢了, 不要用.
MTT 的原理就是拆系数 FFT, 只不过优化了做变换的次数.
考虑要对 $A(x), B(x)$ 两个多项式做 DFT, 可以构造两个复多项式

$$P(x) = A(x) + iB(x) \quad Q(x) = A(x) - iB(x)$$

只需要 DFT 一个, 另一个 DFT 实际上就是前者反转再取共轭, 再利用

$$A(x) = \frac{P(x) + Q(x)}{2} \quad B(x) = \frac{P(x) - Q(x)}{2i}$$

即可还原出 $A(x), B(x)$.

IDFT 的道理更简单, 如果要对 $A(x)$ 和 $B(x)$ 做 IDFT, 只需要对 $A(x) + iB(x)$ 做 IDFT 即可, 因为 IDFT 的结果必定为实数, 所以结果的实部和虚部就分别是 $A(x)$ 和 $B(x)$.

实际上任何同时对两个实序列进行 DFT, 或者同时对结果为实序列的 DFT 进行逆变换时都可以按照上面的方法优化, 可以减少一半的 DFT 次数.

```

1 void dft(cp* a, cp* b, int n) {
2     static cp c[MAXN];
3     for (int i = 0; i < n; i++)
4         c[i] = cp(a[i].real(), b[i].real());
5
6     fft(c, n, 1);
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         int j = (n - i) & (n - 1);
9         a[i] = (c[i] + conj(c[j])) * 0.5;

```

1.1.2 NTT

```

1 poly omega[25]; // 单位根
2
3 // n 是 DFT 的最大长度
4 // 例如如果最多有两个长为 k 的多项式相乘, 或者求逆的长度为
5 // → k, 那么 n 需要 >= 2k
6 void ntt_init(int n) {
7     for (int k = 2, d = 0; k <= n; k *= 2, d++) {
8         omega[d].resize(k + 1);
9
10        int wn = qpow(3, (p - 1) / k), tmp = 1;
11        for (int i = 0; i < k; i++) {
12            omega[d][i] = tmp;
13            tmp = (long long)tmp * wn % p;
14        }
15    }
16
17 // 传入的必须是 [0, p) 范围内, 不能有负的, 不然会溢出
18 // 不能保证就把 d == 16 改成 d % 8 == 0 之类
19 void ntt(int *c, int n, int t) {
20     static ull a[MAXN];
21     for (int i = 0; i < n; i++) a[i] = c[i];

```

```

10    b[i] = (c[i] - conj(c[j])) * -0.5i;
11 }
12 }

13 void idft(cp* a, cp* b, int n) {
14     static cp c[MAXN];
15     for (int i = 0; i < n; i++)
16         c[i] = a[i] + 1i * b[i];
17
18     fft(c, n, -1);
19     for (int i = 0; i < n; i++) {
20         a[i] = c[i].real();
21         b[i] = c[i].imag();
22     }
23 }
24 }

25 vector<int> multiply(const vector<int>& u, const
26 → vector<int>& v, int mod) {
27     static cp a[2][MAXN], b[2][MAXN], c[3][MAXN];
28
29     int base = ceil(sqrt(mod));
30     int n = (int)u.size(), m = (int)v.size();
31
32     int fft_n = 1;
33     while (fft_n < n + m - 1)
34         fft_n *= 2;
35
36     for (int i = 0; i < 2; i++) {
37         fill(a[i], a[i] + fft_n, 0);
38         fill(b[i], b[i] + fft_n, 0);
39     }
40     for (int i = 0; i < 3; i++)
41         fill(c[i], c[i] + fft_n, 0);
42
43     for (int i = 0; i < n; i++) {
44         a[0][i] = (u[i] % mod) % base;
45         a[1][i] = (u[i] % mod) / base;
46     }
47
48     for (int i = 0; i < m; i++) {
49         b[0][i] = (v[i] % mod) % base;
50         b[1][i] = (v[i] % mod) / base;
51     }
52
53     dft(a[0], a[1], fft_n);
54     dft(b[0], b[1], fft_n);
55
56     for (int i = 0; i < fft_n; i++) {
57         c[0][i] = a[0][i] * b[0][i];
58         c[1][i] = a[0][i] * b[1][i] + a[1][i] * b[0]
59             → [i];
60         c[2][i] = a[1][i] * b[1][i];
61     }
62
63     fft(c[1], fft_n, -1);
64     idft(c[0], c[2], fft_n);
65
66     int base2 = base * base % mod;
67     vector<int> ans(n + m - 1);
68
69     for (int i = 0; i < n + m - 1; i++)
70         ans[i] = ((ll)(c[0][i].real() + 0.5) +
71             (ll)(c[1][i].real() + 0.5) % mod * base +
72             (ll)(c[2][i].real() + 0.5) % mod * base2) %
73             → mod;
74
75     return ans;
76 }
```

1.1.4 多项式操作

```

1 using poly = vector<int>;
2
3 // u, v 长度要相同, 返回长度是两倍
4 poly poly_calc(const poly& u, const poly& v,
5 → function<int(int, int)> op) {
6     static int a[MAXN], b[MAXN], c[MAXN];
7
8     int n = (int)u.size();
9
10    memcpy(a, u.data(), sizeof(int) * n);
11    fill(a + n, a + n * 2, 0);
12    memcpy(b, v.data(), sizeof(int) * n);
13    fill(b + n, b + n * 2, 0);
14
15    ntt(a, n * 2, 1);
16    ntt(b, n * 2, 1);
17
18    for (int i = 0; i < n * 2; i++)
19        c[i] = op(a[i], b[i]);
20
21    ntt(c, n * 2, -1);
22
23    return poly(c, c + n * 2);
24 }
25
26 // 乘法, 返回长度是两倍
27 poly poly_mul(const poly& u, const poly& v) {
28     return poly_calc(u, v, [](int a, int b) { return
29         → (ll)a * b % p; });
30 }
31
32 // 求逆, 返回长度不变
33 poly poly_inv(const poly& a) {
34     poly c{qpow(a[0], p - 2)}; // 常数项一般都是 1
35
36     for (int k = 2; k <= (int)a.size(); k *= 2) {
37         c.resize(k);
38
39         poly b(a.begin(), a.begin() + k);
40         c = poly_calc(b, c, [](int bi, int ci) {
41             → ((2 - (ll)bi * ci) % p + p) * ci %
42                 → p;
43         });
44         memset(c.data() + k, 0, sizeof(int) * k);
45     }
46
47     c.resize(a.size());
48     return c;
49 }
50
51 // 开根, 返回长度不变
52 poly poly_sqrt(const poly& a) {
53     poly c{1}; // 常数项不是 1 的话要写二次剩余
54
55     for (int k = 2; k <= (int)a.size(); k *= 2) {
56         c.resize(k);
57
58         poly b(a.begin(), a.begin() + k);
59         b = poly_mul(b, poly_inv(c));
60
61         for (int i = 0; i < k; i++)
62             c[i] = ((ll)(c[i] + b[i]) * inv_2 % p); // → inv_2 是 2 的逆元
63     }
64
65     c.resize(a.size());
66     return c;
67 }
```

```

64 }
65
66 // 求导
67 poly poly_derivative(const poly& a) {
68     poly c(a.size());
69     for (int i = 1; i < (int)a.size(); i++)
70         c[i - 1] = (ll)a[i] * i % p;
71     return c;
72 }
73
74 // 不定积分, 最好预处理逆元
75 poly poly_integrate(const poly& a) {
76     poly c(a.size());
77     for (int i = 1; i < (int)a.size(); i++)
78         c[i] = (ll)a[i - 1] * inv[i] % p;
79     return c;
80 }
81
82 // ln, 常数项不能为 0, 返回长度不变
83 poly poly_ln(const poly& a) {
84     auto c = poly_mul(poly_derivative(a), poly_inv(a));
85     c.resize(a.size());
86     return poly_integrate(c);
87 }
88
89 // exp, 常数项必须是 0, 返回长度不变
90 // 常数很大并且总代码很长, 一般可以改用分治 FFT
91 // 依据: 设  $G(x) = \exp F(x)$ , 则  $g_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i-1} g_{i-k} k f_k$ 
92 poly poly_exp(const poly& a) {
93     poly c{1};
94
95     for (int k = 2; k <= (int)a.size(); k *= 2) {
96         c.resize(k);
97
98         auto b = poly_ln(c);
99         for (int i = 0; i < k; i++) {
100             b[i] = a[i] - b[i];
101             if (b[i] < 0)
102                 b[i] += p;
103         }
104         (++b[0]) %= p;
105
106         c = poly_mul(b, c);
107         memset(c.data() + k, 0, sizeof(int) * k);
108     }
109
110     c.resize(a.size());
111     return c;
112 }
113
114 // 自动判断长度的乘法
115 poly poly_auto_mul(poly a, poly b) {
116     int res_len = (int)a.size() + (int)b.size() - 1;
117     int ntt_n = 1;
118     while (ntt_n < (int)a.size() + (int)b.size())
119         ntt_n *= 2;
120
121     a.resize(ntt_n);
122     b.resize(ntt_n);
123
124     ntt(a.data(), ntt_n, 1);
125     ntt(b.data(), ntt_n, 1);
126
127     for (int i = 0; i < ntt_n; i++)
128         a[i] = (ll)a[i] * b[i] % p;
129
130     ntt(a.data(), ntt_n, -1);
131     a.resize(res_len);
132     return a;
133 }

```

```

134 }
135 // 多项式除法, a 和 b 长度可以任意
136 // 商的长度是  $n - m + 1$ , 余数的长度是  $m - 1$ 
137 poly poly_div(const poly& a, const poly& b) {
138     int n = (int)a.size(), m = (int)b.size();
139     if (n < m)
140         return {};
141
142     int ntt_n = 1;
143     while (ntt_n < n - m + 1)
144         ntt_n *= 2;
145
146     poly f(ntt_n), g(ntt_n);
147     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
148         f[i] = a[n - i - 1];
149     for (int i = 0; i < m && i < n - m + 1; i++)
150         g[i] = b[m - i - 1];
151
152     auto g_inv = poly_inv(g);
153     fill(g_inv.begin() + n - m + 1, g_inv.end(), 0);
154     auto c = poly_mul(f, g_inv);
155     c.resize(n - m + 1);
156     reverse(c.begin(), c.end());
157     return c;
158 }
159
160 // 多项式取模, a 和 b 长度可以任意, 返回 (余数, 商)
161 pair<poly, poly> poly_mod(const poly& a, const poly& b)
162     → {
163     int n = (int)a.size(), m = (int)b.size();
164     if (n < m)
165         return {a, {}};
166
167     auto d = poly_div(a, b);
168     auto c = poly_auto_mul(b, d);
169
170     poly r(m - 1);
171     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
172         r[i] = (a[i] - c[i] + p) % p;
173     return {r, d};
174 }
175
176 // 多项式多点求值, f 是多项式, x 是询问
177 struct poly_eval {
178     poly f;
179     vector<int> x;
180     vector<poly> gs;
181     vector<int> ans;
182
183     poly_eval(const poly& f, const vector<int>& x) :
184         → f(f), x(x) {}
185
186     void pretreat(int l, int r, int o) {
187         poly& g = gs[o];
188
189         if (l == r) {
190             g = poly{p - x[l], 1};
191             return;
192         }
193
194         int mid = (l + r) / 2;
195         pretreat(l, mid, o * 2);
196         pretreat(mid + 1, r, o * 2 + 1);
197
198         if (o > 1)
199             g = poly_auto_mul(gs[o * 2], gs[o * 2 +
200             → 1]);
201     }
202 }

```

```

200 void solve(int l, int r, int o, const poly& f) {
201     if (l == r) {
202         ans[l] = f[0];
203         return;
204     }
205
206     int mid = (l + r) / 2;
207     solve(l, mid, o * 2, poly_mod(f, gs[o *
208         → 2]).first);
209     solve(mid + 1, r, o * 2 + 1, poly_mod(f, gs[o *
210         → 2 + 1]).first);
211 }
212
213 vector<int> operator() () {
214     int n = (int)f.size(), m = (int)x.size();
215     if (m <= n)
216         x.resize(m = n + 1);
217     else if (n < m - 1)
218         f.resize(n = m - 1);
219
220     int bit_ceil = 1;
221     while (bit_ceil < m)
222         bit_ceil *= 2;
223     ntt_init(bit_ceil * 2); // 注意这里初始化了
224
225     gs.resize(2 * bit_ceil + 1);
226     pretreat(0, m - 1, 1);
227
228     ans.resize(m);
229     solve(0, m - 1, 1, f);
230     return ans;
231 }

```

1.1.5 多点求值应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘

问题 求 $n! \pmod{p}$, $n < p$, p 是NTT模数.

考虑令 $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, 那么我们可以写出连续 m 个数相乘的多项式:

$$f(x) = \prod_{i=1}^m (x + i)$$

那么显然就有

$$n! = \left(\prod_{k=0}^{m-1} f(km) \right) \prod_{i=m^2+1}^n i$$

$f(x)$ 的系数可以用倍增求 (或者懒一点直接分治FFT), 然后 $f(km)$ 可以用多项式多点求值求出, 所以总复杂度就是 $O(\sqrt{n} \log^2 n)$.

当然如果 p 不变并且多次询问的话我们只需要取一个 m , 也就是预处理 $O(\sqrt{p} \log^2 p)$, 询问 $O(\sqrt{p})$.

1.1.6 多项式快速插值

问题 给出 n 个 x_i 与 y_i , 求一个 $n-1$ 次多项式满足 $F(x_i) = y_i$.

考虑拉格朗日插值:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} y_i$$

第一步要先对每个 i 求出

$$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

设

$$M(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

那么想要的是

$$\frac{M(x)}{x - x_i}$$

取 $x = x_i$ 时, 上下都为0, 使用洛必达法则, 则原式化为 $M'(x)$. 使用分治算出 $M(x)$, 使用多点求值即可算出每个

$$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j) = M'(x_i)$$

设

$$v_i = \frac{y_i}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

第二步要求出

$$\sum_{i=1}^n v_i \prod_{i \neq j} (x - x_j)$$

使用分治. 设

$$L(x) = \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (x - x_i), R(x) = \prod_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n (x - x_i)$$

则原式化为

$$\left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} v_i \prod_{i \neq j, j \leq \lfloor n/2 \rfloor} (x - x_j) \right) R(x) + \left(\sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n v_i \prod_{i \neq j, j > \lfloor n/2 \rfloor} (x - x_j) \right) L(x)$$

递归计算, 复杂度 $O(n \log^2 n)$.

注意由于整体和局部的 $M(x)$ 都要用到, 要预处理一下.

```

1 int qx[maxn], qy[maxn];
2 int th[25][maxn * 2], ansf[maxn]; // th存的是各阶段
3                                     → 的M(x)
4 void pretreat2(int l, int r, int k) { // 预处理
5     static int A[maxn], B[maxn];
6     int *h = th[k] + l * 2;
7
8     if (l == r) {
9         h[0] = p - qx[l];
10        h[1] = 1;
11        return;
12    }
13
14    int mid = (l + r) / 2;
15
16    pretreat2(l, mid, k + 1);
17    pretreat2(mid + 1, r, k + 1);
18
19    int N = 1;
20    while (N <= r - l + 1)
21        N *= 2;
22
23    int *hl = th[k + 1] + l * 2, *hr = th[k + 1] + (mid
24                                     → + 1) * 2;
25
26    memset(A, 0, sizeof(int) * N);
27    memset(B, 0, sizeof(int) * N);
28
29    memcpy(A, hl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
30    memcpy(B, hr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
31
32    NTT(A, N, 1);

```

```

32     NTT(B, N, 1);
33
34     for (int i = 0; i < N; i++)
35         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
36
37     NTT(A, N, -1);
38
39     for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
40         h[i] = A[i];
41 }
42
43 void solve2(int l, int r, int k) { // 分治
44     static int A[maxn], B[maxn], t[maxn];
45
46     if (l == r)
47         return;
48
49     int mid = (l + r) / 2;
50
51     solve2(l, mid, k + 1);
52     solve2(mid + 1, r, k + 1);
53
54     int *hl = th[k + 1] + l * 2, *hr = th[k + 1] + (mid
55         → + 1) * 2;
56
57     int N = 1;
58
59     while (N < r - l + 1)
60         N *= 2;
61
62     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
63     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
64
65     memcpy(A, ansf + l, sizeof(int) * (mid - l + 1));
66     memcpy(B, hr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
67
68     NTT(A, N, 1);
69     NTT(B, N, 1);
70
71     for (int i = 0; i < N; i++)
72         t[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
73
74     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
75     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
76
77     memcpy(A, ansf + mid + 1, sizeof(int) * (r - mid));
78     memcpy(B, hl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
79
80     NTT(A, N, 1);
81     NTT(B, N, 1);
82
83     for (int i = 0; i < N; i++)
84         t[i] = (t[i] + (long long)A[i] * B[i]) % p;
85
86     NTT(t, N, -1);
87
88     memcpy(ansf + l, t, sizeof(int) * (r - l + 1));
89 }
90
91 // 主过程
92 // 如果x, y传nullptr表示询问已经存在了qx, qy里
93 void interpolation(int *x, int *y, int n, int *f =
94     → nullptr) {
95     static int d[maxn];
96
97     if (x)
98         memcpy(qx, x, sizeof(int) * n);
99     if (y)
        memcpy(qy, y, sizeof(int) * n);

```

```

100    pretreat2(0, n - 1, 0);
101
102    get_derivative(th[0], d, n + 1);
103
104    multipoint_eval(d, qx, nullptr, n, n);
105
106    for (int i = 0; i < n; i++)
107        ansf[i] = (long long)qy[i] * qpow(ans[i], p -
108            → 2) % p;
109
110    solve2(0, n - 1, 0);
111
112    if (f)
113        memcpy(f, ansf, sizeof(int) * n);
114
115 }

```

1.1.7 Bostan-Mori (求多项式分式第 n 项)

问题 已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 求 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的第 n 项系数。上下同乘 $g(-x)$, 则底下的 $g(x)g(-x)$ 只有偶数项, 所以上面的奇/偶数项乘完之后奇偶性是不变的。然后就可以直接按照 n 的奇偶性分情况只取出奇数项或者偶数项, 这样就在 n 不变的情况下把 k 折半了, 一直做到 $k = 0$ 然后输出常数项即可。

$$[x^k] \frac{f(x)}{g(x)} = [x^k] \frac{f(x)g(-x)}{g(x)g(-x)} = [x^k] \frac{F(x^2) + xG(x^2)}{H(x^2)}$$

$$= \begin{cases} [x^{\lfloor k/2 \rfloor}] \frac{F(x)}{H(x)} & (k \text{ is even}) \\ [x^{\lfloor k/2 \rfloor}] \frac{G(x)}{H(x)} & (k \text{ is odd}) \end{cases}$$

复杂度 $O(k \log k \log n)$ 。

```

1 int bostan_mori(int k, poly a, poly b) {
2     int n = (int)a.size();
3
4     while (k) {
5         poly c = b;
6         for (int i = 1; i < n; i += 2)
7             c[i] = (p - c[i]) % p;
8
9         a = poly_mul(a, c);
10        b = poly_mul(b, c);
11
12        for (int i = 0; i < n; i++) {
13            a[i] = a[i * 2 + k % 2];
14            b[i] = b[i * 2];
15        }
16
17        a.resize(n);
18        b.resize(n);
19        k /= 2;
20    }
21
22    return (ll)a[0] * qpow(b[0], p - 2) % p;
23 }

```

1.1.8 快速线性递推 $O(k \log k \log n)$

多项式除法 需要的代码参见 1.1.4.多项式操作 (第 2 页)。

```

1 poly poly_power_mod(ll k, const poly& m) { //  $x^k \bmod m$ 
2     poly ans{1}, a{0, 1};
3
4     while (k) {
5         if (k & 1)

```

```

6     |     ans = poly_mod(poly_auto_mul(ans, a),
7     |         ↪ m).first;
8     |     a = poly_mod(poly_auto_mul(a, a), m).first;
9     |     k /= 2;
10    |
11    return ans;
12 }
13
14 //  $a_n = \sum_{i=1}^m c_i a_{n-i}$  ( $c_0 = 0$ )
15 struct linear_recurrence {
16     poly f; // f是预处理结果
17
18     linear_recurrence(const poly& c, ll n) {
19         assert(c[0] == 0); // c[0] 是没有用的
20         int m = (int)c.size() - 1;
21
22         int ntt_n = 1;
23         while (ntt_n < m * 2)
24             ntt_n *= 2;
25         ntt_init(ntt_n); // 图省事就直接 ntt_init(1 << ↪ 18)
26
27         poly t(m + 1);
28         t[m] = 1;
29
30         for (int i = 0; i < m; i++)
31             t[i] = (p - c[m - i]) % p;
32         f = poly_power_mod(n, t);
33     }
34
35     int operator()(const vector<int>& a) { // 0~m-1项初
36         → 始值
37         assert(a.size() == f.size()); int ans = 0;
38         for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++)
39             ans = (ans + (ll)f[i] * a[i]) % p;
40         return ans;
41     }
42 }
```

Bostan-Mori 具体参见 1.1.7.Bostan-Mori (第 5 页)。

这个做法只需要抄多项式乘法，并且常数更小。

```

1 //  $a_n = \sum_{i=1}^m f_i a_{n-i}$  ( $f_0 = 0$ )
2 // f.size() = a.size() + 1
3 int linear_recurrence(int n, poly f, poly a) {
4     int m = (int)a.size();
5
6     int ntt_n = 1;
7     while (ntt_n <= m)
8         ntt_n *= 2;
9
10    ntt_init(ntt_n * 2);
11
12    f.resize(ntt_n);
13    a.resize(ntt_n);
14
15    for (int i = 1; i <= m; i++)
16        f[i] = (p - f[i]) % p;
17    f[0] = 1;
18
19    a = poly_mul(a, f);
20    a.resize(ntt_n);
21    fill(a.data() + m, a.data() + ntt_n, 0);
22
23    return bostan_mori(n, a, f);
24 }
```

1.1.9 多项式复合逆

拉格朗日反演 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为复合逆，则有

$$[x^n] f(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left(\frac{x}{g(x)} \right)^n$$

$$[x^n] h(f(x)) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] h'(x) \left(\frac{x}{g(x)} \right)^n$$

这样可以得到复合逆的一项。如果需要 $0 \dots n$ 项的所有系数，就麻烦一些。

推导过程省略，直接上结论：

$$f(x) = x \left(\sum_{k=1}^n x^{n-k} \frac{n}{k} [x^n] g^k(x) \right)^{-1/n}$$

$$= \frac{x}{g_1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{k} \left(\frac{x}{g_1} \right)^{n-k} [z^n] \left(\frac{g(z)}{g_1} \right)^k \right)^{-1/n}$$

g_1 是 $g(x)$ 的一次项。把它提出来是为了把要开根的式子常数项化成 1，避免考虑 $n \bmod \varphi(p)$ 的逆元。

现在唯一的难点就在于求 $[x^n] \left(\frac{g(x)}{g_1} \right)^k$ 。

考虑更一般的问题，即 对所有 $k \in [1, n]$ ，如何分别求出 $[x^n] A^k(x)$ 。引入另一个自变量 y ，代表 $A(x)$ 的次数这一维，得到一个二元生成函数：

$$\sum_i x^i \sum_j y^j [x^i] A^j(x) = \sum_j y^j A^j(x) = \frac{1}{1 - yA(x)}$$

x^n 项的系数即为所求。

针对这个子问题，再考虑更一般的问题，即求 $[x^n] \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 。

按照 Bostan-Mori (1.1.7, 第 5 页) 一样的思路，上下同乘 $Q(-x, y)$ ，又会发现分母 $Q(x, y)Q(-x, y)$ 里 x 只有偶数项，只取出奇数项或者偶数项就可以把 n 折半，然后递归下去即可。边界是 $\frac{P(0,y)}{Q(0,y)}$ 。

在这里初始时 x 最高项是 n 次，而 y 只有一次。每步 x 的最大次数都会减半，而 y 的最大次数会翻倍，所以总的项数一直是 $O(n)$ 的。总的复杂度是 $O(n \log^2 n)$ 。

解决子问题之后还要写一个多项式开 n 次根，总代码量还是很大的。

```

1 poly poly_pow(const poly& a, int k) {
2     poly c = poly_ln(a);
3     for (int i = 0; i < (int)c.size(); i++)
4         c[i] = (ll)c[i] * k % p;
5     return poly_exp(c);
6 }
7
8 void dft(vector<poly>& a) {
9     int n = (int)a.size(), m = (int)a[0].size();
10
11    int ntt_n = 1, ntt_m = 1;
12    while (ntt_n < n * 2)
13        ntt_n *= 2;
14    while (ntt_m < m * 2)
15        ntt_m *= 2;
16
17    a.resize(ntt_n);
18    for (int i = 0; i < ntt_n; i++) {
19        a[i].resize(ntt_m);
20
21        if (i < n)
22            ntt(a[i].data(), ntt_m, 1);
23    }
24
25    for (int j = 0; j < ntt_m; j++) {
26        poly t(ntt_n);
```

```

28     for (int i = 0; i < ntt_n; i++) {
29         t[i] = a[i][j];
30
31     ntt(t.data(), ntt_n, 1);
32
33     for (int i = 0; i < ntt_n; i++)
34         a[i][j] = t[i];
35 }
36
37 void idft(vector<poly>& a, int n) {
38     int ntt_n = (int)a.size(), ntt_m =
39     → (int)a[0].size();
40
41     for (int j = 0; j < ntt_m; j++) {
42         poly t(ntt_n);
43
44         for (int i = 0; i < ntt_n; i++)
45             t[i] = a[i][j];
46
47         ntt(t.data(), ntt_n, -1);
48
49         for (int i = 0; i < n; i++)
50             a[i][j] = t[i];
51     }
52
53     for (int i = 0; i < n; i++)
54         ntt(a[i].data(), ntt_m, -1);
55 }
56
57 // 对所有  $k \in [1, n]$ , 求  $[x^n]f^k(x)$ , 注意这里  $n$  是最高次数
58 poly bostan_mori(const poly& f) {
59     int n = (int)f.size() - 1;
60     vector<poly> a(n + 1), b(n + 1);
61     for (int i = 0; i <= n; i++) {
62         a[i].resize(2);
63         b[i].resize(2);
64     }
65
66     a[0][0] = b[0][0] = 1;
67     for (int i = 0; i <= n; i++)
68         b[i][1] = (p - f[i]) % p;
69
70     int m = 1;
71     while (n) {
72         vector<poly> c(b);
73         for (int i = 1; i <= n; i += 2)
74             for (int j = 0; j <= m; j++)
75                 c[i][j] = (p - c[i][j]) % p;
76
77         dft(a);
78         dft(b);
79         dft(c);
80
81         for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++)
82             for (int j = 0; j < (int)a[0].size(); j++)
83                 → {
84                     a[i][j] = (ll)a[i][j] * c[i][j] % p;
85                     b[i][j] = (ll)b[i][j] * c[i][j] % p;
86                 }
87
88         idft(a, n * 2 + 1);
89         idft(b, n * 2 + 1);
90
91         for (int i = 0; i <= n / 2; i++) {
92             a[i].swap(a[i * 2 + n % 2]);
93             a[i].resize(m * 2 + 1);
94             b[i].swap(b[i * 2]);
95             b[i].resize(m * 2 + 1);
96         }
97     }
98     n /= 2;
99     m *= 2;
100    a.resize(n + 1);
101    b.resize(n + 1);
102 }
103
104 int ntt_n = 1;
105 while (ntt_n <= (int)f.size())
106     ntt_n *= 2;
107
108 b[0].resize(ntt_n);
109 poly res = poly_auto_mul(a[0], poly_inv(b[0]));
110 res.resize(f.size() + 1);
111 return res;
112 }
113
114 // 返回长度和 g 相同
115 poly poly_compound_inversion(const poly& g) {
116     assert(!g[0] && g[1]);
117
118     int n = (int)g.size() - 1;
119
120     int g1_inv = qpow(g[1], p - 2);
121     poly t(n + 1);
122     for (int i = 1; i <= n; i++)
123         t[i] = (ll)g[i] * g1_inv % p;
124
125     poly res = bostan_mori(t);
126
127     for (int i = 0, pw = 1; i < n; i++) {
128         t[i] = (ll)n * inv[n - i] % p * res[n - i] % p
129             → * pw % p;
130         pw = (ll)pw * g1_inv % p;
131     }
132
133     int ntt_n = 1;
134     while (ntt_n <= n)
135         ntt_n *= 2;
136     t.resize(ntt_n);
137
138     t = poly_pow(t, p - inv[n]);
139
140     poly f(n + 1);
141     for (int i = 1; i <= n; i++)
142         f[i] = (ll)t[i - 1] * g1_inv % p;
143     return f;
144 }
145
146 int main() { // 这里记得初始化要比平常再多开一倍
147     int ntt_n = 1;
148     while (ntt_n < n)
149         ntt_n *= 2;
150     ntt_init(ntt_n * 4);
151 }

```

1.1.10 分治 FFT

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (l == r)
3         return;
4
5     int mid = (l + r) / 2;
6
7     solve(l, mid);
8
9     int N = 1;

```

```

10 while (N <= r - l + 1)
11     N *= 2;
12
13     for (int i = l; i <= mid; i++)
14         B[i - l] = (long long)A[i] * fac_inv[i] % p;
15     fill(B + mid - l + 1, B + N, 0);
16     for (int i = 0; i < N; i++)
17         C[i] = fac_inv[i];
18
19     NTT(B, N, 1);
20     NTT(C, N, 1);
21
22     for (int i = 0; i < N; i++)
23         B[i] = (long long)B[i] * C[i] % p;
24
25     NTT(B, N, -1);
26
27     for (int i = mid + 1; i <= r; i++)
28         A[i] = (A[i] + B[i - l] * 2 % p * (long
29             ↪ long)fac[i] % p) % p;
30
31     solve(mid + 1, r);

```

1.1.11 半在线卷积

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (r <= m)
3         return;
4
5     if (r - l == 1) {
6         if (l == m)
7             f[l] = a[m];
8         else
9             f[l] = (long long)f[l] * inv[l - m] % p;
10
11         for (int i = l, t = (long long)l * f[l] % p; i
12             ↪ <= n; i += l)
13             g[i] = (g[i] + t) % p;
14
15         return;
16     }
17
18     int mid = (l + r) / 2;
19
20     solve(l, mid);
21
22     if (l == 0) {
23         for (int i = 1; i < mid; i++) {
24             A[i] = f[i];
25             B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
26         }
27         NTT(A, r, 1);
28         NTT(B, r, 1);
29         for (int i = 0; i < r; i++)
30             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
31         NTT(A, r, -1);
32
33         for (int i = mid; i < r; i++)
34             f[i] = (f[i] + A[i]) % p;
35     }
36
37     else {
38         for (int i = 0; i < r - l; i++)
39             A[i] = f[i];
40         for (int i = l; i < mid; i++)
41             B[i - l] = (c[i] + g[i]) % p;
42         NTT(A, r - l, 1);
43         NTT(B, r - l, 1);
44         for (int i = 0; i < r - l; i++)

```

```

43             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
44             NTT(A, r - l, -1);
45
46             for (int i = mid; i < r; i++)
47                 f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
48
49             memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
50             memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
51
52             for (int i = l; i < mid; i++)
53                 A[i - l] = f[i];
54             for (int i = 0; i < r - l; i++)
55                 B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
56             NTT(A, r - l, 1);
57             NTT(B, r - l, 1);
58             for (int i = 0; i < r - l; i++)
59                 A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
60             NTT(A, r - l, -1);
61
62             for (int i = mid; i < r; i++)
63                 f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
64
65             memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
66             memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
67
68             solve(mid, r);
69     }
70 }
```

1.2 插值

1.2.1 牛顿插值

牛顿插值的原理是二项式反演.

二项式反演:

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

可以用 e^x 和 e^{-x} 的麦克劳林展开式证明.

套用二项式反演的结论即可得到牛顿插值:

$$f(n) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} r_i$$

$$r_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f(j)$$

其中 k 表示 $f(n)$ 的最高次项系数.

实现时可以用 k 次差分替代右边的式子:

```

1 for (int i = 0; i <= k; i++)
2     r[i] = f(i);
3 for (int j = 0; j < k; j++)
4     for (int i = k; i > j; i--)
5         r[i] -= r[i - 1];

```

注意到预处理 r_i 的式子满足卷积形式, 必要时可以用FFT优化至 $O(k \log k)$ 预处理.

1.2.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值

$$f(x) = \sum_i f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

```

1 // 注意 FWT 常数比较小, 这点与 FFT/NTT 不同
2 // 以下代码均以模质数情况为例, 其中 n 为变换长度, t 表示
3 // → 正/逆变换
4
5 // 按位或版本
6 void FWT_or(int *A, int n, int t) {
7     for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
8         for (int i = 0; i < n; i += k)
9             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
10                 if (t > 0)
11                     A[i + j + k / 2] = (A[i + j + k /
12                         ↵ 2] + A[i + j]) % p;
13                 else
14                     A[i + j + k / 2] = (A[i + j + k /
15                         ↵ 2] - A[i + j] + p) % p;
16             }
17 }
18
19 // 按位与版本
20 void FWT_and(int *A, int n, int t) {
21     for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
22         for (int i = 0; i < n; i += k)
23             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
24                 if (t > 0)
25                     A[i + j] = (A[i + j] + A[i + j + k /
26                         ↵ 2]) % p;
27                 else
28                     A[i + j] = (A[i + j] - A[i + j + k /
29                         ↵ 2] + p) % p;
30             }
31 }
32
33 // 按位异或版本
34 void FWT_xor(int *A, int n, int t) {
35     for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
36         for (int i = 0; i < n; i += k)
37             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
38                 int a = A[i + j], b = A[i + j + k / 2];
39                 A[i + j] = (a + b) % p;
40                 A[i + j + k / 2] = (a - b + p) % p;
41             }
42
43     if (t < 0) {
44         int inv = qpow(n % p, p - 2); // n 的逆元, 在不
45         → 取模时需要用每层除以 2 代替
46         for (int i = 0; i < n; i++)
47             A[i] = A[i] * inv % p;
48     }
49 }

```

1.3.1 三行 FWT

```

1 void fwt_or(int *a, int n, int tp) {
2     for (int j = 0; (1 << j) < n; j++)
3         for (int i = 0; i < n; i++)
4             if (i >> j & 1) {
5                 if (tp > 0)
6                     a[i] += a[i ^ (1 << j)];
7                 else
8                     a[i] -= a[i ^ (1 << j)];
9             }
10
11 // and自然就是or反过来
12 void fwt_and(int *a, int n, int tp) {
13     for (int j = 0; (1 << j) < n; j++)
14         for (int i = 0; i < n; i++)
15

```

```

16         if (!(i >> j & 1)) {
17             if (tp > 0)
18                 a[i] += a[i | (1 << j)];
19             else
20                 a[i] -= a[i | (1 << j)];
21         }
22     }
23
24 // xor同理

```

1.4 线性代数

稀疏矩阵操作参见1.6.Berlekamp-Massey 最小递推式 (第 11页).

1.4.1 矩阵乘法

```

1 for (int i = 1; i <= n; i++)
2     for (int k = 1; k <= n; k++)
3         for (int j = 1; j <= n; j++)
4             a[i][j] += b[i][k] * c[k][j];
5 // 通过改善内存访问连续性, 显著提升速度

```

1.4.2 高斯消元

高斯-约当消元法 Gauss-Jordan 每次选取当前行绝对值最大的数作为代表元, 在做浮点数消元时可以很好地保证精度.

```

1 void Gauss_Jordan(int A[][maxn], int n) {
2     for (int i = 1; i <= n; i++) {
3         int ii = i;
4         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
5             if (fabs(A[j][i]) > fabs(A[ii][i]))
6                 ii = j;
7
8         if (ii != i) // 这里没有判是否无解, 如果有可能无
9             → 解的话要判一下
10            for (int j = i; j <= n + 1; j++)
11                swap(A[i][j], A[ii][j]);
12
13         for (int j = 1; j <= n; j++)
14             if (j != i) // 消成对角
15                 for (int k = n + 1; k >= i; k--)
16                     A[j][k] -= A[j][i] / A[i][i] * A[i]
17                         → [k];
18     }
19 }

```

解线性方程组 在矩阵的右边加上一列表示系数即可, 如果消成上三角的话最后要倒序回代.

求逆矩阵 维护一个矩阵 B , 初始设为 n 阶单位矩阵, 在消元的同时对 B 进行一样的操作, 当把 A 消成单位矩阵时 B 就是逆矩阵.

行列式 消成对角之后把代表元乘起来. 如果是任意模数, 要注意消元时每交换一次行列要取反一次.

1.4.3 行列式取模

```

1 int p;
2
3 int Gauss(int A[maxn][maxn], int n) {
4     int det = 1;
5
6     for (int i = 1; i <= n; i++) {
7         for (int j = i + 1; j <= n; j++) {
8             while (A[j][i]) {
9                 int t = (p - A[i][i] / A[j][i]) % p;

```

```

10     for (int k = i; k <= n; k++)
11         A[i][k] = (A[i][k] + (long)
12             ↪ long)A[j][k] * t) % p;
13
14     swap(A[i], A[j]);
15     det = (p - det) % p; // 交换一次之后行列
16             → 式取负
17
18     if (!A[i][i])
19         return 0;
20
21     det = (long long)det * A[i][i] % p;
22
23     return det;
24 }
```

有向图 类似地定义 $L_{in}(G)$ 等于入度矩阵减去邻接矩阵 (i 指向 j 有边, 则 $A_{i,j} = 1$), $L_{out}(G)$ 等于出度矩阵减去邻接矩阵. 则以 i 为根的内向树个数即为 L_{out} 的第 i 个主子式 (即关于第 i 列的余子式), 外向树个数即为 L_{in} 的第 i 个主子式. (可以看出, 只有无向图才满足 $L(G)$ 的所有代数余子式都相等.)

BEST定理 (有向图欧拉回路计数) 如果 G 是有向欧拉图, 则 G 的欧拉回路的个数等于以一个任意点为根的内/外向树个数乘以 $\prod_v (\deg(v) - 1)!$.

并且在欧拉图里, 无论以哪个结点为根, 也无论内向树还是外向树, 个数都是一样的.

另外无向图欧拉回路计数是NP问题.

1.5 $O(k^2 \log n)$ 齐次线性递推

first里面是第 1 到 k 项, trans从低到高分别是 a_{n-1} 到 a_{n-k} 的系数.

```

1 void add(unsigned long long x) {
2     for (int i = 63; i >= 0; i--)
3         if (x >> i & 1) {
4             if (b[i])
5                 x ^= b[i];
6             else {
7                 b[i] = x;
8
9                 for (int j = i - 1; j >= 0; j--)
10                    if (b[j] && (b[i] >> j & 1))
11                        b[i] ^= b[j];
12
13                 for (int j = i + 1; j < 64; j++)
14                     if (b[j] >> i & 1)
15                         b[j] ^= b[i];
16
17             break;
18         }
19     }
20 }
```

```

1 struct LinearRecurrence {
2     vector<int> first, trans;
3     vector<vector<int>> bin;
4
5     vector<int> multi(const vector<int> &a, const
6             → vector<int> &b) {
7         int n = (int)a.size() - 1;
8
9         vector<int> c(n * 2 + 1);
10
11        for (int i = 0; i <= n; i++)
12            for (int j = 0; j <= n; j++)
13                c[i + j] = (c[i + j] + (long long)a[i]
14                    → * b[j]) % p;
15
16        for (int i = n * 2; i > n; i--) {
17            for (int j = 0; j < n; j++)
18                c[i - 1 - j] = (c[i - 1 - j] + (long
19                    → long)c[i] * trans[j]) % p;
20
21        c[i] = 0;
22    }
23
24    c.resize(n + 1);
25    return c;
26 }
27
28 LinearRecurrence(vector<int> &first, vector<int>
29             → &trans) : first(first), trans(trans) {
30     int n = (int)first.size();
31
32     vector<int> a(n + 1);
33     a[1] = 1;
34     bin.push_back(a);
35
36     for (int i = 1; i < 64; i++)
37         bin.push_back(multi(bin[i - 1], bin[i -
38             → 1]));
39
40     int calc(long long k) {
41         int n = (int)first.size();
42
43         vector<int> a(n + 1);
44         a[0] = 1;
45
46         for (int i = 0; i < 64; i++)
47             if (k >> i & 1)
48                 a[i] = calc(k >> i & 1);
49
50         return a[n];
51     }
52 }
```

1.4.4 线性基 (消成对角)

```

1 void add(unsigned long long x) {
2     for (int i = 63; i >= 0; i--)
3         if (x >> i & 1) {
4             if (b[i])
5                 x ^= b[i];
6             else {
7                 b[i] = x;
8
9                 for (int j = i - 1; j >= 0; j--)
10                    if (b[j] && (b[i] >> j & 1))
11                        b[i] ^= b[j];
12
13                 for (int j = i + 1; j < 64; j++)
14                     if (b[j] >> i & 1)
15                         b[j] ^= b[i];
16
17             break;
18         }
19     }
20 }
```

1.4.5 线性代数知识

行列式:

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma_i}$$

逆矩阵:

$$B = A^{-1} \iff AB = 1$$

代数余子式:

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}|$$

也就是 A 去掉一行一列之后的行列式.

伴随矩阵:

$$A^* = C^T$$

即代数余子式矩阵的转置.

同时我们有

$$A^* = |A|A^{-1}$$

特征多项式:

$$P_A(x) = \det(Ix - A)$$

特征根: 特征多项式的所有 n 个根 (可能有重根).

1.4.6 矩阵树定理, BEST 定理

无向图 设图 G 的基尔霍夫矩阵 $L(G)$ 等于度数矩阵减去邻接矩阵, 则 G 的生成树个数等于 $L(G)$ 的任意一个代数余子式的值.

```

44     |     a = multi(a, bin[i]);
45
46     int ans = 0;
47     for (int i = 0; i < n; i++)
48         ans = (ans + (long long)a[i + 1] *
49             → first[i]) % p;
50
51     return ans;
52 }

```

```

45     for (auto &x : v) // 一般是需要最小递推式的, 所以处理
46         ←一下
47         x = (p - x) % p;
48         v.insert(v.begin(), 1);
49
50     return v; // ∀i, ∑_{j=0}^m a_{i-j}v_j = 0
}

```

1.6 Berlekamp-Massey 最小递推式

如果要求出一个次数为 k 的递推式, 则输入的数列需要至少有 $2k$ 项.

返回的内容满足 $\sum_{j=0}^{m-1} a_{i-j}c_j = 0$, 并且 $c_0 = 1$. 称为最小递推式. 如果不加最后的处理的话, 代码返回的结果会变成 $a_i = \sum_{j=0}^{m-1} c_{j-1}a_{i-j}$, 有时候这样会方便接着跑递推, 需要的话就删掉最后的处理.

(实际上Berlekamp-Massey是对每个前缀都求出了递推式, 但一般没啥用.)

```

1 vector<int> berlekamp_massey(const vector<int> &a) {
2     vector<int> v, last; // v is the answer, 0-based
3     int k = -1, delta = 0;
4
5     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
6
7         int tmp = 0;
8         for (int j = 0; j < (int)v.size(); j++)
9             tmp = (tmp + (long long)a[i - j - 1] *
10                → v[j]) % p;
11
12         if (a[i] == tmp)
13             continue;
14
15         if (k < 0) {
16             k = i;
17             delta = (a[i] - tmp + p) % p;
18             v = vector<int>(i + 1);
19
20             continue;
21         }
22
23         vector<int> u = v;
24         int val = (long long)(a[i] - tmp + p) *
25             → qpow(delta, p - 2) % p;
26
27         if (v.size() < last.size() + i - k)
28             v.resize(last.size() + i - k);
29
30         (v[i - k - 1] += val) %= p;
31
32         for (int j = 0; j < (int)last.size(); j++) {
33             v[i - k + j] = (v[i - k + j] - (long
34                 → long)val * last[j]) % p;
35             if (v[i - k + j] < 0)
36                 v[i - k + j] += p;
37
38         if ((int)u.size() - i < (int)last.size() - k) {
39             last = u;
40             k = i;
41             delta = a[i] - tmp;
42             if (delta < 0)
43                 delta += p;
44         }
45     }
46 }

```

如果要求向量序列的递推式, 就把每位乘一个随机权值 (或者说是乘一个随机行向量 v^T) 变成求数列递推式即可.

如果是矩阵序列的话就随机一个行向量 u^T 和列向量 v , 然后把矩阵变成 $u^T A v$ 的数列就行了.

1.6.1 优化矩阵快速幂DP

如果 f_i 是一个向量, 并且转移是一个矩阵, 那显然 $\{f_i\}$ 是一个线性递推序列.

假设 f_i 有 n 维, 先暴力求出 f_{0-2n-1} , 然后跑Berlekamp-Massey, 最后调用前面的快速齐次线性递推 (5页) 即可. (快速齐次线性递推的结果是一个序列, 某个给定初值的结果就是点乘, 所以只需要跑一次.)

如果要求 f_m , 并且矩阵有 k 个非零项的话, 复杂度就是 $O(nk + n \log m \log n)$. (因为暴力求前 $2n - 1$ 个 f_i 需要 $O(nk)$ 时间.)

1.6.2 求矩阵最小多项式

矩阵 A 的最小多项式是次数最小的并且 $f(A) = 0$ 的多项式 f .

实际上最小多项式就是 $\{A^i\}$ 的最小递推式, 所以直接调用Berlekamp-Massey就好了, 并且显然它的次数不超过 n .

瓶颈在于求出 A^i , 实际上我们只要处理 $A^i v$ 就行了, 每次对向量做递推.

假设 A 有 k 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$.

1.6.3 求稀疏矩阵的行列式

如果能求出特征多项式, 则常数项乘上 $(-1)^n$ 就是行列式, 但是最小多项式不一定就是特征多项式.

把 A 乘上一个随机对角阵 B (实际上就是每行分别乘一个随机数), 则 AB 的最小多项式有很大概率就是特征多项式, 最后再除掉 $\det B$ 就行了.

设 A 有 k 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$.

1.6.4 求稀疏矩阵的秩

设 A 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 首先随机一个 $n \times n$ 的对角阵 P 和一个 $m \times m$ 的对角阵 Q , 然后计算 $QAPAT^Q$ 的最小多项式即可.

实际上不用计算这个矩阵, 因为求最小多项式时要用它乘一个向量, 我们依次把这几个矩阵乘到向量里就行了. 答案就是最小多项式除掉所有 x 因子后剩下的次数.

设 A 有 k 个非零项, 复杂度为 $O(kn + n^2)$.

1.6.5 解稀疏方程组

问题 $Ax = b$, 其中 A 是一个 $n \times n$ 的满秩稀疏矩阵, b 和 x 是 $1 \times n$ 的列向量, A, b 已知, 需要解出 x .

做法 显然 $x = A^{-1}b$. 如果我们能求出 $\{A^i b\}(i \geq 0)$ 的最小递推式 $\{r_{0-m-1}\}(m \leq n)$, 那么就有结论

$$A^{-1}b = -\frac{1}{r_{m-1}} \sum_{i=0}^{m-2} A^i b r_{m-2-i}$$

因为 A 是稀疏矩阵, 直接按定义递推出 $b \sim A^{2n-1}b$ 即可. 设 A 中有 k 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$.

```

1 vector<int> solve_sparse_equations(const
2     → vector<tuple<int, int, int> > &A, const vector<int>
3     → &b) {
4     int n = (int)b.size(); // 0-based
5
6     vector<vector<int> > f({b});
7
8     for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
9         vector<int> v(n);
10        auto &u = f.back();
11
12        for (auto [x, y, z] : A) // [x, y, value]
13            v[x] = (v[x] + (long long)u[y] * z) % p;
14
15        f.push_back(v);
16    }
17
18    vector<int> w(n);
19    mt19937 gen;
20    for (auto &x : w)
21        x = uniform_int_distribution<int>(1, p - 1)
22        → (gen);
23
24    vector<int> a(2 * n);
25    for (int i = 0; i < 2 * n; i++)
26        for (int j = 0; j < n; j++)
27            a[i] = (a[i] + (long long)f[i][j] * w[j]) %
28                → p;
29
30    auto c = berlekamp_massey(a);
31    int m = (int)c.size();
32
33    vector<int> ans(n);
34
35    for (int i = 0; i < m - 1; i++)
36        for (int j = 0; j < n; j++)
37            ans[j] = (ans[j] + (long long)c[m - 2 - i]
38                → * f[i][j]) % p;
39
40    int inv = qpow(p - c[m - 1], p - 2);
41
42    for (int i = 0; i < n; i++)
43        ans[i] = (long long)ans[i] * inv % p;
44
45    return ans;
46}

```

```

20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86

```

1.7 单纯形

```

1 const double eps = 1e-10;
2
3 double A[maxn][maxn], x[maxn];
4 int n, m, t, id[maxn * 2];
5
6 // 方便起见, 这里附上主函数
7 int main() {
8     scanf("%d%d%d", &n, &m, &t);
9
10    for (int i = 1; i <= n; i++) {
11        scanf("%lf", &A[0][i]);
12        id[i] = i;
13    }
14
15    for (int i = 1; i <= m; i++) {
16        for (int j = 1; j <= n; j++)
17            scanf("%lf", &A[i][j]);
18
19        scanf("%lf", &A[i][0]);

```

```

66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86

```

```

87     pivot(l, e);
88 }
89
90
91 //转轴操作，本质是在凸包上沿着一条棱移动
92 void pivot(int l, int e) {
93     swap(id[e], id[n + l]);
94     double t = A[l][e];
95     A[l][e] = 1.0;
96
97     for (int i = 0; i <= n; i++)
98         A[l][i] /= t;
99
100    for (int i = 0; i <= m; i++)
101        if (i != l) {
102            t = A[i][e];
103            A[i][e] = 0.0;
104            for (int j = 0; j <= n; j++)
105                A[i][j] -= t * A[l][j];
106        }
107 }

```

1.7.1 线性规划对偶原理

给定一个原始线性规划:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Subject to} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

定义它的对偶线性规划为:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{Subject to} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

用矩阵可以更形象地表示为:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Subject to} & A \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \iff \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{Subject to} & A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

1.8 博弈论

1.8.1 SG定理

对于一个平等游戏, 可以为每个状态定义一个SG函数.

一个状态的SG函数等于所有它能一步到达的状态的SG函数的 mex, 也就是最小的没有出现过的自然数.

那么所有先手必败态的SG函数为 0, 先手必胜态的SG函数非 0.

如果有一个游戏, 它由若干个独立的子游戏组成, 且每次行动时只能选一个子游戏进行操作, 则这个游戏的SG函数就是所有子游戏的SG函数的异或和. (比如最经典的Nim游戏, 每次只能选一堆取若干个石子.)

同时操作多个子游戏的结论参见1.8.3.经典博弈(13页).

1.8.2 纳什均衡

纯策略, 混合策略 纯策略是指你一定会选择某个选项, 混合策略是指你对每个选项都有一个概率分布 p_i , 你会以相应的概率选择这个选项.

考虑这样的游戏: 有几个人 (当然也可以是两个) 各自独立地做决定, 然后同时公布每个人的决定, 而每个人的收益和所有人的选择有关. 那么纳什均衡就是每个人都决定一个混合策略, 使得在其他人都纯策略的情况下, 这个人最坏情况下 (也就是说其他人的纯策略最针对他的时候) 的收益是最大的. 也就是说, 收益函数对这个人的混合策略求一个偏导, 结果是 0 (因为是极大值). 纳什均衡点可能存在多个, 不过在一个双人零和游戏中, 纳什均衡点一定唯一存在.

1.8.3 经典博弈

1. 阶梯博弈

台阶的每层都有一些石子, 每次可以选一层 (但不能是第 0 层), 把任意个石子移到低一层.

结论 奇数层的石子数量进行异或和即可.

实际上只要路径长度唯一就可以, 比如在树上博弈, 然后石子向根节点方向移动, 那么就是奇数深度的石子数量进行异或和.

2. 可以同时操作多个子游戏

如果某个游戏由若干个独立的子游戏组成, 并且每次可以任意选几个 (当然至少一个) 子游戏进行操作, 那么结论是: 所有子游戏都必败时先手才会必败, 否则先手必胜.

3. 每次最多操作 k 个子游戏 (Nim-K)

如果每次最多操作 k 个子游戏, 结论是: 把所有子游戏的SG函数写成二进制表示, 如果每一位上的 1 个数都是 $(k+1)$ 的倍数, 则先手必败, 否则先手必胜.

(实际上上面一条可以看做 $k = \infty$ 的情况, 也就是所有SG值都是 0 时才会先手必败.)

如果要求整个游戏的SG函数, 就按照上面的方法每个二进制位相加后 $\text{mod}(k+1)$, 视为 $(k+1)$ 进制数后求值即可. (未验证)

4. 反Nim游戏 (Anti-Nim)

和Nim游戏差不多, 唯一的不同是取走最后一个石子的输. 分两种情况:

- 所有堆石子个数都是 1: 有偶数堆时先手必胜, 否则先手必败.
- 存在某个堆石子数多于 1: 异或和不为 0 则先手必胜, 否则先手必败.

当然石子个数实际上就是SG函数, 所以判别条件全都改成SG函数也是一样的.

5. 威佐夫博弈

有两堆石子, 每次要么从一堆中取任意个, 要么从两堆中都取相同数量. 也等价于两个人移动一个只能向左上方走的皇后, 不能动的输.

结论 设两堆石子分别有 a 个和 b 个, 且 $a < b$, 则先手必败当且仅当 $a = \lfloor (b-a)\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rfloor$.

6. 删子树博弈

有一棵有根树, 两个人轮流操作, 每次可以选一个点 (除了根节点) 然后把它的子树都删掉, 不能操作的输.

结论

$$SG(u) = \text{XOR}_{v \in son_u} (SG(v) + 1)$$

7. 无向图游戏

在一个无向图上的某个点上摆一个棋子, 两个人轮流把棋子移动到相邻的点, 并且每个点只能走一次, 不能操作的输.

结论 如果某个点一定在最大匹配中, 则先手必胜, 否则先手必败.

1.8.4 例题

1. 黑白棋游戏

一些棋子排成一列，棋子两面分别是黑色和白色。两个人轮流行动，每次可以选择一个白色朝上的棋子，把它和它左边的所有棋子都翻转，不能行动的输。

结论 只需要看最左边的棋子即可，因为每次操作最左边的棋子都一定会被翻转。

二维情况同理，如果每次是把左上角的棋子全部翻转，那么就只需要看左上角的那个棋子。

1.9 自适应 Simpson 积分

Forked from fstqwq's template.

```

1 // Adaptive Simpson's method : double simpson::solve
2     → (double (*f) (double), double l, double r, double
3         → eps) : integrates f over (l, r) with error eps.
4
5 double area (double (*f) (double), double l, double r)
6     → {
7         double m = l + (r - l) / 2;
8         return (f(l) + 4 * f(m) + f(r)) * (r - l) / 6;
9     }
10
11 double solve (double (*f) (double), double l, double r,
12     → double eps, double a) {
13     double m = l + (r - l) / 2;
14     double left = area(f, l, m), right = area(f, m, r);
15     if (fabs(left + right - a) <= 15 * eps)
16         return left + right + (left + right - a) /
17             → 15.0;
18     return solve(f, l, m, eps / 2, left) + solve(f, m,
19             → r, eps / 2, right);
20 }
21
22 double solve (double (*f) (double), double l, double r,
23     → double eps) {
24     return solve(f, l, r, eps, area (f, l, r));
25 }
```

1.10 常见数列

查表参见8.15.OEIS (第 96 页)。

1.10.1 斐波那契数卢卡斯数

斐波那契数 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

卢卡斯数 $L_0 = 2, L_1 = 1$

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, ...

通项公式 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}, L_n = \phi^n + \hat{\phi}^n$

实际上有 $\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ，所以求通项的话写一个类然后快速幂就可以同时得到两者。

快速倍增法 $F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k), F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

```

1 pair<int, int> fib(int n) { // 返回F(n) 和F(n + 1)
2     if (n == 0)
3         return {0, 1};
4     auto p = fib(n >> 1);
5     int c = p.first * (2 * p.second - p.first);
6     int d = p.first * p.first + p.second * p.second;
```

```

7         if (n & 1)
8             return {d, c + d};
9         else
10            return {c, d};
11 }
```

1.10.2 伯努利数, 自然数幂次和

指数生成函数: $B(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i x^i}{i!} = \frac{x}{e^x - 1}$

$$B_n = [n = 0] - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{B_i}{n-k+1}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = 0$$

$$S_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} i^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_{n-i} \frac{m^{i+1}}{i+1}$$

$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, \dots$
(除了 $B_1 = -\frac{1}{2}$ 以外，伯努利数的奇数项都是 0.)

自然数幂次和关于次数的EGF:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^n i^k}{k!} x^k \\ &= \sum_{i=0}^n e^{ix} \\ &= \frac{e^{(n+1)x-1}}{e^x - 1} \end{aligned}$$

1.10.3 分拆数

```

1 int b = sqrt(n);
2 ans[0] = tmp[0] = 1;
3
4 for (int i = 1; i <= b; ++i) {
5     for (int rep = 0; rep < 2; ++rep)
6         for (int j = i; j <= n - i * i; ++j)
7             add(tmp[j], tmp[j - i]);
8
9     for (int j = i * i; j <= n; ++j)
10        add(ans[j], tmp[j - i]);
11 }
12
13 // -----
14
15 long long a[100010];
16 long long p[50005]; // 欧拉五边形数定理
17
18 int main() {
19     p[0] = 1;
20     p[1] = 1;
21     p[2] = 2;
22     int i;
23     for (i = 1; i < 50005; i++) { // 递推式系
24         → 数1,2,5,7,12,15,22,26...i*(3*i-1)/2,i*(3*i+1)/2
25         a[2 * i] = i * (i * 3 - 1) / 2; // 五边形数
26         → 为1,5,12,22...i*(3*i-1)/2
27         a[2 * i + 1] = i * (i * 3 + 1) / 2;
28     }
29     for (i = 3; i < 50005; i++) { //
30         → p[n]=p[n-1]+p[n-2]-p[n-5]-p[n-7]+p[12]+p[15]-...
31         → +p[n-i*[3i-1]/2]+p[n-i*[3i+1]/2]
32         p[i] = 0;
33         int j;
```

```

30     for (j = 2; a[j] <= i; j++) { //有可能为负数, 式
31         ↪ 中加1000007
32         if (j & 2)
33             p[i] = (p[i] + p[i - a[j]] + 1000007) %
34             ↪ 1000007;
35         else
36             p[i] = (p[i] - p[i - a[j]] + 1000007) %
37             ↪ 1000007;
38     }
39     int n;
40     while (~scanf("%d", &n))
41         printf("%lld\n", p[n]);
}

```

1.10.4 斯特林数

1. 第一类斯特林数

$[n]$ 表示 n 个元素划分成 k 个轮换的方案数.

递推式: $[n] = [n-1]_{k-1} + (n-1)[n-1]_k$.

求同一行: 分治FFT $O(n \log^2 n)$, 或者倍增 $O(n \log n)$ (每次都是 $f(x) = g(x)g(x+d)$ 的形式, 可以用 $g(x)$ 反转之后做一个卷积求出后者).

$$\sum_{k=0}^n [n]_k x^k = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$$

求同一列: 用一个轮换的指数生成函数做 k 次幂

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n]_k \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1-x))^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \left(\frac{\ln(1-x)}{x} \right)^k$$

2. 第二类斯特林数

$\{n\}_k$ 表示 n 个元素划分成 k 个子集的方案数.

递推式: $\{n\}_k = \{n-1\}_{k-1} + k\{n-1\}_k$.

求一个: 容斥, 狗都会做

$$\{n\}_k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(k-i)^n}{(k-i)!}$$

求同一行: FFT, 狗都会做

求同一列: 指数生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n\}_k \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^k$$

普通生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n\}_k x^n = x^k \left(\prod_{i=1}^k (1-ix) \right)^{-1}$$

3. 斯特林反演

下降幂与普通幂的转换

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k = \sum_k \binom{x}{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} k!$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

另外, 多项式的点值表示的每项除以阶乘之后卷上 e^{-x} 乘上阶乘之后是牛顿插值表示, 或者不乘阶乘就是下降幂系数表示. 反过来的转换当然卷上 e^x 就行了. 原理是每次差分等价于乘以 $(1-x)$, 展开之后用一次卷积取代多次差分.

5. 斯特林多项式 (斯特林数关于斜线的性质)

定义:

$$\sigma_n(x) = \frac{\begin{Bmatrix} x \\ n \end{Bmatrix}}{x(x-1)\dots(x-n)}$$

$\sigma_n(x)$ 的最高次数是 x^{n-1} . (所以作为唯一的特例, $\sigma_0(x) = \frac{1}{x}$ 不是多项式.)

斯特林多项式实际上非常神奇, 它与两类斯特林数都有关系.

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix} = n^{k+1} \sigma_k(n)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix} = (-1)^{k+1} n^{k+1} \sigma_k(-(n-k))$$

不过它并不好求. 可以 $O(k^2)$ 直接计算前几个点值然后插值, 或者如果要推式子的话可以用后面提到的二阶欧拉数.

1.10.5 贝尔数

$$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5,$$

$$B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

递推式:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k)$$

4. 幂的转换

上升幂与普通幂的转换

$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}$$

$$B(x) = e^{e^x - 1}$$

Touchard同余:

$$B_{n+p} \equiv (B_n + B_{n+1}) \pmod{p}, \text{ } p \text{ is a prime}$$

1.10.6 欧拉数 (Eulerian Number)

1. 欧拉数

$\langle n \rangle_k$: n 个数的排列, 有 k 个上升的方案数.

$$\langle n \rangle_k = (n-k) \langle n-1 \rangle_{k-1} + (k+1) \langle n-1 \rangle_k$$

$$\langle n \rangle_k = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle_k = n!$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \langle n \rangle_k \binom{x+k}{n}$$

$$k! \left\{ n \right\}_k = \sum_{i=0}^{n-1} \langle n \rangle_i \binom{i}{n-k}$$

2. 二阶欧拉数

$\langle\langle n \rangle\rangle_k$: 每个数都出现两次的多重排列, 并且每个数两次出现之间的数都比它要大. 在此前提下有 k 个上升的方案数.

$$\langle\langle n \rangle\rangle_k = (2n-k-1) \langle\langle n-1 \rangle\rangle_{k-1} + (k+1) \langle\langle n-1 \rangle\rangle_k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle\langle n \rangle\rangle_k = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n}$$

3. 二阶欧拉数与斯特林数的关系

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ x-n \end{matrix} \right\}_k = \sum_{k=0}^{n-1} \langle\langle n \rangle\rangle_k \binom{x+n-k-1}{2n}$$

$$\left[\begin{matrix} x \\ x-n \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \langle\langle n \rangle\rangle_k \binom{x+k}{2n}$$

1.10.7 卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数

1. 卡特兰数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

- n 个元素按顺序入栈, 出栈序列方案数
- 长为 $2n$ 的合法括号序列数
- $n+1$ 个叶子的满二叉树个数

递推式:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n = C_{n-1} \frac{4n-2}{n+1}$$

普通生成函数:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

扩展: 如果有 n 个左括号和 m 个右括号, 方案数为

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{m-1}$$

2. 施罗德数

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i S_{n-i-1}$$

$$(n+1)S_n = (6n-3)S_{n-1} - (n-2)S_{n-2}$$

其中 S_n 是 (大) 施罗德数, s_n 是小施罗德数 (也叫超级卡特兰数). 除了 $S_0 = s_0 = 1$ 以外, 都有 $S_i = 2s_i$. 施罗德数的组合意义:

- 从 $(0, 0)$ 走到 (n, n) , 每次可以走右, 上, 或者右上一步, 并且不能超过 $y = x$ 这条线的方案数
- 长为 n 的括号序列, 每个位置也可以为空, 并且括号对数和空位置数加起来等于 n 的方案数
- 凸 n 边形的任意剖分方案数

(有些人会把大 (而不是小) 施罗德数叫做超级卡特兰数.)

3. 默慈金数

$$M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i} = \frac{(2n+3)M_n + 3nM_{n-1}}{n+3}$$

$$M_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} C_i$$

在圆上的 n 个不同的点之间画任意条不相交 (包括端点) 的弦的方案数.

也等价于在网格图上, 每次可以走右上, 右下, 正右方一步, 且不能走到 $y < 0$ 的位置, 在此前提下从 $(0, 0)$ 走到 $(n, 0)$ 的方案数.

扩展: 默慈金数画的弦不可以共享端点. 如果可以共享端点的话是A054726, 后面的表里可以查到.

1.11 常用公式及结论

1.11.1 方差

m 个数的方差:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{m} - \bar{x}^2$$

随机变量的方差: $D^2(x) = E(x^2) - E^2(x)$

1.11.2 min-max 反演

$$\max(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$$

$$\min(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \max(T)$$

推广: 求第 k 大

$$k\text{-}\max(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min(T)$$

显然只有大小至少为 k 的子集才是有用的.

1.11.3 单位根反演 (展开整除条件 $[n|k]$)

$$[n|k] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{ik}$$

$$\sum_{i \geq 0} [x^{ik}] f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(\omega_k^j)$$

1.11.4 康托展开 (排列的排名)

求排列的排名: 先对每个数都求出它后面有几个数比它小 (可以用树状数组预处理), 记为 c_i , 则排列的排名就是

$$\sum_{i=1}^n c_i(n-i)!$$

已知排名构造排列: 从前到后先分别求出 c_i , 有了 c_i 之后再用一个平衡树 (需要维护排名) 倒序处理即可.

1.11.5 连通图计数

设大小为 n 的满足一个限制 P 的简单无向图数量为 g_n , 满足限制 P 且连通的简单无向图数量为 f_n , 如果已知 $g_{1\dots n}$ 求 f_n , 可以得到递推式

$$f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

这个递推式的意义就是用任意图的数量减掉不连通的数量, 而不连通的数量可以通过枚举 1 号点所在连通块大小来计算.

注意, 由于 $f_0 = 0$, 因此递推式的枚举下界取 0 和 1 都是可以的.

推一推式子会发现得到一个多项式求逆, 再仔细看看, 其实就是一个多项式 \ln .

1.11.6 常系数齐次线性递推求通项

- 定理3.1: 设数列 $\{u_n : n \geq 0\}$ 满足 r 阶齐次线性常系数递推

关系 $u_n = \sum_{j=1}^r c_j u_{n-j}$ ($n \geq r$). 则

$$(i). \quad U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n = \frac{h(x)}{1 - \sum_{j=1}^r c_j x^j}, \quad \deg(h(x)) < r.$$

(ii). 若特征多项式

$$c(x) = x^r - \sum_{j=1}^r c_j x^{r-j} = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_s)^{e_s},$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 互异, $e_1 + \dots + e_s = r$ 则 u_n 有表达式

$$u_n = p_1(n)\alpha_1^n + \dots + p_s(n)\alpha_s^n, \quad \deg(p_i) < e_i, i = 1, \dots, s.$$

多项式 p_1, \dots, p_s 的共 $e_1 + \dots + e_s = r$ 个系数可由初始值 u_0, \dots, u_{r-1} 唯一确定。

1.12 常用生成函数变换

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{i \geq 0} ix^i$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{k-1} x^i, \quad k > 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \frac{x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{(n-i)!} \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} k!(n-k)! \frac{(-1)^{i-k}}{(i-k)!} \end{aligned}$$

(用上面的方法可以把分子化成一个 n 次以内的多项式, 并且可以用一次卷积求出来.)

如果把 i^n 换成任意的一个 n 次多项式, 那么我们可以求出它的下降幂表示形式 (或者说是牛顿插值) 的系数 r_i , 发现用 r_k 替换掉上面的 $\binom{n}{k} k!$ 之后其余过程完全相同.

2 数论

2.1 $O(n)$ 预处理逆元

```
// 要求p为质数
1 inv[0] = inv[1] = 1;
2 for (int i = 2; i <= n; i++)
3     inv[i] = (long long)(p - (p / i)) * inv[p % i] % p;
4         → // p为模数
5 // i ^ -1 = -(p / i) * (p % i) ^ -1
```

2.2 线性筛

```

1 // 此代码以计算约数之和函数\sigma_1(对10^9+7取模)为例
2 // 适用于任何f(p^k) 便于计算的积性函数
3 constexpr int p = 1000000007;
4
5 int prime[maxn / 10], sigma_one[maxn], f[maxn],
6     → g[maxn];
7 // f: 除掉最小质因子后剩下的部分
8 // g: 最小质因子的幂次, 在f(p^k) 比较复杂时很有用,
9 // → 但f(p^k) 可以递推时就可以省略了
10 // 这里没有记录最小质因子, 但根据线性筛的性质, 每个合数只
11 // → 会被它最小的质因子筛掉
12 bool notp[maxn]; // 顾名思义
13
14 void get_table(int n) {
15     sigma_one[1] = 1; // 积性函数必有f(1) = 1
16     for (int i = 2; i <= n; i++) {
17         if (!notp[i]) { // 质数情况
18             prime[++prime[0]] = i;
19             sigma_one[i] = i + 1;
20             f[i] = g[i] = 1;
21         }
22
23         for (int j = 1; j <= prime[0] && i * prime[j]
24             → <= n; j++) {
25             notp[i * prime[j]] = true;
26
27             if (i % prime[j]) { // 加入一个新的质因子,
28                 → 这种情况很简单
29                 sigma_one[i * prime[j]] = (long
30                     → long)sigma_one[i] * (prime[j] + 1)
31                     → % p;
32                 f[i * prime[j]] = i;
33                 g[i * prime[j]] = 1;
34             }
35             else { // 再加入一次最小质因子, 需要再进行分
36                 → 类讨论
37                 f[i * prime[j]] = f[i];
38                 g[i * prime[j]] = g[i] + 1;
39                 // 对于f(p^k) 可以直接递推的函数, 这里的
40                 → 判断可以改成
41                 // i / prime[j] % prime[j] != 0, 这样可
42                 → 以省下f[] 的空间,
43                 // 但常数很可能会稍大一些
44
45                 if (f[i] == 1) // 质数的幂次, 这
46                 → 里\sigma_1可以递推
47                 sigma_one[i * prime[j]] =
48                     → (sigma_one[i] + i * prime[j]) %
49                     → p;
50
51                 // 对于更一般的情况, 可以借助g[] 计
52                 → 算f(p^k)
53             }
54             else sigma_one[i * prime[j]] = // 否则直
55                 → 接利用积性, 两半乘起来
56             (long long)sigma_one[i * prime[j] %
57                 → f[i]] * sigma_one[f[i]] % p;
58         }
59     }
60 }

```

```
40 |  
41 |  
42 |  
43 |  
44 |  
    break;
```

2.3 杜教筛

$$S_\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{d=2}^n S_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

$$S_\mu(n) = 1 - \sum_{d=2}^n S_\mu\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

```

1 // 用于求可以用狄利克雷卷积构造出好求和的东西的函数的前缀
2 // → 和 (有点绕)
3 // 有些题只要求  $n \leq 10^9$ , 这时就没必要开 long long 了, 但
4 // → 记得乘法时强转
5 // 常量/全局变量/数组定义
6 const int maxn = 5000005, table_size = 5000000, p =
7 // → 1000000007, inv_2 = (p + 1) / 2;
8 bool notp[maxn];
9 int prime[maxn / 20], phi[maxn], tbl[100005];
10 // tbl用来顶替哈希表, 其实开到  $n^{1/3}$  就够了, 不过保
11 // → 防起见开成  $\sqrt{n}$  比较好
12 long long N;
13
14 // 主函数前面加上这么一句
15 memset(tbl, -1, sizeof(tbl));
16
17 // 线性筛预处理部分略去
18
19 // 杜教筛主过程 总计  $O(n^{2/3})$ 
20 // 递归调用自身
21 // 递推式还需具体情况具体分析, 这里以求欧拉函数前缀和
22 // →  $(\bmod 10^9 + 7)$  为例
23 int S(long long n) {
24     if (n <= table_size)
25         return phi[n];
26     else if (~tbl[N / n])
27         return tbl[N / n];
28     // 原理: n除以所有可能的数的结果一定互不相同
29
30     int ans = 0;
31     for (long long i = 2, last; i <= n; i = last + 1) {
32         last = n / (n / i);
33         ans = (ans + (last - i + 1) % p * S(n / i)) %
34             → p; // 如果n是int范围的话记得强转
35     }
36
37     ans = (n % p * ((n + 1) % p) % p * inv_2 - ans + p)
38     → % p; // 同上
39     return tbl[N / n] = ans;
40 }

```

2.4 Powerful Number 範

注意 Powerful Number 筛只能求 积性函数 的前缀和。
本质上就是构造一个方便求前缀和的函数，然后做类似杜教筛的操作。

定义 Powerful Number 表示每个质因子幂次都大于 1 的数，显然最多有 \sqrt{n} 个。

设我们要求和的函数是 $f(n)$, 构造一个方便求前缀和的 **积性函数** $g(n)$ 使得 $g(p) = f(p)$.

那么就存在一个积性函数 $h = f * g^{-1}$, 也就是 $f = g * h$. 可以证明 $h(p) = 0$, 所以只有 Powerful Number 的 h 值不为0.

$$S_f(i) = \sum_{d=1}^n h(d) S_g\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

只需要枚举每个 Powerful Number 作为 d , 然后用杜教筛计算 g 的前缀和.

求 $h(d)$ 时要先预处理 $h(p^k)$, 显然有

$$h(p^k) = f(p^k) - \sum_{i=1}^k g(p^i) h(p^{k-i})$$

处理完之后 DFS 就行了. (显然只需要筛 \sqrt{n} 以内的质数.)

复杂度取决于杜教筛的复杂度, 特殊题目构造的好也可以做到 $O(\sqrt{n})$.

例题:

- $f(p^k) = p^k(p^k - 1) : g(n) = \text{id}(n)\varphi(n)$.
- $f(p^k) = p \text{ xor } k : n$ 为偶数时 $g(n) = 3\varphi(n)$, 否则 $g(n) = \varphi(n)$.

2.5 洲阁筛

(比较难写, 不建议用. 最好用后面的 min25 筛.)

计算积性函数 $f(n)$ 的前 n 项之和, 我们可以把所有项按照是否有 $> \sqrt{n}$ 的质因子分两类讨论, 最后将两部分的贡献加起来即可.

1. 有 $> \sqrt{n}$ 的质因子

显然 $> \sqrt{n}$ 的质因子幂次最多为 1, 所以这一部分的贡献就是

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} f(i) \sum_{d=\sqrt{n}+1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} [d \in \mathbb{P}] f(d)$$

我们可以 DP 后面的和式. 由于 $f(p)$ 是一个关于 p 的低次多项式, 我们可以对每个次幂分别 DP: 设 $g_{i,j}$ 表示 $[1, j]$ 中和前 i 个质数都互质的数的 k 次方之和. 设 \sqrt{n} 以内的质数总共有 m 个, 显然贡献就转换成了

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i^k g_{m, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor}$$

边界显然就是自然数幂次和, 转移是

$$g_{i,j} = g_{i-1,j} - p_i^k g_{i-1, \lfloor \frac{j}{p_i} \rfloor}$$

也就是减掉和第 i 个质数不互质的贡献.

在滚动数组的基础上再优化一下: 首先如果 $j < p_i$ 那肯定就只有 1 一个数; 如果 $p_i \leq j < p_i^2$, 显然就有 $g_{i,j} = g_{i-1,j} - p_i^k$, 那么对每个 j 记下最大的 i 使得 $p_i^2 \leq j$, 比这个还大的情况就不需要递推了, 用到的时候再加上一个前缀和解决.

2. 所有质因子都 $\leq \sqrt{n}$

类似的道理, 我们继续 DP: $h_{i,j}$ 表示只含有第 i 到 m 个质数作为质因子的所有数的 $f(i)$ 之和. (这里不需要对每个次幂单独 DP 了; 另外倒着 DP 是为了方便卡上限.)

边界显然是 $h_{m+1,j} = 1$, 转移是

$$h_{i,j} = h_{i+1,j} + \sum_c f(p_i^c) h_{i+1, \lfloor \frac{j}{p_i^c} \rfloor}$$

跟上面一样的道理优化, 分成三段: $j < p_i$ 时 $h_{i,j} = 1$, $j < p_i^2$ 时 $h_{i,j} = h_{i+1,j} + f(p_i)$ (同样用前缀和解决), 再小的部分就老实递推.

预处理 \sqrt{n} 以内的部分之后跑两次 DP, 最后把两部分的贡献加起来就行了.

两部分的复杂度都是 $\Theta\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$ 的.

以下代码以洛谷 P5325 ($f(p^k) = p^k(p^k - 1)$) 为例.

```

1 constexpr int maxn = 200005, p = 1000000007;
2
3 long long N, val[maxn]; // 询问的n和存储所有整除结果的表
4 int sqrt;
5
6 inline int getid(long long x) {
7     if (x <= sqrt)
8         return x;
9
10    return val[0] - N / x + 1;
11}
12
13 bool notp[maxn];
14 int prime[maxn], prime_cnt, rem[maxn]; // 线性筛用数组
15
16 int f[maxn], pr[maxn], g[2][maxn], dp[maxn];
17 int l[maxn], r[maxn];
18
19 // 线性筛省略
20
21 inline int get_sum(long long n, int k) {
22     n %= p;
23
24     if (k == 1)
25         return n * (n + 1) % p * ((p + 1) / 2) % p;
26
27     else
28         return n * (n + 1) % p * (2 * n + 1) % p * ((p
29             + 1) / 6) % p;
30}
31
32 void get_dp(long long n, int k, int *dp) {
33     for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
34         dp[j] = get_sum(val[j], k);
35
36     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++) {
37         long long lb = (long long)prime[i] * prime[i];
38         int pw = (k == 1 ? prime[i] : (int)(lb % p));
39
40         pr[i] = (pr[i - 1] + pw) % p;
41
42         for (int j = val[0]; j && val[j] >= lb; j--) {
43             int t = getid(val[j] / prime[i]);
44
45             int tmp = dp[t];
46             if (l[t] < i)
47                 tmp = (tmp - pr[min(i - 1, r[t])] +
48                     pr[l[t]]) % p;
49
50             dp[j] = (dp[j] - (long long)pw * tmp) % p;
51             if (dp[j] < 0)
52                 dp[j] += p;
53         }
54
55         for (int j = 1; j <= val[0]; j++) {
56             dp[j] = (dp[j] - pr[r[j]] + pr[l[j]]) % p;
57
58             dp[j] = (dp[j] + p - 1) % p; // 因为DP数组是
59             // 有1的, 但后面计算不应该有1
60         }
61
62         int calc1(long long n) {
63             get_dp(n, 1, g[0]);
64             get_dp(n, 2, g[1]);
65
66             int ans = 0;
67
68             for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++)
69                 ans += g[0][i] * g[1][i];
70
71             return ans;
72         }
73
74         cout << calc1(N) << endl;
75     }
76 }

```

```

67     for (int i = 1; i <= sqrtN; i++)
68         ans = (ans + (long long)f[i] * (g[1][getid(N /
69             → i)] - g[0][getid(N / i)])) % p;
70
71     if (ans < 0)
72         ans += p;
73
74     return ans;
75 }
76
77 int calc2(long long n) {
78     for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
79         dp[j] = 1;
80
81     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++)
82         pr[i] = (pr[i - 1] + f[prime[i]]) % p;
83
84     for (int i = prime_cnt; i; i--) {
85         long long lb = (long long)prime[i] * prime[i];
86
87         for (int j = val[0]; j && val[j] >= lb; j--)
88             for (long long pc = prime[i]; pc <= val[j];
89                 → pc *= prime[i])
90                 int t = getid(val[j] / pc);
91
92                 int tmp = dp[t];
93                 if (r[t] > i)
94                     tmp = (tmp + pr[r[t]] - pr[max(i,
95                         → l[t])]) % p;
96
97                 dp[j] = (dp[j] + pc % p * ((pc - 1) %
98                     → p) % p * tmp) % p;
99     }
100
101    return (long long)(dp[val[0]] + pr[r[val[0]]] -
102        → pr[l[val[0]]] + p) % p;
103 }
104
105 int main() {
106
107     // ios::sync_with_stdio(false);
108
109     cin >> N;
110
111     sqrtN = (int)sqrt(N);
112
113     get_table(sqrtN);
114
115     for (int i = 1; i <= sqrtN; i++)
116         val[++val[0]] = i;
117
118     for (int i = 1; i <= sqrtN; i++)
119         val[++val[0]] = N / i;
120
121     sort(val + 1, val + val[0] + 1);
122
123     val[0] = unique(val + 1, val + val[0] + 1) - val -
124         → 1;
125
126     int li = 0, ri = 0;
127     for (int j = 1; j <= val[0]; j++) {
128         while (ri < prime_cnt && prime[ri + 1] <=
129             → val[j])
130             ri++;
131
132         while (li <= prime_cnt && (long long)prime[li]
133             → * prime[li] <= val[j])
134             li++;
135     }
136 }
```

```

129     l[j] = li - 1;
130     r[j] = ri;
131 }
132
133 cout << (calc1(N) + calc2(N)) % p << endl;
134
135 return 0;
136 }
```

2.6 min25 篩

假设要求的是

$$\sum_{i=1}^n f(i)$$

设 \sqrt{n} 以内的质数为 $p_1 \dots p_m$, 记

$$g(n) = \sum_{i=1}^n [i \in \mathbb{P}] f(i)$$

也就是只考虑质数项的和.

为了方便求出 g , 构造一个多项式 $F(x) = \sum a_i x^i$, 满足 $F(p) = f(p)$, 这样每个次幂就可以分开算贡献. ($f(p^c)$ 的形式无所谓.)

再令

$$h_k(i, n) = \sum_{x=2}^n [x \in \mathbb{P} \text{ 或 } x \text{ 与前 } i \text{ 个质数互质}] x^k$$

显然 $g(n) = \sum_k a_k h_k(\pi(\sqrt{n}), n)$, 递推求出所有 h_k 即可得到 g . 考虑 h 的转移, 当 $p_i > \sqrt{n}$ 时显然有 $h_k(i, n) = h_k(i - 1, n)$, 否则有

$$h_k(i, n) = h_k(i - 1, n) - p_i^k h_k\left(i - 1, \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor\right) + p_i^k \sum_{j=1}^{i-1} p_j^k$$

边界为 $h_k(0, n) = \sum_{i=2}^n i^k$.

求出 g 之后, 为了得到所有 $f(i)$ 之和还需要一次递推. 设

$$S(i, n) = \sum_{k=2}^n [k \text{ 与前 } (i - 1) \text{ 个质数互质}] f(k)$$

则

$$S(i, n) = g(n) - \sum_{k=1}^{i-1} f(p_k) + \sum_{k=i}^{p_k \leq \sqrt{n}} \sum_{c=1}^{p_k^{c+1} \leq n} S\left(k + 1, \left\lfloor \frac{n}{p_k^c} \right\rfloor\right) f(p_k^c) + f(p_k^{c+1})$$

这里直接递归即可, 注意边界应设为 $p_i > n$ 或 $n < 1$ 时 $S(i, n) = 0$. 最后的答案即为 $ans = S(1, n) + f(1)$.

也可以从大到小枚举 i 递推, 考虑到只有 $p_i \leq \sqrt{n}$ 时才有递推, 可以后缀和优化. 不优化的复杂度是 $O(n^{1-\epsilon})$, 优化之后是 $O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$, 不过一般是不优化更快.

```

1 constexpr int maxn = 200005, p = (int)1e9 + 7;
2
3 bool notp[maxn];
4 int prime[maxn / 5], prime_cnt;
5
6 // 线性筛省略
7
8 long long val[maxn]; // n 的所有整除结果
9 int sqrtN;
```

```

10 void get_val(long long n) {
11     for (int i = 1; i <= sqrtn; i++)
12         val[+val[0]] = i;
13
14     for (int i = sqrtn; i--)
15         val[+val[0]] = n / i;
16
17     assert(is_sorted(val + 1, val + val[0] + 1));
18     val[0] = unique(val + 1, val + val[0] + 1) - val -
19             → 1;
20 }
21
22 int getid(long long x) { // val[val[0]] 就是 n
23     return x <= sqrtn ? x : (val[0] - val[val[0]] / x +
24             → 1);
25 }
26
27 int f(long long n) {
28     n %= p;
29     return n * (n - 1) % p;
30 }
31
32 int g[maxn];
33 int dp[maxn], prime_sum[maxn];
34
35 void get_dp(function<int(long long)> pw,
36             → function<int(long long)> sum) {
37     memset(dp, 0, sizeof(dp));
38     memset(prime_sum, 0, sizeof(prime_sum));
39
40     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++)
41         prime_sum[i] = (prime_sum[i - 1] +
42             → pw(prime[i])) % p;
43
44     for (int i = 1; i <= val[0]; i++)
45         dp[i] = (sum(val[i]) + p - 1) % p;
46
47     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++) {
48         int pi = prime[i];
49
50         for (int j = val[0]; (long long)pi * pi <=
51             → val[j]; j--) {
52             int k = getid(val[j] / pi);
53
54             dp[j] = (dp[j] + (long long)pw(pi) *
55             → (prime_sum[i - 1] - dp[k])) % p;
56             if (dp[j] < 0)
57                 dp[j] += p;
58         }
59     }
60
61     void calc(long long n) {
62         get_val(n);
63
64         get_dp([] (long long x) {
65             x %= p;
66             return x * x % p;
67         }, [] (long long n) {
68             n %= p;
69             return n * (n + 1) % p * (2 * n + 1) % p * ((p
70             → + 1) / 6) % p;
71         }); // x ^ 2
72
73         for (int i = 1; i <= val[0]; i++)
74             g[i] = dp[i];
75
76         get_dp([] (long long x) {
77             return x % p;
78         }, [] (long long n) {
79             n %= p;
80             return n * (n + 1) / 2 % p;
81        }); // x
82
83         for (int i = 1; i <= val[0]; i++)
84             g[i] = (g[i] - dp[i] + p) % p;
85
86         memset(prime_sum, 0, sizeof(prime_sum));
87         for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++)
88             prime_sum[i] = (prime_sum[i - 1] + f(prime[i])) %
89             → p;
90
91         int S(int i, long long n) {
92             if (prime[i] > n || n < 1)
93                 return 0;
94
95             int sq = sqrt(n + 0.5);
96             int tmp = (g[getid(n)] - prime_sum[i - 1] + p) % p;
97
98             for (int k = i; k <= prime_cnt && prime[k] <= sq;
99                 → k++) {
100                 int pk = prime[k];
101                 long long pw = pk;
102
103                 for (int c = 1; pw * pk <= n; c++, pw *= pk)
104                     tmp = (tmp + (long long)S(k + 1, n / pw) *
105                         → f(pw) + f(pw * pk)) % p;
106
107             return tmp;
108         }
109
110         int main() {
111             long long n;
112             cin >> n;
113
114             sqrtn = 1; // sqrtn 是全局的
115             while ((long long)(sqrtn + 1) * (sqrtn + 1) <= n)
116                 sqrtn++;
117
118             get_table(sqrtn);
119
120             calc(n);
121
122             int ans = (S(1, n) + 1) % p;
123
124             cout << ans << endl;
125
126             return 0;
127         }
128     }
129
130     void check(long long n, long long b) { // b: base
131         long long a = n - 1;
132         int k = 0;
133
134         while (a % 2 == 0) {
135             a /= 2;
136             k++;
137         }
138
139         if (a == 1)
140             return true;
141         else
142             return false;
143     }
144
145     int gcd(long long a, long long b) {
146         if (a == 0)
147             return b;
148         else
149             return gcd(b % a, a);
150     }
151
152     long long mod_exp(long long a, long long b, long long m) {
153         long long res = 1;
154         a = a % m;
155
156         while (b > 0) {
157             if (b & 1)
158                 res = (res * a) % m;
159             a = (a * a) % m;
160             b = b / 2;
161         }
162
163         return res;
164     }
165
166     long long mod_inv(long long a, long long m) {
167         return mod_exp(a, m - 2, m);
168     }
169
170     long long mod_sqrt(long long a, long long m) {
171         if (a < 0)
172             a += m;
173
174         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
175         long long t = mod_inv(s, m);
176
177         if (t == -1)
178             return -1;
179         else
180             return (s * t) % m;
181     }
182
183     long long mod_sqrt2(long long a, long long m) {
184         if (a < 0)
185             a += m;
186
187         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
188         long long t = mod_inv(s, m);
189
190         if (t == -1)
191             return -1;
192         else
193             return (s * t) % m;
194     }
195
196     long long mod_sqrt3(long long a, long long m) {
197         if (a < 0)
198             a += m;
199
200         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
201         long long t = mod_inv(s, m);
202
203         if (t == -1)
204             return -1;
205         else
206             return (s * t) % m;
207     }
208
209     long long mod_sqrt4(long long a, long long m) {
210         if (a < 0)
211             a += m;
212
213         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
214         long long t = mod_inv(s, m);
215
216         if (t == -1)
217             return -1;
218         else
219             return (s * t) % m;
220     }
221
222     long long mod_sqrt5(long long a, long long m) {
223         if (a < 0)
224             a += m;
225
226         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
227         long long t = mod_inv(s, m);
228
229         if (t == -1)
230             return -1;
231         else
232             return (s * t) % m;
233     }
234
235     long long mod_sqrt6(long long a, long long m) {
236         if (a < 0)
237             a += m;
238
239         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
240         long long t = mod_inv(s, m);
241
242         if (t == -1)
243             return -1;
244         else
245             return (s * t) % m;
246     }
247
248     long long mod_sqrt7(long long a, long long m) {
249         if (a < 0)
250             a += m;
251
252         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
253         long long t = mod_inv(s, m);
254
255         if (t == -1)
256             return -1;
257         else
258             return (s * t) % m;
259     }
260
261     long long mod_sqrt8(long long a, long long m) {
262         if (a < 0)
263             a += m;
264
265         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
266         long long t = mod_inv(s, m);
267
268         if (t == -1)
269             return -1;
270         else
271             return (s * t) % m;
272     }
273
274     long long mod_sqrt9(long long a, long long m) {
275         if (a < 0)
276             a += m;
277
278         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
279         long long t = mod_inv(s, m);
280
281         if (t == -1)
282             return -1;
283         else
284             return (s * t) % m;
285     }
286
287     long long mod_sqrt10(long long a, long long m) {
288         if (a < 0)
289             a += m;
290
291         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
292         long long t = mod_inv(s, m);
293
294         if (t == -1)
295             return -1;
296         else
297             return (s * t) % m;
298     }
299
300     long long mod_sqrt11(long long a, long long m) {
301         if (a < 0)
302             a += m;
303
304         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
305         long long t = mod_inv(s, m);
306
307         if (t == -1)
308             return -1;
309         else
310             return (s * t) % m;
311     }
312
313     long long mod_sqrt12(long long a, long long m) {
314         if (a < 0)
315             a += m;
316
317         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
318         long long t = mod_inv(s, m);
319
320         if (t == -1)
321             return -1;
322         else
323             return (s * t) % m;
324     }
325
326     long long mod_sqrt13(long long a, long long m) {
327         if (a < 0)
328             a += m;
329
330         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
331         long long t = mod_inv(s, m);
332
333         if (t == -1)
334             return -1;
335         else
336             return (s * t) % m;
337     }
338
339     long long mod_sqrt14(long long a, long long m) {
340         if (a < 0)
341             a += m;
342
343         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
344         long long t = mod_inv(s, m);
345
346         if (t == -1)
347             return -1;
348         else
349             return (s * t) % m;
350     }
351
352     long long mod_sqrt15(long long a, long long m) {
353         if (a < 0)
354             a += m;
355
356         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
357         long long t = mod_inv(s, m);
358
359         if (t == -1)
360             return -1;
361         else
362             return (s * t) % m;
363     }
364
365     long long mod_sqrt16(long long a, long long m) {
366         if (a < 0)
367             a += m;
368
369         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
370         long long t = mod_inv(s, m);
371
372         if (t == -1)
373             return -1;
374         else
375             return (s * t) % m;
376     }
377
378     long long mod_sqrt17(long long a, long long m) {
379         if (a < 0)
380             a += m;
381
382         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
383         long long t = mod_inv(s, m);
384
385         if (t == -1)
386             return -1;
387         else
388             return (s * t) % m;
389     }
390
391     long long mod_sqrt18(long long a, long long m) {
392         if (a < 0)
393             a += m;
394
395         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
396         long long t = mod_inv(s, m);
397
398         if (t == -1)
399             return -1;
400         else
401             return (s * t) % m;
402     }
403
404     long long mod_sqrt19(long long a, long long m) {
405         if (a < 0)
406             a += m;
407
408         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
409         long long t = mod_inv(s, m);
410
411         if (t == -1)
412             return -1;
413         else
414             return (s * t) % m;
415     }
416
417     long long mod_sqrt20(long long a, long long m) {
418         if (a < 0)
419             a += m;
420
421         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
422         long long t = mod_inv(s, m);
423
424         if (t == -1)
425             return -1;
426         else
427             return (s * t) % m;
428     }
429
430     long long mod_sqrt21(long long a, long long m) {
431         if (a < 0)
432             a += m;
433
434         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
435         long long t = mod_inv(s, m);
436
437         if (t == -1)
438             return -1;
439         else
440             return (s * t) % m;
441     }
442
443     long long mod_sqrt22(long long a, long long m) {
444         if (a < 0)
445             a += m;
446
447         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
448         long long t = mod_inv(s, m);
449
450         if (t == -1)
451             return -1;
452         else
453             return (s * t) % m;
454     }
455
456     long long mod_sqrt23(long long a, long long m) {
457         if (a < 0)
458             a += m;
459
460         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
461         long long t = mod_inv(s, m);
462
463         if (t == -1)
464             return -1;
465         else
466             return (s * t) % m;
467     }
468
469     long long mod_sqrt24(long long a, long long m) {
470         if (a < 0)
471             a += m;
472
473         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
474         long long t = mod_inv(s, m);
475
476         if (t == -1)
477             return -1;
478         else
479             return (s * t) % m;
480     }
481
482     long long mod_sqrt25(long long a, long long m) {
483         if (a < 0)
484             a += m;
485
486         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
487         long long t = mod_inv(s, m);
488
489         if (t == -1)
490             return -1;
491         else
492             return (s * t) % m;
493     }
494
495     long long mod_sqrt26(long long a, long long m) {
496         if (a < 0)
497             a += m;
498
499         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
500         long long t = mod_inv(s, m);
501
502         if (t == -1)
503             return -1;
504         else
505             return (s * t) % m;
506     }
507
508     long long mod_sqrt27(long long a, long long m) {
509         if (a < 0)
510             a += m;
511
512         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
513         long long t = mod_inv(s, m);
514
515         if (t == -1)
516             return -1;
517         else
518             return (s * t) % m;
519     }
520
521     long long mod_sqrt28(long long a, long long m) {
522         if (a < 0)
523             a += m;
524
525         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
526         long long t = mod_inv(s, m);
527
528         if (t == -1)
529             return -1;
530         else
531             return (s * t) % m;
532     }
533
534     long long mod_sqrt29(long long a, long long m) {
535         if (a < 0)
536             a += m;
537
538         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
539         long long t = mod_inv(s, m);
540
541         if (t == -1)
542             return -1;
543         else
544             return (s * t) % m;
545     }
546
547     long long mod_sqrt30(long long a, long long m) {
548         if (a < 0)
549             a += m;
550
551         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
552         long long t = mod_inv(s, m);
553
554         if (t == -1)
555             return -1;
556         else
557             return (s * t) % m;
558     }
559
560     long long mod_sqrt31(long long a, long long m) {
561         if (a < 0)
562             a += m;
563
564         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
565         long long t = mod_inv(s, m);
566
567         if (t == -1)
568             return -1;
569         else
570             return (s * t) % m;
571     }
572
573     long long mod_sqrt32(long long a, long long m) {
574         if (a < 0)
575             a += m;
576
577         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
578         long long t = mod_inv(s, m);
579
580         if (t == -1)
581             return -1;
582         else
583             return (s * t) % m;
584     }
585
586     long long mod_sqrt33(long long a, long long m) {
587         if (a < 0)
588             a += m;
589
590         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
591         long long t = mod_inv(s, m);
592
593         if (t == -1)
594             return -1;
595         else
596             return (s * t) % m;
597     }
598
599     long long mod_sqrt34(long long a, long long m) {
600         if (a < 0)
601             a += m;
602
603         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
604         long long t = mod_inv(s, m);
605
606         if (t == -1)
607             return -1;
608         else
609             return (s * t) % m;
610     }
611
612     long long mod_sqrt35(long long a, long long m) {
613         if (a < 0)
614             a += m;
615
616         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
617         long long t = mod_inv(s, m);
618
619         if (t == -1)
620             return -1;
621         else
622             return (s * t) % m;
623     }
624
625     long long mod_sqrt36(long long a, long long m) {
626         if (a < 0)
627             a += m;
628
629         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
630         long long t = mod_inv(s, m);
631
632         if (t == -1)
633             return -1;
634         else
635             return (s * t) % m;
636     }
637
638     long long mod_sqrt37(long long a, long long m) {
639         if (a < 0)
640             a += m;
641
642         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
643         long long t = mod_inv(s, m);
644
645         if (t == -1)
646             return -1;
647         else
648             return (s * t) % m;
649     }
650
651     long long mod_sqrt38(long long a, long long m) {
652         if (a < 0)
653             a += m;
654
655         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
656         long long t = mod_inv(s, m);
657
658         if (t == -1)
659             return -1;
660         else
661             return (s * t) % m;
662     }
663
664     long long mod_sqrt39(long long a, long long m) {
665         if (a < 0)
666             a += m;
667
668         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
669         long long t = mod_inv(s, m);
670
671         if (t == -1)
672             return -1;
673         else
674             return (s * t) % m;
675     }
676
677     long long mod_sqrt40(long long a, long long m) {
678         if (a < 0)
679             a += m;
680
681         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
682         long long t = mod_inv(s, m);
683
684         if (t == -1)
685             return -1;
686         else
687             return (s * t) % m;
688     }
689
690     long long mod_sqrt41(long long a, long long m) {
691         if (a < 0)
692             a += m;
693
694         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
695         long long t = mod_inv(s, m);
696
697         if (t == -1)
698             return -1;
699         else
700             return (s * t) % m;
701     }
702
703     long long mod_sqrt42(long long a, long long m) {
704         if (a < 0)
705             a += m;
706
707         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
708         long long t = mod_inv(s, m);
709
710         if (t == -1)
711             return -1;
712         else
713             return (s * t) % m;
714     }
715
716     long long mod_sqrt43(long long a, long long m) {
717         if (a < 0)
718             a += m;
719
720         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
721         long long t = mod_inv(s, m);
722
723         if (t == -1)
724             return -1;
725         else
726             return (s * t) % m;
727     }
728
729     long long mod_sqrt44(long long a, long long m) {
730         if (a < 0)
731             a += m;
732
733         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
734         long long t = mod_inv(s, m);
735
736         if (t == -1)
737             return -1;
738         else
739             return (s * t) % m;
740     }
741
742     long long mod_sqrt45(long long a, long long m) {
743         if (a < 0)
744             a += m;
745
746         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
747         long long t = mod_inv(s, m);
748
749         if (t == -1)
750             return -1;
751         else
752             return (s * t) % m;
753     }
754
755     long long mod_sqrt46(long long a, long long m) {
756         if (a < 0)
757             a += m;
758
759         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
760         long long t = mod_inv(s, m);
761
762         if (t == -1)
763             return -1;
764         else
765             return (s * t) % m;
766     }
767
768     long long mod_sqrt47(long long a, long long m) {
769         if (a < 0)
770             a += m;
771
772         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
773         long long t = mod_inv(s, m);
774
775         if (t == -1)
776             return -1;
777         else
778             return (s * t) % m;
779     }
780
781     long long mod_sqrt48(long long a, long long m) {
782         if (a < 0)
783             a += m;
784
785         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
786         long long t = mod_inv(s, m);
787
788         if (t == -1)
789             return -1;
790         else
791             return (s * t) % m;
792     }
793
794     long long mod_sqrt49(long long a, long long m) {
795         if (a < 0)
796             a += m;
797
798         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
799         long long t = mod_inv(s, m);
800
801         if (t == -1)
802             return -1;
803         else
804             return (s * t) % m;
805     }
806
807     long long mod_sqrt50(long long a, long long m) {
808         if (a < 0)
809             a += m;
810
811         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
812         long long t = mod_inv(s, m);
813
814         if (t == -1)
815             return -1;
816         else
817             return (s * t) % m;
818     }
819
820     long long mod_sqrt51(long long a, long long m) {
821         if (a < 0)
822             a += m;
823
824         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
825         long long t = mod_inv(s, m);
826
827         if (t == -1)
828             return -1;
829         else
830             return (s * t) % m;
831     }
832
833     long long mod_sqrt52(long long a, long long m) {
834         if (a < 0)
835             a += m;
836
837         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
838         long long t = mod_inv(s, m);
839
840         if (t == -1)
841             return -1;
842         else
843             return (s * t) % m;
844     }
845
846     long long mod_sqrt53(long long a, long long m) {
847         if (a < 0)
848             a += m;
849
850         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
851         long long t = mod_inv(s, m);
852
853         if (t == -1)
854             return -1;
855         else
856             return (s * t) % m;
857     }
858
859     long long mod_sqrt54(long long a, long long m) {
860         if (a < 0)
861             a += m;
862
863         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
864         long long t = mod_inv(s, m);
865
866         if (t == -1)
867             return -1;
868         else
869             return (s * t) % m;
870     }
871
872     long long mod_sqrt55(long long a, long long m) {
873         if (a < 0)
874             a += m;
875
876         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
877         long long t = mod_inv(s, m);
878
879         if (t == -1)
880             return -1;
881         else
882             return (s * t) % m;
883     }
884
885     long long mod_sqrt56(long long a, long long m) {
886         if (a < 0)
887             a += m;
888
889         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
890         long long t = mod_inv(s, m);
891
892         if (t == -1)
893             return -1;
894         else
895             return (s * t) % m;
896     }
897
898     long long mod_sqrt57(long long a, long long m) {
899         if (a < 0)
900             a += m;
901
902         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
903         long long t = mod_inv(s, m);
904
905         if (t == -1)
906             return -1;
907         else
908             return (s * t) % m;
909     }
910
911     long long mod_sqrt58(long long a, long long m) {
912         if (a < 0)
913             a += m;
914
915         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
916         long long t = mod_inv(s, m);
917
918         if (t == -1)
919             return -1;
920         else
921             return (s * t) % m;
922     }
923
924     long long mod_sqrt59(long long a, long long m) {
925         if (a < 0)
926             a += m;
927
928         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
929         long long t = mod_inv(s, m);
930
931         if (t == -1)
932             return -1;
933         else
934             return (s * t) % m;
935     }
936
937     long long mod_sqrt60(long long a, long long m) {
938         if (a < 0)
939             a += m;
940
941         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
942         long long t = mod_inv(s, m);
943
944         if (t == -1)
945             return -1;
946         else
947             return (s * t) % m;
948     }
949
950     long long mod_sqrt61(long long a, long long m) {
951         if (a < 0)
952             a += m;
953
954         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
955         long long t = mod_inv(s, m);
956
957         if (t == -1)
958             return -1;
959         else
960             return (s * t) % m;
961     }
962
963     long long mod_sqrt62(long long a, long long m) {
964         if (a < 0)
965             a += m;
966
967         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
968         long long t = mod_inv(s, m);
969
970         if (t == -1)
971             return -1;
972         else
973             return (s * t) % m;
974     }
975
976     long long mod_sqrt63(long long a, long long m) {
977         if (a < 0)
978             a += m;
979
980         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
981         long long t = mod_inv(s, m);
982
983         if (t == -1)
984             return -1;
985         else
986             return (s * t) % m;
987     }
988
989     long long mod_sqrt64(long long a, long long m) {
990         if (a < 0)
991             a += m;
992
993         long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
994         long long t = mod_inv(s, m);
995
996         if (t == -1)
997             return -1;
998         else
999             return (s * t) % m;
1000    }
1001
1002    long long mod_sqrt65(long long a, long long m) {
1003        if (a < 0)
1004            a += m;
1005
1006        long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
1007        long long t = mod_inv(s, m);
1008
1009        if (t == -1)
1010            return -1;
1011        else
1012            return (s * t) % m;
1013    }
1014
1015    long long mod_sqrt66(long long a, long long m) {
1016        if (a < 0)
1017            a += m;
1018
1019        long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
1020        long long t = mod_inv(s, m);
1021
1022        if (t == -1)
1023            return -1;
1024        else
1025            return (s * t) % m;
1026    }
1027
1028    long long mod_sqrt67(long long a, long long m) {
1029        if (a < 0)
1030            a += m;
1031
1032        long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
1033        long long t = mod_inv(s, m);
1034
1035        if (t == -1)
1036            return -1;
1037        else
1038            return (s * t) % m;
1039    }
1040
1041    long long mod_sqrt68(long long a, long long m) {
1042        if (a < 0)
1043            a += m;
1044
1045        long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
1046        long long t = mod_inv(s, m);
1047
1048        if (t == -1)
1049            return -1;
1050        else
1051            return (s * t) % m;
1052    }
1053
1054    long long mod_sqrt69(long long a, long long m) {
1055        if (a < 0)
1056            a += m;
1057
1058        long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
1059        long long t = mod_inv(s, m);
1060
1061        if (t == -1)
1062            return -1;
1063        else
1064            return (s * t) % m;
1065    }
1066
1067    long long mod_sqrt70(long long a, long long m) {
1068        if (a < 0)
1069            a += m;
1070
1071        long long s = mod_exp(a, (m - 1) / 2, m);
1072        long long t = mod_inv(s, m);
1073
1074        if (t == -1)
1075            return -1;
1076        else
1
```

```

14 long long t = qpow(b, a, n); // 这里的快速幂函数需要
15     ↪写O(1) 快速乘
16 if (t == 1 || t == n - 1)
17     return true;
18
19 while (k--) {
20     t = mul(t, t, n); // mul是O(1) 快速乘函数
21     if (t == n - 1)
22         return true;
23 }
24
25 return false;
26
27 // 封装好的函数体
28 // 需要调用check
29 bool Miller_Rabin(long long n) {
30     if (n == 1)
31         return false;
32     if (n == 2)
33         return true;
34     if (n % 2 == 0)
35         return false;
36
37     // int范围内只需要检查 {2, 7, 61}
38     // long long范围内只需要检查 {2, 325, 9375, 28178,
39     ↪ 450775, 9780504, 1795265022}
40
41     for (int i : {2, 325, 9375, 28178, 450775, 9780504,
42     ↪ 1795265022}) {
43         if (i >= n)
44             break;
45         if (!check(n, i))
46             return false;
47     }
48
49     return true;
50 }
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
25 do
26     p = Pollards_Rho(n);
27     while (!p); // p是任意一个非平凡因子
28
29 if (p == n) {
30     v.push_back(p); // 说明n本身就是质数
31     return;
32 }
33
34 solve(p, v); // 递归分解两半
35 solve(n / p, v);
36 }
37
38 // Pollard's Rho主过程
39 // 需要使用Miller-Rabin作为子算法
40 // 同时需要调用O(1) 快速乘和gcd函数
41 long long Pollards_Rho(long long n) {
42     // assert(n > 1);
43
44     if (Miller_Rabin(n))
45         return n;
46
47     long long c = rand() % (n - 2) + 1, i = 1, k = 2, x
48     ↪ = rand() % (n - 3) + 2, u = 2; // 注意这里rand函
49     ↪ 数需要重定义一下
50     while (true) {
51         i++;
52         x = (mul(x, x, n) + c) % n; // mul是O(1) 快速乘
53         ↪ 函数
54
55         long long g = gcd((u - x + n) % n, n);
56         if (g > 1 && g < n)
57             return g;
58
59         if (u == x)
60             return 0; // 失败, 需要重新调用
61
62         if (i == k) {
63             u = x;
64             k *= 2;
65         }
66     }
67 }
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
679
680
681
682
683
684
685
686
687
687
688
689
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
709
710
711
712
713
714
715
716
717
717
718
719
719
720
721
722
723
724
725
726
727
727
728
729
729
730
731
732
733
734
735
735
736
737
737
738
739
739
740
741
742
742
743
744
744
745
745
746
746
747
747
748
748
749
749
750
750
751
751
752
752
753
753
754
754
755
755
756
756
757
757
758
758
759
759
760
760
761
761
762
762
763
763
764
764
765
765
766
766
767
767
768
768
769
769
770
770
771
771
772
772
773
773
774
774
775
775
776
776
777
777
778
778
779
779
780
780
781
781
782
782
783
783
784
784
785
785
786
786
787
787
788
788
789
789
790
790
791
791
792
792
793
793
794
794
795
795
796
796
797
797
798
798
799
799
800
800
801
801
802
802
803
803
804
804
805
805
806
806
807
807
808
808
809
809
810
810
811
811
812
812
813
813
814
814
815
815
816
816
817
817
818
818
819
819
820
820
821
821
822
822
823
823
824
824
825
825
826
826
827
827
828
828
829
829
830
830
831
831
832
832
833
833
834
834
835
835
836
836
837
837
838
838
839
839
840
840
841
841
842
842
843
843
844
844
845
845
846
846
847
847
848
848
849
849
850
850
851
851
852
852
853
853
854
854
855
855
856
856
857
857
858
858
859
859
860
860
861
861
862
862
863
863
864
864
865
865
866
866
867
867
868
868
869
869
870
870
871
871
872
872
873
873
874
874
875
875
876
876
877
877
878
878
879
879
880
880
881
881
882
882
883
883
884
884
885
885
886
886
887
887
888
888
889
889
890
890
891
891
892
892
893
893
894
894
895
895
896
896
897
897
898
898
899
899
900
900
901
901
902
902
903
903
904
904
905
905
906
906
907
907
908
908
909
909
910
910
911
911
912
912
913
913
914
914
915
915
916
916
917
917
918
918
919
919
920
920
921
921
922
922
923
923
924
924
925
925
926
926
927
927
928
928
929
929
930
930
931
931
932
932
933
933
934
934
935
935
936
936
937
937
938
938
939
939
940
940
941
941
942
942
943
943
944
944
945
945
946
946
947
947
948
948
949
949
950
950
951
951
952
952
953
953
954
954
955
955
956
956
957
957
958
958
959
959
960
960
961
961
962
962
963
963
964
964
965
965
966
966
967
967
968
968
969
969
970
970
971
971
972
972
973
973
974
974
975
975
976
976
977
977
978
978
979
979
980
980
981
981
982
982
983
983
984
984
985
985
986
986
987
987
988
988
989
989
990
990
991
991
992
992
993
993
994
994
995
995
996
996
997
997
998
998
999
999
1000
1000
1001
1001
1002
1002
1003
1003
1004
1004
1005
1005
1006
1006
1007
1007
1008
1008
1009
1009
1010
1010
1011
1011
1012
1012
1013
1013
1014
1014
1015
1015
1016
1016
1017
1017
1018
1018
1019
1019
1020
1020
1021
1021
1022
1022
1023
1023
1024
1024
1025
1025
1026
1026
1027
1027
1028
1028
1029
1029
1030
1030
1031
1031
1032
1032
1033
1033
1034
1034
1035
1035
1036
1036
1037
1037
1038
1038
1039
1039
1040
1040
1041
1041
1042
1042
1043
1043
1044
1044
1045
1045
1046
1046
1047
1047
1048
1048
1049
1049
1050
1050
1051
1051
1052
1052
1053
1053
1054
1054
1055
1055
1056
1056
1057
1057
1058
1058
1059
1059
1060
1060
1061
1061
1062
1062
1063
1063
1064
1064
1065
1065
1066
1066
1067
1067
1068
1068
1069
1069
1070
1070
1071
1071
1072
1072
1073
1073
1074
1074
1075
1075
1076
1076
1077
1077
1078
1078
1079
1079
1080
1080
1081
1081
1082
1082
1083
1083
1084
1084
1085
1085
1086
1086
1087
1087
1088
1088
1089
1089
1090
1090
1091
1091
1092
1092
1093
1093
1094
1094
1095
1095
1096
1096
1097
1097
1098
1098
1099
1099
1100
1100
1101
1101
1102
1102
1103
1103
1104
1104
1105
1105
1106
1106
1107
1107
1108
1108
1109
1109
1110
1110
1111
1111
1112
1112
1113
1113
1114
1114
1115
1115
1116
1116
1117
1117
1118
1118
1119
1119
1120
1120
1121
1121
1122
1122
1123
1123
1124
1124
1125
1125
1126
1126
1127
1127
1128
1128
1129
1129
1130
1130
1131
1131
1132
1132
1133
1133
1134
1134
1135
1135
1136
1136
1137
1137
1138
1138
1139
1139
1140
1140
1141
1141
1142
1142
1143
1143
1144
1144
1145
1145
1146
1146
1147
1147
1148
1148
1149
1149
1150
1150
1151
1151
1152
1152
1153
1153
1154
1154
1155
1155
1156
1156
1157
1157
1158
1158
1159
1159
1160
1160
1161
1161
1162
1162
1163
1163
1164
1164
1165
1165
1166
1166
1167
1167
1168
1168
1169
1169
1170
1170
1171
1171
1172
1172
1173
1173
1174
1174
1175
1175
1176
1176
1177
1177
1178
1178
1179
1179
1180
1180
1181
1181
1182
1182
1183
1183
1184
1184
1185
1185
1186
1186
1187
1187
1188
1188
1189
1189
1190
1190
1191
1191
1192
1192
1193
1193
1194
1194
1195
1195
1196
1196
1197
1197
1198
1198
1199
1199
1200
1200
1201
1201
1202
1202
1203
1203
1204
1204
1205
1205
1206
1206
1207
1207
1208
1208
1209
1209
1210
1210
1211
1211
1212
1212
1213
1213
1214
1214
1215
1215
1216
1216
1217
1217
1218
1218
1219
1219
1220
1220
1221
1221
1222
1222
1223
1223
1224
1224
1225
1225
1226
1226
1227
1227
1228
1228
1229
1229
1230
1230
1231
1231
1232
1232
1233
1233
1234
1234
1235
1235
1236
1236
1237
1237
1238
1238
1239
1239
1240
1240
1241
1241
1242
1242
1243
1243
1244
1244
1245
1245
1246
1246
1247
1247
1248
1248
1249
1249
1250
1250
1251
1251
1252
1252
1253
1253
1254
1254
1255
1255
1256
1256
1257
1257
1258
1258
1259
1259
1260
1260
1261
1261
1262
1262
1263
1263
1264
1264
1265
1265
1266
1266
1267
1267
1268
1268
1269
1269
1270
1270
1271
1271
1272
1272
1273
1273
1274
1274
1275
1275
1276
1276
1277
1277
1278
1278
1279
1279
1280
1280
1281
1281
1282
1282
1283
1283
1284
1284
1285
1285
1286
1286
1287
1287
1288
1288
1289
1289
1290
1290
1291
1291
1292
1292
1293
1293
1294
1294
1295
1295
1296
1296
1297
1297
1298
1298
1299
1299
1300
1300
1301
1301
1302
1302
1303
1303
1304
1304
1305
1305
1306
1306
1307
1307
1308
1308
1309
1309
1310
1310
1311
1311
1312
1312
1313
1313
1314
1314
1315
1315
1316
1316
1317
1317
1318
1318
1319
1319
1320
1320
1321
1321
1322
1322
1323
1323
1324
1324
1325
1325
1326
1326
1327
1327
1328
1328
1329
1329
1330
1330
1331
1331
1332
1332
1333
1333
1334
1334
1335
1335
1336
1336
1337
1337
1338
1338
1339
1339
1340
1340
1341
1341
1342
1342
1343
1343
1344
1344
1345
1345
1346
1346
1347
1347
1348
1348
1349
1349
1350
1350
1351
1351
1352
1352
1353
1353
1354
1354
1355
1355
1356
1356
1357
1357
1358
1358
1359
1359
1360
1360
1361
1361
1362
1362
1363
1363
1364
1364
1365
1365
1366
1366
1367
1367
1368
1368
1369
1369
1370
1370
1371
1371
1372
1372
1373
1373
1374
1374
1375
1375
1376
1376
1377
1377
1378
1378
1379
1379
1380
1380
1381
1381
1382
1382
1383
1383
1384
1384
1385
1385
1386
1386
1387
1387
1388
1388
1389
1389
1390
1390
1391
1391
1392
1392
1393
1393
1394
1394
1395
1395
1396
1396
1397
1397
1398
1398
1399
1399
1400
1400
1401
1401
1402
1402
1403
1403
1404
1404
1405
1405
1406
1406
1407
1407
1408
1408
1409
1409
1410
1410
1411
1411
1412
1412
1413
1413
1414
1414
1415
1415
1416
1416
1417
1417
1418
1418
1419
1419
1420
1420
1421
1421
1422
1422
1423
1423
1424
1424
1425
1425
1426
1426
1427
1427
1428
1428
1429
1429
1430
1430
1431
1431
1432
1432
1433
1433
1434
1434
1435
1435
1436
1436
1437
1437
1438
1438
1439
1439
1440
1440
1441
1441
1442
1442
1443
1443
1444
1444
1445
1445
1446
1446
1447
1447
1448
1448
1449
1449
1450
1450
1451
1451
1452
1452
1453
1453
1454
1454
1455
1455
1456
1456
1457
1457
1458
1458
1459
1459
1460
1460
1461
1461
1462
1462
1463
1463
1464
1464
1465
1465
1466
1466
1467
1467
1468
1468
1469
1469
1470
1470
1471
1471
1472
1472
1473
1473
1474
1474
1475
1475
1476
1476
1477
1477
1478
1478
1479
1479
1480
1480
1481
1481
1482
1482
1483
1483
1484
1484
1485
1485
1486
1486
1487
1487
1488
1488
1489
1489
1490
1490
1491
1491
1492
1492
1493
1493
1494
1494
1495
1495
1496
1496
1497
1497
1498
1498
1499
1499
1500
1500
1501
1501
1502
1502
1503
1503
1504
1504
1505
1505
1506
1506
1507
1507
1508
1508
1509
1509
1510
1510
1511
1511
1512
1512
1513
1513
1514
1514
1515
1515
1516
1516
1517
1517
1518
1518
1519
1519
1520
1520
1521
1521
1522
1522
1523
1523
1524
1524
1525
1525
1526
1526
1527
1527
1528
1528
1529
1529
1530
1530
1531
1531
1532
1532
1533
1533
1534
1534
1535
1535
1536
1536
1537
```

2.10.1 求通解的方法

假设我们已经找到了一组解 (p_0, q_0) 满足 $ap_0 + bq_0 = \gcd(a, b)$, 那么其他的解都满足

$$p = p_0 + \frac{b}{\gcd(p, q)} \times t \quad q = q_0 - \frac{a}{\gcd(p, q)} \times t$$

其中 t 为任意整数.

2.10.2 类欧几里德算法 (直线下整点个数)

$a, b \geq 0, m > 0$, 计算 $\sum_{i=0}^{n-1} \lfloor \frac{a+bi}{m} \rfloor$.

```

1 int solve(int n, int a, int b, int m) {
2     if (!b)
3         return n * (a / m);
4     if (a >= m)
5         return n * (a / m) + solve(n, a % m, b, m);
6     if (b >= m)
7         return (n - 1) * n / 2 * (b / m) + solve(n, a,
8             → b % m, m);
9
10    return solve((a + b * n) / m, (a + b * n) % m, m,
11        → b);

```

2.11 中国剩余定理

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$M = \prod_i m_i, M_i = \frac{M}{m_i}$$

$$M'_i \equiv M_i^{-1} \pmod{m_i}$$

$$x \equiv \sum_i a_i M_i M'_i \pmod{M}$$

2.11.1 ex-CRT

设两个方程分别是 $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ 和 $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$.

将它们转化为不定方程 $x = m_1 p + a_1 = m_2 q + a_2$, 其中 p, q 是整数, 则有 $m_1 p - m_2 q = a_2 - a_1$.

当 $a_2 - a_1$ 不能被 $\gcd(m_1, m_2)$ 整除时无解, 否则可以通过扩展欧几里德解出来一组可行解 (p, q) .

则原来的两方程组成的模方程组的解为 $x \equiv b \pmod{M}$, 其中 $b = m_1 p + a_1$, $M = \text{lcm}(m_1, m_2)$.

```

16
17     while (b) {
18         if (b & 1)
19             ans = ans * a;
20
21         b >>= 1;
22         a = a * a;
23     }
24
25     return ans;
26 }
27
28 int qpow(int a, int b) {
29     int ans = 1;
30
31     while (b) {
32         if (b & 1)
33             ans = (long long)ans * a % p;
34
35         b >>= 1;
36         a = (long long)a * a % p;
37     }
38
39     return ans;
40 }
41
42 int my_legendre(int a) { // std有同名函数, 最好换个名字,
43     →不然传了两个数都查不出来
44     return qpow(a, (p - 1) / 2);
45 }
46
47 int quadratic_residual(int b, int mod) {
48     p = mod;
49
50     if (p == 2)
51         return 1;
52
53     if (my_legendre(b) == p - 1)
54         return -1; // 无解
55
56     int a;
57     do {
58         a = rand() % p;
59         w = ((long long)a * a - b) % p;
60         if (w < 0)
61             w += p;
62     } while (my_legendre(w) != p - 1);
63
64     return qpow(pi(a, 1), (p + 1) / 2).a;
65 }

```

2.12 二次剩余

```

1 int p, w;
2
3 struct pi {
4     int a, b; // a + b * sqrt(w)
5
6     pi(int a = 0, int b = 0) : a(a), b(b) {}
7
8     friend pi operator * (const pi &u, const pi &v) {
9         return pi(((long long)u.a * v.a + (long
10            → long)u.b * v.b % p * w) % p,
11            ((long long)u.a * v.b + (long long)u.b *
12            → v.a) % p);
13     }
14 };
15 pi qpow(pi a, int b) {
16     pi ans(1, 0);

```

2.13 原根阶

阶 最小的整数 k 使得 $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, 记为 $\delta_p(a)$.

显然 a 在阶以下的幂次是两两不同的.

一个性质: 如果 a, b 均与 p 互质, 则 $\delta_p(ab) = \delta_p(a)\delta_p(b)$ 的充分必要条件是 $\gcd(\delta_p(a), \delta_p(b)) = 1$.

另外, 如果 a 与 p 互质, 则有 $\delta_p(a^k) = \frac{\delta_p(a)}{\gcd(\delta_p(a), k)}$. (也就是环上一次跳 k 步的周期.)

原根 阶等于 $\varphi(p)$ 的数.

只有形如 $2, 4, p^k, 2p^k$ (p 是奇素数) 的数才有原根, 并且如果一个数 n 有原根, 那么原根的个数是 $\varphi(\varphi(n))$ 个.

暴力找原根代码:

```

1 def split(n): # 分解质因数
2     i = 2
3     a = []
4     while i * i <= n:
5         if n % i == 0:
6             a.append(i)
7
8             while n % i == 0:
9                 n /= i
10
11            i += 1
12
13        if n > 1:
14            a.append(n)
15
16    return a
17
18 def getg(p): # 找原根
19     def judge(g):
20         for i in d:
21             if pow(g, (p - 1) / i, p) == 1:
22                 return False
23         return True
24
25     d = split(p - 1)
26     g = 2
27
28     while not judge(g):
29         g += 1
30
31     return g
32
33 print(getg(int(input())))

```

$$\sum_{i=1}^n f(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(j) = \sum_{i=1}^n g(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} f(j)$$

2.14 常用数论公式

2.14.1 莫比乌斯反演

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

$$f(d) = \sum_{d|k} g(k) \Leftrightarrow g(d) = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) f(k)$$

2.14.2 降幂公式

$$a^k \equiv a^{k \bmod \varphi(p) + \varphi(p)}, k \geq \varphi(p)$$

2.14.3 其他常用公式

$$\mu * I = e \quad (e(n) = [n = 1])$$

$$\varphi * I = id$$

$$\mu * id = \varphi$$

$$\sigma_0 = I * I, \sigma_1 = id * I, \sigma_k = id^{k-1} * I$$

$$\sum_{i=1}^n [(i, n) = 1] i = n \frac{\varphi(n) + e(n)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i [(i, j) = d] = S_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i, j) = d] = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$$

3 图论

3.1 最小生成树

3.1.1 Boruvka 算法

思想: 每次选择连接每个连通块的最小边, 把连通块缩起来.

每次连通块个数至少减半, 所以迭代 $O(\log n)$ 次即可得到最小生成树.

一种比较简单的实现方法: 每次迭代遍历所有边, 用并查集维护连通性和每个连通块的最小边权.

应用: 最小异或生成树

3.1.2 动态最小生成树

动态最小生成树的离线算法比较容易, 而在线算法通常极为复杂.

一个跑得比较快的离线做法是对时间分治, 在每层分治时找出一定在不在MST上的边, 只带着不确定边继续递归.

简单起见, 找确定边的过程用Kruskal算法实现, 过程中的两种重要操作如下:

- Reduction: 待修改边标为 $+\infty$, 跑MST后把非树边删掉, 减少无用边
- Contraction: 待修改边标为 $-\infty$, 跑MST后缩除待修改边之外的所有MST边, 计算必须边

每轮分治需要Reduction-Contraction, 借此减少不确定边, 从而保证复杂度.

复杂度证明: 假设当前区间有 k 条待修改边, n 和 m 表示点数和边数, 那么最坏情况下R-C的效果为 $(n, m) \rightarrow (n, n + k - 1) \rightarrow (k + 1, 2k)$.

```

1 // 全局结构体与数组定义
2 struct edge { //边的定义
3     int u, v, w, id; // id表示边在原图中的编号
4     bool vis; // 在Kruskal时用, 记录这条边是否是树边
5     bool operator < (const edge &e) const { return w <
6         → e.w; }
7 } e[20][maxn], t[maxn]; // 为了便于回滚, 在每层分治存一
8 → 个副本
9
10 // 用于存储修改的结构体, 表示第ia条边的权值从u修改为v
11 struct A {
12     int id, u, v;
13 } a[maxn];
14
15 int id[20][maxn]; // 每条边在当前图中的编号
16 int p[maxn], size[maxn], stk[maxn], top; // p和size是并
17 → 查集数组, stk是用来撤销的栈
18 int n, m, q; // 点数, 边数, 修改数
19
20 // 方便起见, 附上可能需要用到的预处理代码
21 int main() {
22     for (int i = 1; i <= n; i++) { // 并查集初始化
23         p[i] = i;
24         size[i] = 1;
25     }
26
27     for (int i = 1; i <= m; i++) { // 读入与预标号
28         scanf("%d%d%d", &e[0][i].u, &e[0][i].v, &e[0]
29             → [i].w);
30         e[0][i].id = i;
31         id[0][i] = i;
32     }
33
34     for (int i = 1; i <= q; i++) { // 预处理出调用数组
35         scanf("%d%d", &a[i].id, &a[i].v);
36     }
37 }
```

```

35     a[i].u = e[0][a[i].id].w;
36     e[0][a[i].id].w = a[i].v;
37 }
38
39 for(int i = q; i--)
40     e[0][a[i].id].w = a[i].u;
41
42 CDQ(1, q, 0, m, 0); // 这是调用方法
43 }

44 // 分治主过程 O(nlog^2n)
45 // 需要调用Reduction和Contraction
46 void CDQ(int l, int r, int d, int m, long long ans) {
47     → // CDQ分治
48     if (l == r) { // 区间长度已减小到1, 输出答案, 退出
49         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].v;
50         printf("%lld\n", ans + Kruskal(m, e[d]));
51         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].u;
52         return;
53     }
54
55     int tmp = top;
56
57     Reduction(l, r, d, m);
58     ans += Contraction(l, r, d, m); // R-C
59
60     int mid = (l + r) / 2;
61
62     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
63     for (int i = 1; i <= m; i++)
64         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 准备好下一层要用的
65 → 数组
66
67     CDQ(l, mid, d + 1, m, ans);
68
69     for (int i = l; i <= mid; i++)
70         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].v; // 进行左边的修
71 → 改
72
73     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
74     for (int i = 1; i <= m; i++)
75         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 重新准备下一层要用
76 → 的数组
77
78     CDQ(mid + 1, r, d + 1, m, ans);
79
80     for (int i = top; i > tmp; i--)
81         cut(stk[i]); // 撤销所有操作
82     top = tmp;
83 }
84
85 // Reduction(减少无用边): 待修改边标为+INF, 跑MST后把非树
86 → 边删掉, 减少无用边
87 // 需要调用Kruskal
88 void Reduction(int l, int r, int d, int &m) {
89     for (int i = l; i <= r; i++)
90         e[d][id[d][a[i].id]].w = INF; // 待修改的边标为INF
91
92     Kruskal(m, e[d]);
93
94     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
95
96     int cnt = 0;
97     for (int i = 1; i <= m; i++)
98         if (t[i].w == INF || t[i].vis){ // 非树边扔掉
99             id[d][t[i].id] = ++cnt; // 给边重新编号
100            e[d][cnt] = t[i];
101        }
102 }
```

```

100
101    for (int i = r; i >= l; i--)
102        e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
103        ↪ 改回去
104
105    m = cnt;
106
107 // Contraction(缩必须边): 待修改边标为- $\text{INF}$ , 跑MST后缩除待
108 // → 修改边之外的所有树边
109 // 返回缩掉的边的总权值
110 // 需要调用Kruskal
111 long long Contraction(int l, int r, int d, int &m) {
112     long long ans = 0;
113
114     for (int i = l; i <= r; i++)
115         e[d][id[d][a[i].id]].w = - $\text{INF}$ ; // 待修改边标
116         ↪ 为- $\text{INF}$ 
117
118     Kruskal(m, e[d]);
119     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
120
121     int cnt = 0;
122     for (int i = 1; i <= m; i++) {
123
124         if (t[i].w != - $\text{INF}$  && t[i].vis) { // 必须边
125             ans += t[i].w;
126             mergeset(t[i].u, t[i].v);
127         }
128         else { // 不确定边
129             id[d][t[i].id] = ++cnt;
130             e[d][cnt] = t[i];
131         }
132     }
133
134     for (int i = r; i >= l; i--) {
135         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
136         ↪ 改回去
137         e[d][id[d][a[i].id]].vis = false;
138     }
139
140     m = cnt;
141
142     return ans;
143 }
144
145 // Kruskal算法  $O(m \log n)$ 
146 // 方便起见, 这里直接沿用进行过缩点的并查集, 在过程结束后
147 // → 撤销即可
148 long long Kruskal(int m, edge *e) {
149     int tmp = top;
150     long long ans = 0;
151
152     sort(e + 1, e + m + 1); // 比较函数在结构体中定义过
153     ↪ 了
154
155     for (int i = 1; i <= m; i++) {
156         if (findroot(e[i].u) != findroot(e[i].v)) {
157             e[i].vis = true;
158             ans += e[i].w;
159             mergeset(e[i].u, e[i].v);
160         }
161         else
162             e[i].vis = false;
163
164     for (int i = top; i > tmp; i--)
165         cut(stk[i]); // 撤销所有操作

```

```

164     top = tmp;
165
166     return ans;
167 }
168
169 // 以下是并查集相关函数
170 int findroot(int x) { // 因为需要撤销, 不写路径压缩
171     while (p[x] != x)
172         x = p[x];
173
174     return x;
175 }
176
177 void mergeset(int x, int y) { // 按size合并, 如果想跑得
178    更快就写一个按秩合并
179     x = findroot(x); // 但是按秩合并要再开一个栈记录合并
180     ↪ 之前的秩
181     y = findroot(y);
182
183     if (x == y)
184         return;
185
186     if (size[x] > size[y])
187         swap(x, y);
188
189     p[x] = y;
190     size[y] += size[x];
191     stk[++top] = x;
192 }
193
194 void cut(int x) { // 并查集撤销
195     int y = x;
196
197     do
198         size[y = p[y]] -= size[x];
199         while (p[y] != y);
200
201     p[x] = x;
202 }

```

3.1.3 最小树形图

对每个点找出最小的入边, 如果是一个DAG那么就已经结束了。否则把环都缩起来, 每个点的边权减去环上的边权之后再跑一遍, 直到没有环为止。

可以用可并堆优化到 $O(m \log n)$, 需要写一个带懒标记的左偏树。
 $O(nm)$ 版本

```

1 constexpr int maxn = 105, maxe = 10005, inf =
2     ↪ 0x3f3f3f3f;
3
4 struct edge {
5     int u, v, w;
6 } e[maxe];
7
8 int mn[maxn], pr[maxn], ufs[maxn], vis[maxn];
9 bool alive[maxn];
10
11 int edmonds(int n, int m, int rt) {
12     for (int i = 1; i <= n; i++)
13         alive[i] = true;
14
15     int ans = 0;
16
17     while (true) {
18         memset(mn, 63, sizeof(int) * (n + 1));
19         memset(pr, 0, sizeof(int) * (n + 1));
20         memset(ufs, 0, sizeof(int) * (n + 1));
21
22         for (int i = 1; i <= m; i++)
23             if (mn[e[i].u] > e[i].w)
24                 mn[e[i].u] = e[i].w;
25
26         for (int i = 1; i <= n; i++)
27             if (alive[i] && mn[i] < inf)
28                 for (int j = 0; j < e[i].w; j++)
29                     if (mn[e[i].v] > mn[i] + e[i].w)
30                         mn[e[i].v] = mn[i] + e[i].w;
31
32         for (int i = 1; i <= n; i++)
33             if (alive[i] && mn[i] == inf)
34                 ans += mn[rt];
35
36         for (int i = 1; i <= n; i++)
37             if (alive[i] && mn[i] == inf)
38                 alive[i] = false;
39
40         if (mn[rt] == inf)
41             break;
42
43     }
44
45     return ans;
46 }

```

```

20     memset(vis, 0, sizeof(int) * (n + 1));
21
22     mn[rt] = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= m; i++) {
25         if (e[i].u != e[i].v && e[i].w <
26             → mn[e[i].v]) {
27             mn[e[i].v] = e[i].w;
28             pr[e[i].v] = e[i].u;
29         }
30
31         for (int i = 1; i <= n; i++) {
32             if (alive[i]) {
33                 if (mn[i] >= inf)
34                     return -1; // 不存在最小树形图
35
36             ans += mn[i];
37         }
38
39         bool flag = false;
40
41         for (int i = 1; i <= n; i++) {
42             if (!alive[i])
43                 continue;
44
45             int x = i;
46             while (x && !vis[x]) {
47                 vis[x] = i;
48                 x = pr[x];
49             }
50
51             if (x && vis[x] == i) {
52                 flag = true;
53                 for (int u = x; !ufs[u]; u = pr[u])
54                     ufs[u] = x;
55             }
56
57             for (int i = 1; i <= m; i++) {
58                 e[i].w -= mn[e[i].v];
59
60                 if (ufs[e[i].u])
61                     e[i].u = ufs[e[i].u];
62                 if (ufs[e[i].v])
63                     e[i].v = ufs[e[i].v];
64             }
65
66             if (!flag)
67                 return ans;
68
69             for (int i = 1; i <= n; i++)
70                 if (ufs[i] && i != ufs[i])
71                     alive[i] = false;
72     }
73 }
```

$O(m \log n)$ 版本

(堆优化版本可以参考fstqwq的模板，在最后没有目录的部分。)

3.1.4 Steiner Tree 斯坦纳树

问题：一张图上有 k 个关键点，求让关键点两两连通的最小生成树

做法：状压DP, $f_{i,S}$ 表示以 i 号点为树根, i 与 S 中的点连通的最
小边权和

转移有两种：

1. 枚举子集：

$$f_{i,S} = \min_{T \subset S} \{f_{i,T} + f_{i,S \setminus T}\}$$

2. 新加一条边：

$$f_{i,S} = \min_{(i,j) \in E} \{f_{j,S} + w_{i,j}\}$$

第一种直接枚举子集DP就行了，第二种可以用SPFA或者Dijkstra松弛（显然负边一开始全选就行了，所以只需要处理非负边）。

复杂度 $O(n3^k + 2^k \text{SSSP}(n, m))$ ，其中 $\text{SSSP}(n, m)$ 可以是 nm 或者 $n^2 + m$ 或者 $m \log n$.

```

1 constexpr int maxn = 105, inf = 0x3f3f3f3f;
2
3 int dp[maxn][(1 << 10) + 1];
4 int g[maxn][maxn], a[15];
5 bool inq[maxn];
6
7 int main() {
8
9     int n, m, k;
10    scanf("%d%d%d", &n, &m, &k);
11
12    memset(g, 63, sizeof(g));
13
14    while (m--) {
15        int u, v, c;
16        scanf("%d%d%d", &u, &v, &c);
17
18        g[u][v] = g[v][u] = min(g[u][v], c); // 不要忘了
19        → 是双向边
20    }
21
22    memset(dp, 63, sizeof(dp));
23
24    for (int i = 0; i < k; i++) {
25        scanf("%d", &a[i]);
26
27        dp[a[i]][1 << i] = 0;
28    }
29
30    for (int s = 1; s < (1 << k); s++) {
31        for (int i = 1; i <= n; i++) {
32            for (int t = (s - 1) & s; t; (t) &= s)
33                dp[i][s] = min(dp[i][s], dp[i][t] +
34                → dp[i][s ^ t]);
35
36        // SPFA
37        queue<int> q;
38        for (int i = 1; i <= n; i++)
39            if (dp[i][s] < inf) {
40                q.push(i);
41                inq[i] = true;
42            }
43
44        while (!q.empty()) {
45            int i = q.front();
46            q.pop();
47            inq[i] = false; // 最终结束时 inq 一定全 0，所
48            → 以不用清空
49
50            for (int j = 1; j <= n; j++) {
51                if (dp[i][s] + g[i][j] < dp[j][s]) {
52                    dp[j][s] = dp[i][s] + g[i][j];
53                    if (!inq[j]) {
54                        q.push(j);
55                        inq[j] = true;
56                    }
57                }
58            }
59        }
60    }
61 }
```

```

57
58     int ans = inf;
59     for (int i = 1; i <= n; i++)
60         ans = min(ans, dp[i][(1 << k) - 1]);
61
62     printf("%d\n", ans);
63
64     return 0;
65 }
```

3.1.5 最小直径生成树

首先要找到图的绝对中心 (可能在点上, 也可能在某条边上), 然后以绝对中心为起点建最短路树就是最小直径生成树.

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 505;
6 constexpr long long inf = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
7
8 int g[maxn][maxn], id[maxn][maxn], pr[maxn]; // g是邻接
9    → 矩阵
10 long long f[maxn][maxn], d[maxn];
11 bool vis[maxn];
12
13 vector<pair<int, int>>
14    → minimum_diameter_spanning_tree(int n) { // 1-based
15     for (int i = 1; i <= n; i++)
16         for (int j = 1; j <= n; j++)
17             g[i][j] *= 2; // 输入的边权都要乘2
18
19     memset(f, 63, sizeof(f));
20
21     for (int i = 1; i <= n; i++)
22         f[i][i] = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= n; i++)
25         for (int j = 1; j <= n; j++)
26             if (g[i][j])
27                 f[i][j] = g[i][j];
28
29     for (int k = 1; k <= n; k++)
30         for (int i = 1; i <= n; i++)
31             for (int j = 1; j <= n; j++)
32                 f[i][j] = min(f[i][j], f[i][k] + f[k]
33                                → [j]);
34
35     for (int i = 1; i <= n; i++) {
36         for (int j = 1; j <= n; j++)
37             id[i][j] = j; // 距离i第j近的点
38
39         sort(id[i] + 1, id[i] + n + 1, [&i] (int x, int
40            → y) {
41             return f[i][x] < f[i][y];
42         });
43     }
44
45     int o = 0;
46     long long ansv = inf; // vertex
47
48     for (int i = 1; i <= n; i++)
49         if (f[i][id[i][n]] * 2 < ansv) {
50             ansv = f[i][id[i][n]] * 2;
51             o = i;
52         }
53
54     int u = 0, v = 0;
55     long long disu = -inf, disv = -inf, anse = inf;
```

```

52
53     for (int x = 1; x <= n; x++)
54         for (int y = 1; y <= n; y++)
55             if (g[x][y]) { // 如果g[x][y] = 0说明没有边
56                 int w = g[x][y];
57
58                 for (int i = n - 1, j = n; i; i--)
59                     if (f[y][id[x][i]] > f[y][id[x]
60                        → [j]])
61                         long long tmp = f[x][id[x][i]]
62                            → + f[y][id[x][j]] + w;
63                         if (tmp < anse) {
64                             anse = tmp;
65                             u = x;
66                             v = y;
67
68                             disu = tmp / 2 - f[x][id[x]
69                                → [i]];
70                             disv = w - disu;
71                         }
72                     }
73
74     printf("%lld\n", min(ansv, anse) / 2); // 直径
75     memset(d, 63, sizeof(d));
76
77     if (ansv <= anse)
78         d[o] = 0;
79     else {
80         d[u] = disu;
81         d[v] = disv;
82     }
83
84     for (int k = 1; k <= n; k++) { // Dijkstra
85         int x = 0;
86         for (int i = 1; i <= n; i++)
87             if (!vis[i] && d[i] < d[x])
88                 x = i;
89
90         vis[x] = true;
91         for (int y = 1; y <= n; y++)
92             if (g[x][y] && !vis[y]) {
93                 if (d[y] > d[x] + g[x][y]) {
94                     d[y] = d[x] + g[x][y];
95                     pr[y] = x;
96                 }
97             }
98         }
99
100    vector<pair<int, int>> vec;
101    for (int i = 1; i <= n; i++)
102        if (pr[i])
103            vec.emplace_back(i, pr[i]);
104
105    if (ansv > anse)
106        vec.emplace_back(u, v);
107
108    return vec;
109 }
110
111 }
112
113 int main() {
114
115     int n, m;
```

```

116 scanf("%d%d", &n, &m);
117
118 while (m--) {
119     int x, y, z;
120     scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
121
122     g[x][y] = g[y][x] = z; // 无向图
123 }
124
125 auto vec = minimum_diameter_spanning_tree(n);
126 for (auto [x, y] : vec)
127     printf("%d %d\n", x, y);
128
129 return 0;
130

```

3.2 最短路

3.2.1 Dijkstra

参见3.2.3.k 短路(第 29 页), 注意那边是求到 t 的最短路.

3.2.2 Johnson 算法 (负权图多源最短路)

首先前提是图没有负环.

先任选一个起点 s , 跑一遍SPFA, 计算每个点的势 $h_u = d_{s,u}$, 然后将每条边 $u \rightarrow v$ 的权值 w 修改为 $w + h[u] - h[v]$ 即可, 由最短路的性质显然修改后边权非负.

然后对每个起点跑Dijkstra, 再修正距离 $d_{u,v} = d'_{u,v} - h_u + h_v$ 即可, 复杂度 $O(nm \log n)$, 在稀疏图上是要优于Floyd的.

3.2.3 k 短路

```

1 // 注意这是个多项式算法, 在k比较大时很有优势, 但k比较小时
2 // →最好还是用A*
3 // DAG和有环的情况都可以, 有重边或自环也无所谓, 但不能有
4 // →零环
5 // 以下代码以Dijkstra + 可持久化左偏树为例
6
7 constexpr int maxn = 1005, maxe = 10005, maxm = maxe *
8 //点数, 边数, 左偏树结点数
9
10 // 结构体定义
11 struct A { // 用来求最短路
12     int x, d;
13
14     A(int x, int d) : x(x), d(d) {}
15
16 };
17
18 struct node { // 左偏树结点
19     int w, i, d; // i: 最后一条边的编号 d: 左偏树附加信息
20     node *lc, *rc;
21
22     node() {}
23
24     node(int w, int i) : w(w), i(i), d(0) {}
25
26     void refresh(){
27         d = rc -> d + 1;
28     }
29 } null[maxn], *ptr = null, *root[maxn];
30
31 struct B { // 维护答案用
32     int x, w; // x是结点编号, w表示之前已经产生的权值

```

```

33     node *rt; // 这个答案对应的堆顶, 注意可能不等于任何一个结点的堆
34
35     B(int x, node *rt, int w) : x(x), w(w), rt(rt) {}
36
37     bool operator < (const B &a) const {
38         return w + rt -> w > a.w + a.rt -> w;
39     }
40 }
41
42 // 全局变量和数组定义
43 vector<int> G[maxn], W[maxn], id[maxn]; // 最开始要存反
44 // →向图, 然后把G清空作为儿子列表
45 bool vis[maxn], used[maxe]; // used表示边是否在最短路树
46 // →上
47 int u[maxe], v[maxe], w[maxe]; // 存下每条边, 注意是有向
48 // →边
49 int d[maxn], p[maxn]; // p表示最短路树上每个点的父边
50 int n, m, k, s, t; // s, t分别表示起点和终点
51
52 // 以下是主函数中较关键的部分
53 for (int i = 0; i <= n; i++)
54     root[i] = null; // 一定要加上!!!
55
56 // (读入& 建反向图)
57 Dijkstra();
58
59 // (清空G, W, id)
60
61 for (int i = 1; i <= n; i++) {
62     if (p[i]) {
63         used[p[i]] = true; // 在最短路树上
64         G[v[p[i]]].push_back(i);
65     }
66
67 for (int i = 1; i <= m; i++) {
68     w[i] -= d[u[i]] - d[v[i]]; // 现在的w[i] 表示这条边
69 // →能使路径长度增加多少
70     if (!used[i])
71         root[u[i]] = merge(root[u[i]], newnode(w[i],
72 // →i));
73
74 dfs(t);
75
76 priority_queue<B> heap;
77 heap.push(B(s, root[s], 0)); // 初始状态是找贡献最小的边
78 // →加进去
79
80 while (--k) { // 其余k - 1短路径用二叉堆维护
81     if (heap.empty())
82         printf("-1\n");
83     else {
84         int x = heap.top().x, w = heap.top().w;
85         node *rt = heap.top().rt;
86         heap.pop();
87
88         printf("%d\n", d[s] + w + rt -> w);
89
90         if (rt -> lc != null || rt -> rc != null)
91             heap.push(B(x, merge(rt -> lc, rt -> rc),
92 // →w)); // pop掉当前边, 换成另一条贡献大一
93 // →点的边
94         if (root[v[rt -> i]] != null)
95             heap.push(B(v[rt -> i], root[v[rt -> i]], w
96 // →+ rt -> w)); // 保留当前边, 往后面再接上
97 // →另一条边
98     }
99 }

```

```

93 }
94 // 主函数到此结束
95
96
97 // Dijkstra预处理最短路 O(m\log n)
98 void Dijkstra() {
99     memset(d, 63, sizeof(d));
100    d[t] = 0;
101    priority_queue<A> heap;
102    heap.push(A(t, 0));
103
104    while (!heap.empty()) {
105        int x = heap.top().x;
106        heap.pop();
107
108        if(vis[x])
109            continue;
110
111        vis[x] = true;
112        for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
113            if (!vis[G[x][i]] && d[G[x][i]] > d[x] +
114                ← W[x][i]) {
115                d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
116                p[G[x][i]] = id[x][i];
117
118                heap.push(A(G[x][i], d[G[x][i]]));
119            }
120    }
121
122 // dfs求出每个点的堆 总计O(m\log n)
123 // 需要调用merge, 同时递归调用自身
124 void dfs(int x) {
125     root[x] = merge(root[x], root[v[p[x]]]);
126
127     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
128         dfs(G[x][i]);
129 }
130
131 // 包装过的new node() O(1)
132 node *newnode(int w, int i) {
133     *++ptr = node(w, i);
134     ptr -> lc = ptr -> rc = null;
135     return ptr;
136 }
137
138 // 带可持久化的左偏树合并 总计O(\log n)
139 // 递归调用自身
140 node *merge(node *x, node *y) {
141     if (x == null)
142         return y;
143     if (y == null)
144         return x;
145
146     if (x -> w > y -> w)
147         swap(x, y);
148
149     node *z = newnode(x -> w, x -> i);
150     z -> lc = x -> lc;
151     z -> rc = merge(x -> rc, y);
152
153     if (z -> lc -> d < z -> rc -> d)
154         swap(z -> lc, z -> rc);
155     z -> refresh();
156
157     return z;
158 }

```

3.3 Tarjan 算法

3.3.1 强连通分量

```
1 int dfn[maxn], low[maxn], tim = 0;
2 vector<int> G[maxn], scc[maxn];
3 int sccid[maxn], scc_cnt = 0, stk[maxn];
4 bool instk[maxn];
5
6 void dfs(int x) {
7     dfn[x] = low[x] = ++tim;
8
9     stk[++stk[0]] = x;
10    instk[x] = true;
11
12    for (int y : G[x]) {
13        if (!dfn[y]) {
14            dfs(y);
15            low[x] = min(low[x], low[y]);
16        }
17        else if (instk[y])
18            low[x] = min(low[x], dfn[y]);
19    }
20
21    if (dfn[x] == low[x]) {
22        scc_cnt++;
23
24        int u;
25        do {
26            u = stk[stk[0]--];
27            instk[u] = false;
28            sccid[u] = scc_cnt;
29            scc[scc_cnt].push_back(u);
30        } while (u != x);
31    }
32}
33
34 void tarjan(int n) {
35     for (int i = 1; i <= n; i++)
36         if (!dfn[i])
37             dfs(i);
38}
```

3.3.2 割点点双

```

1 vector<int> G[maxn], bcc[maxn];
2 int dfn[maxn], low[maxn], tim = 0, bccid[maxn], bcc_cnt
3     = 0;
4 bool iscut[maxn];
5 pair<int, int> stk[maxn];
6 int stk_cnt = 0;
7
8 void dfs(int x, int pr) {
9     int child = 0;
10    dfn[x] = low[x] = ++tim;
11
12    for (int y : G[x]) {
13        if (!dfn[y]) {
14            stk[++stk_cnt] = make_pair(x, y);
15            child++;
16            dfs(y, x);
17            low[x] = min(low[x], low[y]);
18
19            if (low[y] >= dfn[x]) {
20                iscut[x] = true;
21                bcc_cnt++;
22
23                while (true) {

```

```

24     auto pi = stk[stk_cnt--];
25
26     if (bccid[pi.first] != bcc_cnt) {
27         bcc[bcc_cnt].push_back(pi.first);
28         bccid[pi.first] = bcc_cnt;
29     }
30     if (bccid[pi.second] != bcc_cnt) {
31         bcc[bcc_cnt].push_back(pi.second);
32         bccid[pi.second] = bcc_cnt;
33     }
34
35     if (pi.first == x && pi.second ==
36         ~y)
37         break;
38     }
39 }
40 else if (dfn[y] < dfn[x] && y != pr) {
41     stk[++stk_cnt] = make_pair(x, y);
42     low[x] = min(low[x], dfn[y]);
43 }
44 }
45 if (!pr && child == 1)
46     iscut[x] = false;
47 }
48
49 void Tarjan(int n) {
50     for (int i = 1; i <= n; i++)
51         if (!dfn[i])
52             dfs(i, 0);
53 }

```

3.3.3 桥边双

```

1 int u[maxe], v[maxe];
2 vector<int> G[maxn]; // 存的是边的编号
3
4 int stk[maxn], top, dfn[maxn], low[maxn], tim, bcc_cnt;
5 vector<int> bcc[maxn];
6
7 bool isbridge[maxe];
8
9 void dfs(int x, int pr) { // 这里pr是入边的编号
10    dfn[x] = low[x] = ++tim;
11    stk[++top] = x;
12
13    for (int i : G[x]) {
14        int y = (u[i] == x ? v[i] : u[i]);
15
16        if (!dfn[y]) {
17            dfs(y, i);
18            low[x] = min(low[x], low[y]);
19
20            if (low[y] > dfn[x])
21                bridge[i] = true;
22        }
23        else if (i != pr)
24            low[x] = min(low[x], dfn[y]);
25    }
26
27    if (dfn[x] == low[x]) {
28        bcc_cnt++;
29        int y;
30        do {
31            y = stk[top--];
32            bcc[bcc_cnt].push_back(y);
33        } while (y != x);
34    }

```

35 }

3.4 欧拉回路

$C[x]$ 是记录每条边对应的编号的.
另外为了保证复杂度需要加当前弧优化.

```

1 vector<int> G[maxn], C[maxn], v[maxn]; // C是边的编号
2 int cur[maxn];
3 bool vis[maxn * 2];
4
5 vector<pair<int, int> > vec;
6
7 int d[maxn];
8
9 void dfs(int x) {
10    bool bad = false;
11
12    while (!bad) {
13        bad = true;
14
15        for (int &i = cur[x]; i < (int)G[x].size(); i++)
16            if (!vis[C[x][i]]) {
17                vis[C[x][i]] = true;
18                vec.emplace_back(x, i);
19                x = G[x][i];
20                bad = false;
21            }
22        }
23    }
24 }

```

3.5 仙人掌

一般来说仙人掌问题都可以通过圆方树转成有两种点的树上问题来做.

3.5.1 仙人掌 DP

```

1 struct edge {
2     int to, w, prev;
3 } e[maxn * 2];
4
5 vector<pair<int, int> > v[maxn];
6 vector<long long> d[maxn];
7 stack<int> stk;
8
9 int p[maxn];
10 bool vis[maxn], vise[maxn * 2];
11 int last[maxn], cnte;
12
13 long long f[maxn], g[maxn], sum[maxn];
14 int n, m, cnt;
15
16 void addedge(int x, int y, int w) {
17     v[x].push_back(make_pair(y, w));
18 }
19
20 void dfs(int x) {
21
22     vis[x] = true;
23
24     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev) {
25         if (vise[i ^ 1])
26             continue;

```

```

28     int y = e[i].to, w = e[i].w;
29
30     vise[i] = true;
31
32     if (!vis[y]) {
33         stk.push(i);
34         p[y] = x;
35         dfs(y);
36
37         if (!stk.empty() && stk.top() == i) {
38             stk.pop();
39             addedge(x, y, w);
40         }
41     }
42
43     else {
44         cnt++;
45
46         long long tmp = w;
47         while (!stk.empty()) {
48             int i = stk.top();
49             stk.pop();
50
51             int yy = e[i].to, ww = e[i].w;
52
53             addedge(cnt, yy, 0);
54
55             d[cnt].push_back(tmp);
56
57             tmp += ww;
58
59             if (e[i ^ 1].to == y)
60                 break;
61         }
62
63         addedge(y, cnt, 0);
64
65         sum[cnt] = tmp;
66     }
67 }
68
69 void dp(int x) {
70
71     for (auto o : v[x]) {
72         int y = o.first, w = o.second;
73         dp(y);
74     }
75
76
77     if (x <= n) {
78         for (auto o : v[x]) {
79             int y = o.first, w = o.second;
80
81             f[x] += 2 * w + f[y];
82         }
83
84         g[x] = f[x];
85
86         for (auto o : v[x]) {
87             int y = o.first, w = o.second;
88
89             g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] - 2 * w + g[y]
90                         → + w);
91         }
92     }
93     else {
94         f[x] = sum[x];
95         for (auto o : v[x]) {
96             int y = o.first;

```

```

97             f[x] += f[y];
98         }
99
100        g[x] = f[x];
101
102        for (int i = 0; i < (int)v[x].size(); i++) {
103            int y = v[x][i].first;
104
105            g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] + g[y] +
106                         → min(d[x][i], sum[x] - d[x][i]));
107        }
108    }

```

3.6 二分图

3.6.1 匈牙利

```

1 vector<int> G[maxn];
2
3 int girl[maxn], boy[maxn]; // 男孩在左边, 女孩在右边
4 bool vis[maxn];
5
6 bool dfs(int x) {
7     for (int y : G[x])
8         if (!vis[y]) {
9             vis[y] = true;
10
11             if (!boy[y] || dfs(boy[y])) {
12                 girl[x] = y;
13                 boy[y] = x;
14
15                 return true;
16             }
17         }
18
19     return false;
20 }
21
22 int hungary() {
23     int ans = 0;
24
25     for (int i = 1; i <= n; i++)
26         if (!girl[i]) {
27             memset(vis, 0, sizeof(vis));
28             ans += dfs(i);
29         }
30
31     return ans;
32 }

```

3.6.2 Hopcroft-Karp 二分图匹配

其实长得和 Dinic 差不多, 或者说像匈牙利和 Dinic 的缝合怪.

```

1 vector<int> G[maxn];
2
3 int girl[maxn], boy[maxn]; // girl: 左边匹配右边 boy:
4                         → 右边匹配左边
5 bool vis[maxn]; // 右半的点是否已被访问
6 int dx[maxn], dy[maxn];
7 int q[maxn];
8
9 bool bfs(int n) {
10     memset(dx, -1, sizeof(int) * (n + 1));
11     memset(dy, -1, sizeof(int) * (n + 1));
12

```

```

13 int head = 0, tail = 0;
14 for (int i = 1; i <= n; i++) {
15     if (!girl[i]) {
16         q[tail++] = i;
17         dx[i] = 0;
18     }
19
20     bool flag = false;
21
22     while (head != tail) {
23         int x = q[head++];
24
25         for (auto y : G[x])
26             if (dy[y] == -1) {
27                 dy[y] = dx[x] + 1;
28
29                 if (boy[y]) {
30                     if (dx[boy[y]] == -1) {
31                         dx[boy[y]] = dy[y] + 1;
32                         q[tail++] = boy[y];
33                     }
34                 } else
35                     flag = true;
36             }
37     }
38
39     return flag;
40 }
41
42 bool dfs(int x) {
43     for (int y : G[x])
44         if (!vis[y] && dy[y] == dx[x] + 1) {
45             vis[y] = true;
46
47             if (boy[y] && !dfs(boy[y]))
48                 continue;
49
50             girl[x] = y;
51             boy[y] = x;
52             return true;
53         }
54
55     return false;
56 }
57
58 int hopcroft_karp(int n) {
59     int ans = 0;
60
61     for (int x = 1; x <= n; x++) // 先贪心求出一组初始匹
62         // 配, 当然不写贪心也行
63         for (int y : G[x])
64             if (!boy[y]) {
65                 girl[x] = y;
66                 boy[y] = x;
67                 ans++;
68                 break;
69             }
70
71     while (bfs(n)) {
72         memset(vis, 0, sizeof(bool) * (n + 1));
73
74         for (int x = 1; x <= n; x++)
75             if (!girl[x])
76                 ans += dfs(x);
77     }
78
79     return ans;
80 }

```

3.6.3 KM 二分图最大权匹配

```

1 const long long INF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3f;
2
3 long long w[maxn][maxn], lx[maxn], ly[maxn],
4     → slack[maxn];
// 边权 顶标 slack
// 如果要求最大权完美匹配就把不存在的边设为-INF, 否则所有
// 边对θ取max
5
6 bool visx[maxn], visy[maxn];
7
8 int boy[maxn], girl[maxn], p[maxn], q[maxn], head,
9     → tail; // p : pre
10
11 int n, m, N, e;
12
13 // 增广
14 bool check(int y) {
15     visy[y] = true;
16
17     if (boy[y]) {
18         visx[boy[y]] = true;
19         q[tail++] = boy[y];
20         return false;
21     }
22
23     while (y) {
24         boy[y] = p[y];
25         swap(y, girl[p[y]]);
26     }
27
28     return true;
29 }
30
31 // bfs每个点
32 void bfs(int x) {
33     memset(q, 0, sizeof(q));
34     head = tail = 0;
35
36     q[tail++] = x;
37     visx[x] = true;
38
39     while (true) {
40         while (head != tail) {
41             int x = q[head++];
42
43             for (int y = 1; y <= N; y++)
44                 if (!visy[y]) {
45                     long long d = lx[x] + ly[y] - w[x]
46                     → [y];
47
48                     if (d < slack[y]) {
49                         p[y] = x;
50                         slack[y] = d;
51
52                         if (!slack[y] && check(y))
53                             return;
54                     }
55                 }
56
57         long long d = INF;
58         for (int i = 1; i <= N; i++)
59             if (!visy[i])
60                 d = min(d, slack[i]);
61
62         for (int i = 1; i <= N; i++) {

```

```

63     if (visx[i])
64         lx[i] -= d;
65
66     if (visy[i])
67         ly[i] += d;
68     else
69         slack[i] -= d;
70 }
71
72 for (int i = 1; i <= N; i++)
73     if (!visy[i] && !slack[i] && check(i))
74         return;
75 }
76
77 // 主过程
78 long long KM() {
79     for (int i = 1; i <= N; i++) {
80         // lx[i] = 0;
81         ly[i] = -INF;
82         // boy[i] = girl[i] = -1;
83
84         for (int j = 1; j <= N; j++)
85             ly[i] = max(ly[i], w[j][i]);
86     }
87
88     for (int i = 1; i <= N; i++) {
89         memset(slack, 0x3f, sizeof(slack));
90         memset(visx, 0, sizeof(visx));
91         memset(visy, 0, sizeof(visy));
92         bfs(i);
93     }
94
95
96     long long ans = 0;
97     for (int i = 1; i <= N; i++)
98         ans += w[i][girl[i]];
99     return ans;
100 }
101
102 // 为了方便贴上主函数
103 int main() {
104
105     scanf("%d%d%d", &n, &m, &e);
106     N = max(n, m);
107
108     while (e--) {
109         int x, y, c;
110         scanf("%d%d%d", &x, &y, &c);
111         w[x][y] = max(c, 0);
112     }
113
114     printf("%lld\n", KM());
115
116     for (int i = 1; i <= n; i++) {
117         if (i > 1)
118             printf(" ");
119         printf("%d", w[i][girl[i]] > 0 ? girl[i] : 0);
120     }
121     printf("\n");
122
123     return 0;
124 }

```

3.6.4 二分图原理

• 最大匹配的可行边与必须边, 关键点

以下的“残量网络”指网络流图的残量网络.

- 可行边: 一条边的两个端点在残量网络中处于同一个SCC, 不论是正向边还是反向边.

- 必须边: 一条属于当前最大匹配的边, 且残量网络中两个端点不在同一个SCC中.
- 关键点 (必须点): 这里不考虑网络流图而只考虑原始的图, 将匹配边改成从右到左之后从左边的每个未匹配点进行floodfill, 左边没有被标记的点即为关键点. 右边同理.

• 独立集

二分图独立集可以看成最小割问题, 割掉最少的点使得S和T不连通, 则剩下的点自然都在独立集中.

所以独立集输出方案就是求出不在最小割中的点, 独立集的必须点/可行点就是最小割的不可行点/非必须点.

割点等价于割掉它与源点或汇点相连的边, 可以通过设置中间的边权为无穷以保证不能割掉中间的边, 然后按照上面的方法判断即可. (由于一个点最多流出一个流量, 所以中间的边权其实是可以任取的.)

• 二分图最大权匹配

二分图最大权匹配的对偶问题是最小顶标和问题, 即: 为图中的每个顶点赋予一个非负顶标, 使得对于任意一条边, 两端点的顶标和都要不小于边权, 最小化顶标之和.

显然KM算法的原理实际上就是求最小顶标和.

3.7 一般图匹配

3.7.1 高斯消元

```

1 // 这个算法基于Tutte定理和高斯消元, 思维难度相对小一些,
2 // 也更方便进行可行边的判定
3 // 注意这个算法复杂度是满的, 并且常数有点大, 而带花树通常
4 // 是跑不满的
5 // 以及, 根据Tutte定理, 如果求最大匹配的大小的话直接输出
6 // Tutte矩阵的秩/2即可
7 // 需要输出方案时才需要再写后面那些乱七八糟的东西
8
9
10 // 复杂度和常数所限, 1s之内500已经是这个算法的极限了
11 const int maxn = 505, p = 1000000007; // p可以是任意10^9以内的质数
12
13 // 全局数组和变量定义
14 int A[maxn][maxn], B[maxn][maxn], t[maxn][maxn],
15 // id[maxn], a[maxn];
16 bool row[maxn] = {false}, col[maxn] = {false};
17 int n, m, girl[maxn]; // girl是匹配点, 用来输出方案
18
19 // 为了方便使用, 贴上主函数
20 // 需要调用高斯消元和eliminate
21 int main() {
22     srand(19260817);
23
24     scanf("%d%d", &n, &m); // 点数和边数
25     while (m--) {
26         int x, y;
27         scanf("%d%d", &x, &y);
28         A[x][y] = rand() % p;
29         A[y][x] = -A[x][y]; // Tutte矩阵是反对称矩阵
30     }
31
32     for (int i = 1; i <= n; i++)
33         id[i] = i; // 输出方案用的, 因为高斯消元的时候会
34         // 交換列
35     memcpy(t, A, sizeof(t));
36     Gauss(A, NULL, n);
37
38     m = n;
39     n = 0; // 这里变量复用纯属个人习惯
40
41     for (int i = 1; i <= m; i++)
42         if (A[id[i]][id[i]])

```

```

38     a[++n] = i; // 找出一个极大满秩子矩阵
39
40     for (int i = 1; i <= n; i++)
41         for (int j = 1; j <= n; j++)
42             A[i][j] = t[a[i]][a[j]];
43
44     Gauss(A, B, n);
45
46     for (int i = 1; i <= n; i++)
47         if (!girl[a[i]])
48             for (int j = i + 1; j <= n; j++)
49                 if (!girl[a[j]] && t[a[i]][a[j]] &&
50                     → B[j][i]) {
51                     // 注意上面那句if的写法, 现在t是邻接
52                     // → 矩阵的备份,
53                     // 逆矩阵j行i列不为0当且仅当这条边可
54                     // → 行
55                     girl[a[i]] = a[j];
56                     girl[a[j]] = a[i];
57
58                     eliminate(i, j);
59                     eliminate(j, i);
60                     break;
61                 }
62
63     printf("%d\n", n / 2);
64     for (int i = 1; i <= m; i++)
65         printf("%d ", girl[i]);
66
67     return 0;
68 }
69
70 // 高斯消元 O(n^3)
71 // 在传入B时表示计算逆矩阵, 传入NULL则只需计算矩阵的秩
72 void Gauss(int A[][maxn], int B[][maxn], int n) {
73     if(B) {
74         memset(B, 0, sizeof(t));
75         for (int i = 1; i <= n; i++)
76             B[i][i] = 1;
77     }
78
79     for (int i = 1; i <= n; i++) {
80         if (!A[i][i]) {
81             for (int j = i + 1; j <= n; j++)
82                 if (A[j][i]) {
83                     swap(id[i], id[j]);
84                     for (int k = i; k <= n; k++)
85                         swap(A[i][k], A[j][k]);
86
87                     if (B)
88                         for (int k = 1; k <= n; k++)
89                             swap(B[i][k], B[j][k]);
90                     break;
91                 }
92             if (!A[i][i])
93                 continue;
94         }
95
96         int inv = qpow(A[i][i], p - 2);
97
98         for (int j = 1; j <= n; j++)
99             if (i != j && A[j][i]) {
100                 int t = (long long)A[j][i] * inv % p;
101
102                 for (int k = i; k <= n; k++)
103                     if (A[i][k])
104                         A[j][k] = (A[j][k] - (long
105                                         → long)t * A[i][k]) % p;
106             }
107         }
108     }
109 }
```

```
103
104     if (B)
105         for (int k = 1; k <= n; k++)
106             if (B[i][k])
107                 B[j][k] = (B[j][k] - (long
108                               → long)t * B[i][k])%p;
109     }
110
111 if (B)
112     for (int i = 1; i <= n; i++) {
113         int inv = qpow(A[i][i], p - 2);
114
115         for (int j = 1; j <= n; j++)
116             if (B[i][j])
117                 B[i][j] = (long long)B[i][j] * inv
118                               → % p;
119     }
120
121 // 消去一行一列 O(n^2)
122 void eliminate(int r, int c) {
123     row[r] = col[c] = true; // 已经被消掉
124
125     int inv = qpow(B[r][c], p - 2);
126
127     for (int i = 1; i <= n; i++)
128         if (!row[i] && B[i][c]) {
129             int t = (long long)B[i][c] * inv % p;
130
131             for (int j = 1; j <= n; j++)
132                 if (!col[j] && B[r][j])
133                     B[i][j] = (B[i][j] - (long long)t *
134                               → B[r][j]) % p;
135 }
```

3.7.2 带花树

```
// 带花树通常比高斯消元快很多，但在只需要求最大匹配大小的
// 时候并没有高斯消元好写
// 当然输出方案要方便很多

// 全局数组与变量定义
vector<int> G[maxn];
int girl[maxn], f[maxn], t[maxn], p[maxn], vis[maxn],
    tim, q[maxn], head, tail;
int n, m;

// 封装好的主过程 O(nm)
int blossom() {
    int ans = 0;

    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (!girl[i])
            ans += bfs(i);

    return ans;
}

// bfs找增广路 O(m)
bool bfs(int s) {
    memset(t, 0, sizeof(t));
    memset(p, 0, sizeof(p));

    for (int i = 1; i <= n; i++)
        f[i] = i; // 并查集
```

```

head = tail = 0;
q[tail++] = s;
t[s] = 1;

while (head != tail) {
    int x = q[head++];
    for (int y : G[x]) {
        if (findroot(y) == findroot(x) || t[y] == 2)
            continue;

        if (!t[y]) {
            t[y] = 2;
            p[y] = x;

            if (!girl[y]) {
                for (int u = y, t; u; u = t) {
                    t = girl[p[u]];
                    girl[p[u]] = u;
                    girl[u] = p[u];
                }
                return true;
            }
        }

        t[girl[y]] = 1;
        q[tail++] = girl[y];
    }
    else if (t[y] == 1) {
        int z = LCA(x, y);

        shrink(x, y, z);
        shrink(y, x, z);
    }
}

return false;
}

//缩奇环 O(n)
void shrink(int x, int y, int z) {
    while (findroot(x) != z) {
        p[x] = y;
        y = girl[x];

        if (t[y] == 2) {
            t[y] = 1;
            q[tail++] = y;
        }

        if (findroot(x) == x)
            f[x] = z;
        if (findroot(y) == y)
            f[y] = z;

        x = p[y];
    }
}

//暴力找LCA O(n)
int LCA(int x, int y) {
    tim++;
    while (true) {
        if (x) {
            x = findroot(x);

            if (vis[x] == tim)
                return x;
            else {
                vis[x] = tim;
            }
        }
        if (y) {
            y = findroot(y);

            if (vis[y] == tim)
                return y;
            else {
                vis[y] = tim;
            }
        }
    }
}

```

```
98         vis[x] = tim;
99         x = p[girl[x]];
100    }
101   }
102   swap(x, y);
103 }
104 }
105
106 //并查集的查找 O(1)
107 int findroot(int x) {
108     return x == f[x] ? x : (f[x] = findroot(f[x]));
109 }
```

3.7.3 带权带花树

Forked from the template of Imperisble Night.
(有一说一这玩意实在太难写了，抄之前建议先想想算法是不是假的或者有SB做法)

```

1 //maximum weight blossom, change g[u][v].w to INF -
2   ↪ g[u][v].w when minimum weight blossom is needed
3 //type of ans is long long
4 //replace all int to long long if weight of edge is
5   ↪ long long
6
7 struct WeightGraph {
8     static const int INF = INT_MAX;
9     static const int MAXN = 400;
10    struct edge{
11        int u, v, w;
12        edge() {}
13        edge(int u, int v, int w): u(u), v(v), w(w) {}
14    };
15    int n, n_x;
16    edge g[MAXN * 2 + 1][MAXN * 2 + 1];
17    int lab[MAXN * 2 + 1];
18    int match[MAXN * 2 + 1], slack[MAXN * 2 + 1],
19      ↪ st[MAXN * 2 + 1], pa[MAXN * 2 + 1];
20    int flower_from[MAXN * 2 + 1][MAXN+1], S[MAXN * 2 +
21      ↪ 1], vis[MAXN * 2 + 1];
22    vector<int> flower[MAXN * 2 + 1];
23    queue<int> q;
24    inline int e_delta(const edge &e){ // does not work
25      ↪ inside blossoms
26        return lab[e.u] + lab[e.v] - g[e.u][e.v].w * 2;
27    }
28    inline void update_slack(int u, int x){
29      if(!slack[x] || e_delta(g[u][x]) <
30        ↪ e_delta(g[slack[x]][x]))
31        slack[x] = u;
32    }
33    inline void set_slack(int x){
34      slack[x] = 0;
35      for(int u = 1; u <= n; ++u)
36        if(g[u][x].w > 0 && st[u] != x && S[st[u]] 
37          ↪ == 0)
38          update_slack(u, x);
39    }
40    void q_push(int x){
41      if(x <= n)q.push(x);
42      else for(size_t i = 0; i < flower[x].size(); i+
43        ↪ +)
44        q_push(flower[x][i]);
45    }
46    inline void set_st(int x, int b){
47      st[x]=b;
48      if(x > n) for(size_t i = 0; i <
49        ↪ flower[x].size(); ++i)
50          set_st(flower[x][i], b);
51    }

```

```

42     }
43     inline int get_pr(int b, int xr){
44         int pr = find(flower[b].begin(),
45             flower[b].end(), xr) - flower[b].begin();
46         if(pr % 2 == 1){
47             reverse(flower[b].begin() + 1,
48                 flower[b].end());
49             return (int)flower[b].size() - pr;
50         } else return pr;
51     }
52     inline void set_match(int u, int v){
53         match[u]=g[u][v].v;
54         if(u > n){
55             edge e=g[u][v];
56             int xr = flower_from[u][e.u], pr=get_pr(u,
57                 xr);
58             for(int i = 0;i < pr; ++i)
59                 set_match(flower[u][i], flower[u][i ^ 1]);
60             set_match(xr, v);
61             rotate(flower[u].begin(),
62                 flower[u].begin()+pr, flower[u].end());
63         }
64     }
65     inline void augment(int u, int v){
66         for(; ; ){
67             int xnv=st[match[u]];
68             set_match(u, v);
69             if(!xnv) return;
70             set_match(xnv, st[pa[xnv]]);
71             u=st[pa[xnv]], v=xnv;
72         }
73     }
74     inline int get_lca(int u, int v){
75         static int t=0;
76         for(++; u || v; swap(u, v)){
77             if(u == 0) continue;
78             if(vis[u] == t) return u;
79             vis[u] = t;
80             u = st[match[u]];
81             if(u) u = st[pa[u]];
82         }
83         return 0;
84     }
85     inline void add_blossom(int u, int lca, int v){
86         int b = n + 1;
87         while(b <= n_x && st[b]) ++b;
88         if(b > n_x) ++n_x;
89         lab[b] = 0, S[b] = 0;
90         match[b] = match[lca];
91         flower[b].clear();
92         flower[b].push_back(lca);
93         for(int x = u, y; x != lca; x = st[pa[y]]) {
94             flower[b].push_back(x),
95             flower[b].push_back(y = st[match[x]]),
96             q_push(y);
97         }
98         reverse(flower[b].begin() + 1,
99                 flower[b].end());
100        for(int x = v, y; x != lca; x = st[pa[y]]) {
101            flower[b].push_back(x),
102            flower[b].push_back(y = st[match[x]]),
103            q_push(y);
104        }
105        set_st(b, b);
106        for(int x = 1; x <= n_x; ++x) g[b][x].w = g[x]
107            → [b].w = 0;
108        for(int x = 1; x <= n; ++x) flower_from[b][x] =
109            → 0;
110    }
111    for(size_t i = 0 ; i < flower[b].size(); ++i){
112        int xs = flower[b][i];
113        for(int x = 1; x <= n_x; ++x)
114            if(g[b][x].w == 0 || e_delta(g(xs)[x])
115                → < e_delta(g[b][x]))
116                g[b][x] = g(xs)[x], g[x][b] = g[x]
117                → [xs];
118        for(int x = 1;x <= n; ++x)
119            if(flower_from[xs][x]) flower_from[b]
120                → [x] = xs;
121    }
122    set_slack(b);
123 }
124 inline void expand_blossom(int b){ // S[b] == 1
125     for(size_t i = 0; i < flower[b].size(); ++i)
126         set_st(flower[b][i], flower[b][i]);
127     int xr = flower_from[b][g[b][pa[b]].u], pr =
128         → get_pr(b, xr);
129     for(int i = 0; i < pr; i += 2){
130         int xs = flower[b][i], xns = flower[b][i +
131             → 1];
132         pa[xs] = g[xns][xs].u;
133         S[xs] = 1, S[xns] = 0;
134         slack[xs] = 0, set_slack(xns);
135         q_push(xns);
136     }
137     S[xr] = 1, pa[xr] = pa[b];
138     for(size_t i = pr + 1;i < flower[b].size(); +
139         → +i){
140         int xs = flower[b][i];
141         S[xs] = -1, set_slack(xs);
142     }
143     st[b] = 0;
144 }
145 inline bool on_found_edge(const edge &e){
146     int u = st[e.u], v = st[e.v];
147     if(S[v] == -1){
148         pa[v] = e.u, S[v] = 1;
149         int nu = st[match[v]];
150         slack[v] = slack[nu] = 0;
151         S[nu] = 0, q_push(nu);
152     } else if(S[v] == 0){
153         int lca = get_lca(u, v);
154         if(!lca) return augment(u, v), augment(v,
155             → u), true;
156         else add_blossom(u, lca, v);
157     }
158     return false;
159 }
160 inline bool matching(){
161     memset(S + 1, -1, sizeof(int) * n_x);
162     memset(slack + 1, 0, sizeof(int) * n_x);
163     q = queue<int>();
164     for(int x = 1;x <= n_x; ++x)
165         if(st[x] == x && !match[x]) pa[x]=0,
166             → S[x]=0, q.push(x);
167     if(q.empty())return false;
168     for(;;){
169         while(q.size()){
170             int u = q.front();q.pop();
171             if(S[st[u]] == 1)continue;
172             for(int v = 1;v <= n; ++v)
173                 if(g[u][v].w > 0 && st[u] != st[v])
174                     → {
175                         if(e_delta(g[u][v]) == 0)
176                             if(on_found_edge(g[u]
177                                 → [v]))return true;
178                         else update_slack(u, st[v]);
179                     }
180         }
181     }
182 }

```

```

161         }
162     }
163     int d = INF;
164     for(int b = n + 1; b <= n_x; ++b)
165     {
166         if(st[b] == b && S[b] == 1)d = min(d,
167             → lab[b]/2);
168         for(int x = 1; x <= n_x; ++x)
169         {
170             if(st[x] == x && slack[x]){
171                 if(S[x] == -1)d = min(d,
172                     → e_delta(g[slack[x]][x]));
173                 else if(S[x] == 0)d = min(d,
174                     → e_delta(g[slack[x]][x])/2);
175             }
176             for(int u = 1; u <= n; ++u){
177                 if(S[st[u]] == 0){
178                     if(lab[u] <= d) return 0;
179                     lab[u] -= d;
180                 }else if(S[st[u]] == 1)lab[u] += d;
181             }
182             for(int b = n+1; b <= n_x; ++b)
183             {
184                 if(st[b] == b){
185                     if(S[st[b]] == 0) lab[b] += d * 2;
186                     else if(S[st[b]] == 1) lab[b] -= d
187                         → * 2;
188                 }
189             q=queue<int>();
190             for(int x = 1; x <= n_x; ++x)
191             {
192                 if(st[x] == x && slack[x] &&
193                     → st[slack[x]] != x &&
194                     → e_delta(g[slack[x]][x]) == 0)
195                     if(on_found_edge(g[slack[x]]
196                         → [x]))return true;
197             for(int b = n + 1; b <= n_x; ++b)
198             {
199                 if(st[b] == b && S[b] == 1 && lab[b] ==
200                     → 0)expand_blossom(b);
201             }
202             return false;
203         }
204         inline pair<long long, int> solve(){
205             memset(match + 1, 0, sizeof(int) * n);
206             n_x = n;
207             int n_matches = 0;
208             long long tot_weight = 0;
209             for(int u = 0; u <= n; ++u) st[u] = u,
210                 → flower[u].clear();
211             int w_max = 0;
212             for(int u = 1; u <= n; ++u)
213                 for(int v = 1; v <= n; ++v){
214                     flower_from[u][v] = (u == v ? u : 0);
215                     w_max = max(w_max, g[u][v].w);
216                 }
217             for(int u = 1; u <= n; ++u) lab[u] = w_max;
218             while(matching()) ++n_matches;
219             for(int u = 1; u <= n; ++u)
220                 if(match[u] && match[u] < u)
221                     tot_weight += g[u][match[u]].w;
222             return make_pair(tot_weight, n_matches);
223         }
224         inline void init(){
225             for(int u = 1; u <= n; ++u)
226                 for(int v = 1; v <= n; ++v)
227                     g[u][v]=edge(u, v, 0);
228         }
229     };

```

3.7.4 原理

设图 G 的Tutte矩阵是 \tilde{A} , 首先是最基础的引理:

- G 的最大匹配大小是 $\frac{1}{2}\text{rank} \tilde{A}$.
- $(\tilde{A}^{-1})_{i,j} \neq 0$ 当且仅当 $G - \{v_i, v_j\}$ 有完美匹配.
(考虑到逆矩阵与伴随矩阵的关系, 这是显然的.)

构造最大匹配的方法见板子. 对于更一般的问题, 可以借助构造方法转化为完美匹配问题.

设最大匹配的大小为 k , 新建 $n - 2k$ 个辅助点, 让它们和其他所有点连边, 那么如果一个点匹配了一个辅助点, 就说明它在原图的匹配中不匹配任何点.

- 最大匹配的可行边: 对原图中的任意一条边 (u, v) , 如果删掉 u, v 后新图仍然有完美匹配 (也就是 $\tilde{A}_{u,v}^{-1} \neq 0$), 则它是一条可行边.
- 最大匹配的必须边: 待补充
- 最大匹配的必须点: 可以删掉这个点和一个辅助点, 然后判断剩下的图是否还有完美匹配, 如果有则说明它不是必须的, 否则是必须的. 只需要用到逆矩阵即可.
- 最大匹配的可行点: 显然对于任意一个点, 只要它不是孤立点, 就是可行点.

3.8 支配树

记得建反图!

```

1 vector<int> G[maxn], R[maxn], son[maxn]; // R是反图,
2     → son存的是sdm树上的儿子
3 int ufs[maxn];
4
5 int idom[maxn], sdom[maxn], anc[maxn]; // anc:
6     → sdom的dfn最小的祖先
7 int p[maxn], dfn[maxn], id[maxn], tim;
8
9 int findufs(int x) {
10    if (ufs[x] == x)
11        return x;
12
13    int t = ufs[x];
14    ufs[x] = findufs(ufs[x]);
15
16    if (dfn[sdom[anc[x]]] > dfn[sdom[anc[t]]])
17        anc[x] = anc[t];
18
19    return ufs[x];
20}
21
22 void dfs(int x) {
23    dfn[x] = ++tim;
24    id[tim] = x;
25    sdom[x] = x;
26
27    for (int y : G[x])
28        if (!dfn[y]) {
29            p[y] = x;
30            dfs(y);
31        }
32}
33
34 void get_dominator(int n) {
35    for (int i = 1; i <= n; i++)
36        ufs[i] = anc[i] = i;
37
38    dfs(1);
39
40    for (int i = n; i > 1; i--) {
41        int x = id[i];
42
43        for (int y : R[x])
44            if (dfn[y]) {

```

```

45     findufs(y);
46     if (dfn[sdom[x]] > dfn[sdom[anc[y]]])
47         sdom[x] = sdom[anc[y]];
48     }
49
50     son[sdom[x]].push_back(x);
51     ufs[x] = p[x];
52
53     for (int u : son[p[x]]) {
54         findufs(u);
55         idom[u] = (sdom[u] == sdom[anc[u]] ? p[x] :
56             → anc[u]);
57     }
58
59     son[p[x]].clear();
60 }
61
62 for (int i = 2; i <= n; i++) {
63     int x = id[i];
64
65     if (idom[x] != sdom[x])
66         idom[x] = idom[idom[x]];
67
68     son[idom[x]].push_back(x);
69 }
```

```

20 // dfs
21 bool dfs(int x) {
22     if (vis[x ^ 1])
23         return false;
24
25     if (vis[x])
26         return true;
27
28     vis[x] = true;
29     stk[++top] = x;
30
31     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
32         if (!dfs(G[x][i]))
33             return false;
34
35     return true;
36 }
```

3.9 2-SAT

如果限制满足对称性 (每个命题的逆否命题对应的边也存在), 那么可以使用Tarjan算法求SCC搞定.

具体来说就是, 如果某个变量的两个点在同一SCC中则显然无解, 否则按拓扑序倒序尝试选择每个SCC即可.

由于Tarjan算法的特性, 找到SCC的顺序就是拓扑序倒序, 所以判断完是否有解之后, 每个变量只需要取SCC编号较小的那个.

```

1 if (!ok)
2     printf("IMPOSSIBLE\n");
3 else {
4     printf("POSSIBLE\n");
5
6     for (int i = 1; i <= n; i++)
7         printf("%d%c",
8             sccid[i * 2 - 1] > sccid[i * 2],
9             → i < n ? ' ' : '\n');
10 }
```

如果要字典序最小就用DFS, 注意可以压位优化. 另外代码是0-base的.

```

1 bool vis[maxn];
2 int stk[maxn], top;
3
4 // 主函数
5 for (int i = 0; i < n; i += 2)
6     if (!vis[i] && !vis[i ^ 1]) {
7         top = 0;
8         if (!dfs(i)) {
9             while (top)
10                 vis[stk[top--]] = false;
11
12             if (!dfs(i + 1))
13                 bad = true;
14             break;
15         }
16     }
17
18 // 最后stk中的所有元素就是选中的值
19 }
```

3.10 最大流

3.10.1 Dinic

```

1 // 注意Dinic适用于二分图或分层图, 对于一般稀疏图ISAP更优,
2 // 稠密图则HLPP更优
3
4 struct edge {
5     int to, cap, prev;
6 } e[maxn * 2];
7
8 int last[maxn], len, d[maxn], cur[maxn], q[maxn];
9
10 // main函数里要初始化
11 memset(last, -1, sizeof(last));
12
13 void AddEdge(int x, int y, int z) {
14     e[len].to = y;
15     e[len].cap = z;
16     e[len].prev = last[x];
17     last[x] = len++;
18 }
19
20 void addedge(int x, int y, int z) {
21     AddEdge(x, y, z);
22     AddEdge(y, x, 0);
23 }
24
25 void bfs() {
26     int head = 0, tail = 0;
27     memset(d, -1, sizeof(int) * (t + 5));
28     q[tail++] = s;
29     d[s] = 0;
30
31     while (head != tail) {
32         int x = q[head++];
33         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
34             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == -1) {
35                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
36                 q[tail++] = e[i].to;
37             }
38     }
39
40     int dfs(int x, int a) {
41         if (x == t || !a)
42             return a;
43
44         int flow = 0, f;
45         for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
46             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == d[x] + 1 &&
47                 → (f = dfs(e[i].to, min(e[i].cap, a)))) {
48             e[i].cap -= f;
49             e[i ^ 1].cap += f;
50             cur[x] = i;
51             flow += f;
52         }
53     }
54 }
```

```

47     e[i].cap -= f;
48     e[i^1].cap += f;
49     flow += f;
50     a -= f;
51
52     if (!a)
53         break;
54
55 }
56
57 return flow;
58}
59
60 int Dinic() {
61     int flow = 0;
62     while (bfs(), ~d[t]) {
63         memcpy(cur, last, sizeof(int) * (t + 5));
64         flow += dfs(s, inf);
65     }
66
67 return flow;
68}

```

```

42     }
43 }
44
45 // augment函数 O(n) 沿增广路增广一次，返回增广的流量
46 int augment() {
47     int a = (~0u) >> 1; // INT_MAX
48
49     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
50         a = min(a, e[p[x]].cap);
51
52     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
53         e[p[x]].cap -= a;
54         e[p[x] ^ 1].cap += a;
55     }
56
57     return a;
58}
59
60 // 主过程 O(n^2 m)，返回最大流的流量
61 // 注意这里的n是编号最大值，在这个值不为n的时候一定要开个
62 // 变量记录下来并修改代码
63 int ISAP() {
64     bfs();
65
66     memcpy(cur, last, sizeof(cur));
67
68     int x = s, flow = 0;
69
70     while (d[s] < n) {
71         if (x == t) { // 如果走到了t就增广一次，并返
72             // 回s重新找增广路
73             flow += augment();
74             x = s;
75         }
76
77         bool ok = false;
78         for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
79             if (e[i].cap && d[x] == d[e[i].to] + 1) {
80                 p[e[i].to] = i;
81                 x = e[i].to;
82
83                 ok = true;
84                 break;
85             }
86
87         if (!ok) { // 修改距离标号
88             int tmp = n - 1;
89             for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
90                 if (e[i].cap)
91                     tmp = min(tmp, d[e[i].to] + 1);
92
93             if (!--c[d[x]])
94                 break; // gap优化，一定要加上
95
96             c[d[x]] = tmp++;
97             cur[x] = last[x];
98
99             if (x != s)
100                 x = e[p[x] ^ 1].to;
101         }
102     }
103
104 // 重要！main函数最前面一定要加上如下初始化
105 memset(last, -1, sizeof(last));
106

```

3.10.2 ISAP

可能有毒，慎用。

```

1 // 注意ISAP适用于一般稀疏图，对于二分图或分层图情
2 // → 况Dinic比较优，稠密图则HLPP更优
3
4 // 边的定义
5 // 这里没有记录起点和反向边，因为反向边即为正向边xor 1,
6 // → 起点即为反向边的终点
7 struct edge {
8     int to, cap, prev;
9 } e[maxe * 2];
10
11 // 全局变量和数组定义
12 int last[maxn], cnte = 0, d[maxn], p[maxn], c[maxn],
13 // → cur[maxn], q[maxn];
14 int n, m, s, t; // s, t一定要开成全局变量
15
16 void AddEdge(int x, int y, int z) {
17     e[cnte].to = y;
18     e[cnte].cap = z;
19     e[cnte].prev = last[x];
20     last[x] = cnte++;
21 }
22
23 void addedge(int x, int y, int z) {
24     AddEdge(x, y, z);
25     AddEdge(y, x, 0);
26 }
27
28 // 预处理到t的距离标号
29 // 在测试数据组数较少时可以省略，把所有距离标号初始化为0
30 void bfs() {
31     memset(d, -1, sizeof(d));
32
33     int head = 0, tail = 0;
34     d[t] = 0;
35     q[tail++] = t;
36
37     while (head != tail) {
38         int x = q[head++];
39         c[d[x]]++;
40
41         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
42             if (e[i].cap && d[e[i].to] == -1) {
43                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
44                 q[tail++] = e[i].to;
45             }
46     }
47 }
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106

```

3.10.3 HLPP 最高标号预流推进

```

1 constexpr int maxn = 1205, maxe = 120005;
2
3 struct edge {
4     int to, cap, prev;
5 } e[maxn * 2];
6
7 int n, m, s, t;
8 int last[maxn], cnte;
9 int h[maxn], gap[maxn * 2];
10 long long ex[maxn]; // 多余流量
11 bool inq[maxn];
12
13 struct cmp {
14     bool operator() (int x, int y) const {
15         return h[x] < h[y];
16     }
17 };
18 priority_queue<int, vector<int>, cmp> heap;
19
20 void adde(int x, int y, int z) {
21     e[cnte].to = y;
22     e[cnte].cap = z;
23     e[cnte].prev = last[x];
24     last[x] = cnte++;
25 }
26
27 void addedge(int x, int y, int z) {
28     adde(x, y, z);
29     adde(y, x, 0);
30 }
31
32 bool bfs() {
33     static int q[maxn];
34
35     fill(h, h + n + 1, 2 * n); // 如果没有全局的n, 记得
36     // 改这里
37     int head = 0, tail = 0;
38     q[tail++] = t;
39     h[t] = 0;
40
41     while (head < tail) {
42         int x = q[head++];
43         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
44             if (e[i ^ 1].cap && h[e[i].to] > h[x] + 1)
45                 {
46                     h[e[i].to] = h[x] + 1;
47                     q[tail++] = e[i].to;
48                 }
49     }
50
51     return h[s] < 2 * n;
52 }
53
54 void push(int x) {
55     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
56         if (e[i].cap && h[x] == h[e[i].to] + 1) {
57             int d = min(ex[x], (long long)e[i].cap);
58
59             e[i].cap -= d;
60             e[i ^ 1].cap += d;
61             ex[x] -= d;
62             ex[e[i].to] += d;
63
64             if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
65                 !inq[e[i].to])
66                 heap.push(e[i].to);
67                 inq[e[i].to] = true;
68         }
69     }
70 }
71
72 void relabel(int x) {
73     h[x] = 2 * n;
74
75     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
76         if (e[i].cap)
77             h[x] = min(h[x], h[e[i].to] + 1);
78 }
79
80 long long hlpp() {
81     if (!bfs())
82         return 0;
83
84     // memset(gap, 0, sizeof(int) * 2 * n);
85     h[s] = n;
86
87     for (int i = 1; i <= n; i++)
88         gap[h[i]]++;
89
90     for (int i = last[s]; ~i; i = e[i].prev)
91         if (e[i].cap) {
92             int d = e[i].cap;
93
94             e[i].cap -= d;
95             e[i ^ 1].cap += d;
96             ex[s] -= d;
97             ex[e[i].to] += d;
98
99             if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
100                 !inq[e[i].to]) {
101                 heap.push(e[i].to);
102                 inq[e[i].to] = true;
103             }
104         }
105
106     while (!heap.empty()) {
107         int x = heap.top();
108         heap.pop();
109         inq[x] = false;
110
111         push(x);
112         if (ex[x]) {
113             if (!--gap[h[x]]) { // gap
114                 for (int i = 1; i <= n; i++)
115                     if (i != s && i != t && h[i] >
116                         h[x])
117                         h[i] = n + 1;
118
119             relabel(x);
120             ++gap[h[x]];
121             heap.push(x);
122             inq[x] = true;
123         }
124     }
125
126     return ex[t];
127 }
128
129 //记得初始化
130 memset(last, -1, sizeof(last));

```

3.11 费用流

3.11.1 SPFA 费用流

```

1 constexpr int maxn = 20005, maxm = 200005;
2
3 struct edge {
4     int to, prev, cap, w;
5 } e[maxm * 2];
6
7 int last[maxn], cnte, d[maxn], p[maxn]; // 记得把last初
→ 始化成-1, 不然会死循环
8 bool inq[maxn];
9
10 void spfa(int s) {
11
12     memset(d, -63, sizeof(d));
13     memset(p, -1, sizeof(p));
14
15     queue<int> q;
16
17     q.push(s);
18     d[s] = 0;
19
20     while (!q.empty()) {
21         int x = q.front();
22         q.pop();
23         inq[x] = false;
24
25         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
26             if (e[i].cap) {
27                 int y = e[i].to;
28
29                 if (d[x] + e[i].w > d[y]) {
30                     p[y] = i;
31                     d[y] = d[x] + e[i].w;
32                     if (!inq[y]) {
33                         q.push(y);
34                         inq[y] = true;
35                     }
36                 }
37             }
38     }
39 }
40
41 int mcmf(int s, int t) {
42     int ans = 0;
43
44     while (spfa(s), d[t] > 0) {
45         int flow = 0x3f3f3f3f;
46         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
47             flow = min(flow, e[p[x]].cap);
48
49         ans += flow * d[t];
50
51         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
52             e[p[x]].cap -= flow;
53             e[p[x] ^ 1].cap += flow;
54         }
55     }
56
57     return ans;
58 }
59
60 void add(int x, int y, int c, int w) {
61     e[cnte].to = y;
62     e[cnte].cap = c;
63     e[cnte].w = w;
64
65     e[cnte].prev = last[x];
66     last[x] = cnte++;
67 }

```

```

69 void addedge(int x, int y, int c, int w) {
70     add(x, y, c, w);
71     add(y, x, 0, -w);
72 }

```

3.11.2 Dijkstra 费用流

有的地方也叫原始-对偶费用流.

原理和求多源最短路的Johnson算法是一样的, 都是给每个点维护一个势 h_u , 使得对任何有向边 $u \rightarrow v$ 都满足 $w + h_u - h_v \geq 0$.

如果有负费用则从 s 开始跑一遍SPFA初始化, 否则可以直接初始化 $h_u = 0$.

每次增广时得到的路径长度就是 $d_{s,t} + h_t$, 增广之后让所有 $h_u = h'_u + d'_{s,u}$, 直到 $d_{s,t} = \infty$ (最小费用最大流) 或 $d_{s,t} \geq 0$ (最小费用流) 为止.

注意最大费用流要转成取负之后的最小费用流, 因为Dijkstra求的是最短路.

```

1 struct edge {
2     int to, cap, prev, w;
3 } e[maxe * 2];
4
5 int last[maxn], cnte;
6
7 long long d[maxn], h[maxn];
8 int p[maxn];
9
10 bool vis[maxn];
11 int s, t;
12
13 void Adde(int x, int y, int z, int w) {
14     e[cnte].to = y;
15     e[cnte].cap = z;
16     e[cnte].w = w;
17     e[cnte].prev = last[x];
18     last[x] = cnte++;
19 }
20
21 void addedge(int x, int y, int z, int w) {
22     Adde(x, y, z, w);
23     Adde(y, x, 0, -w);
24 }
25
26 void dijkstra() {
27     memset(d, 63, sizeof(d));
28     memset(vis, 0, sizeof(vis));
29
30     priority_queue<pair<long long, int>> heap;
31
32     d[s] = 0;
33     heap.push(make_pair(0ll, s));
34
35     while (!heap.empty()) {
36         int x = heap.top().second;
37         heap.pop();
38
39         if (vis[x])
40             continue;
41
42         vis[x] = true;
43         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
44             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] > d[x] +
45                 → e[i].w + h[x] - h[e[i].to]) {
46                 d[e[i].to] = d[x] + e[i].w + h[x] -
47                 → h[e[i].to];
48                 p[e[i].to] = i;
49                 heap.push(make_pair(-d[e[i].to],
50                                     → e[i].to));
51             }
52     }
53 }

```

```

48     }
49 }
50
51
52 pair<long long, long long> mcmf() {
53     /*
54     spfa();
55     for (int i = 1; i <= t; i++)
56         h[i] = d[i];
57     // 如果初始有负权就像这样跑一遍SPFA预处理
58 */
59
60     long long flow = 0, cost = 0;
61
62     while (dijkstra(), d[t] < 0x3f3f3f3f) {
63         for (int i = 1; i <= t; i++)
64             h[i] += d[i];
65
66         int a = 0x3f3f3f3f;
67
68         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
69             a = min(a, e[p[x]].cap);
70
71         flow += a;
72         cost += (long long)a * h[t];
73
74         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
75             e[p[x]].cap -= a;
76             e[p[x] ^ 1].cap += a;
77         }
78     }
79
80     return make_pair(flow, cost);
81 }
82
83 // 记得初始化
84 memset(last, -1, sizeof(last));

```

```

24     vector<unsigned int> isq, cur;
25     vector<flow_t> ex;
26     vector<cost_t> h;
27
28     mcSFlow(int _N, int _S, int _T): eps(0), N(_N),
29             S(_S), T(_T), G(_N) {}
30
31     void add_edge(int a, int b, flow_t cap, cost_t
32             cost) {
33         assert(cap >= 0);
34         assert(a >= 0 && a < N && b >= 0 && b < N);
35
36         if (a == b) {
37             assert(cost >= 0);
38             return;
39         }
40
41         cost *= N;
42         eps = max(eps, abs(cost));
43         G[a].emplace_back(b, cost, cap, G[b].size());
44         G[b].emplace_back(a, -cost, 0, G[a].size() -
45             1);
46     }
47
48     void add_flow(Edge &e, flow_t f) {
49         Edge &back = G[e.to][e.rev];
50
51         if (!ex[e.to] && f)
52             hs[h[e.to]].push_back(e.to);
53
54         e.f -= f;
55         ex[e.to] += f;
56         back.f += f;
57         ex[back.to] -= f;
58     }
59
60     vector<vector<int>> hs;
61     vector<int> co;
62
63     flow_t max_flow() {
64         ex.assign(N, 0);
65         h.assign(N, 0);
66         hs.resize(2 * N);
67         co.assign(2 * N, 0);
68         cur.assign(N, 0);
69         h[S] = N;
70         ex[T] = 1;
71         co[0] = N - 1;
72
73         for (auto &e : G[S])
74             add_flow(e, e.f);
75
76         if (hs[0].size())
77             for (int hi = 0; hi >= 0;) {
78                 int u = hs[hi].back();
79                 hs[hi].pop_back();
80
81                 while (ex[u] > 0) { // discharge u
82                     if (cur[u] == G[u].size())
83                         h[u] = 1e9;
84
85                     for (unsigned int i = 0; i <
86                         G[u].size(); ++i) {
87                         auto &e = G[u][i];
88
89                         if (e.f && h[u] > h[e.to] +
90                             1) {
91                             h[u] = h[e.to] + 1,
92                             cur[u] = i;
93                         }
94                     }
95                 }
96             }
97         }
98     }
99
100    const cost_t INF_COST =
101        numeric_limits<cost_t>::max() / 2;
102
103    cost_t eps;
104    int N, S, T;
105    vector<vector<Edge>> G;

```

3.11.3 预流推进费用流 (可处理负环) $O(nm \log C)$

不是很懂什么原理, 待研究.

```

1 // Push-Relabel implementation of the cost-scaling
2     ↪ algorithm
3 // Runs in O( <max_flow> * log(V * max_edge_cost)) = O(
4     ↪ V^3 * log(V * C))
5 // Really fast in practice, 3e4 edges are fine.
6 // Operates on integers, costs are multiplied by N!!
7
8 #include <bits/stdc++.h>
9 using namespace std;
10
11 // source: unknown
12 template<typename flow_t = int, typename cost_t = int>
13 struct mcSFlow {
14     struct Edge {
15         cost_t c;
16         flow_t f;
17         int to, rev;
18         Edge(int _to, cost_t _c, flow_t _f, int _rev):
19             c(_c), f(_f), to(_to), rev(_rev) {}
20     };
21
22     static constexpr cost_t INF_COST =
23         numeric_limits<cost_t>::max() / 2;
24
25     cost_t eps;
26     int N, S, T;
27     vector<vector<Edge>> G;

```

```

87         }
88     }
89
90     if (++co[h[u]], !--co[hi] && hi
91         ↪ < N)
92         for (int i = 0; i < N; ++i)
93             if (hi < h[i] && h[i] <
94                 ↪ N) {
95                 --co[h[i]];
96                 h[i] = N + 1;
97             }
98
99         hi = h[u];
100    }
101
102    else if (G[u][cur[u]].f && h[u] ==
103             ↪ h[G[u][cur[u]].to] + 1)
104        add_flow(G[u][cur[u]],
105                 ↪ min(ex[u], G[u]
106                 ↪ [cur[u]].f));
107
108    else
109        ++cur[u];
110
111    while (hi >= 0 && hs[hi].empty())
112        --hi;
113
114    return -ex[S];
115
116 void push(Edge &e, flow_t amt) {
117     if (e.f < amt)
118         amt = e.f;
119
120     e.f -= amt;
121     ex[e.to] += amt;
122     G[e.to][e.rev].f += amt;
123     ex[G[e.to][e.rev].to] -= amt;
124 }
125
126 void relabel(int vertex) {
127     cost_t newHeight = -INFCOST;
128
129     for (unsigned int i = 0; i < G[vertex].size();
130          → ++i) {
131         Edge const &e = G[vertex][i];
132
133         if (e.f && newHeight < h[e.to] - e.c) {
134             newHeight = h[e.to] - e.c;
135             cur[vertex] = i;
136         }
137     }
138
139     h[vertex] = newHeight - eps;
140
141     static constexpr int scale = 2;
142
143     pair<flow_t, cost_t> minCostMaxFlow() {
144         cost_t retCost = 0;
145
146         for (int i = 0; i < N; ++i)
147             for (Edge &e : G[i])
148                 retCost += e.c * (e.f);
149
150         isq.assign(N, 0);
151         cur.assign(N, 0);
152         queue<int> q;
153
154         for (; eps; eps >= scale) {
155             //refine
156             fill(cur.begin(), cur.end(), 0);
157
158             for (int i = 0; i < N; ++i)
159                 for (auto &e : G[i])
160                     if (h[i] + e.c - h[e.to] < 0 &&
161                         → e.f)
162                         push(e, e.f);
163
164             for (int i = 0; i < N; ++i) {
165                 if (ex[i] > 0) {
166                     q.push(i);
167                     isq[i] = 1;
168                 }
169             }
170
171             // make flow feasible
172             while (!q.empty()) {
173                 int u = q.front();
174                 q.pop();
175                 isq[u] = 0;
176
177                 while (ex[u] > 0) {
178                     if (cur[u] == G[u].size())
179                         relabel(u);
180
181                     for (unsigned int &i = cur[u],
182                           → max_i = G[u].size(); i < max_i;
183                           → ++i) {
184                         Edge &e = G[u][i];
185
186                         if (h[u] + e.c - h[e.to] < 0) {
187                             push(e, ex[u]);
188
189                             if (ex[e.to] > 0 &&
190                                 → isq[e.to] == 0) {
191                                 q.push(e.to);
192                                 isq[e.to] = 1;
193                             }
194                         }
195                     }
196                 }
197
198                 if (eps > 1 && eps >= scale == 0)
199                     eps = 1 << scale;
200             }
201
202             for (int i = 0; i < N; ++i)
203                 for (Edge &e : G[i])
204                     retCost -= e.c * (e.f);
205
206             return make_pair(retFlow, retCost / 2 / N);
207         }
208
209         flow_t getFlow(Edge const &e) {
210             return G[e.to][e.rev].f;
211         }
212     };
213
214     int main() {

```

```

215
216     int n, m;
217     scanf("%d%d", &n, &m);
218
219     mcSFlow<long long, long long> mcmf(n, 0, n - 1);
220
221     while (m--) {
222         int x, y, z, w;
223         scanf("%d%d%d%d", &x, &y, &z, &w);
224
225         mcmf.add_edge(x - 1, y - 1, z, w);
226     }
227
228     auto [flow, cost] = mcmf.minCostMaxFlow();
229
230     printf("%lld %lld\n", flow, cost);
231
232     return 0;
233 }
```

3.12 网络流原理

3.12.1 最大流

- 判断一条边是否必定满流

在残量网络中跑一遍Tarjan, 如果某条满流边的两端处于同一SCC中则说明它不一定满流. (因为可以找出包含反向边的环, 增广之后就不满流了.)

3.12.2 最小割

首先牢记最小割的定义: 选权值和尽量小的一些边, 使得删除这些边之后 s 无法到达 t .

- 最小割输出一种方案

在残量网络上从 S 开始floodfill, 源点可达的记为 S 集, 不可达的记为 T , 如果一条边的起点在 S 集而终点在 T 集, 就将其加入最小割中.

- 最小割的可行边与必须边

- 可行边: 满流, 且残量网络上不存在 u 到 v 的路径, 也就是 u 和 v 不在同一SCC中. (实际上也就是最大流必定满流的边.)
- 必须边: 满流, 且残量网络上 S 可达 u, v 可达 T .

- 字典序最小的最小割

直接按字典序从小到大的顺序依次判断每条边能否在最小割中即可.

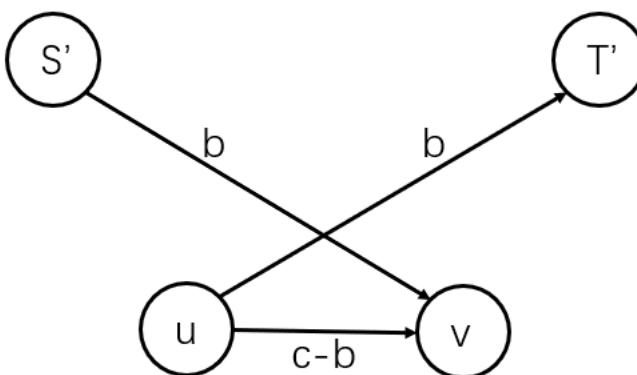
如果一条边是可行边, 我们就需要把它删掉, 同时进行退流, $u \rightarrow s$ 和 $t \rightarrow v$ 都退掉等同于这条边容量的流量.

退流用Dinic实现即可.

3.12.3 上下界网络流

无源汇上下界可行流

新建源汇 S', T' , 然后如图所示转化每一条边.



在新图跑一遍最大流之后检查一遍辅助边, 如果有辅助边没满流则无解, 否则把每条边的流量加上 b 就是一组可行方案.

有源汇上下界最大流

如果不需判断是否有解的话可以直接按照和上面一样的方法转化. 因为附加边实际上算了两次流量, 所以最终答案应该减掉所有下界之和.

(另外这里如果要压缩附加边的话, 不能像无源汇的情况一样对每个点只开一个变量统计溢出的流量, 正确的做法是进出流量各统计一下, 每个点连两条附加边.)

如果需要判有解的话会出一点问题. 这时候就需要转化成无源汇的情况, 验证有解之后撤掉 T 到 S 的那条附加边再从 S 到 T 跑一遍最大流.

```

1 int ex[maxn], id[maxn];
2
3 int main() {
4
5     memset(last, -1, sizeof(last));
6
7     int n, m, src, sink;
8     scanf("%d%d%d", &n, &m, &src, &sink);
9     s = n + 1;
10    t = n + 2;
11
12    while (m--) {
13        int x, y, b, c;
14        scanf("%d%d%d", &x, &y, &b, &c);
15
16        addedge(x, y, c - b);
17
18        ex[y] += b;
19        ex[x] -= b;
20    }
21
22    for (int i = 1; i <= n; i++) {
23        id[i] = cnte;
24
25        if (ex[i] >= 0)
26            addedge(s, i, ex[i]);
27        else
28            addedge(i, t, -ex[i]);
29    }
30
31    addedge(sink, src, (~0u) >> 1);
32
33    Dinic();
34
35    if (any_of(id + 1, id + n + 1, [] (int i) {return
36        ~bool e[i].cap;})) {
37        printf("please go home to sleep\n");
38    } else {
39        int flow = e[cnte - 1].cap;
40        e[cnte - 1].cap = e[cnte - 2].cap = 0;
41        s = src;
42        t = sink;
43
44        printf("%d\n", flow + Dinic());
45    }
46
47    return 0;
48 }
```

有源汇上下界最小流

按照上面的方法转换后先跑一遍最大流, 然后撤掉超级源汇和附加边, 反过来跑一次最大流退流, 最大流减去退掉的流量就是最小流.

3.12.4 常见建图方法

- **最大流/费用流**

流量不是很多的时候可以理解成很多条路径，并且每条边可以经过的次数有限。

- **最小割**

常用的模型是**最大权闭合子图**。当然它并不是万能的，因为限制条件可以带权值。

1. 如果某些点全部在 S 集或者 T 集则获得一个正的收益

把这个条件建成一个点，向要求的点连 ∞ 边，然后 s 向它连 ∞ 边。（如果是 T 集就都反过来）

那么如果它在 S 集就一定满足它要求的点都在 S 集，反之如果是 T 集亦然。

2. 如果两个点不在同一集合中则需要付出代价

建双向边，那显然如果它们不在同一集合中就需要割掉中间的边，付出对应的代价。

3. 二分图，如果相邻的两个点在同一集合则需要付出代价

染色后给一半的点反转源汇，就转换成上面的问题了。

3.12.5 例题

- 费用流

1. 序列上选和尽量大的数，但连续 k 个数中最多选 p 个。

费用流建图，先建一条 $n + 1$ 个点的无限容量的链表示不选，然后每个点往后面 k 个位置连边，答案是流量为 p 的最大费用流。因为条件等价于选 p 次并且每次选的所有数间隔都至少是 k 。

2. 还要求连续 k 个数中最少选 q 个。

任选一个位置把图前后切开就会发现通过截面的流量总和恰为 p 。注意到如果走了最开始的链就代表不选，因此要限制至少有 q 的流量不走链，那么只需要把链的容量改成 $p - q$ 就行了。

3.13 Prufer序列

对一棵有 $n \geq 2$ 个结点的树，它的Prufer编码是一个长为 $n - 2$ ，且每个数都在 $[1, n]$ 内的序列。

构造方法：每次选取编号最小的叶子结点，记录它的父亲，然后把它删掉，直到只剩两个点为止。（并且最后剩的两个点一定有一个是 n 号点。）

相应的，由Prufer编码重构树的方法：按顺序读入序列，每次选取编号最小的且度数为 1 的结点，把这个点和序列当前点连上，然后两个点剩余度数同时 -1。

Prufer编码的性质

- 每个至少 2 个结点的树都唯一对应一个Prufer编码。（当然也就可以做无根树哈希。）
- 每个点在Prufer序列中出现的次数恰好是度数 -1。所以如果给定某些点的度数然后求方案数，就可以用简单的组合数解决。

最后，构造和重构直接写都是 $O(n \log n)$ 的，想优化成线性需要一些技巧。

线性求Prufer序列代码：

```

1 // 0-based
2 vector<vector<int>> adj;
3 vector<int> parent;
4
5 void dfs(int v) {
6     for (int u : adj[v]) {
7         if (u != parent[v]) parent[u] = v, dfs(u);
8     }
9 }
10
11 vector<int> pruefer_code() { // pruefer是德语
12     int n = adj.size();
13     parent.resize(n), parent[n - 1] = -1;
14     dfs(n - 1);
15 }
```

```

16     int ptr = -1;
17     vector<int> degree(n);
18     for (int i = 0; i < n; i++) {
19         degree[i] = adj[i].size();
20         if (degree[i] == 1 && ptr == -1) ptr = i;
21     }
22
23     vector<int> code(n - 2);
24     int leaf = ptr;
25     for (int i = 0; i < n - 2; i++) {
26         int next = parent[leaf];
27         code[i] = next;
28         if (--degree[next] == 1 && next < ptr)
29             leaf = next;
30         else {
31             ptr++;
32             while (degree[ptr] != 1)
33                 ptr++;
34             leaf = ptr;
35         }
36     }
37     return code;
38 }
```

线性重构树代码：

```

1 // 0-based
2 vector<pair<int, int>> pruefer_decode(vector<int> const
3     &code) {
4     int n = code.size() + 2;
5     vector<int> degree(n, 1);
6     for (int i : code) degree[i]++;
7
8     int ptr = 0;
9     while (degree[ptr] != 1) ptr++;
10    int leaf = ptr;
11
12    vector<pair<int, int>> edges;
13    for (int v : code) {
14        edges.emplace_back(leaf, v);
15        if (--degree[v] == 1 && v < ptr)
16            leaf = v;
17        else {
18            ptr++;
19            while (degree[ptr] != 1)
20                ptr++;
21            leaf = ptr;
22        }
23    }
24    edges.emplace_back(leaf, n - 1);
25    return edges;
26 }
```

3.14 弦图相关

Forked from the template of NEW CODE!!.

1. 团数 \leq 色数，弦图团数 = 色数
2. 设 $next(v)$ 表示 $N(v)$ 中最前的点。令 w^* 表示所有满足 $A \in B$ 的 w 中最后的一个点，判断 $v \cup N(v)$ 是否为极大团，只需判断是否存在一个 w ，满足 $Next(w) = v$ 且 $|N(v)| + 1 \leq |N(w)|$ 即可。
3. 最小染色：完美消除序列从后往前依次给每个点染色，给每个点染上可以染的最小的颜色
4. 最大独立集：完美消除序列从前往后能选就选
5. 弦图最大独立集数 = 最小团覆盖数，最小团覆盖：设最大独立集为 $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ ，则 $\{p_1 \cup N(p_1), \dots, p_t \cup N(p_t)\}$ 为最小团覆盖

3.15 其他

3.15.1 Stoer-Wagner 全局最小割

```

1 const int N = 601;
2 int fa[N], siz[N], edge[N][N];
3
4 int find(int x) {
5     return fa[x] == x ? x : fa[x] = find(fa[x]);
6 }
7
8 int dist[N], vis[N], bin[N];
9 int n, m;
10
11 int contract(int& s, int& t) { // Find s, t
12     memset(dist, 0, sizeof(dist));
13     memset(vis, false, sizeof(vis));
14
15     int i, j, k, mincut, maxc;
16
17     for (i = 1; i <= n; i++) {
18         k = -1;
19         maxc = -1;
20
21         for (j = 1; j <= n; j++)
22             if (!bin[j] && !vis[j] && dist[j] > maxc) {
23                 k = j;
24                 maxc = dist[j];
25             }
26
27         if (k == -1)
28             return mincut;
29
30         s = t;
31         t = k;
32         mincut = maxc;
33         vis[k] = true;
34
35         for (j = 1; j <= n; j++)
36             if (!bin[j] && !vis[j]) dist[j] += edge[k]
37                 → [j];
38
39     return mincut;
40 }
41
42 const int inf = 0x3f3f3f3f;
43
44 int Stoer_Wagner() {
45     int mincut, i, j, s, t, ans;
46     for (mincut = inf, i = 1; i < n; i++) {
47         ans = contract(s, t);
48         bin[t] = true;
49
50         if (mincut > ans)
51             mincut = ans;
52         if (mincut == 0)
53             return 0;
54
55         for (j = 1; j <= n; j++)
56             if (!bin[j])
57                 edge[s][j] = (edge[j][s] += edge[j]
58                     → [t]);
59
60     return mincut;
61 }
62
63 int main() {
64     cin >> n >> m;

```

```

65     if (m < n - 1) {
66         cout << 0;
67         return 0;
68     }
69
70     for (int i = 1; i <= n; ++i)
71         fa[i] = i, siz[i] = 1;
72
73     for (int i = 1, u, v, w; i <= m; ++i) {
74         cin >> u >> v >> w;
75
76         int fu = find(u), fv = find(v);
77         if (fu != fv) {
78             if (siz[fu] > siz[fv]) swap(fu, fv);
79             fa[fu] = fv, siz[fv] += siz[fu];
80         }
81
82         edge[u][v] += w, edge[v][u] += w;
83     }
84
85     int fr = find(1);
86
87     if (siz[fr] != n) {
88         cout << 0;
89         return 0;
90     }
91
92     cout << Stoer_Wagner();
93
94     return 0;
95 }
96

```

4 数据结构

4.1 线段树

4.1.1 非递归线段树

- 如果 $M = 2^k$, 则只能维护 $[1, M - 2]$ 范围
- 找叶子: i 对应的叶子就是 $i + M$
- 单点修改: 找到叶子然后向上跳
- 区间查询: 左右区间各扩展一位, 转换成开区间查询

```

1 int query(int l, int r) {
2     l += M - 1;
3     r += M + 1;
4
5     int ans = 0;
6     while (l ^ r != 1) {
7         ans += sum[l ^ 1] + sum[r ^ 1];
8
9         l >>= 1;
10        r >>= 1;
11    }
12
13    return ans;
14 }
```

区间修改要标记永久化, 并且求区间和和求最值的代码不太一样.

区间加, 区间求和

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     int len = 1, cntl = 0, cntr = 0; // cntl, cntr 是左右
3     // 两边分别实际修改的区间长度
4     for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
5     // >>= 1, len <= 1) {
6         tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
7         if (~l & 1) tree[l ^ 1] += d * len, mark[l ^ 1]
8             // += d, cntl += len;
9         if (r & 1) tree[r ^ 1] += d * len, mark[r ^ 1]
10            // += d, cntr += len;
11     }
12
13     for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
14         tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
15
16     int query(int l, int r) {
17         int ans = 0, len = 1, cntl = 0, cntr = 0;
18         for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
19         // >>= 1, len <= 1) {
20             ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
21             if (~l & 1) ans += tree[l ^ 1], cntl += len;
22             if (r & 1) ans += tree[r ^ 1], cntr += len;
23         }
24
25         for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
26             ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
27
28         return ans;
29 }
```

区间加, 区间求最大值

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
3     // >>= 1) {
4         if (l < N) {
5             tree[l] = max(tree[l < 1], tree[l < 1 |
6                 // 1]) + mark[l];
7         }
8     }
9 }
```

```

5         tree[r] = max(tree[r < 1], tree[r < 1 |
6             // 1]) + mark[r];
7     }
8
9     if (~l & 1) {
10         tree[l ^ 1] += d;
11         mark[l ^ 1] += d;
12     }
13     if (r & 1) {
14         tree[r ^ 1] += d;
15         mark[r ^ 1] += d;
16     }
17 }
18
19 for (; l; l >= 1, r >= 1)
20     if (l < N) tree[l] = max(tree[l < 1], tree[l
21         // < 1 | 1]) + mark[l],
22             tree[r] = max(tree[r < 1], tree[r
23         // < 1 | 1]) + mark[r];
24
25 int query(int l, int r) {
26     int maxl = -INF, maxr = -INF;
27
28     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >= 1, r
29     // >= 1) {
30         maxl += mark[l];
31         maxr += mark[r];
32
33         if (~l & 1)
34             maxl = max(maxl, tree[l ^ 1]);
35         if (r & 1)
36             maxr = max(maxr, tree[r ^ 1]);
37
38         while (l) {
39             maxl += mark[l];
40             maxr += mark[r];
41
42             l >= 1;
43             r >= 1;
44         }
45     }
46
47     return max(maxl, maxr);
48 }
```

4.1.2 线段树维护矩形并

为线段树的每个结点维护 $cover_i$ 表示这个区间被完全覆盖的次数. 更新时分情况讨论, 如果当前区间已被完全覆盖则长度就是区间长度, 否则长度是左右儿子相加.

```

1 constexpr int maxn = 100005, maxm = maxn * 70;
2
3 int lc[maxm], rc[maxm], cover[maxm], sum[maxm], root,
4     // seg_cnt;
5 int s, t, d;
6
7 void refresh(int l, int r, int o) {
8     if (cover[o])
9         sum[o] = r - l + 1;
10    else
11        sum[o] = sum[lc[o]] + sum[rc[o]];
12
13 void modify(int l, int r, int &o) {
14     if (!o)
15         o = ++seg_cnt;
16
17     if (s <= l && t >= r) {
```

```

18     cover[o] += d;
19     refresh(l, r, o);
20
21     return;
22 }
23
24     int mid = (l + r) / 2;
25
26     if (s <= mid)
27         modify(l, mid, lc[o]);
28     if (t > mid)
29         modify(mid + 1, r, rc[o]);
30
31     refresh(l, r, o);
32 }
33
34 struct modi {
35     int x, l, r, d;
36
37     bool operator < (const modi &o) {
38         return x < o.x;
39     }
40 } a[maxn * 2];
41
42 int main() {
43
44     int n;
45     scanf("%d", &n);
46
47     for (int i = 1; i <= n; i++) {
48         int lx, ly, rx, ry;
49         scanf("%d%d%d%d", &lx, &ly, &rx, &ry);
50
51         a[i * 2 - 1] = {lx, ly + 1, ry, 1};
52         a[i * 2] = {rx, ly + 1, ry, -1};
53     }
54
55     sort(a + 1, a + n * 2 + 1);
56
57     int last = -1;
58     long long ans = 0;
59
60     for (int i = 1; i <= n * 2; i++) {
61         if (last != -1)
62             ans += (long long)(a[i].x - last) * sum[1];
63         last = a[i].x;
64
65         s = a[i].l;
66         t = a[i].r;
67         d = a[i].d;
68
69         modify(1, 1e9, root);
70     }
71
72     printf("%lld\n", ans);
73
74     return 0;
75 }
```

4.1.3 历史和

EC-Final2020 G, 原题是询问某个区间有多少子区间, 满足子区间中数的种类数为奇数.

离线之后转化成枚举右端点并用线段树维护左端点, 然后就是一个支持区间反转 (0/1 互换) 和询问历史和的线段树.

“既然标记会复合, 就说明在两个标记中间没有经过任何 pushup 操作

也就是说一个这两个标记对应着相同的 0 的数量以及相同的 1 的数量

那么标记对于答案的影响只能是 $a * 0 + b * 1$
我们维护 a, b 即可”

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = (1 << 20) + 5;
6
7 int cnt[maxn][2], mul[maxn][2];
8 bool rev[maxn];
9 long long sum[maxn];
10
11 int now;
12
13 void build(int l, int r, int o) {
14     cnt[o][0] = r - l + 1;
15
16     if (l == r)
17         return;
18
19     int mid = (l + r) / 2;
20
21     build(l, mid, o * 2);
22     build(mid + 1, r, o * 2 + 1);
23 }
24
25 void apply(int o, bool flip, long long w0, long long
26            w1) {
27     sum[o] += w0 * cnt[o][0] + w1 * cnt[o][1];
28
29     if (flip)
30         swap(cnt[o][0], cnt[o][1]);
31
32     if (rev[o])
33         swap(w0, w1);
34
35     mul[o][0] += w0;
36     mul[o][1] += w1;
37     rev[o] ^= flip;
38 }
39
40 void pushdown(int o) {
41     if (!mul[o][0] && !mul[o][1] && !rev[o])
42         return;
43
44     apply(o * 2, rev[o], mul[o][0], mul[o][1]);
45     apply(o * 2 + 1, rev[o], mul[o][0], mul[o][1]);
46
47     mul[o][0] = mul[o][1] = 0;
48     rev[o] = false;
49 }
50
51 void update(int o) {
52     cnt[o][0] = cnt[o * 2][0] + cnt[o * 2 + 1][0];
53     cnt[o][1] = cnt[o * 2][1] + cnt[o * 2 + 1][1];
54
55     sum[o] = sum[o * 2] + sum[o * 2 + 1];
56 }
57
58 int s, t;
59
60 void modify(int l, int r, int o) {
61     if (s <= l && t >= r) {
62         apply(o, true, 0, 0);
63         return;
64     }
65
66     int mid = (l + r) / 2;
67     pushdown(o);
68 }
```

```

67     if (s <= mid)
68         modify(l, mid, o * 2);
69     if (t > mid)
70         modify(mid + 1, r, o * 2 + 1);
71
72     update(o);
73 }
74
75
76 long long query(int l, int r, int o) {
77     if (s <= l && t >= r)
78         return sum[o];
79
80     int mid = (l + r) / 2;
81     pushdown(o);
82
83     long long ans = 0;
84     if (s <= mid)
85         ans += query(l, mid, o * 2);
86     if (t > mid)
87         ans += query(mid + 1, r, o * 2 + 1);
88
89     return ans;
90 }
91
92 vector<pair<int, int>> vec[maxn]; // pos, id
93
94 long long ans[maxn];
95 int a[maxn], last[maxn];
96
97 int main() {
98
99     int n;
100    scanf("%d", &n);
101
102    build(1, n, 1);
103
104    for (int i = 1; i <= n; i++)
105        scanf("%d", &a[i]);
106
107    int m;
108    scanf("%d", &m);
109
110    for (int i = 1; i <= m; i++) {
111        int l, r;
112        scanf("%d%d", &l, &r);
113
114        vec[r].emplace_back(l, i);
115    }
116
117    for (int i = 1; i <= n; i++) {
118        s = last[a[i]] + 1;
119        t = now = i;
120
121        modify(1, n, 1);
122        apply(1, false, 0, 1);
123
124        for (auto [l, k] : vec[i]) {
125            s = l;
126            ans[k] = query(1, n, 1);
127        }
128
129        last[a[i]] = i;
130    }
131
132    for (int i = 1; i <= m; i++)
133        printf("%lld\n", ans[i]);
134
135    return 0;
}

```

136 }

4.2 陈丹琦分治

4.2.1 动态图连通性 (分治并查集)

```

1  vector<pair<int, int>> seg[(1 << 22) + 5];
2
3  int s, t;
4  pair<int, int> d;
5
6  void add(int l, int r, int o) {
7      if (s > t)
8          return;
9
10     if (s <= l && t >= r) {
11         seg[o].push_back(d);
12         return;
13     }
14
15     int mid = (l + r) / 2;
16
17     if (s <= mid)
18         add(l, mid, o * 2);
19     if (t > mid)
20         add(mid + 1, r, o * 2 + 1);
21 }
22
23 int ufs[maxn], sz[maxn], stk[maxn], top;
24
25 int findufs(int x) {
26     while (ufs[x] != x)
27         x = ufs[x];
28
29     return ufs[x];
30 }
31
32 void link(int x, int y) {
33     x = findufs(x);
34     y = findufs(y);
35
36     if (x == y)
37         return;
38
39     if (sz[x] < sz[y])
40         swap(x, y);
41
42     ufs[y] = x;
43     sz[x] += sz[y];
44     stk[++top] = y;
45 }
46
47 int ans[maxm];
48
49 void solve(int l, int r, int o) {
50     int tmp = top;
51
52     for (auto pi : seg[o])
53         link(pi.first, pi.second);
54
55     if (l == r)
56         ans[l] = top;
57     else {
58         int mid = (l + r) / 2;
59
60         solve(l, mid, o * 2);
61         solve(mid + 1, r, o * 2 + 1);
62     }
63 }

```

```

64     for (int i = top; i > tmp; i--) {
65         int x = stk[i];
66
67         sz[ufs[x]] -= sz[x];
68         ufs[x] = x;
69     }
70
71     top = tmp;
72 }
73
74 map<pair<int, int>, int> mp;

```

4.2.2 四维偏序

```

1 // 四维偏序
2
3 void CDQ1(int l, int r) {
4     if (l >= r)
5         return;
6
7     int mid = (l + r) / 2;
8
9     CDQ1(l, mid);
10    CDQ1(mid + 1, r);
11
12    int i = l, j = mid + 1, k = l;
13
14    while (i <= mid && j <= r) {
15        if (a[i].x < a[j].x) {
16            a[i].ins = true;
17            b[k++] = a[i++];
18        }
19        else {
20            a[j].ins = false;
21            b[k++] = a[j++];
22        }
23    }
24
25    while (i <= mid) {
26        a[i].ins = true;
27        b[k++] = a[i++];
28    }
29
30    while (j <= r) {
31        a[j].ins = false;
32        b[k++] = a[j++];
33    }
34
35    copy(b + l, b + r + 1, a + l); // 后面的分治会破坏排
36    ↳ 序, 所以要复制一份
37
38    CDQ2(l, r);
39 }
40
41 void CDQ2(int l, int r) {
42     if (l >= r)
43         return;
44
45     int mid = (l + r) / 2;
46
47     CDQ2(l, mid);
48     CDQ2(mid + 1, r);
49
50     int i = l, j = mid + 1, k = l;
51
52     while (i <= mid && j <= r) {
53         if (b[i].y < b[j].y) {
54             if (b[i].ins)
55                 add(b[i].z, 1); // 树状数组

```

```

56                 t[k++] = b[i++];
57             }
58             else{
59                 if (!b[j].ins)
60                     ans += query(b[j].z - 1);
61
62                 t[k++] = b[j++];
63             }
64         }
65
66         while (i <= mid) {
67             if (b[i].ins)
68                 add(b[i].z, 1);
69
70             t[k++] = b[i++];
71         }
72
73         while (j <= r) {
74             if (!b[j].ins)
75                 ans += query(b[j].z - 1);
76
77             t[k++] = b[j++];
78         }
79
80         for (i = l; i <= mid; i++)
81             if (b[i].ins)
82                 add(b[i].z, -1);
83
84         copy(t + l, t + r + 1, b + l);
85     }

```

4.3 整体二分

修改和询问都要划分, 备份一下, 递归之前copy回去.

如果是满足可减性的问题 (例如查询区间 k 小数) 可以直接在划分的时候把查询的 k 修改一下. 否则需要维护一个全局的数据结构, 一般来说可以先递归右边再递归左边, 具体维护方法视情况而定.

以下代码以ZJOI K大数查询为例 (区间都添加一个数, 查询区间 k 大数).

```

1 int op[maxn], ql[maxn], qr[maxn]; // 1: modify 2:
2   ↳ query
3 long long qk[maxn]; // 修改和询问可以一起存
4
5 int ans[maxn];
6
7 void solve(int l, int r, vector<int> v) { // 如果想卡常
8   ↳ 可以用数组, 然后只需要传一个数组的l, r; 递归的时候类
9   ↳ 似归并反过来, 开两个辅助数组, 处理完再复制回去即可
10    if (v.empty())
11        return;
12
13    if (l == r) {
14        for (int i : v)
15            if (op[i] == 2)
16                ans[i] = l;
17
18        return;
19    }
20
21    int mid = (l + r) / 2;
22
23    vector<int> vl, vr;
24
25    for (int i : v) {
26        if (op[i] == 1) {
27            if (qk[i] <= mid)
28
```

```

25     |     vl.push_back(i);
26     |     else {
27     |         update(ql[i], qr[i], 1); // update是区间
28     |         ↪加
29     |         vr.push_back(i);
30     |     }
31     |     else {
32     |         long long tmp = query(ql[i], qr[i]);
33
34         if (qk[i] <= tmp) // 因为是k大数查询
35             vr.push_back(i);
36         else {
37             qk[i] -= tmp;
38             vl.push_back(i);
39         }
40     }
41 }
42
43 for (int i : vr)
44     if (op[i] == 1)
45         update(ql[i], qr[i], -1);
46
47 v.clear();
48
49 solve(l, mid, vl);
50 solve(mid + 1, r, vr);
51 }
52
53 int main() {
54     int n, m;
55     scanf("%d%d", &n, &m);
56
57     M = 1;
58     while (M < n + 2)
59         M *= 2;
60
61     for (int i = 1; i <= m; i++)
62         scanf("%d%d%d%lld", &op[i], &ql[i], &qr[i],
63               ↪&qk[i]);
64
65     vector<int> v;
66     for (int i = 1; i <= m; i++)
67         v.push_back(i);
68
69     solve(1, 1e9, v);
70
71     for (int i = 1; i <= m; i++)
72         if (op[i] == 2)
73             printf("%d\n", ans[i]);
74
75     return 0;
}

```

4.4 平衡树

pb_ds 平衡树参见 8.11.Public Based DataStructure (PB_DS)
(第 92 页).

4.4.1 Treap

```

1 // 注意: 相同键值可以共存
2
3 struct node { // 结点类定义
4     int key, size, p; // 分别为键值, 子树大小, 优先度
5     node *ch[2]; // 0表示左儿子, 1表示右儿子
6
7     node(int key = 0) : key(key), size(1), p(rand()) {}
8

```

```

9     void refresh() {
10         size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;
11         } // 更新子树大小 (和附加信息, 如果有的话)
12     } null[maxn], *root = null, *ptr = null; // 数组名叫
13     ↪做null是为了方便开哨兵节点
14     // 如果需要删除而空间不能直接开下所有结点, 则需要再写一个
15     ↪垃圾回收
16     // 注意: 数组里的元素一定不能delete, 否则会导致RE
17     // 重要! 在主函数最开始一定要加上以下预处理:
18     null -> ch[0] = null -> ch[1] = null;
19     null -> size = 0;
20
21     // 伪构造函数 O(1)
22     // 为了方便, 在结点类外面再定义一个伪构造函数
23     node *newnode(int x) { // 键值为x
24         ***ptr = node(x);
25         ptr -> ch[0] = ptr -> ch[1] = null;
26         return ptr;
27     }
28
29     // 插入键值 期望O(log n)
30     // 需要调用旋转
31     void insert(int x, node *&rt) { // rt为当前结点, 建议调
32         ↪用时传入root, 下同
33         if (rt == null) {
34             rt = newnode(x);
35             return;
36         }
37
38         int d = x > rt -> key;
39         insert(x, rt -> ch[d]);
40         rt -> refresh();
41
42         if (rt -> ch[d] -> p < rt -> p)
43             rot(rt, d ^ 1);
44
45     // 删除一个键值 期望O(log n)
46     // 要求键值必须存在至少一个, 否则会导致RE
47     // 需要调用旋转
48     void erase(int x, node *&rt) {
49         if (x == rt -> key) {
50             if (rt -> ch[0] != null && rt -> ch[1] != null)
51                 {
52                     int d = rt -> ch[0] -> p < rt -> ch[1] ->
53                         ↪p;
54                     rot(rt, d);
55                     erase(x, rt -> ch[d]);
56                 }
57             else
58                 rt = rt -> ch[rt -> ch[0] == null];
59         }
60         else
61             erase(x, rt -> ch[x > rt -> key]);
62     }
63
64     // 求元素的排名 (严格小于键值的个数 + 1) 期望O(log n)
65     // 非递归
66     int rank(int x, node *&rt) {
67         int ans = 1, d;
68         while (rt != null) {
69             if ((d = x > rt -> key))
70                 ans += rt -> ch[0] -> size + 1;
71             rt = rt -> ch[d];
72         }
73     }

```

```

73     }
74
75     return ans;
76 }
77
78 // 返回排名第k(从1开始)的键值对应的指针 期望O(log n)
79 // 非递归
80 node *kth(int x, node *rt) {
81     int d;
82     while (rt != null) {
83         if (x == rt -> ch[0] -> size + 1)
84             return rt;
85
86         if ((d = x > rt -> ch[0] -> size))
87             x -= rt -> ch[0] -> size + 1;
88
89         rt = rt -> ch[d];
90     }
91
92     return rt;
93 }
94
95 // 返回前驱(最大的比给定键值小的键值)对应的指针 期
96 // →望O(log n)
97 // 非递归
98 node *pred(int x, node *rt) {
99     node *y = null;
100    int d;
101
102    while (rt != null) {
103        if ((d = x > rt -> key))
104            y = rt;
105
106        rt = rt -> ch[d];
107    }
108
109    return y;
110 }
111
112 // 返回后继(最小的比给定键值大的键值)对应的指针 期
113 // →望O(log n)
114 // 非递归
115 node *succ(int x, node *rt) {
116     node *y = null;
117     int d;
118
119     while (rt != null) {
120         if ((d = x < rt -> key))
121             y = rt;
122
123         rt = rt -> ch[d ^ 1];
124     }
125
126     return y;
127 }
128
129 // 旋转(Treap版本) O(1)
130 // 平衡树基础操作
131 // 要求对应儿子必须存在, 否则会导致后续各种莫名其妙的问题
132 void rot(node *&x, int d) { // x为被转下去的结点, 会被修
133     // 改以维护树结构
134     node *y = x -> ch[d ^ 1];
135
136     x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d];
137     y -> ch[d] = x;
138
139     x -> refresh();
140     (x = y) -> refresh();
141 }

```

4.4.2 无旋 Treap / 可持久化 Treap

```

1 struct node {
2     int val, size;
3     node *ch[2];
4
5     node(int val) : val(val), size(1) {}
6
7     inline void update() {
8         size = ch[0] -> size + ch[1] -> size;
9     }
10
11 } null[maxn];
12
13 node *copied(node *x) { // 如果不用可持久化的话, 直接用
14     // 就行了
15     return new node(*x);
16 }
17
18 node *merge(node *x, node *y) {
19     if (x == null)
20         return y;
21     if (y == null)
22         return x;
23
24     node *z;
25     if (rand() % (x -> size + y -> size) < x -> size) {
26         z = copied(x);
27         z -> ch[1] = merge(x -> ch[1], y);
28     }
29     else {
30         z = copied(y);
31         z -> ch[0] = merge(x, y -> ch[0]);
32     }
33
34     z -> update(); // 因为每次只有一边会递归到儿子, 所以
35     // →z 不可能取到 null
36     return z;
37 }
38
39 pair<node*, node*> split(node *x, int k) { // 左边大小
40     // →为k
41     if (x == null)
42         return make_pair(null, null);
43
44     pair<node*, node*> pi(null, null);
45
46     if (k <= x -> ch[0] -> size) {
47         pi = split(x -> ch[0], k);
48
49         node *z = copied(x);
50         z -> ch[0] = pi.second;
51         z -> update();
52         pi.second = z;
53     }
54     else {
55         pi = split(x -> ch[1], k - x -> ch[0] -> size -
56         // →1);
57
58         node *y = copied(x);
59         y -> ch[1] = pi.first;
60         y -> update();
61         pi.first = y;
62     }
63
64     return pi;
65 }

```

```

64 // 记得初始化null
65 int main() {
66     for (int i = 0; i <= n; i++)
67         null[i].ch[0] = null[i].ch[1] = null;
68     null->size = 0;
69
70     // do something
71
72     return 0;
73 }

```

4.4.3 Splay

如果插入的话可以直接找到底然后 splay 一下, 也可以直接 splay 前驱后继.

```

1 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])
2
3 struct node {
4     int size;
5     bool rev;
6     node *ch[2], *p;
7
8     node() : size(1), rev(false) {}
9
10    void pushdown() {
11        if (!rev)
12            return;
13
14        ch[0]->rev ^= true;
15        ch[1]->rev ^= true;
16        swap(ch[0], ch[1]);
17
18        rev=false;
19    }
20
21    void refresh() {
22        size = ch[0]->size + ch[1]->size + 1;
23    }
24 } null[maxn], *root = null;
25
26 void rot(node *x, int d) {
27     node *y = x->ch[d ^ 1];
28
29     if ((x->ch[d ^ 1] = y->ch[d]) != null)
30         y->ch[d]->p = x;
31     ((y->p = x->p) != null ? x->p->ch[dir(x)] :
32      →root) = y;
33     (y->ch[d] = x)->p = y;
34
35     x->refresh();
36     y->refresh();
37 }
38
39 void splay(node *x, node *t) {
40     while (x->p != t) {
41         if (x->p->p == t) {
42             rot(x->p, dir(x) ^ 1);
43             break;
44         }
45
46         if (dir(x) == dir(x->p))
47             rot(x->p->p, dir(x->p) ^ 1);
48         else
49             rot(x->p, dir(x) ^ 1);
50     }
51 }
52
53 node *kth(int k, node *o) {

```

```

54     int d;
55     k++; // 因为最左边有一个哨兵
56
57     while (o != null) {
58         o->pushdown();
59
60         if (k == o->ch[0]->size + 1)
61             return o;
62
63         if ((d = k > o->ch[0]->size)) {
64             k -= o->ch[0]->size + 1;
65             o = o->ch[d];
66         }
67
68         return null;
69     }
70
71 void reverse(int l, int r) {
72     splay(kth(l - 1));
73     splay(kth(r + 1), root);
74
75     root->ch[1]->ch[0]->rev ^= true;
76 }
77
78 int n, m;
79
80 int main() {
81     null->size = 0;
82     null->ch[0] = null->ch[1] = null->p = null;
83
84     scanf("%d%d", &n, &m);
85     root = null + n + 1;
86     root->ch[0] = root->ch[1] = root->p = null;
87
88     for (int i = 1; i <= n; i++) {
89         null[i].ch[1] = null[i].p = null;
90         null[i].ch[0] = root;
91         root->p = null + i;
92         (root = null + i)->refresh();
93     }
94
95     null[n + 2].ch[1] = null[n + 2].p = null;
96     null[n + 2].ch[0] = root; // 这里直接建成一条链的,
97     →如果想减少常数也可以递归建一个平衡的树
98     root->p = null + n + 2; // 总之记得建两个哨兵, 这
99     →样splay起来不需要特判
100    (root = null + n + 2)->refresh();
101
102    // Do something
103 }

```

4.5 树链剖分

4.5.1 动态树形 DP (最大权独立集)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, maxm = 262155, inf =
→ 0x3f3f3f3f;
6
7 struct binary_heap {
8     priority_queue<int> q, t;
9
10    binary_heap() {}

```

```

11     void push(int x) {
12         q.push(x);
13     }
14
15     void erase(int x) {
16         t.push(x);
17     }
18
19     int top() {
20         while (!t.empty() && q.top() == t.top()) {
21             q.pop();
22             t.pop();
23         }
24
25         return q.top();
26     }
27 } heap;
28
29 int pool[maxm][2][2], (*pt)[2][2] = pool;
30
31 void merge(int a[2][2], int b[2][2]) {
32     static int c[2][2];
33     memset(c, 0, sizeof(c));
34
35     for (int i = 0; i < 2; i++)
36         for (int j = 0; j < 2; j++)
37             for (int k = 0; k < 2; k++)
38                 if (!(j && k))
39                     for (int t = 0; t < 2; t++)
40                         c[i][t] = max(c[i][t], a[i][j]
41                                         + b[k][t]);
42
43     memcpy(a, c, sizeof(c));
44 }
45
46 vector<pair<int, int>> tw;
47
48 struct seg_tree {
49     int (*tr)[2][2], n;
50
51     int s, d[2];
52
53     seg_tree() {}
54
55     void update(int o) {
56         memcpy(tr[o], tr[o * 2], sizeof(int) * 4);
57         merge(tr[o], tr[o * 2 + 1]);
58     }
59
60     void build(int l, int r, int o) {
61         if (l == r) {
62             tr[o][0][0] = tw[l - 1].first;
63             tr[o][0][1] = tr[o][1][0] = -inf;
64             tr[o][1][1] = tw[l - 1].second;
65
66             return;
67         }
68
69         int mid = (l + r) / 2;
70
71         build(l, mid, o * 2);
72         build(mid + 1, r, o * 2 + 1);
73
74         update(o);
75     }
76
77     void modify(int l, int r, int o) {
78         if (l == r) {
79             tr[o][0][0] = d[0];
80             tr[o][0][1] = tr[o][1][0] = -inf;
81             tr[o][1][1] = d[1];
82
83             return;
84         }
85
86         int mid = (l + r) / 2;
87
88         if (s <= mid)
89             modify(l, mid, o * 2);
90         else
91             modify(mid + 1, r, o * 2 + 1);
92
93         update(o);
94     }
95
96     int getval() {
97         int ans = 0;
98         for (int i = 0; i < 2; i++)
99             for (int j = 0; j < 2; j++)
100                 ans = max(ans, tr[1][i][j]);
101
102         return ans;
103     }
104
105     pair<int, int> getpair() {
106         int ans[2] = {0};
107         for (int i = 0; i < 2; i++)
108             for (int j = 0; j < 2; j++)
109                 ans[i] = max(ans[i], tr[1][i][j]);
110
111         return make_pair(ans[0], ans[1]);
112     }
113
114     void build(int len) {
115         n = len;
116         int N = 1;
117         while (N < n * 2)
118             N *= 2;
119
120         tr = pt;
121         pt += N;
122
123         build(1, n, 1);
124     }
125
126     void modify(int x, int dat[2]) {
127         s = x;
128         for (int i = 0; i < 2; i++)
129             d[i] = dat[i];
130         modify(1, n, 1);
131     }
132 } seg[maxn];
133
134 vector<int> G[maxn];
135
136 int p[maxn], d[maxn], sz[maxn], son[maxn], top[maxn];
137 int dp[maxn][2], dptr[maxn][2], w[maxn];
138
139 void dfs1(int x) {
140     d[x] = d[p[x]] + 1;
141     sz[x] = 1;
142
143     for (int y : G[x])
144         if (y != p[x]) {
145             p[y] = x;
146             dfs1(y);
147
148             if (sz[y] > sz[son[x]])

```

```

149     |     |     son[x] = y;
150     |     |     sz[x] += sz[y];
151     |
152 }
153
154 void dfs2(int x) {
155     if (x == son[p[x]]) {
156         top[x] = top[p[x]];
157     } else {
158         top[x] = x;
159
160         for (int y : G[x])
161             if (y != p[x])
162                 dfs2(y);
163
164         dp[x][1] = w[x];
165         for (int y : G[x])
166             if (y != p[x] && y != son[x]) {
167                 dp[x][1] += dptr[y][0];
168                 dp[x][0] += max(dptr[y][0], dptr[y][1]);
169             }
170
171         if (top[x] == x) {
172             tw.clear();
173
174             for (int u = x; u; u = son[u])
175                 tw.push_back(make_pair(dp[u][0], dp[u]
176                                         → [1]));
177
178             seg[x].build((int)tw.size());
179
180             tie(dptr[x][0], dptr[x][1]) = seg[x].getpair();
181
182             heap.push(seg[x].getval());
183         }
184     }
185
186 void modify(int x, int dat) {
187     dp[x][1] -= w[x];
188     dp[x][1] += (w[x] = dat);
189
190     while (x) {
191         if (p[top[x]]) {
192             dp[p[top[x]]][0] -= max(dptr[top[x]][0],
193                                     → dptr[top[x]][1]);
194             dp[p[top[x]]][1] -= dptr[top[x]][0];
195         }
196
197         heap.erase(seg[top[x]].getval());
198         seg[top[x]].modify(d[x] - d[top[x]] + 1,
199                           → dp[x]);
200         heap.push(seg[top[x]].getval());
201
202         tie(dptr[top[x]][0], dptr[top[x]][1]) =
203             → seg[top[x]].getpair();
204
205         if (p[top[x]]) {
206             dp[p[top[x]]][0] += max(dptr[top[x]][0],
207                                     → dptr[top[x]][1]);
208             dp[p[top[x]]][1] += dptr[top[x]][0];
209         }
210
211         x = p[top[x]];
212     }
213
214     int main() {
215         int n, m;

```

```

214     scanf("%d%d", &n, &m);
215
216     for (int i = 1; i <= n; i++)
217         scanf("%d", &w[i]);
218
219     for (int i = 1; i < n; i++) {
220         int x, y;
221         scanf("%d%d", &x, &y);
222
223         G[x].push_back(y);
224         G[y].push_back(x);
225     }
226
227     dfs1(1);
228     dfs2(1);
229
230     while (m--) {
231         int x, dat;
232         scanf("%d%d", &x, &dat);
233
234         modify(x, dat);
235
236         printf("%d\n", heap.top());
237     }
238
239     return 0;
240 }

```

4.6 树分治

4.6.1 动态树分治

```

1 // 为了减小常数, 这里采用bfs写法, 实测预处理比dfs快将近一
2 → 半
3 // 以下以维护一个点到每个黑点的距离之和为例
4
5 // 全局数组定义
6 vector<int> G[maxn], W[maxn];
7 int size[maxn], son[maxn], q[maxn];
8 int p[maxn], depth[maxn], id[maxn][20], d[maxn][20]; // → id是对应层所在子树的根
9 int a[maxn], ca[maxn], b[maxn][20], cb[maxn][20]; // 维护距离和用的
10 bool vis[maxn], col[maxn];
11
12 // 建树 总计O(n log n)
13 // 需要调用找重心和预处理距离, 同时递归调用自身
14 void build(int x, int k, int s, int pr) { // 结点, 深度,
15     → 通过块大小, 点分树上的父亲
16     x = getcenter(x, s);
17     vis[x] = true;
18     depth[x] = k;
19     p[x] = pr;
20
21     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
22         if (!vis[G[x][i]]) {
23             d[G[x][i]][k] = W[x][i];
24             p[G[x][i]] = x;
25
26             getdis(G[x][i], k, G[x][i]); // bfs每个子树,
27             → 预处理距离
28         }
29
30     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
31         if (!vis[G[x][i]])
32             build(G[x][i], k + 1, size[G[x][i]], x); // → 递归建树
33 }

```

```

32 // 找重心 O(n)
33 int getcenter(int x, int s) {
34     int head = 0, tail = 0;
35     q[tail++] = x;
36
37     while (head != tail) {
38         x = q[head++];
39         size[x] = 1; // 这里不需要清空, 因为以后要用的话
39             ↪一定会重新赋值
40         son[x] = 0;
41
42         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
43             if (!vis[G[x][i]] && G[x][i] != p[x]) {
44                 p[G[x][i]] = x;
45                 q[tail++] = G[x][i];
46             }
47         }
48
49         for (int i = tail - 1; i; i--) {
50             x = q[i];
51             size[p[x]] += size[x];
52
53             if (size[x] > size[son[p[x]]])
54                 son[p[x]] = x;
55         }
56
57         x = q[0];
58         while (son[x] && size[son[x]] * 2 >= s)
59             x = son[x];
60
61         return x;
62     }
63
64 // 预处理距离 O(n)
65 // 方便起见, 这里直接用了笨一点的方法, O(n log n) 全存下来
65             ↪来
66 void getdis(int x, int k, int rt) {
67     int head = 0, tail = 0;
68     q[tail++] = x;
69
70     while (head != tail) {
71         x = q[head++];
72         size[x] = 1;
73         id[x][k] = rt;
74
75         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
76             if (!vis[G[x][i]] && G[x][i] != p[x]) {
77                 p[G[x][i]] = x;
78                 d[G[x][i]][k] = d[x][k] + W[x][i];
79
80                 q[tail++] = G[x][i];
81             }
82         }
83
84         for (int i = tail - 1; i; i--)
85             size[p[q[i]]] += size[q[i]]; // 后面递归建树要用
85             ↪到子问题大小
86     }
87
88 // 修改 O(log n)
89 void modify(int x) {
90     if (col[x])
91         ca[x]--;
92     else
93         ca[x]++; // 记得先特判自己作为重心的那层
94
95     for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
95             ↪k--) {
96         if (col[x])
97             a[u] -= d[x][k];

```

```

98         ca[u]--;
99
100        b[id[x][k]][k] -= d[x][k];
101        cb[id[x][k]][k]--;
102    }
103    else {
104        a[u] += d[x][k];
105        ca[u]++;
106
107        b[id[x][k]][k] += d[x][k];
108        cb[id[x][k]][k]++;
109    }
110 }
111 col[x] ^= true;
112 }
113
114 // 询问 O(log n)
115 int query(int x) {
116     int ans = a[x]; // 特判自己是重心的那层
117
118     for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
118             ↪k--)
119         ans += a[u] - b[id[x][k]][k] + d[x][k] * (ca[u]
119             ↪- cb[id[x][k]][k]);
120
121     return ans;
122 }
123

```

4.6.2 紫荆花之恋

稍微重构了一下, 修改了代码风格.

另外这个是BFS版本, 跑得比DFS要快不少. (虽然主要复杂度并不在重构上)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, maxk = 49;
6 constexpr double alpha = .75;
7
8 mt19937 rnd(23333333);
9
10 struct node {
11     int key, size, p;
12     node *ch[2];
13
14     node() {}
15
16     node(int key) : key(key), size(1), p(rnd()) {}
17
18     inline void update() {
19         size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;
20     }
21 } null[maxn * maxk], *pt = null;
22
23 vector<node*> pool;
24
25 node *newnode(int val) {
26     node *x;
27
28     if (!pool.empty()) {
29         x = pool.back();
30         pool.pop_back();
31     }
32     else
33         x = ++pt;
34

```

```

35     *x = node(val);
36     x -> ch[0] = x -> ch[1] = null;
37
38     return x;
39 }
40
41 void rot(node *&x, int d) {
42     node *y = x -> ch[d ^ 1];
43     x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d];
44     y -> ch[d] = x;
45
46     x -> update();
47     (x = y) -> update();
48 }
49
50 void insert(node *&o, int x) {
51     if (o == null) {
52         o = newnode(x);
53         return;
54     }
55
56     int d = (x > o -> key);
57
58     insert(o -> ch[d], x);
59     o -> update();
60
61     if (o -> ch[d] -> p < o -> p)
62         rot(o, d ^ 1);
63 }
64
65 int get_order(node *o, int x) {
66     int ans = 0;
67
68     while (o != null) {
69         int d = (x > o -> key);
70
71         if (d)
72             ans += o -> ch[0] -> size + 1;
73
74         o = o -> ch[d];
75     }
76
77     return ans;
78 }
79
80 void destroy(node **x) {
81     if (*x == null)
82         return;
83
84     pool.push_back(*x);
85     destroy(*x -> ch[0]);
86     destroy(*x -> ch[1]);
87 }
88
89 struct my_tree { // 封装了一下，如果不卡内存直接换
90     // 成PBDS就好了
91     node *rt;
92
93     my_tree() : rt(null) {}
94
95     void clear() {
96         ::destroy(rt);
97         rt = null;
98     }
99
100    void insert(int x) {
101        ::insert(rt, x);
102    }
103
104    int order_of_key(int x) { // less than x

```

```

171         break;
172     }
173 }
174 if (!ok)
175     break;
176 }
177 }
178 return x;
179 }
180 }

void getdis(int st, int o, int k) {
    int head = 0, tail = 0;
    q[tail++] = st;

    while (head != tail) {
        int x = q[head++];
        sz[x] = 1;
        rid[x][k] = st;

        tr[o].insert(d[x][k] - w[x]);
        tre[st][k].insert(d[x][k] - w[x]);

        for (auto pi : G[x]) {
            int y = pi.first, val = pi.second;

            if (!vis[y] && y != p[x]) {
                p[y] = x;
                d[y][k] = d[x][k] + val;
                q[tail++] = y;
            }
        }
    }

    for (int i = tail - 1; i; i--)
        sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];

    siz[st][k] = sz[st];
}

void rebuild(int x, int s, int pr) {
    x = getcenter(x, s);
    vis[x] = true;
    p[x] = pr;
    depth[x] = depth[pr] + 1;
    sz[x] = s;

    tr[x].insert(-w[x]);

    for (auto pi : G[x]) {
        int y = pi.first, val = pi.second;

        if (!vis[y]) {
            p[y] = x;
            d[y][depth[x]] = val;
            getdis(y, x, depth[x]);
        }
    }

    for (auto pi : G[x]) {
        int y = pi.first;

        if (!vis[y])
            rebuild(y, sz[y], x);
    }
}

long long add_node(int x, int nw) { // nw是边权
    depth[x] = depth[p[x]] + 1;
    sz[x] = 1;
    vis[x] = true;
    tr[x].insert(-w[x]);

    long long tmp = 0;
    int goat = 0; // 替罪羊

    for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
        k--) {
        d[x][k] = d[p[x]][k] + nw;
        rid[x][k] = (rid[p[x]][k] ? rid[p[x]][k] : x);

        tmp += tr[u].order_of_key(w[x] - d[x][k] + 1);
        tmp -= tre[rid[x][k]][k].order_of_key(w[x] -
            d[x][k] + 1);

        tr[u].insert(d[x][k] - w[x]);
        tre[rid[x][k]][k].insert(d[x][k] - w[x]);

        sz[u]++;
        siz[rid[x][k]][k]++;
    }

    if (siz[rid[x][k]][k] > sz[u] * alpha + 5)
        goat = u;
}

if (goat) {
    destroy(goat);
    rebuild(goat, sz[goat], p[goat]);
}

return tmp;
}

int main() {
    null -> ch[0] = null -> ch[1] = null;
    null -> size = 0;

    int n;
    scanf("%*d%d", &n);

    scanf("%*d%*d%d", &w[1]);
    vis[1] = true;
    sz[1] = 1;
    tr[1].insert(-w[1]);

    printf("0\n");

    long long ans = 0;

    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        int nw;
        scanf("%d%d%d", &p[i], &nw, &w[i]);

        p[i] ^= (ans % 1000000000);

        G[i].push_back(make_pair(p[i], nw));
        G[p[i]].push_back(make_pair(i, nw));

        ans += add_node(i, nw);
    }

    printf("%lld\n", ans);
}

return 0;
}

```

4.7 LCT动态树

4.7.1 不换根 (弹飞绵羊)

```

1 #define isroot(x) ((x) != (x) -> p -> ch[0] && (x) !=  
2     -> (x) -> p -> ch[1]) // 判断是不是Splay的根  
3 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1]) // 判断它是它  
4     -> 父亲的左 / 右儿子  
5  
6 struct node { // 结点类定义  
7     int size; // Splay的子树大小  
8     node *ch[2], *p;  
9  
10    node() : size(1) {}  
11    void refresh() {  
12        size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;  
13    } // 附加信息维护  
14 } null[maxn];  
15  
16 // 在主函数开头加上这句初始化  
17 null -> size = 0;  
18  
19 // 初始化结点  
20 void initialize(node *x) {  
21     x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;  
22 }  
23  
24 // Access 均摊O(log n)  
25 // LCT核心操作, 把结点到根的路径打通, 顺便把与重儿子的连  
26     -> 边变成轻边  
27 // 需要调用splay  
28 node *access(node *x) {  
29     node *y = null;  
30  
31     while (x != null) {  
32         splay(x);  
33  
34         x -> ch[1] = y;  
35         (y = x) -> refresh();  
36  
37         x = x -> p;  
38     }  
39  
40     return y;  
41 }  
42  
43 // Link 均摊O(log n)  
44 // 把x的父亲设为y  
45 // 要求x必须为所在树的根节点, 否则会导致后续各种莫名其妙的  
46     -> 问题  
47 // 需要调用splay  
48 void link(node *x, node *y) {  
49     splay(x);  
50     x -> p = y;  
51 }  
52  
53 // Cut 均摊O(log n)  
54 // 把x与其父亲的连边断掉  
55 // x可以是所在树的根节点, 这时此操作没有任何实质效果  
56 // 需要调用access和splay  
57 void cut(node *x) {  
58     access(x);  
59     splay(x);  
60  
61     x -> ch[0] -> p = null;  
62     x -> ch[0] = null;  
63  
64     x -> refresh();  
65 }  
66  
67 // Splay 均摊O(log n)

```

```

68 // 需要调用旋转
69 void splay(node *x) {
70     while (!isroot(x)) {
71         if (isroot(x -> p)) {
72             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
73             break;
74         }
75         if (dir(x) == dir(x -> p))
76             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
77         else
78             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
79         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
80     }
81 // 旋转 (LCT版本) O(1)
82 // 平衡树基本操作
83 // 要求对应儿子必须存在, 否则会导致后续各种莫名其妙的问题
84 void rot(node *x, int d) {
85     node *y = x -> ch[d ^ 1];
86  
87     y -> p = x -> p;
88     if (!isroot(x))
89         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
90  
91     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
92         y -> ch[d] -> p = x;
93         (y -> ch[d] = x) -> p = y;
94  
95     x -> refresh();
96     y -> refresh();
97 }

```

4.7.2 换根/维护生成树

```

1 #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) -> p ->
2     -> ch[0] != (x) && (x) -> p -> ch[1] != (x)))
3  
4 using namespace std;
5  
6 const int maxn = 200005;
7  
8 struct node{
9     int key, mx, pos;
10    bool rev;
11    node *ch[2], *p;
12  
13    node(int key = 0): key(key), mx(key), pos(-1),
14        -> rev(false) {}
15  
16    void pushdown() {
17        if (!rev)
18            return;
19  
20        ch[0] -> rev ^= true;
21        ch[1] -> rev ^= true;
22        swap(ch[0], ch[1]);
23  
24        if (pos != -1)
25            pos ^= 1;
26  
27        rev = false;
28    }
29  
30    void refresh() {
31        mx = key;
32        pos = -1;
33    }
34 };

```

```

32     if (ch[0] -> mx > mx) {
33         mx = ch[0] -> mx;
34         pos = 0;
35     }
36     if (ch[1] -> mx > mx) {
37         mx = ch[1] -> mx;
38         pos = 1;
39     }
40 }
41 } null[maxn * 2];
42
43 void init(node *x, int k) {
44     x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;
45     x -> key = x -> mx = k;
46 }
47
48 void rot(node *x, int d) {
49     node *y = x -> ch[d ^ 1];
50     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
51         y -> ch[d] -> p = x;
52
53     y -> p = x -> p;
54     if (!isroot(x))
55         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
56
57     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
58
59     x -> refresh();
60     y -> refresh();
61 }
62
63 void splay(node *x) {
64     x -> pushdown();
65
66     while (!isroot(x)) {
67         if (!isroot(x -> p))
68             x -> p -> p -> pushdown();
69         x -> p -> pushdown();
70         x -> pushdown();
71
72         if (isroot(x -> p)) {
73             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
74             break;
75         }
76
77         if (dir(x) == dir(x -> p))
78             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
79         else
80             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
81
82         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
83     }
84 }
85
86 node *access(node *x) {
87     node *y = null;
88
89     while (x != null) {
90         splay(x);
91
92         x -> ch[1] = y;
93         (y = x) -> refresh();
94
95         x = x -> p;
96     }
97
98     return y;
99 }
100 void makerooot(node *x) {
101
102     access(x);
103     splay(x);
104     x -> rev ^= true;
105 }
106
107 void link(node *x, node *y) {
108     makerooot(x);
109     x -> p = y;
110 }
111
112 void cut(node *x, node *y) {
113     makerooot(x);
114     access(y);
115     splay(y);
116
117     y -> ch[0] -> p = null;
118     y -> ch[0] = null;
119     y -> refresh();
120 }
121
122 node *getroot(node *x) {
123     x = access(x);
124     while (x -> pushdown(), x -> ch[0] != null)
125         x = x -> ch[0];
126     splay(x);
127     return x;
128 }
129
130 node *getmax(node *x, node *y) {
131     makerooot(x);
132     x = access(y);
133
134     while (x -> pushdown(), x -> pos != -1)
135         x = x -> ch[x -> pos];
136     splay(x);
137
138     return x;
139 }
140
141 // 以下为主函数示例
142 for (int i = 1; i <= m; i++) {
143     init(null + n + i, w[i]);
144     if (getroot(null + u[i]) != getroot(null + v[i])) {
145         ans[q + 1] -= k;
146         ans[q + 1] += w[i];
147
148         link(null + u[i], null + n + i);
149         link(null + v[i], null + n + i);
150         vis[i] = true;
151     }
152     else {
153         int ii = getmax(null + u[i], null + v[i]) -
154             >> null - n;
155         if (w[i] >= w[ii])
156             continue;
157
158         cut(null + u[ii], null + n + ii);
159         cut(null + v[ii], null + n + ii);
160
161         link(null + u[i], null + n + i);
162         link(null + v[i], null + n + i);
163
164         ans[q + 1] -= w[ii];
165         ans[q + 1] += w[i];
166     }
167 }
168

```

4.7.3 维护子树信息

```

1 // 这个东西虽然只需要抄板子但还是极其难写，常数极其巨大，  

2 // →没必要的时候就不要用  

3 // 如果维护子树最小值就需要套一个可删除的堆来维护，复杂度  

4 // →会变成O(n log^2 n)  

5 // 注意由于这道题与边权有关，需要边权拆点变点权  

6 // 宏定义  

7 #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) != (x) -> p  

8 // →-> ch[0] && (x) != (x) -> p -> ch[1]))  

9 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])  

10 // 节点类定义  

11 struct node { // 以维护子树中黑点到根距离和为例  

12     int w, chain_cnt, tree_cnt;  

13     long long sum, suml, sumr, tree_sum; // 由于换根需要  

14     // →子树反转，需要维护两个方向的信息  

15     bool rev, col;  

16     node *ch[2], *p;  

17  

18     node() : w(0), chain_cnt(0),  

19     // →tree_cnt(0), sum(0), suml(0), sumr(0),  

20     // →tree_sum(0), rev(false), col(false) {}  

21  

22     inline void pushdown() {  

23         if(!rev)  

24             return;  

25  

26         ch[0]->rev ^= true;  

27         ch[1]->rev ^= true;  

28         swap(ch[0], ch[1]);  

29         swap(suml, sumr);  

30  

31         rev = false;  

32     }  

33  

34     inline void refresh() { // 如果不想这样特判  

35         // →就pushdown一下  

36         // pushdown();  

37  

38         sum = ch[0] -> sum + ch[1] -> sum + w;  

39         suml = (ch[0] -> rev ? ch[0] -> sumr : ch[0] ->  

40         // →suml) + (ch[1] -> rev ? ch[1] -> sumr :  

41         // →ch[1] -> suml) + (tree_cnt + ch[1] ->  

42         // →chain_cnt) * (ch[0] -> sum + w) + tree_sum;  

43         sumr = (ch[0] -> rev ? ch[0] -> suml : ch[0] ->  

44         // →sumr) + (ch[1] -> rev ? ch[1] -> suml :  

45         // →ch[1] -> sumr) + (tree_cnt + ch[0] ->  

46         // →chain_cnt) * (ch[1] -> sum + w) + tree_sum;  

47         chain_cnt = ch[0] -> chain_cnt + ch[1] ->  

48         // →chain_cnt + tree_cnt;  

49     }  

50     null[maxn * 2]; // 如果没有边权变点权就不用乘2了  

51  

52     // 封装构造函数  

53     node *newnode(int w) {  

54         node *x = nodes.front(); // 因为有删边加边，可以用一  

55         // →个队列维护可用结点  

56         nodes.pop();  

57         initialize(x);  

58         x -> w = w;  

59         x -> refresh();  

60         return x;  

61     }  

62  

63     // 封装初始化函数  

64     // 记得在进行操作之前对所有结点调用一遍  

65     inline void initialize(node *x) {  

66         *x = node();  

67         x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;  

68  

69         // 注意一下在Access的同时更新子树信息的方法  

70         node *access(node *x) {  

71             node *y = null;  

72  

73             while (x != null) {  

74                 splay(x);  

75  

76                 x -> tree_cnt += x -> ch[1] -> chain_cnt - y ->  

77                 // →chain_cnt;  

78                 x -> tree_sum += (x -> ch[1] -> rev ? x ->  

79                 // →ch[1] -> sumr : x -> ch[1] -> suml) - y ->  

80                 // →suml;  

81                 x -> ch[1] = y;  

82  

83                 (y = x) -> refresh();  

84                 x = x -> p;  

85             }  

86  

87             return y;  

88         }  

89  

90         // 找到一个点所在连通块的根  

91         // 对比原版没有变化  

92         node *getroot(node *x) {  

93             x = access(x);  

94  

95             while (x -> pushdown(), x -> ch[0] != null)  

96                 x = x -> ch[0];  

97             splay(x);  

98  

99             return x;  

100        }  

101  

102        // 换根，同样没有变化  

103        void makeroot(node *x) {  

104            access(x);  

105            splay(x);  

106            x -> rev ^= true;  

107            x -> pushdown();  

108  

109        // 连接两个点  

110        // !!! 注意这里必须把两者都变成根，因为只能修改根结点  

111        void link(node *x, node *y) {  

112            makeroot(x);  

113            makeroot(y);  

114  

115            x -> p = y;  

116            y -> tree_cnt += x -> chain_cnt;  

117            y -> tree_sum += x -> suml;  

118            y -> refresh();  

119  

120        // 删除一条边  

121        // 对比原版没有变化  

122        void cut(node *x, node *y) {  

123            makeroot(x);  

124            access(y);  

125            splay(y);  

126  

127            y -> ch[0] -> p = null;  

128            y -> ch[0] = null;  

129            y -> refresh();  

130  

131        // 修改/询问一个点，这里以询问为例  

132        // 如果是修改就在换根之后搞一些操作

```

```

122 long long query(node **x) {
123     makeroot(x);
124     return x -> suml;
125 }
126
127 // Splay函数
128 // 对比原版没有变化
129 void splay(node **x) {
130     x -> pushdown();
131
132     while (!isroot(*x)) {
133         if (!isroot(x -> p))
134             x -> p -> p -> pushdown();
135         x -> p -> pushdown();
136         x -> pushdown();
137
138         if (isroot(x -> p)) {
139             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
140             break;
141         }
142
143         if (dir(x) == dir(x -> p))
144             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
145         else
146             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
147
148         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
149     }
150 }
151
152 // 旋转函数
153 // 对比原版没有变化
154 void rot(node **x, int d) {
155     node *y = x -> ch[d ^ 1];
156
157     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
158         y -> ch[d] -> p = x;
159
160     y -> p = x -> p;
161     if (!isroot(x))
162         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
163
164     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
165
166     x -> refresh();
167     y -> refresh();
168 }

```

```

19     void push(long long x) {
20         if (x > (-INF) >> 2)
21             q1.push(x);
22     }
23
24     void erase(long long x) {
25         if (x > (-INF) >> 2)
26             q2.push(x);
27     }
28
29     long long top() {
30         if (empty())
31             return -INF;
32
33         while (!q2.empty() && q1.top() == q2.top()) {
34             q1.pop();
35             q2.pop();
36         }
37
38         return q1.top();
39     }
40
41     long long top2() {
42         if (size() < 2)
43             return -INF;
44
45         long long a = top();
46         erase(a);
47         long long b = top();
48         push(a);
49         return a + b;
50     }
51
52     int size() {
53         return q1.size() - q2.size();
54     }
55
56     bool empty() {
57         return q1.size() == q2.size();
58     }
59 } heap; // 全局堆维护每条链的最大子段和
60
61 struct node {
62     long long sum, maxsum, prefix, suffix;
63     int key;
64     binary_heap heap; // 每个点的堆存的是它的子树中到它的
65     // 最远距离, 如果它是黑点的话还会包括自己
66     node *ch[2], *p;
67     bool rev;
68     node(int k = 0): sum(k), maxsum(-INF),
69     // prefix(-INF),
70     // suffix(-INF), key(k), rev(false) {}
71
72     inline void pushdown() {
73         if (!rev)
74             return;
75
76         ch[0] -> rev ^= true;
77         ch[1] -> rev ^= true;
78         swap(ch[0], ch[1]);
79         swap(prefix, suffix);
80         rev = false;
81     }
82
83     inline void refresh() {
84         pushdown();
85         ch[0] -> pushdown();
86         ch[1] -> pushdown();

```

4.7.4 模板题: 动态 QTREE4 (询问树上相距最远点)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4 #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
5
6 #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) != (x) -> p
6     // -> ch[0] && (x) != (x) -> p -> ch[1]))
7 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])
8
9 using namespace std;
10 using namespace __gnu_pbds;
11
12 constexpr int maxn = 100005;
13 constexpr long long INF = 1000000000000000000ll;
14
15 struct binary_heap {
16     __gnu_pbds::priority_queue<long long, less<long
17     // -> long>, binary_heap_tag> q1, q2;
18     binary_heap() {}

```

```

87         ch[1] -> sum + key + ch[0] ->
88             ↪ suffix);
89     maxsum = max(max(ch[0] -> maxsum, ch[1] ->
90             ↪ maxsum),
91             ch[0] -> suffix + key + ch[1] ->
92                 ↪ prefix);
93
94     if (!heap.empty()) {
95         prefix = max(prefix,
96             ch[0] -> sum + key +
97                 ↪ heap.top());
98         suffix = max(suffix,
99             ch[1] -> sum + key +
100                 ↪ heap.top());
101        maxsum = max(maxsum, max(ch[0] -> suffix,
102                         ch[1] -> prefix) +
103                             ↪ key +
104                                 ↪ heap.top());
105
106        if (heap.size() > 1) {
107            maxsum = max(maxsum, heap.top2() +
108                          ↪ key);
109        }
110    }
111 }
112 } null[maxn << 1], *ptr = null;
113
114 void addedge(int, int, int);
115 void deledge(int, int);
116 void modify(int, int, int);
117 void modify_color(int);
118 node *newnode(int);
119 node *access(node *);
120 void makeroott(node *);
121 void link(node *, node *);
122 void cut(node *, node *);
123 void splay(node *);
124 void rot(node *, int);
125
126 queue<node *> freenodes;
127 tree<pair<int, int>, node *> mp;
128
129 bool col[maxn] = {false};
130 char c;
131 int n, m, k, x, y, z;
132
133 int main() {
134     null -> ch[0] = null -> ch[1] = null -> p = null;
135     scanf("%d%d%d", &n, &m, &k);
136
137     for (int i = 1; i <= n; i++)
138         newnode(0);
139
140     heap.push(0);
141
142     while (k--) {
143         scanf("%d", &x);
144
145         col[x] = true;
146         null[x].heap.push(0);
147     }
148
149     for (int i = 1; i < n; i++) {
150         scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
151
152         if (x > y)
153             swap(x, y);
154         addedge(x, y, z);
155     }
156
157     while (m--) {
158         scanf("%c%d", &c, &x);
159
160         if (c == 'A') {
161             scanf("%d", &y);
162
163             if (x > y)
164                 swap(x, y);
165             deledge(x, y);
166         }
167         else if (c == 'B') {
168             scanf("%d%d", &y, &z);
169
170             if (x > y)
171                 swap(x, y);
172             addedge(x, y, z);
173         }
174         else if (c == 'C') {
175             scanf("%d%d", &y, &z);
176
177             if (x > y)
178                 swap(x, y);
179             modify(x, y, z);
180         }
181         else
182             modify_color(x);
183
184         printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
185                           -1));
186     }
187
188     return 0;
189 }
190
191 void addedge(int x, int y, int z) {
192     node *tmp;
193     if (freenodes.empty())
194         tmp = newnode(z);
195     else {
196         tmp = freenodes.front();
197         freenodes.pop();
198         *tmp = node(z);
199     }
200
201     tmp -> ch[0] = tmp -> ch[1] = tmp -> p = null;
202
203     heap.push(tmp -> maxsum);
204     link(tmp, null + x);
205     link(tmp, null + y);
206     mp[make_pair(x, y)] = tmp;
207
208
209
210 void deledge(int x, int y) {
211     node *tmp = mp[make_pair(x, y)];
212
213     cut(tmp, null + x);
214     cut(tmp, null + y);
215
216     freenodes.push(tmp);
217     heap.erase(tmp -> maxsum);
218     mp.erase(make_pair(x, y));
219
220
221
222 }
```

```

222 void modify_color(int x) {
223     makeroot(null + x);
224     col[x] ^= true;
225
226     if (col[x])
227         null[x].heap.push(0);
228     else
229         null[x].heap.erase(0);
230
231     heap.erase(null[x].maxsum);
232     null[x].refresh();
233     heap.push(null[x].maxsum);
234 }
235
236 node *newnode(int k) {
237     *(++ptr) = node(k);
238     ptr -> ch[0] = ptr -> ch[1] = ptr -> p = null;
239     return ptr;
240 }
241
242 node *access(node *x) {
243     splay(x);
244     heap.erase(x -> maxsum);
245     x -> refresh();
246
247     if (x -> ch[1] != null) {
248         x -> ch[1] -> pushdown();
249         x -> heap.push(x -> ch[1] -> prefix);
250         x -> refresh();
251         heap.push(x -> ch[1] -> maxsum);
252     }
253
254     x -> ch[1] = null;
255     x -> refresh();
256     node *y = x;
257     x = x -> p;
258
259     while (x != null) {
260         splay(x);
261         heap.erase(x -> maxsum);
262
263         if (x -> ch[1] != null) {
264             x -> ch[1] -> pushdown();
265             x -> heap.push(x -> ch[1] -> prefix);
266             heap.push(x -> ch[1] -> maxsum);
267         }
268
269         x -> heap.erase(y -> prefix);
270         x -> ch[1] = y;
271         (y = x) -> refresh();
272         x = x -> p;
273     }
274
275     heap.push(y -> maxsum);
276     return y;
277 }
278
279 void makeroot(node *x) {
280     access(x);
281     splay(x);
282     x -> rev ^= true;
283 }
284
285 void link(node *x, node *y) { // 新添一条虚边, 维护y对应的堆
286     makeroot(x);
287     makeroot(y);
288
289     x -> pushdown();
290     x -> p = y;
291     heap.erase(y -> maxsum);
292     y -> heap.push(x -> prefix);

```

```

293     y -> refresh();
294     heap.push(y -> maxsum);
295 }
296
297 void cut(node *x, node *y) { // 断开一条实边, 一条链变成
298     // 两条链, 需要维护全局堆
299     makeroot(x);
300     access(y);
301     splay(y);
302
303     heap.erase(y -> maxsum);
304     heap.push(y -> ch[0] -> maxsum);
305     y -> ch[0] -> p = null;
306     y -> ch[0] = null;
307     y -> refresh();
308     heap.push(y -> maxsum);
309 }
310
311 void splay(node *x) {
312     x -> pushdown();
313
314     while (!isroot(x)) {
315         if (!isroot(x -> p))
316             x -> p -> p -> pushdown();
317
318         x -> p -> pushdown();
319         x -> pushdown();
320
321         if (isroot(x -> p)) {
322             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
323             break;
324         }
325
326         if (dir(x) == dir(x -> p))
327             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
328         else
329             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
330
331         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
332     }
333 }
334
335 void rot(node **x, int d) {
336     node *y = x -> ch[d ^ 1];
337
338     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
339         y -> ch[d] -> p = x;
340
341     y -> p = x -> p;
342
343     if (!isroot(x))
344         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
345
346     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
347
348     x -> refresh();
349     y -> refresh();
350 }

```

4.8 K-D树

4.8.1 动态 K-D 树 (定期重构)

```
int l[2], r[2], x[B + 10][2], w[B + 10];
int n, op, ans = 0, cnt = 0, tmp = 0;
int d;

struct node {
    int x[2], l[2], r[2], w, sum;
    node *ch[2];
```

```

9  bool operator < (const node &a) const {
10    return x[d] < a.x[d];
11  }
12
13  void refresh() {
14    sum = ch[0] -> sum + ch[1] -> sum + w;
15    l[0] = min(x[0], min(ch[0] -> l[0], ch[1] ->
16                -> l[0]));
17    l[1] = min(x[1], min(ch[0] -> l[1], ch[1] ->
18                -> l[1]));
19    r[0] = max(x[0], max(ch[0] -> r[0], ch[1] ->
20                -> r[0]));
21    r[1] = max(x[1], max(ch[0] -> r[1], ch[1] ->
22                -> r[1]));
23  }
24  } null[maxn], *root = null;
25
26  void build(int l, int r, int k, node *&rt) {
27    if (l > r) {
28      rt = null;
29      return;
30    }
31
32    int mid = (l + r) / 2;
33
34    d = k;
35    nth_element(null + l, null + mid, null + r + 1);
36
37    rt = null + mid;
38    build(l, mid - 1, k ^ 1, rt -> ch[0]);
39    build(mid + 1, r, k ^ 1, rt -> ch[1]);
40
41    rt -> refresh();
42  }
43
44  void query(node *rt) {
45    if (l[0] <= rt -> l[0] && l[1] <= rt -> l[1] && rt
46      -> -> r[0] <= r[0] && rt -> r[1] <= r[1]) {
47      ans += rt -> sum;
48      return;
49    }
50
51    else if (l[0] > rt -> r[0] || l[1] > rt -> r[1] ||
52      -> r[0] < rt -> l[0] || r[1] < rt -> l[1])
53      return;
54
55    if (l[0] <= rt -> x[0] && l[1] <= rt -> x[1] && rt
56      -> -> x[0] <= r[0] && rt -> x[1] <= r[1])
57      ans += rt -> w;
58
59    query(rt -> ch[0]);
60    query(rt -> ch[1]);
61  }
62
63  int main() {
64
65    null -> l[0] = null -> l[1] = 100000000;
66    null -> r[0] = null -> r[1] = -100000000;
67    null -> sum = 0;
68    null -> ch[0] = null -> ch[1] = null;
69    scanf("%*d");
70
71    while (scanf("%d", &op) == 1 && op != 3) {
72      if (op == 1) {
73        tmp++;
74        scanf("%d%d%d", &x[tmp][0], &x[tmp][1],
75              -> &w[tmp]);
76        x[tmp][0] ^= ans;
77        x[tmp][1] ^= ans;
78        w[tmp] ^= ans;
79      }
80    }
81  }
82
83  if (tmp == B) {
84    for (int i = 1; i <= tmp; i++) {
85      null[cnt + i].x[0] = x[i][0];
86      null[cnt + i].x[1] = x[i][1];
87      null[cnt + i].w = w[i];
88    }
89
90    build(1, cnt += tmp, 0, root);
91    tmp = 0;
92  }
93
94  else {
95    scanf("%d%d%d%d", &l[0], &l[1], &r[0],
96          -> &r[1]);
97    l[0] ^= ans;
98    l[1] ^= ans;
99    r[0] ^= ans;
100   r[1] ^= ans;
101   ans = 0;
102
103   for (int i = 1; i <= tmp; i++)
104     if (l[0] <= x[i][0] && l[1] <= x[i][1]
105         -> && x[i][0] <= r[0] && x[i][1] <=
106         -> r[1])
107       ans += w[i];
108
109   query(root);
110   printf("%d\n", ans);
111 }
112
113 return 0;
114 }
```

4.9 LCA 最近公共祖先

4.9.1 Tarjan LCA $O(n + m)$

```

1 vector<pair<int, int>> q[maxn];
2 int lca[maxn];
3
4 void dfs(int x) {
5   dfn[x] = ++tim; // 其实求LCA是用不到DFS序的，但是一般其他步骤要用
6   ufs[x] = x;
7
8   for (auto pi : q[x]) {
9     int y = pi.first, i = pi.second;
10    if (dfn[y])
11      lca[i] = findufs(y);
12  }
13
14  for (int y : G[x]) {
15    if (y != p[x]) {
16      p[y] = x;
17      dfs(y);
18    }
19
20  ufs[x] = p[x];
21 }
```

4.10 虚树

```

1 struct Tree {
2   vector<int> G[maxn], W[maxn];
3   int p[maxn], d[maxn], size[maxn], mn[maxn],
4       mx[maxn];
```

```

4   bool col[maxn];
5   long long ans_sum;
6   int ans_min, ans_max;
7
8   void add(int x, int y, int z) {
9     G[x].push_back(y);
10    W[x].push_back(z);
11  }
12
13  void dfs(int x) {
14    size[x] = col[x];
15    mx[x] = (col[x] ? d[x] : -inf);
16    mn[x] = (col[x] ? d[x] : inf);
17
18    for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
19      d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
20      dfs(G[x][i]);
21      ans_sum += (long long)size[x] * size[G[x]
22        ↪ [i]] * d[x];
23      ans_max = max(ans_max, mx[x] + mx[G[x][i]]
24        ↪ - (d[x] << 1));
25      ans_min = min(ans_min, mn[x] + mn[G[x][i]]
26        ↪ - (d[x] << 1));
27      size[x] += size[G[x][i]];
28      mx[x] = max(mx[x], mx[G[x][i]]);
29      mn[x] = min(mn[x], mn[G[x][i]]);
30    }
31  }
32
33  void clear(int x) {
34    G[x].clear();
35    W[x].clear();
36    col[x] = false;
37  }
38
39  void solve(int rt) {
40    ans_sum = 0;
41    ans_max = -inf;
42    ans_min = inf;
43    dfs(rt);
44    ans_sum <= 1;
45  }
46} virtree;
47
48 void dfs(int);
49 int LCA(int, int);
50
51 vector<int> G[maxn];
52 int f[maxn][20], d[maxn], dfn[maxn], tim = 0;
53
54 bool cmp(int x, int y) {
55   return dfn[x] < dfn[y];
56 }
57
58 int main() {
59   scanf("%d", &n);
60
61   for (int i = 1, x, y; i < n; i++) {
62     scanf("%d%d", &x, &y);
63     G[x].push_back(y);
64     G[y].push_back(x);
65   }
66
67   G[n + 1].push_back(1);
68   dfs(n + 1);
69
70   for (int i = 1; i <= n + 1; i++)
71     G[i].clear();
72
73   lgn--;
74
75   for (int j = 1; j <= lgn; j++) {
76     for (int i = 1; i <= n; i++)
77       f[i][j] = f[f[i][j - 1]][j - 1];
78
79   scanf("%d", &m);
80
81   while (m--) {
82     int k;
83     scanf("%d", &k);
84
85     for (int i = 1; i <= k; i++)
86       scanf("%d", &a[i]);
87
88     sort(a + 1, a + k + 1, cmp);
89     int top = 0, cnt = 0;
90     s[++top] = v[++cnt] = n + 1;
91     long long ans = 0;
92
93     for (int i = 1; i <= k; i++) {
94       virtree.col[a[i]] = true;
95       ans += d[a[i]] - 1;
96       int u = LCA(a[i], s[top]);
97
98       if (s[top] != u) {
99         while (top > 1 && d[s[top - 1]] >=
100           ↪ d[u]) {
101           virtree.add(s[top - 1], s[top],
102             ↪ d[s[top]] - d[s[top - 1]]);
103           top--;
104         }
105
106         if (s[top] != u) {
107           virtree.add(u, s[top], d[s[top]] -
108             ↪ d[u]);
109           s[top] = v[++cnt] = u;
110         }
111
112         s[++top] = a[i];
113
114       for (int i = top - 1; i; i--)
115         virtree.add(s[i], s[i + 1], d[s[i + 1]] -
116           ↪ d[s[i]]);
117
118       virtree.solve(n + 1);
119       ans *= k - 1;
120       printf("%lld %d %d\n", ans - virtree.ans_sum,
121           ↪ virtree.ans_min, virtree.ans_max);
122
123       for (int i = 1; i <= k; i++)
124         virtree.clear(a[i]);
125       for (int i = 1; i <= cnt; i++)
126         virtree.clear(v[i]);
127
128     }
129
130     return 0;
131   }
132
133   void dfs(int x) {
134     dfn[x] = ++tim;
135     d[x] = d[f[x][0]] + 1;
136
137     while ((1 << lgn) < d[x])
138       lgn++;
139
140     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
141       if (G[x][i] != f[x][0]) {
142         f[G[x][i]][0] = x;
143         dfs(G[x][i]);
144       }
145   }
146 }

```

```

140     }
141 }
142
143 int LCA(int x, int y) {
144     if (d[x] != d[y]) {
145         if (d[x] < d[y])
146             swap(x, y);
147
148         for (int i = lgn; i >= 0; i--)
149             if (((d[x] - d[y]) >> i) & 1)
150                 x = f[x][i];
151     }
152
153     if (x == y)
154         return x;
155
156     for (int i = lgn; i >= 0; i--)
157         if (f[x][i] != f[y][i])
158             x = f[x][i];
159             y = f[y][i];
160     }
161
162     return f[x][0];
163 }
```

4.11 长链剖分

```

1 // 顾名思义，长链剖分是取最深的儿子作为重儿子
2
3 // O(n) 维护以深度为下标的子树信息
4 vector<int> G[maxn], v[maxn];
5 int n, p[maxn], h[maxn], son[maxn], ans[maxn];
6
7 // 原题题意：求每个点的子树中与它距离是几的点最多，相同的
8 // → 取最大深度
9 // 由于vector只能在后面加入元素，为了写代码方便，这里反过来存
10 // 或者开一个结构体维护倒过来的vector
11 void dfs(int x) {
12     h[x] = 1;
13
14     for (int y : G[x])
15         if (y != p[x]){
16             p[y] = x;
17             dfs(y);
18
19             if (h[y] > h[son[x]])
20                 son[x] = y;
21         }
22
23     if (!son[x]) {
24         v[x].push_back(1);
25         ans[x] = 0;
26         return;
27     }
28
29     h[x] = h[son[x]] + 1;
30     swap(v[x], v[son[x]]);
31
32     if (v[x][ans[son[x]]] == 1)
33         ans[x] = h[x] - 1;
34     else
35         ans[x] = ans[son[x]];
36
37     v[x].push_back(1);
38
39     int mx = v[x][ans[x]];
40     for (int y : G[x])
41         if (y != p[x] && y != son[x]) {
42             for (int j = 1; j <= h[y]; j++) {
```

```

42         v[x][h[x] - j - 1] += v[y][h[y] - j];
43
44         int t = v[x][h[x] - j - 1];
45         if (t > mx || (t == mx && h[x] - j - 1
46                         →> ans[x])) {
47             mx = t;
48             ans[x] = h[x] - j - 1;
49         }
50     }
51     v[y].clear();
52 }
53 }
```

4.11.1 梯子剖分

```

1 // 在线求一个点的第k祖先 O(n \log n)-O(1)
2 // 理论基础：任意一个点x的k级祖先y所在长链长度一定≥k
3
4 // 全局数组定义
5 vector<int> G[maxn], v[maxn];
6 int d[maxn], mxd[maxn], son[maxn], top[maxn],
7     → len[maxn];
8 int f[19][maxn], log_tbl[maxn];
9
10 // 在主函数中两遍dfs之后加上如下预处理
11 log_tbl[0] = -1;
12 for (int i = 1; i <= n; i++)
13     log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
14 for (int j = 1; (1 << j) < n; j++)
15     for (int i = 1; i <= n; i++)
16         f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
17
18 // 第一遍dfs，用于计算深度和找出重儿子
19 void dfs1(int x) {
20     mxd[x] = d[x];
21
22     for (int y : G[x])
23         if (y != f[0][x]){
24             f[0][y] = x;
25             d[y] = d[x] + 1;
26             dfs1(y);
27
28             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
29             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
30                 son[x] = y;
31         }
32 }
33
34 // 第二遍dfs，用于进行剖分和预处理梯子剖分（每条链向上延
35 // → 伸一倍）数组
36 void dfs2(int x) {
37     top[x] = (x == son[f[0][x]] ? top[f[0][x]] : x);
38
39     for (int y : G[x])
40         if (y != f[0][x])
41             dfs2(y);
42
43     if (top[x] == x) {
44         int u = x;
45         while (top[son[u]] == x)
46             u = son[u];
47
48         len[x] = d[u] - d[x];
49         for (int i = 0; i < len[x]; i++, u = f[0][u])
50             v[x].push_back(u);
51         u = x;
52 }
```

```

52     for (int i = 0; i < len[x] && u; i++, u = f[0]
53         ↪ [u])
54         v[x].push_back(u);
55     }
56
57 // 在线询问x的k级祖先 O(1)
58 // 不存在时返回0
59 int query(int x, int k) {
60     if (!k)
61         return x;
62     if (k > d[x])
63         return 0;
64
65     x = f[log_tbl[k]][x];
66     k ^= 1 << log_tbl[k];
67     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] +
68         ↪ k];
}

```

4.12 堆

4.12.1 左偏树

参见3.2.3.k短路 (第 29 页).

4.12.2 二叉堆

```

1 struct my_binary_heap {
2     static constexpr int maxn = 100005;
3
4     int a[maxn], size;
5
6     my_binary_heap() : size(0) {}
7
8     void push(int val) {
9         a[++size] = val;
10
11        for (int x = size; x > 1; x /= 2) {
12            if (a[x] < a[x / 2])
13                swap(a[x], a[x / 2]);
14            else
15                break;
16        }
17    }
18
19    int &top() {
20        return a[1];
21    }
22
23    int pop() {
24        int res = a[1];
25        a[1] = a[size--];
26
27        for (int x = 1, son; ; x = son) {
28            if (x * 2 == size)
29                son = x * 2;
30            else if (x * 2 > size)
31                break;
32            else if (a[x * 2] < a[x * 2 + 1])
33                son = x * 2;
34            else
35                son = x * 2 + 1;
36
37            if (a[son] < a[x])
38                swap(a[x], a[son]);
39            else
40                break;
41        }
}

```

```

42         ↪
43         return res;
44     }
45 }

```

4.13 莫队

注意如果 n 和 q 不平衡, 块大小应该设为 $\frac{n}{\sqrt{q}}$.

另外如果裸的莫队要卡常可以按块编号奇偶性分别对右端点正序或者倒序排序, 期望可以减少一半的移动次数.

4.13.1 莫队二次离线

适用范围: 询问的是点对相关 (或者其它可以枚举每个点和区间算贡献) 的信息, 并且可以离线; 更新时可以使用一些牺牲修改复杂度来改善询问复杂度的数据结构 (如单点修改询问区间和).

先按照普通的莫队将区间排序. 考虑区间移动的情况, 以 (l, r) 向右移动右端点到 (l, t) 为例.

对于每个 $i \in (r, t]$ 来说, 它都要对区间 $[l, i)$ 算贡献. 可以拆成 $[1, i)$ 和 $[1, l)$ 两部分, 那么前一部分因为都是 i 和 $[1, i)$ 做贡献的形式所以可以直接预处理.

考虑后一部分, i 和 $(1, l)$ 做贡献, 因为莫队的性质我们可以保证这样的询问次数不超过 $O((n + m)\sqrt{n})$, 因此我们可以对每个 l 记录下来哪些 i 要和它询问. 并且每次移动时询问的 i 都是连续的, 所以对每个 l 开一个vector记录下对应的区间和编号就行了.

剩余的三种情况 (右端点左移或者移动左端点) 都是类似的, 具体可以看代码.

例: Yuno loves sqrt technology II (询问区间逆序对数)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, B = 314;
6
7 struct Q {
8     int l, r, d, id;
9
10    Q() = default;
11
12    Q(int l, int r, int d, int id) : l(l), r(r), d(d),
13        ↪ id(id) {}
14
15    friend bool operator < (const Q &a, const Q &b) {
16        if (a.d != b.d)
17            ↪ return a.d < b.d;
18
19        return a.r < b.r;
20    }
21 } q[maxn]; // 结构体可以复用, d既可以作为左端点块编号, 也
22             ↪ 可以作为二次离线处理的倍数
23
24 int global_n, bid[maxn], L[maxn], R[maxn], cntb;
25
26 int sa[maxn], sb[maxn];
27
28 void addp(int x) { // sqrt(n) 修改 O(1) 查询
29     for (int k = bid[x]; k <= cntb; k++)
30         sb[k]++;
31
32     for (int i = x; i <= R[bid[x]]; i++)
33         sa[i]++;
34 }
35
36 int queryp(int x) {
37     if (!x)
38         ↪ return 0;
39
40     int res = 0;
41
42     for (int i = 1; i <= R[bid[x]]; i++)
43         res += sb[i];
44
45     for (int i = 1; i <= L[bid[x]]; i++)
46         res -= sa[i];
47
48     return res;
49 }

```

```

38     return sa[x] + sb[bid[x] - 1];
39 }
40
41 void adds(int x) {
42     for (int k = 1; k <= bid[x]; k++)
43         sb[k]++;
44
45     for (int i = L[bid[x]]; i <= x; i++)
46         sa[i]++;
47 }
48
49 int querys(int x) {
50     if (x > global_n)
51         return 0; // 为了防止越界就判一下
52     return sa[x] + sb[bid[x] + 1];
53 }
54
55 vector<Q> vp[maxn], vs[maxn]; // prefix, suffix
56
57 long long fp[maxn], fs[maxn]; // prefix, suffix
58
59 int a[maxn], b[maxn];
60
61 long long ta[maxn], ans[maxn];
62
63 int main() {
64
65     int n, m;
66     scanf("%d%d", &n, &m);
67
68     global_n = n;
69
70     for (int i = 1; i <= n; i++)
71         scanf("%d", &a[i]);
72
73     memcpy(b, a, sizeof(int) * (n + 1));
74     sort(b + 1, b + n + 1);
75
76     for (int i = 1; i <= n; i++)
77         a[i] = lower_bound(b + 1, b + n + 1, a[i]) - b;
78
79     for (int i = 1; i <= n; i++) {
80         bid[i] = (i - 1) / B + 1;
81
82         if (!L[bid[i]])
83             L[bid[i]] = i;
84
85         R[bid[i]] = i;
86         cntb = bid[i];
87     }
88
89     for (int i = 1; i <= m; i++) {
90         scanf("%d%d", &q[i].l, &q[i].r);
91
92         q[i].d = bid[q[i].l];
93         q[i].id = i;
94     }
95
96     sort(q + 1, q + m + 1);
97
98     int l = 2, r = 1; // l, r是上一个询问的端点
99
100    for (int i = 1; i <= m; i++) {
101        int s = q[i].l, t = q[i].r; // s, t是当前要调整
102        → 到的端点
103
104        if (s < l)
105            vs[r + 1].push_back(Q(s, l - 1, 1, i));
106        else if (s > l)
107            vs[r + 1].push_back(Q(l, s - 1, -1, i));

```

```

107
108     l = s;
109
110     if (t > r)
111         vp[l - 1].push_back(Q(r + 1, t, 1, i));
112     else if (t < r)
113         vp[l - 1].push_back(Q(t + 1, r, -1, i));
114
115     r = t;
116 }
117
118 for (int i = 1; i <= n; i++) { // 第一遍正着处理, 解
119     → 决关于前缀的询问
120     fp[i] = fp[i - 1] + querys(a[i] + 1);
121
122     adds(a[i]);
123
124     for (auto q : vp[i]) {
125         long long tmp = 0;
126         for (int k = q.l; k <= q.r; k++)
127             tmp += querys(a[k] + 1);
128
129         ta[q.id] -= q.d * tmp;
130     }
131
132     memset(sa, 0, sizeof(sa));
133     memset(sb, 0, sizeof(sb));
134
135     for (int i = n; i; i--) { // 第二遍倒着处理, 解决关
136     → 于后缀的询问
137     fs[i] = fs[i + 1] + queryp(a[i] - 1);
138
139     addp(a[i]);
140
141     for (auto q : vs[i]) {
142         long long tmp = 0;
143         for (int k = q.l; k <= q.r; k++)
144             tmp += queryp(a[k] - 1);
145
146         ta[q.id] -= q.d * tmp;
147     }
148
149     l = 2;
150     r = 1;
151
152     for (int i = 1; i <= m; i++) { // 求出fs和fp之后再加
153     → 上这部分的贡献
154     int s = q[i].l, t = q[i].r;
155
156     ta[i] += fs[s] - fs[l];
157     ta[i] += fp[t] - fp[r];
158
159     l = s;
160     r = t;
161
162     ta[i] += ta[i - 1]; // 因为算出来的是相邻两个询
163     → 问之间的贡献, 所以要前缀和
164     ans[q[i].id] = ta[i];
165
166     for (int i = 1; i <= m)
167         printf("%lld\n", ans[i]);
168
169 }

```

4.13.2 带修莫队在线化 $O(n^{\frac{5}{3}})$

最简单的带修莫队：块大小设成 $n^{\frac{2}{3}}$ ，排序时第一关键字是左端点块编号，第二关键字是右端点块编号，第三关键字是时间。（记得把时间压缩成只有修改的时间。）

现在要求在线的同时支持修改，仍然以 $B = n^{\frac{2}{3}}$ 分一块，预处理出两块之间的贡献，那么预处理复杂度就是 $O(n^{\frac{5}{3}})$ 。

修改时最简单的方法是直接把 $n^{\frac{2}{3}}$ 个区间全更新一遍。嫌慢的话可以给每个区间打一个懒标记，询问的时候如果解了再更新区间的信息。

注意如果附加信息是可减的（比如每个数的出现次数），那么就只需要存 $O(n^{\frac{1}{3}})$ 个。

总复杂度仍然是 $O(n^{\frac{5}{3}})$ ，如果打懒标记的话是跑不太满的。如果附加信息可减则空间复杂度是 $O(n^{\frac{4}{3}})$ ，否则和时间复杂度同阶。

4.13.3 莫队二次离线在线化 $O((n+m)\sqrt{n})$

和之前的道理是一样的， i 和 $[1, i]$ 的贡献这部分仍然可以预处理掉，而前后缀对区间的贡献那部分只保存块端点处的信息。

按照莫队二次离线的转移方法操作之后发现只剩两边散块的贡献没有解决。这时可以具体问题具体解决，例如求逆序对的话直接预处理出排序后的数组然后归并即可。

时空复杂度均为 $O(n\sqrt{n})$ 。

以下代码以强制在线求区间逆序对为例（洛谷上被卡常了，正常情况下极限数据应该在1.5s内。）

```

1 constexpr int maxn = 100005, B = 315, maxb = maxn / B +
2   ↪ 5;
3
4 int n, bid[maxn], L[maxb], R[maxb], cntb;
5
6 struct DS { // O(sqrt(n)) 修改 O(1) 查询
7     int total;
8     int sa[maxn], sb[maxb];
9
10    void init(const DS &o) {
11        total = o.total;
12        memcpy(sa, o.sa, sizeof(int) * (n + 1));
13        memcpy(sb, o.sb, sizeof(int) * (cntb + 1));
14    }
15
16    void add(int x) {
17        total++;
18        for (int k = 1; k <= bid[x]; k++)
19            sb[k]++;
20        for (int i = L[bid[x]]; i <= x; i++)
21            sa[i]++;
22    }
23
24    int querys(int x) {
25        if (x > n)
26            return 0;
27
28        return sb[bid[x] + 1] + sa[x];
29    }
30
31    int queryp(int x) {
32        return total - querys(x + 1);
33    }
34 } pr[maxb];
35
36 int c[maxn]; // 树状数组
37
38 void addc(int x, int d) {
39     while (x) {
40         c[x] += d;
41         x -= x & -x;
42     }
43 }
```

```

43
44 int queryc(int x) {
45     int ans = 0;
46     while (x <= n) {
47         ans += c[x];
48         x += x & -x;
49     }
50     return ans;
51 }
52
53 long long fp[maxn], fs[maxn];
54
55 int rk[maxn], val[maxn][B + 5];
56
57 long long dat[maxb][maxb];
58
59 int a[maxn];
60
61 int main() {
62
63     int m;
64     cin >> n >> m;
65
66     for (int i = 1; i <= n; i++) {
67         cin >> a[i];
68
69         bid[i] = (i - 1) / B + 1;
70         if (!L[bid[i]])
71             L[bid[i]] = i;
72         R[bid[i]] = i;
73         cntb = bid[i];
74
75         rk[i] = i;
76     }
77
78     for (int k = 1; k <= cntb; k++)
79         sort(rk + L[k], rk + R[k] + 1, [](int x, int
80           ↪ y) {return a[x] < a[y]}); // 每个块排序
81
82     for (int i = n; i; i--) {
83         for (int j = 2; i + j - 1 <= R[bid[i]]; j++) {
84             val[i][j] = val[i + 1][j - 1] + val[i][j -
85               ↪ 1] - val[i + 1][j - 2];
86             if (a[i] > a[i + j - 1])
87                 val[i][j]++; // 块内用二维前缀和预处理
88         }
89
90         for (int k = 1; k <= cntb; k++) {
91             for (int i = L[k]; i <= R[k]; i++) {
92                 dat[k][k] += queryc(a[i] + 1); // 单块内的逆
93                 addc(a[i], 1);
94
95                 for (int i = L[k]; i <= R[k]; i++)
96                     addc(a[i], -1);
97             }
98
99             for (int i = 1; i <= n; i++) {
100                 if (i > 1 && i == L[bid[i]])
101                     pr[bid[i]].init(pr[bid[i] - 1]);
102
103                 fp[i] = fp[i - 1] + pr[bid[i]].querys(a[i] +
104                   ↪ 1);
105
106                 pr[bid[i]].add(a[i]);
107
108                 for (int i = n; i; i--) {
109                     fs[i] = fs[i + 1] + (n - i - queryc(a[i] + 1));
110                 }
111             }
112         }
113     }
114 }
```

```

109     addc(a[i], 1);
110 }
111
112 for (int s = 1; s <= cntb; s++) {
113     for (int t = s + 1; t <= cntb; t++) {
114         dat[s][t] = dat[s][t - 1] + dat[t][t];
115
116         for (int i = L[t]; i <= R[t]; i++) // 块间的
117             → 逆序对用刚才处理的分块求出
118             dat[s][t] += pr[t - 1].querys(a[i] + 1)
119             → - pr[s - 1].querys(a[i] + 1);
120     }
121
122 long long ans = 0;
123
124 while (m--) {
125     long long s, t;
126     cin >> s >> t;
127
128     int l = s ^ ans, r = t ^ ans;
129
130     if (bid[l] == bid[r])
131         ans = val[l][r - l + 1];
132     else {
133         ans = dat[bid[l] + 1][bid[r] - 1];
134
135         ans += fp[r] - fp[L[bid[r]] - 1];
136         for (int i = L[bid[r]]; i <= r; i++)
137             ans -= pr[bid[l]].querys(a[i] + 1);
138
139         ans += fs[l] - fs[R[bid[l]] + 1];
140         for (int i = l; i <= R[bid[l]]; i++)
141             ans -= (a[i] - 1) - pr[bid[r] - 1].queryp(a[i] - 1);
142
143         int i = L[bid[l]], j = L[bid[r]], w = 0; // ← 手写归并
144
145         while (true) {
146             while (i <= R[bid[l]] && rnk[i] < l)
147                 i++;
148             while (j <= R[bid[r]] && rnk[j] > r)
149                 j++;
150
151             if (i > R[bid[l]] && j > R[bid[r]])
152                 break;
153
154             int x = (i <= R[bid[l]] ? a[rnk[i]] : (int)1e9), y = (j <= R[bid[r]] ?
155             a[rnk[j]] : (int)1e9);
156
157             if (x < y) {
158                 ans += w;
159                 i++;
160             } else {
161                 j++;
162                 w++;
163             }
164         }
165         cout << ans << '\n';
166     }
167
168     return 0;
169 }
```

4.14 常见根号思路

1. 通用

- 出现次数大于 \sqrt{n} 的数不会超过 \sqrt{n} 个
- 对于带修改问题, 如果不方便分治或者二进制分组, 可以考虑对操作分块, 每次查询时暴力最后的 \sqrt{n} 个修改并更正答案
- **根号分治:** 如果分治时每个子问题需要 $O(N)$ (N 是全局问题的大小) 的时间, 而规模较小的子问题可以 $O(n^2)$ 解决, 则可以使用根号分治
 - 规模大于 \sqrt{n} 的子问题用 $O(N)$ 的方法解决, 规模小于 \sqrt{n} 的子问题用 $O(n^2)$ 暴力
 - 规模大于 \sqrt{n} 的子问题最多只有 \sqrt{n} 个
 - 规模不大于 \sqrt{n} 的子问题大小的平方和也必定不会超过 $n\sqrt{n}$
- 如果输入规模之和不大于 n (例如给定多个小字符串与大字符串进行询问), 那么规模超过 \sqrt{n} 的问题最多只有 \sqrt{n} 个

2. 序列

- 某些维护序列的问题可以用分块/块状链表维护
- 对于静态区间询问问题, 如果可以快速将左/右端点移动一位, 可以考虑莫队
 - 如果强制在线可以分块预处理, 但是一般空间需要 $n\sqrt{n}$
 - * 例题: 询问区间中有几种数出现次数恰好为 k , 强制在线
 - 如果带修改可以试着想一想带修莫队, 但是复杂度高达 $n^{\frac{5}{3}}$
- 线段树可以解决的问题也可以用分块来做到 $O(1)$ 询问或是 $O(1)$ 修改, 具体要看哪种操作更多

3. 树

- 与序列类似, 树上也有树分块和树上莫队
 - 树上带修莫队很麻烦, 常数也大, 最好不要先考虑
 - 树分块不要想当然
- 树分治也可以套根号分治, 道理是一样的

4. 字符串

- 循环节长度大于 \sqrt{n} 的子串最多只有 $O(n)$ 个, 如果是极长子串则只有 $O(\sqrt{n})$ 个

5 字符串

5.1 KMP

```

1 int fail[maxn];
2
3 void kmp(const char *s, int n) {
4     fail[0] = fail[1] = 0;
5
6     for (int i = 1; i < n; i++) {
7         int j = fail[i];
8
9         while (j && s[i + 1] != s[j + 1])
10            j = fail[j];
11
12         if (s[i + 1] == s[j + 1])
13             fail[i + 1] = j + 1;
14         else
15             fail[i + 1] = 0;
16     }
17 }
```

5.1.1 ex-KMP

```

1 void exkmp(const char *s, int *a, int n) {
2     int l = 0, r = 0;
3     a[0] = n;
4
5     for (int i = 1; i <= n; i++) {
6         a[i] = i > r ? 0 : min(r - i + 1, a[i - l]);
7
8         while (i + a[i] < n && s[a[i]] == s[i + a[i]])
9             a[i]++;
10
11         if (i + a[i] - 1 > r) {
12             l = i;
13             r = i + a[i] - 1;
14         }
15     }
16 }
```

5.2 AC 自动机

```

1 int ch[maxm][26], f[maxm][26], q[maxm], sum[maxm], cnt
2     → = 0;
3
4 // 在字典树中插入一个字符串 O(n)
5 int insert(const char *c) {
6     int x = 0;
7     while (*c) {
8         if (!ch[x][*c - 'a'])
9             ch[x][*c - 'a'] = ++cnt;
10        x = ch[x][*c++ - 'a'];
11    }
12    return x;
13 }
14
15 // 建AC自动机 O(n * sigma)
16 void getfail() {
17     int x, head = 0, tail = 0;
18
19     for (int c = 0; c < 26; c++)
20         if (ch[0][c])
21             q[tail++] = ch[0][c]; // 把根节点的儿子加入
22             → 队列
23
24     while (head != tail) {
```

```

23         x = q[head++];
24
25         G[f[x][0]].push_back(x);
26         fill(f[x] + 1, f[x] + 26, cnt + 1);
27
28         for (int c = 0; c < 26; c++) {
29             if (ch[x][c]) {
30                 int y = f[x][0];
31
32                 f[ch[x][c]][0] = ch[y][c];
33                 q[tail++] = ch[x][c];
34             } else
35                 ch[x][c] = ch[f[x][0]][c];
36         }
37     }
38
39     fill(f[0], f[0] + 26, cnt + 1);
40 }
```

5.3 后缀数组

5.3.1 倍增

```

1 constexpr int MAXN = 100005;
2
3 // 清空的话全部都要清空到 max(n, m) + 1
4 void get_sa(char *s, int n, int *sa, int *rnk, int
5     → *height) { // 1-base
6     static int buc[MAXN], id[MAXN], p[MAXN], t[MAXN *
7         → 2];
8
9     int m = 300;
10
11    for (int i = 1; i <= n; i++)
12        buc[rnk[i]] = s[i]++;
13    for (int i = 1; i <= m; i++)
14        buc[i] += buc[i - 1];
15    for (int i = n; i; i--)
16        sa[buc[rnk[i]]--] = i;
17
18    memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
19
20    for (int k = 1, cnt = 0; cnt != n; k *= 2, m = cnt)
21        → {
22        cnt = 0;
23        for (int i = n; i > n - k; i--)
24            id[+cnt] = i;
25
26        for (int i = 1; i <= n; i++)
27            if (sa[i] > k)
28                id[+cnt] = sa[i] - k;
29
30        for (int i = 1; i <= n; i++)
31            buc[p[i]] = rnk[id[i]]++;
32        for (int i = 1; i <= m; i++)
33            buc[i] += buc[i - 1];
34        for (int i = n; i; i--)
35            sa[buc[p[i]]--] = id[i];
36
37        memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
38
39        memcpy(t, rnk, sizeof(int) * (n + 1));
40
41        cnt = 0;
42        for (int i = 1; i <= n; i++) {
43            if (t[sa[i]] != t[sa[i - 1]] || t[sa[i] +
44                → k] != t[sa[i - 1] + k])
45                cnt++;
46        }
47    }
48 }
```

```

43     rnk[sa[i]] = cnt;
44 }
45
46
47 for (int i = 1; i <= n; i++)
48     sa[rnk[i]] = i;
49
50 for (int i = 1, k = 0; i <= n; i++) { // 顺便
51     ←求height
52     if (k)
53         k--;
54
55     if (rnk[i] > 1)
56         while (sa[rnk[i] - 1] + k <= n && s[i + k]
57             → == s[sa[rnk[i] - 1] + k])
58             k++;
59
60     height[rnk[i]] = k; // height[i] = lcp(sa[i],
61         → sa[i - 1])
62 }
63
64 char s[MAXN];
65 int sa[MAXN], rnk[MAXN], height[MAXN];
66
67 int main() {
68     cin >> (s + 1);
69
70     int n = strlen(s + 1);
71
72     get_sa(s, n, sa, rnk, height);
73
74     for (int i = 1; i <= n; i++)
75         cout << sa[i] << (i < n ? ' ' : '\n');
76
77     for (int i = 2; i <= n; i++)
78         cout << height[i] << (i < n ? ' ' : '\n');
79
80     return 0;
81 }
```

5.3.2 SA-IS

```

1 // SA-IS求完的SA有效位只有1~n, 但它是0-based, 如果其他部
2     → 分是1-based就抄一下封装
3
4 constexpr int maxn = 100005, l_type = 0, s_type = 1;
5
6 // 判断一个字符是否为LMS字符
7 bool is_lms(int *tp, int x) {
8     return x > 0 && tp[x] == s_type && tp[x - 1] ==
9         → l_type;
10
11 // 判断两个LMS子串是否相同
12 bool equal_substr(int *s, int x, int y, int *tp) {
13     do {
14         if (s[x] != s[y])
15             return false;
16         x++;
17         y++;
18     } while (!is_lms(tp, x) && !is_lms(tp, y));
19
20     return s[x] == s[y];
21
22 // 诱导排序(从*型诱导到L型, 从L型诱导到S型)
23 // 调用之前应将*型按要求放入SA中
24 void induced_sort(int *s, int *sa, int *tp, int *buc,
25     → int *lbuc, int *sbuc, int n, int m) {

```

```

25     for (int i = 0; i <= n; i++)
26         if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == l_type)
27             sa[lbuc[s[sa[i] - 1]]++] = sa[i] - 1;
28
29     for (int i = 1; i <= m; i++)
30         sbuc[i] = buc[i] - 1;
31
32     for (int i = n; ~i; i--)
33         if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == s_type)
34             sa[sbuc[s[sa[i] - 1]]--] = sa[i] - 1;
35 }
36
37 // s是输入字符串, n是字符串的长度, m是字符集的大小
38 int *sa_is(int *s, int len, int m) {
39     int n = len - 1;
40
41     int *tp = new int[n + 1];
42     int *pos = new int[n + 1];
43     int *name = new int[n + 1];
44     int *sa = new int[n + 1];
45     int *buc = new int[m + 1];
46     int *lbuc = new int[m + 1];
47     int *sbuc = new int[m + 1];
48
49     memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
50     memset(lbuc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
51     memset(sbuc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
52
53     for (int i = 0; i <= n; i++)
54         buc[s[i]]++;
55
56     for (int i = 1; i <= m; i++) {
57         buc[i] += buc[i - 1];
58
59         lbuc[i] = buc[i - 1];
60         sbuc[i] = buc[i] - 1;
61     }
62
63     tp[n] = s_type;
64     for (int i = n - 1; ~i; i--) {
65         if (s[i] < s[i + 1])
66             tp[i] = s_type;
67         else if (s[i] > s[i + 1])
68             tp[i] = l_type;
69         else
70             tp[i] = tp[i + 1];
71     }
72
73     int cnt = 0;
74     for (int i = 1; i <= n; i++)
75         if (tp[i] == s_type && tp[i - 1] == l_type)
76             pos[cnt++] = i;
77
78     memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
79     for (int i = 0; i < cnt; i++)
80         sa[sbuc[s[pos[i]]]--] = pos[i];
81     induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
82
83     memset(name, -1, sizeof(int) * (n + 1));
84     int lastx = -1, namecnt = 1;
85     bool flag = false;
86
87     for (int i = 1; i <= n; i++) {
88         int x = sa[i];
89
90         if (is_lms(tp, x)) {
91             if (lastx >= 0 && !equal_substr(s, x,
92                 → lastx, tp))

```

```

92     namecnt++;
93
94     if (lastx >= 0 && namecnt == name[lastx])
95         flag = true;
96
97     name[x] = namecnt;
98     lastx = x;
99 }
100}
101name[n] = 0;
102
103int *t = new int[cnt];
104int p = 0;
105for (int i = 0; i <= n; i++)
106    if (name[i] >= 0)
107        t[p++] = name[i];
108
109int *tsa;
110if (!flag) {
111    tsa = new int[cnt];
112
113    for (int i = 0; i < cnt; i++)
114        tsa[t[i]] = i;
115}
116else
117    tsa = sais(t, cnt, namecnt);
118
119lbuc[0] = sbuc[0] = 0;
120for (int i = 1; i <= m; i++) {
121    lbuc[i] = buc[i - 1];
122    sbuc[i] = buc[i] - 1;
123}
124
125memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
126for (int i = cnt - 1; ~i; i--)
127    sa[sbuc[s[pos[tsa[i]]]]--] = pos[tsa[i]];
128induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
129
130// 多组数据的时候最好 delete 掉
131delete[] tp;
132delete[] pos;
133delete[] name;
134delete[] buc;
135delete[] lbuc;
136delete[] sbuc;
137delete[] t;
138delete[] tsa;
139
140return sa;
141}
142
143// 封装好的函数, 1-based
144void get_sa(char *s, int n, int *sa, int *rnk, int
145    *height) {
146    static int a[maxn];
147
148    for (int i = 1; i <= n; i++)
149        a[i - 1] = s[i];
150
151    a[n] = '$';
152
153    int *t = sais(a, n + 1, 256);
154    memcpy(sa, t, sizeof(int) * (n + 1));
155    delete[] t;
156
157    sa[0] = 0;
158    for (int i = 1; i <= n; i++)
159        rnk[sa[i]] = i;

```

```

160    for (int i = 1, k = 0; i <= n; i++) { // 求height
161        if (k)
162            k--;
163
164        while (s[i + k] == s[sa[rnk[i] - 1] + k])
165            k++;
166
167        height[rnk[i]] = k; // height[i] = lcp(sa[i],
168                           // → sa[i - 1])
169    }

```

5.3.3 SAMSA

```

1 bool vis[maxn * 2];
2 char s[maxn];
3 int n, id[maxn * 2], ch[maxn * 2][26], height[maxn],
4      → tim = 0;
5
6 void dfs(int x) {
7     if (id[x]) {
8         height[tim++] = val[last];
9         sa[tim] = id[x];
10
11     last = x;
12 }
13
14 for (int c = 0; c < 26; c++)
15     if (ch[x][c])
16         dfs(ch[x][c]);
17
18 last = par[x];
19
20 int main() {
21     last = ++cnt;
22
23     scanf("%s", s + 1);
24     n = strlen(s + 1);
25
26     for (int i = n; i; i--) {
27         expand(s[i] - 'a');
28         id[last] = i;
29     }
30
31     vis[1] = true;
32     for (int i = 1; i <= cnt; i++)
33         if (id[i])
34             for (int x = i, pos = n; x && !vis[x]; x =
35                  → par[x]) {
36                 vis[x] = true;
37                 pos -= val[x] - val[par[x]];
38                 ch[par[x]][s[pos + 1] - 'a'] = x;
39             }
40
41     dfs(1);
42
43     for (int i = 1; i <= n; i++) {
44         if (i > 1)
45             printf(" ");
46         printf("%d", sa[i]); // 1-based
47     }
48     printf("\n");
49
50     for (int i = 1; i < n; i++) {
51         if (i > 1)
52             printf(" ");
53         printf("%d", height[i]);
54     }

```

```

54     printf("\n");
55
56     return 0;
57 }
```

```

50
51     last = np;
52 }
```

5.4 后缀平衡树

如果不需要查询排名，只需要维护前驱后继关系的题目，可以直接用二分哈希+set去做。

一般的题目需要查询排名，这时候就需要写替罪羊树或者Treap维护tag。插入后缀时如果首字母相同只需比较各自删除首字母后的tag大小即可。

(Treap也具有重量平衡树的性质，每次插入后影响到的子树大小期望是 $O(\log n)$ 的，所以每次做完插入操作之后直接暴力重构子树内tag就行了。)

5.5 后缀自动机

```

1 // 在字符集比较小的时候可以直接开go数组，否则需要用map或
2 // →者哈希表替换
3
4 // 全局变量与数组定义
5 int last, val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], sam_cnt;
6 int c[maxn], q[maxn]; // 用来桶排序
7
8 // 在主函数开头加上这句初始化
9 last = sam_cnt = 1;
10
11 // 以下是按val进行桶排序的代码
12 for (int i = 1; i <= sam_cnt; i++)
13     c[val[i] + 1]++;
14 for (int i = 1; i <= n; i++)
15     c[i] += c[i - 1]; // 这里n是串长
16 for (int i = 1; i <= sam_cnt; i++)
17     q[++c[val[i]]] = i;
18
19 //加入一个字符 均摊O(1)
20 void extend(int c) {
21     int p = last, np = ++sam_cnt;
22     val[np] = val[p] + 1;
23
24     while (p && !go[p][c]) {
25         go[p][c] = np;
26         p = par[p];
27     }
28
29     if (!p)
30         par[np] = 1;
31     else {
32         int q = go[p][c];
33
34         if (val[q] == val[p] + 1)
35             par[np] = q;
36         else {
37             int nq = ++sam_cnt;
38             val[nq] = val[p] + 1;
39             memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
40
41             par[nq] = par[q];
42             par[np] = par[q] = nq;
43
44             while (p && go[p][c] == q) {
45                 go[p][c] = nq;
46                 p = par[p];
47             }
48     }
49 }
```

5.5.1 广义后缀自动机

下面的写法复杂度是 Σ 串长的，但是胜在简单。

如果建字典树然后 BFS 建自动机可以做到 $O(n|\Sigma|)$ (n 是字典树结点数)，但是后者写起来比较麻烦。

```

1 int extend(int p, int c) {
2     int np = 0;
3
4     if (!go[p][c]) {
5         np = ++sam_cnt;
6         val[np] = val[p] + 1;
7         while (p && !go[p][c]) {
8             go[p][c] = np;
9             p = par[p];
10        }
11    }
12
13    if (!p)
14        par[np] = 1;
15    else {
16        int q = go[p][c];
17
18        if (val[q] == val[p] + 1) {
19            if (np)
20                par[np] = q;
21            else
22                return q;
23        }
24        else {
25            int nq = ++sam_cnt;
26            val[nq] = val[p] + 1;
27            memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
28
29            par[nq] = par[q];
30            par[q] = nq;
31            if (np)
32                par[np] = nq;
33
34            while (p && go[p][c] == q) {
35                go[p][c] = nq;
36                p = par[p];
37            }
38
39            if (!np)
40                return nq;
41        }
42    }
43
44    return np;
45 }
46 // 调用的时候直接last = 1然后一路调用last = extend(last,
47 // → c) 就行了
```

5.5.2 区间本质不同子串计数 (后缀自动机 + LCT + 线段树)

问题：给定一个字符串 s ，多次询问 $[l, r]$ 区间的本质不同的子串个数，可能强制在线。

做法：考虑建出后缀自动机，然后枚举右端点，用线段树维护每个左端点的答案。

显然只有right集合在 $[l, r]$ 中的串才有可能有贡献，所以我们只考虑每个串最大的right。

每次右端点+1时找到它对应的结点 u ，则 u 到根节点路径上的每个点，它的right集合都会被 r 更新。

对于某个特定的左端点 l , 我们需要保证本质不同的子串左端点不能越过它; 因此对于一个结点 p , 我们知道它对应的子串长度 $(val_{par_p}, val_p]$ 之后, 在 p 的right集合最大值减去对应长度, 这样对应的 l 内全部 +1 即可; 这样询问时就只需要查询 r 对应的线段树中 $[l, r]$ 的区间和. (当然旧的right对应的区间也要减掉) 实际上可以发现更新时都是把路径分成若干个整段更新right集合, 因此可以用LCT维护这个过程. 时间复杂度 $O(n \log^2 n)$, 空间 $O(n)$, 当然如果强制在线的话, 就把线段树改成主席树, 空间复杂度就和时间复杂度同阶了.

```

1 int tim; // tim实际上就是当前的右端点
2
3 node *access(node *x) {
4     node *y = null;
5
6     while (x != null) {
7         splay(x);
8
9         x -> ch[1] = null;
10        x -> refresh();
11
12        if (x -> val) // val记录的是上次访问时间, 也就
13            ↪是right集合最大值
14        | update(x -> val - val[x -> r] + 1, x -> val
15            ↪- val[par[x -> l]], -1);
16
17        x -> val = tim;
18        x -> lazy = true;
19
20        update(x -> val - val[x -> r] + 1, x -> val -
21            ↪val[par[x -> l]], 1);
22
23        x -> ch[1] = y;
24
25        (y = x) -> refresh();
26
27        x = x -> p;
28    }
29
30    return y;
31}
32
33// 以下是main函数中的用法
34for (int i = 1; i <= n; i++) {
35    tim++;
36    access(null + id[i]);
37
38    if (i >= m) // 例题询问长度是固定的, 如果不固定的话就
39        ↪按照右端点离线即可
40    | ans[i - m + 1] = query(i - m + 1, i);
41}

```

还有一份完整的代码, 因为写起来确实细节挺多的. 这份代码支持在尾部加一个字符或者询问区间有多少子串至少出现了两次, 并且强制在线.

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 200005, maxm = maxn * 17 * 15;
6
7 int mx[maxm][2], lc[maxm], rc[maxm], seg_cnt;
8 int root[maxn];
9
10 int s, t, d;
11
12 void modify_seg(int l, int r, int &o) {
13     int u = o;
14     o = ++seg_cnt;

```

```

15
16     mx[o][0] = max(mx[u][0], t);
17     mx[o][1] = max(mx[u][1], d);
18
19     if (l == r)
20         return;
21
22     lc[o] = lc[u];
23     rc[o] = rc[u];
24
25     int mid = (l + r) / 2;
26     if (s <= mid)
27         modify_seg(l, mid, lc[o]);
28     else
29         modify_seg(mid + 1, r, rc[o]);
30 }
31
32 int query_seg(int l, int r, int o, int k) {
33     if (s <= l && t >= r)
34         return mx[o][k];
35
36     int mid = (l + r) / 2, ans = 0;
37
38     if (s <= mid)
39         ans = max(ans, query_seg(l, mid, lc[o], k));
40     if (t > mid)
41         ans = max(ans, query_seg(mid + 1, r, rc[o],
42             ↪k));
43
44     return ans;
45 }
46
47 int N;
48
49 void modify(int pos, int u, int v, int &rt) {
50     s = pos;
51     t = u;
52     d = v;
53
54     modify_seg(1, N, rt);
55 }
56
57 int query(int l, int r, int rt) {
58     s = l;
59     t = r;
60     int ans = query_seg(1, N, rt, 0);
61
62     s = 1;
63     t = l;
64     return max(ans, query_seg(1, N, rt, 1) - l);
65 }
66
67 struct node {
68     int size, l, r, id, tim;
69     node *ch[2], *p;
70     bool tag;
71
72     node() = default;
73
74     void apply(int v) {
75         tim = v;
76         tag = true;
77     }
78
79     void pushdown() {
80         if (tag) {
81             ch[0] -> tim = ch[1] -> tim = tim;
82             ch[0] -> tag = ch[1] -> tag = true;
83             tag = false;
84         }
85     }
86
87     void update(int l, int r, int v) {
88         if (l > r)
89             return;
90
91         if (l == s && r == t) {
92             apply(v);
93             return;
94         }
95
96         int mid = (l + r) / 2;
97         if (mid <= s)
98             lson->update(l, mid, v);
99         else if (mid >= t)
100            rson->update(mid + 1, r, v);
101        else
102            lson->update(l, mid, v), rson->update(mid + 1, r, v);
103
104         pushdown();
105     }
106
107     int query(int l, int r) {
108         if (l > r)
109             return 0;
110
111         if (l == s && r == t)
112             return tag ? 1 : 0;
113
114         int mid = (l + r) / 2;
115         if (mid <= s)
116             return lson->query(l, r);
117         else if (mid >= t)
118             return rson->query(mid + 1, r);
119         else
120             return lson->query(l, mid) + rson->query(mid + 1, r);
121     }
122
123     void print() {
124         cout << "l: " << l << " r: " << r << " id: " << id << endl;
125         if (l < r) {
126             lson->print();
127             rson->print();
128         }
129     }
130
131     node *lson, *rson;
132 };
133
134 node *root;
135
136 void init() {
137     root = new node();
138     root->id = 1;
139     root->l = 1;
140     root->r = N;
141     root->size = N;
142     root->tim = 0;
143     root->ch[0] = root->ch[1] = null;
144     root->p = null;
145     root->tag = false;
146 }
147
148 void solve() {
149     int m;
150     cin << m;
151
152     for (int i = 1; i <= m; i++) {
153         int l, r;
154         cin << l << r;
155
156         int ans = query(l, r);
157         cout << ans << endl;
158     }
159 }
160
161 int main() {
162     init();
163     solve();
164     return 0;
165 }
```

```

84     }
85 }
86
87 void update() {
88     size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;
89     l = (ch[0] -> l ? ch[0] -> l : id);
90     r = (ch[1] -> r ? ch[1] -> r : id);
91 }
92 } null[maxn];
93
94 inline bool isroot(node *x) {
95     return x != x -> p -> ch[0] && x != x -> p -> ch[1];
96 }
97
98 inline bool dir(node *x) {
99     return x == x -> p -> ch[1];
100 }
101
102 void init(node *x, int i) {
103     *x = node();
104     x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;
105     x -> size = 1;
106     x -> id = x -> l = x -> r = i;
107 }
108
109 void rot(node **x, int d) {
110     node *y = x -> ch[d ^ 1];
111
112     y -> p = x -> p;
113     if (!isroot(x))
114         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
115
116     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
117         y -> ch[d] -> p = x;
118     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
119
120     x -> update();
121     y -> update();
122 }
123
124 void splay(node *x) {
125     x -> pushdown();
126
127     while (!isroot(x)) {
128         if (!isroot(x -> p))
129             x -> p -> p -> pushdown();
130         x -> p -> pushdown();
131         x -> pushdown();
132
133         if (isroot(x -> p)) {
134             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
135             break;
136         }
137
138         if (dir(x) == dir(x -> p))
139             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
140         else
141             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
142
143         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
144     }
145 }
146
147 void splay(node **x, node *rt) {
148     x -> pushdown();
149
150     while (x -> p != rt) {
151         if (x -> p -> p != rt)
152             x -> p -> p -> pushdown();
153
154         x -> pushdown();
155
156         if (x -> p -> p == rt) {
157             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
158             break;
159         }
160
161         if (dir(x) == dir(x -> p))
162             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
163         else
164             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
165
166         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
167     }
168 }
169
170 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], sam_cnt,
171     → sam_last;
172
173 node *access(node **x, int r) {
174     root[r] = root[r - 1];
175
176     node *y = null;
177
178     while (x != null) {
179         splay(x);
180
181         x -> pushdown();
182
183         x -> ch[1] = null;
184         x -> update();
185
186         if (x -> tim && val[x -> r]) { // last time
187             → visited
188             int right = x -> tim, left = right - val[x -> r] + 1;
189             modify(left, val[x -> r], right + 1,
190                   → root[r]);
191
192         }
193
194         x -> apply(r);
195         x -> pushdown();
196
197         x -> ch[1] = y;
198         (y = x) -> update();
199
200         x = x -> p;
201
202     }
203
204     return y;
205 }
206
207 void new_leaf(node *x, node *par) {
208     x -> p = par;
209 }
210
211 void new_node(node *x, node *y, node *par) {
212     splay(y);
213
214     if (isroot(y) && y -> p == par) {
215         assert(y -> ch[0] == null);
216
217         y -> ch[0] = x;
218         x -> p = y;
219         y -> update();
220     }
221
222     else {
223         splay(par, y);
224     }
225 }

```

```

218     assert(y -> ch[0] == par);
219     assert(par -> ch[1] == null);
220     par -> ch[1] = x;
221     x -> p = par;
222
223     par -> update();
224     y -> update();
225 }
226
227 x -> tim = y -> tim;
228 }
229
230 void extend(int c) {
231     int p = sam_last, np = ++sam_cnt;
232     val[np] = val[p] + 1;
233
234     init(null + np, np);
235
236     while (p && !go[p][c]) {
237         go[p][c] = np;
238         p = par[p];
239     }
240
241     if (!p) {
242         par[np] = 1;
243         new_leaf(null + np, null + par[np]);
244     } else {
245         int q = go[p][c];
246
247         if (val[q] == val[p] + 1) {
248             par[np] = q;
249             new_leaf(null + np, null + par[np]);
250         }
251         else {
252             int nq = ++sam_cnt;
253             val[nq] = val[p] + 1;
254             memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
255
256             init(null + nq, nq);
257
258             new_node(null + nq, null + q, null +
259                     -> par[q]);
260             new_leaf(null + np, null + nq);
261
262             par[nq] = par[q];
263             par[np] = par[q] = nq;
264
265             while (p && go[p][c] == q) {
266                 go[p][c] = nq;
267                 p = par[p];
268             }
269         }
270     }
271 }
272
273 sam_last = np;
274 }
275 char str[maxn];
276
277 int main() {
278     init(null, 0);
279
280     sam_last = sam_cnt = 1;
281     init(null + 1, 1);
282
283     int n, m;
284     scanf("%s%d", str + 1, &m);
285
286     assert(y -> ch[0] == par);
287     assert(par -> ch[1] == null);
288     par -> ch[1] = x;
289
290     for (int i = 1; i <= n; i++) {
291         extend(str[i] - 'a');
292         access(null + sam_last, i);
293     }
294
295     int tmp = 0;
296
297     while (m--) {
298         int op;
299         scanf("%d", &op);
300
301         if (op == 1) {
302             scanf(" %c", &str[++n]);
303
304             str[n] = (str[n] - 'a' + tmp) % 26 + 'a';
305
306             extend(str[n] - 'a');
307             access(null + sam_last, n);
308         }
309         else {
310             int l, r;
311             scanf("%d%d", &l, &r);
312
313             l = (l - 1 + tmp) % n + 1;
314             r = (r - 1 + tmp) % n + 1;
315
316             printf("%d\n", tmp = query(l, r, root[r]));
317         }
318     }
319
320     return 0;
321 }

```

5.6 回文树

```

1 // 定理：一个字符串本质不同的回文子串个数是O(n) 的
2 // 注意回文树只需要开一倍结点，另外结点编号也是一个可用
3 // 的bfs序
4
5 // 全局数组定义
6 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], last, cnt;
7 char s[maxn];
8
9 // 重要！在主函数最前面一定要加上以下初始化
10 par[0] = cnt = 1;
11 val[1] = -1;
12 // 这个初始化和广义回文树不一样，写普通题可以用，广义回文
13 // 树就不要乱搞了
14
15 // extend函数 均摊O(1)
16 // 向后扩展一个字符
17 // 传入对应下标
18 void extend(int n) {
19     int p = last, c = s[n] - 'a';
20     while (s[n - val[p] - 1] != s[n])
21         p = par[p];
22
23     if (!go[p][c]) {
24         int q = ++cnt, now = p;
25         val[q] = val[p] + 2;
26
27         do
28             p = par[p];
29         while (s[n - val[p] - 1] != s[n]);
30     }
31 }
32
33 // query函数 均摊O(1)
34 // 传入两个下标
35 int query(int l, int r) {
36     int p = last;
37     int ans = 0;
38
39     while (l <= r) {
40         if (s[l] == s[r])
41             ans++;
42         l++;
43         r--;
44     }
45
46     return ans;
47 }

```

```
29     par[q] = go[p][c];
30     last = go[now][c] = q;
31 }
32 else
33     last = go[p][c];
34
35 // a[last]++;
36 }
```

5.6.1 广义回文树

(代码是梯子剖分的版本, 压力不大的题目换成直接倍增就好了, 常数只差不到一倍)

```

125
126     if (val[q] <= n)
127         weight[q] = (weight[par[q]] + (long long)(n
128             - val[q] + 1) * pow_26[n - val[q]]) % 
129             mod;
130     else
131         weight[q] = weight[par[q]];
132 }
133 else
134     new_last = go[p][c];
135
136 pam_last[x] = new_last;
137 }
138
139 void bfs() {
140
141     queue<int> q;
142
143     q.push(1);
144
145     while (!q.empty()) {
146         int x = q.front();
147         q.pop();
148
149         sum[x] = sum[f[0][x]];
150         if (x > 1)
151             sum[x] = (sum[x] + extend(x)) % mod;
152
153         for (int i : queries[x])
154             ans[i] = sum[x];
155
156         for (int i = 0; i < 26; i++)
157             if (trie[x][i])
158                 q.push(trie[x][i]);
159     }
160 }
161
162 int main() {
163
164     pow_26[0] = 1;
165     log_tbl[0] = -1;
166
167     for (int i = 1; i <= 1000000; i++) {
168         pow_26[i] = 26ll * pow_26[i - 1] % mod;
169         log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
170     }
171
172     int T;
173     scanf("%d", &T);
174
175     while (T--) {
176         scanf("%d%d%s", &n, &m, str);
177
178         trie_cnt = 1;
179         chr[1] = '#';
180
181         int last = 1;
182         for (char *c = str; *c; c++)
183             last = add(last, *c - 'a');
184
185         queries[last].push_back(0);
186
187         for (int i = 1; i <= m; i++) {
188             int op;
189             scanf("%d", &op);
190
191             if (op == 1) {
192                 char c;
193                 scanf(" %c", &c);
194
195                     last = add(last, c - 'a');
196                 }
197             else
198                 last = del(last);
199
200             queries[last].push_back(i);
201         }
202
203         dfs1(1);
204         dfs2(1);
205
206         for (int j = 1; j <= log_tbl[trie_cnt]; j++)
207             for (int i = 1; i <= trie_cnt; i++)
208                 f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
209
210         par[0] = pam_cnt = 1;
211
212         for (int i = 0; i < 26; i++)
213             fail[0][i] = fail[1][i] = 1;
214
215         val[1] = -1;
216         pam_last[1] = 1;
217
218         bfs();
219
220         for (int i = 0; i <= m; i++)
221             printf("%d\n", ans[i]);
222
223         for (int j = 0; j <= log_tbl[trie_cnt]; j++)
224             memset(f[j], 0, sizeof(f[j]));
225
226         for (int i = 1; i <= trie_cnt; i++) {
227             chr[i] = 0;
228             d[i] = mxd[i] = son[i] = top[i] = len[i] =
229                 → pam_last[i] = sum[i] = 0;
230             v[i].clear();
231             queries[i].clear();
232
233             memset(trie[i], 0, sizeof(trie[i]));
234         }
235         trie_cnt = 0;
236
237         for (int i = 0; i <= pam_cnt; i++) {
238             val[i] = par[i] = weight[i];
239
240             memset(go[i], 0, sizeof(go[i]));
241             memset(fail[i], 0, sizeof(fail[i]));
242         }
243         pam_cnt = 0;
244
245     }
246
247     return 0;
248 }
```

5.7 Manacher 马拉车

```

1 // n为串长, 回文半径输出到p数组中
2 // 数组要开串长的两倍
3 void manacher(const char *t, int n) {
4     static char s[maxn * 2];
5
6     for (int i = n; i; i--)
7         s[i * 2] = t[i];
8     for (int i = 0; i <= n; i++)
9         s[i * 2 + 1] = '#';
10
11    s[0] = '$';
12    s[(n + 1) * 2] = '\0';

```

```
13     n = n * 2 + 1;
14
15     int mx = 0, j = 0;
16
17     for (int i = 1; i <= n; i++) {
18         p[i] = (mx > i ? min(p[j * 2 - i], mx - i) :
19             → 1);
20         while (s[i - p[i]] == s[i + p[i]])
21             p[i]++;
22
23         if (i + p[i] > mx) {
24             mx = i + p[i];
25             j = i;
26         }
27 }
```

5.8 字符串原理

KMP和AC自动机的fail指针存储的都是它在串或者字典树上的最长后缀，因此要判断两个前缀是否互为后缀时可以直接用fail指针判断。当然它不能做子串问题，也不能做最长公共后缀。

后缀数组利用的主要是LCP长度可以按照字典序做RMQ的性质，与某个串的LCP长度 \geq 某个值的后缀形成一个区间。另外一个比较好用的性质是本质不同的子串个数 = 所有子串数 - 字典序相邻的串的height。

后缀自动机实际上可以接受的是所有后缀，如果把中间状态也算上的话就是所有子串。它的fail指针代表的也是当前串的后缀，不过注意每个状态可以代表很多状态，只要右端点在right集合中且长度处在 $(val_{par_p}, val_p]$ 中的串都被它代表。

后缀自动机的fail树也就是反串的后缀树。每个结点代表的串和后缀自动机同理，两个串的LCP长度也就是他们在后缀树上的LCA。

6 动态规划

6.1 决策单调性 $O(n \log n)$

```

1 int a[maxn], q[maxn], p[maxn], g[maxn]; // 存左端点, 右
2   ↪ 端点就是下一个左端点 - 1
3
4 long long f[maxn], s[maxn];
5
6 int n, m;
7
8 long long calc(int l, int r) {
9     if (r < l)
10        return 0;
11
12     int mid = (l + r) / 2;
13     if ((r - l + 1) % 2 == 0)
14        return (s[r] - s[mid]) - (s[mid] - s[l - 1]);
15     else
16        return (s[r] - s[mid]) - (s[mid - 1] - s[l - 1]);
17
18 int solve(long long tmp) {
19     memset(f, 63, sizeof(f));
20     f[0] = 0;
21
22     int head = 1, tail = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= n; i++) {
25         f[i] = calc(1, i);
26         g[i] = 1;
27
28         while (head < tail && p[head + 1] <= i)
29             head++;
30         if (head <= tail) {
31             if (f[q[head]] + calc(q[head] + 1, i) <
32                 → f[i]) {
33                 f[i] = f[q[head]] + calc(q[head] + 1,
34                   → i);
35                 g[i] = g[q[head]] + 1;
36             }
37             while (head < tail && p[head + 1] <= i + 1)
38                 head++;
39             if (head <= tail)
40                 p[head] = i + 1;
41         }
42         f[i] += tmp;
43
44         int r = n;
45
46         while (head <= tail) {
47             if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, p[tail]) >
48                 → f[i] + calc(i + 1, p[tail])) {
49                 r = p[tail] - 1;
50                 tail--;
51             }
52             else if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, r) <=
53                 → f[i] + calc(i + 1, r)) {
54                 if (r < n) {
55                     q[++tail] = i;
56                     p[tail] = r + 1;
57                 }
58                 break;
59             }
60             else {
61                 int L = p[tail], R = r;
62                 while (L < R) {
63                     int M = (L + R) / 2;
64
65                     if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1,
66                         → M) <= f[i] + calc(i + 1, M))
67                         L = M + 1;
68                     else
69                         R = M;
70                 }
71                 q[++tail] = i;
72                 p[tail] = L;
73
74                 break;
75             }
76         }
77     }
78
79     return g[n];
80 }
```

```

61             if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1,
62               → M) <= f[i] + calc(i + 1, M))
63                 L = M + 1;
64             else
65                 R = M;
66         }
67
68         q[++tail] = i;
69         p[tail] = L;
70
71         break;
72     }
73     if (head > tail) {
74         q[++tail] = i;
75         p[tail] = i + 1;
76     }
77 }
78
79 return g[n];
80 }
```

6.2 例题

6.2.1 103388A Assigning Prizes 容斥

题意 给定一个长为 n 的序列 a_i , 要求构造非严格递减序列 b_i , 满足 $a_i \leq b_i \leq R$, 求方案数. $n \leq 5 \times 10^3, R, a_i \leq 10^9$.

做法 a_i 的范围太大了, 不能简单地记录上一位的值.

考虑使用容斥. 方便起见把 a_i 直接变成 $R - a_i + 1$, 条件就变成了 $b_i \leq a_i$ 且 $b_i \geq b_{i-1}$.

这里有两个限制条件, 可以固定 $b_i \leq a_i$ 是必须满足的条件, 只对 $b_i \geq b_{i-1}$ 使用容斥, 枚举哪些位置是比上一位小的 (违反限制), 其他位置随意.

枚举后的形态一定是有若干个区间是严格递减的, 其他位置随意. 考虑如果一个区间 $[l, r]$ 是严格递减的, 显然所有的数都 $< a_l$, 所以这段区间的方案数就是 $\binom{a_l}{r-l+1}$. 另外实际上 b_l 是没有违反限制的, 所以这里对系数的贡献是 $(-1)^{r-l}$.

考虑令 dp_i 表示只考虑前 i 个位置的答案, 转移时自然就是枚举一个 j , 然后计算 dp_{j-1} 乘上区间 $[j, i]$ 严格递减的方案数. 另外还有一种情况是 b_i 没有违反限制, 这时显然直接在 dp_{i-1} 的基础上乘上一个 a_i 就好了. (转移时还要注意, 由于枚举的是严格递减区间, 自然就不能枚举只有一个数的区间.)

```

1 constexpr int maxn = 5005, p = (int)1e9 + 7;
2
3 int inv[maxn];
4 int a[maxn], f[maxn][maxn], dp[maxn];
5
6 int main() {
7
8     int n, m;
9     scanf("%d%d", &n, &m);
10
11    inv[1] = 1;
12    for (int i = 2; i <= n; i++)
13        inv[i] = (long long)(p - p / i) * inv[p % i] %
14            → p;
15
16    for (int i = 1; i <= n; i++) {
17        scanf("%d", &a[i]);
18        a[i] = m - a[i] + 1;
19    }
20
21    if (any_of(a + 1, a + n + 1, [] (int x) {return x
22      → <= 0;})) {
23        printf("0\n");
24        return 0;
25    }
26
27    int ans = 0;
28    for (int i = 0; i < n; i++) {
29        for (int j = i + 1; j <= n; j++) {
30            if (a[i] < a[j])
31                ans += (-1)^(j - i - 1) * f[i][j];
32        }
33    }
34
35    cout << ans;
36}
```

```
23     }
24
25     for (int i = n - 1; i; i--)
26         a[i] = min(a[i], a[i + 1]);
27
28     //  $b_i \geq b_{i-1} \&& b_i \leq a_i$ 
29     // 我们可以假设  $b_i \leq a_i$  是必定被满足的, 然后对  $bi$ 
30     // → 非严格递增的条件进行容斥, 枚举某一段是严格递减的
31     // 如果  $[j, i]$  严格递减, 显然它们都  $\leq a_j$ , 所以这个
32     // → 区间的方案数是  $\{a_j \setminus choose i-j+1\}$ 
33     // 如果  $i$  是合法的, 直接一个个转移即可, 因为这一部分的
34     // → 转移和区间长度没有关系
35
36     for (int i = 1; i <= n; i++) {
37         f[i][0] = 1;
38
39         for (int j = 1; j <= n - i + 1 && j <= a[i]; j+
40             f[i][j] = (long long)f[i][j - 1] * (a[i] -
41                 j + 1) % p * inv[j] % p;
42     }
43
44     dp[0] = 1;
45
46     for (int i = 1; i <= n; i++) {
47         dp[i] = (long long)dp[i - 1] * a[i] % p;
48
49         for (int j = 1; j < i; j++) {
50             int tmp = (long long)dp[j - 1] * f[j][i - j
51                 - 1] % p;
52
53             if ((i - j) % 2)
54                 tmp = p - tmp;
55
56             dp[i] = (dp[i] + tmp) % p;
57         }
58     }
59
60     printf("%d\n", dp[n]);
61
62     return 0;
63 }
```

7 计算几何

7.1 Delaunay 三角剖分

只要两个点同在某个三角形上，它们就互为一对最近点。注意返回的三角形似乎不保证顺序，所以要加边的话还是要加双向边。

如果要建 V 图的话求出每个三角形的外心就行了，每个点控制的区域就是所在三角形的外心连起来。

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 500005;
6
7 using ll = long long;
8
9 constexpr int INF = 0x3f3f3f3f3f;
10 constexpr ll LINF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
11 constexpr double eps = 1e-8;
12
13 template <class T>
14 int sgn(T x) {
15     return x > 0 ? 1 : x < 0 ? -1 : 0;
16 }
17
18 struct point {
19     ll x, y;
20
21     point() = default;
22
23     point(ll x, ll y) : x(x), y(y) {}
24
25     point operator - (const point &p) const {
26         return point(x - p.x, y - p.y);
27     }
28
29     ll cross(const point &p) const {
30         return x * p.y - y * p.x;
31     }
32
33     ll cross(const point &a, const point &b) const {
34         return (a - *this).cross(b - *this);
35     }
36
37     ll dot(const point &p) const {
38         return x * p.x + y * p.y;
39     }
40
41     ll dot(const point &a, const point &b) const {
42         return (a - *this).dot(b - *this);
43     }
44
45     ll abs2() const {
46         return this -> dot(*this);
47     }
48
49     bool operator == (const point &p) const {
50         return x == p.x && y == p.y;
51     }
52
53     bool operator < (const point &p) const {
54         if (x != p.x) return x < p.x;
55         return y < p.y;
56     }
57 };
58
59
60 const point inf_point = point(1e18, 1e18);

```

```

62
63     struct quad_edge {
64         point origin;
65         quad_edge *rot = nullptr;
66         quad_edge *onext = nullptr;
67         bool used = false;
68
69         quad_edge *rev() const {
70             return rot -> rot;
71         }
72         quad_edge *lnext() const {
73             return rot -> rev() -> onext -> rot;
74         }
75         quad_edge *oprev() const {
76             return rot -> onext -> rot;
77         }
78         point dest() const {
79             return rev() -> origin;
80         }
81     };
82
83     quad_edge *make_edge(point from, point to) {
84         quad_edge *e1 = new quad_edge;
85         quad_edge *e2 = new quad_edge;
86         quad_edge *e3 = new quad_edge;
87         quad_edge *e4 = new quad_edge;
88
89         e1 -> origin = from;
90         e2 -> origin = to;
91         e3 -> origin = e4 -> origin = inf_point;
92
93         e1 -> rot = e3;
94         e2 -> rot = e4;
95         e3 -> rot = e2;
96         e4 -> rot = e1;
97
98         e1 -> onext = e1;
99         e2 -> onext = e2;
100        e3 -> onext = e4;
101        e4 -> onext = e3;
102
103        return e1;
104    }
105
106    void splice(quad_edge *a, quad_edge *b) { // 拼接
107        swap(a -> onext -> rot -> onext, b -> onext -> rot
108            -> onext);
109        swap(a -> onext, b -> onext);
110    }
111
112    void delete_edge(quad_edge *e) {
113        splice(e, e -> oprev());
114        splice(e -> rev(), e -> rev() -> oprev());
115
116        delete e -> rev() -> rot;
117        delete e -> rev();
118        delete e -> rot;
119        delete e;
120    }
121
122    quad_edge *connect(quad_edge *a, quad_edge *b) {
123        quad_edge *e = make_edge(a -> dest(), b -> origin);
124
125        splice(e, a -> lnext());
126        splice(e -> rev(), b);
127
128        return e;
129    }
130
131    bool left_of(point p, quad_edge *e) {

```



```

249     return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);
250     ↪ // 实际上已经重载小于了，只是为了清晰
251   };
252 
253   auto res = divide_and_conquer(0, (int)p.size() - 1,
254     ↪ p);
255 
256   quad_edge *e = res.first;
257   vector<quad_edge*> edges = {e};
258 
259   while (e -> onext -> dest().cross(e -> dest(), e ->
260     ↪ origin) < 0)
261     e = e -> onext;
262 
263   auto add = [&p, &e, &edges] () { // 修改 p, e, edges
264     quad_edge *cur = e;
265     do {
266       cur -> used = true;
267       p.push_back(cur -> origin);
268       edges.push_back(cur -> rev());
269 
270       cur = cur -> lnext();
271     } while (cur != e);
272   };
273 
274   add();
275   p.clear();
276 
277   int kek = 0;
278   while (kek < (int)edges.size())
279     if (!(*e = edges[kek++]) -> used)
280       add();
281 
282   vector<tuple<point, point, point>> ans;
283   for (int i = 0; i < (int)p.size(); i += 3)
284     ans.push_back(make_tuple(p[i], p[i + 1], p[i +
285     ↪ 2]));
286 
287   #define sq(x) ((x) * (ll)(x)) // 平方
288   ll dist(point p, point q) { // 两点间距离的平方
289     return (p - q).abs2();
290   }
291 
292   ll sarea2(point p, point q, point r) { // 三角形面积的两
293     ↪ 倍(叉积)
294     return (q - p).cross(r - q);
295   }
296 
297   point v[maxn];
298 
299   int main() {
300     int n;
301     cin >> n;
302 
303     // read the points, v[1 ~ n]
304 
305     bool col_linear = true; // 如果给出的所有点都共线则
306     ↪ 需要特判
307     for (int i = 3; i <= n; i++)
308       if (sarea2(v[1], v[2], v[i]))
309         col_linear = false;
310 
311     if (col_linear) {
312       // do something
313 
314       return 0;
315     }
316 
317     auto triangles = delaunay(vector<point>(v + 1, v +
318     ↪ n + 1));
319 
320     // do something
321 
322     return 0;
323   }

```

7.2 最近点对

首先分治的做法是众所周知的.

有期望 $O(n)$ 的随机增量法: 首先将所有点随机打乱, 然后每次增加一个点, 更新答案.

假设当前最近点对距离为 s , 则把平面划分成 $s \times s$ 的方格, 用哈希表存储每个方格有哪些点.

加入一个新点时只需要枚举自身和周围共计 9 个方格中的点, 显然枚举到的点最多 16 个. 如果加入之后答案变小了就 $O(n)$ 暴力重构.

前 i 个点中 i 是最近点对中的点的概率至多为 $\frac{2}{i}$, 所以每个点的期望贡献都是 $O(1)$, 总的复杂度就是期望 $O(n)$.

如果对每个点都要求出距离最近的点的话, 也有随机化的 $O(n)$ 做法:

一个真的随机算法:

A simple randomized sieve algorithm for the closest-pair problem (<https://www.cs.umd.edu/~samir/grant/cp.pdf>)

1. 循环直到删完所有点:

- 随机选一个点, 计算它到所有点的最短距离 d .
 - 将所有点划分到 $l = d/3$ 的网格里, 比如 $(\lfloor \frac{x}{l} \rfloor, \lfloor \frac{y}{l} \rfloor)$.
 - 将九宫格内孤立的点删除, 这意味着这些点的最近点对距离不小于 $\frac{2\sqrt{2}}{3}d$, 其中 $\frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$.
2. 取最后一个 d , 将所有点划分到 $(\lfloor \frac{x}{d} \rfloor, \lfloor \frac{y}{d} \rfloor)$ 的网格里, 暴力计算九宫格内的答案.

第一部分每次期望会删掉至少一半的点, 因为有 $\geq 1/2$ 概率碰到一个最近点距离在中位数以下的点, 因此第一部分的复杂度是 $O(n)$ 的.

第二部分分析类似分治做法, 周围只有常数个点.

所以总复杂度是 $O(n)$ 的.

8 杂项

8.1 $O(1)$ 快速乘

如果对速度要求很高并且不能用指令集，可以去看fstqwq的模板。

```

1 // long double 快速乘
2 // 在两数直接相乘会爆long long时才有必要使用
3 // 常数比直接long long乘法 + 取模大很多，非必要时不建议使用
4 // → 用
5 long long mul(long long a, long long b, long long p) {
6     a %= p;
7     b %= p;
8     return ((a * b - p * (long long)((long double)a / p
9             → * b + 0.5)) % p + p) % p;
10 }
11
12 // 指令集快速乘
13 // 试机记得测试能不能过编译
14 inline long long mul(const long long a, const long long
15     → b, const long long p) {
16     long long ans;
17     __asm__ __volatile__ ("\\tmulq %%rbx\\n\\tdivq
18     → %%rcx\\n" : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
19     return ans;
20 }
21
22 // int乘法取模，大概比直接做快一倍
23 inline int mul_mod(int a, int b, int p) {
24     int ans;
25     __asm__ __volatile__ ("\\tmull %%ebx\\n\\tdivl
26     → %%ecx\\n" : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
27     return ans;
28 }
```

8.2 Kahan求和算法（减少浮点数累加的误差）

当然一般来说是用不到的，累加被卡精度了才有必要考虑。

```

1 double kahanSum(vector<double> vec) {
2     double sum = 0, c = 0;
3     for (auto x : vec) {
4         double y = x - c;
5         double t = sum + y;
6         c = (t - sum) - y;
7         sum = t;
8     }
9     return sum;
10 }
```

8.3 Python Decimal

```

1 import decimal
2
3 decimal.getcontext().prec = 1234 # 有效数字位数
4
5 x = decimal.Decimal(2)
6 x = decimal.Decimal('50.5679') # 不要用float，因为float本身就不准确
7
8 x = decimal.Decimal('50.5679'). \
9     quantize(decimal.Decimal('0.00')) # 保留两位小数,
10    → 50.57
11 x = decimal.Decimal('50.5679'). \
12     quantize(decimal.Decimal('0.00'),           → decimal.ROUND_HALF_UP) # 四舍五入
13 # 第二个参数可选如下:
14 # ROUND_HALF_UP 四舍五入
```

```

14 # ROUND_HALF_DOWN 五舍六入
15 # ROUND_HALF_EVEN 银行家舍入法，舍入到最近的偶数
16 # ROUND_UP 向绝对值大的取整
17 # ROUND_DOWN 向绝对值小的取整
18 # ROUND_CEILING 向正无穷取整
19 # ROUND_FLOOR 向负无穷取整
20 # ROUND_05UP (away from zero if last digit after
21     → rounding towards zero would have been 0 or 5;
22     → otherwise towards zero)
23
24 print('%f' % x) # 这样做只有float的精度
25 s = str(x)
26
27 decimal.is_finite(x) # x是否有穷 (NaN也算)
28 decimal.is_infinite(x)
29 decimal.is_nan(x)
30 decimal.is_normal(x) # x是否正常
31 decimal.is_signed(x) # 是否为负数
32
33 decimal.fma(a, b, c) # a * b + c, 精度更高
34
35 x.exp(), x.ln(), x.sqrt(), x.log10()
36
37 # 可以转复数，前提是import complex
```

8.4 $O(n^2)$ 高精度

```

1 // 注意如果只需要正数运算的话
2 // 可以只抄英文名的运算函数
3 // 按需自取
4 // 乘法O(n ^ 2), 除法O(10 * n ^ 2)
5
6 constexpr int maxn = 1005;
7
8 struct big_decimal {
9     int a[maxn];
10    bool negative;
11
12    big_decimal() {
13        memset(a, 0, sizeof(a));
14        negative = false;
15    }
16
17    big_decimal(long long x) {
18        memset(a, 0, sizeof(a));
19        negative = false;
20
21        if (x < 0) {
22            negative = true;
23            x = -x;
24        }
25
26        while (x) {
27            a[++a[0]] = x % 10;
28            x /= 10;
29        }
30
31    }
32
33    big_decimal(string s) {
34        memset(a, 0, sizeof(a));
35        negative = false;
36
37        if (s == "") {
38            return;
39        }
40
41        if (s[0] == '-') {
42            negative = true;
43            s = s.substr(1);
44        }
45        a[0] = s.size();
```

```

44     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
45         a[i] = s[a[0] - i] - '0';
46
47     while (a[0] && !a[a[0]])
48         a[0]--;
49 }
50
51 void input() {
52     string s;
53     cin >> s;
54     *this = s;
55 }
56
57 string str() const {
58     if (!a[0])
59         return "0";
60
61     string s;
62     if (negative)
63         s = "-";
64
65     for (int i = a[0]; i; i--)
66         s.push_back('0' + a[i]);
67
68     return s;
69 }
70
71 operator string () const {
72     return str();
73 }
74
75 big_decimal operator - () const {
76     big_decimal o = *this;
77     if (a[0])
78         o.negative ^= true;
79
80     return o;
81 }
82
83 friend big_decimal abs(const big_decimal &u) {
84     big_decimal o = u;
85     o.negative = false;
86     return o;
87 }
88
89 big_decimal &operator <= (int k) {
90     a[0] += k;
91
92     for (int i = a[0]; i > k; i--)
93         a[i] = a[i - k];
94
95     for (int i = k; i; i--)
96         a[i] = 0;
97
98     return *this;
99 }
100
101 friend big_decimal operator << (const big_decimal
102     &u, int k) {
103     big_decimal o = u;
104     return o <<= k;
105 }
106
107 friend big_decimal &operator >>= (int k) {
108     if (a[0] < k)
109         return *this = big_decimal(0);
110
111     a[0] -= k;
112     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
113         a[i] = a[i + k];
114
115     for (int i = a[0] + 1; i <= a[0] + k; i++)
116         a[i] = 0;
117
118     return *this;
119 }
120
121 friend big_decimal operator >> (const big_decimal
122     &u, int k) {
123     big_decimal o = u;
124     return o >>= k;
125 }
126
127 friend int cmp(const big_decimal &u, const
128     &big_decimal &v) {
129     if (u.negative || v.negative) {
130         if (u.negative && v.negative)
131             return -cmp(-u, -v);
132
133         if (u.negative)
134             return -1;
135
136         if (v.negative)
137             return 1;
138
139     if (u.a[0] != v.a[0])
140         return u.a[0] < v.a[0] ? -1 : 1;
141
142     for (int i = u.a[0]; i; i--)
143         if (u.a[i] != v.a[i])
144             return u.a[i] < v.a[i] ? -1 : 1;
145
146     return 0;
147 }
148
149 friend bool operator < (const big_decimal &u, const
150     &big_decimal &v) {
151     return cmp(u, v) == -1;
152 }
153
154 friend bool operator > (const big_decimal &u, const
155     &big_decimal &v) {
156     return cmp(u, v) == 1;
157 }
158
159 friend bool operator == (const big_decimal &u,
160     &const big_decimal &v) {
161     return cmp(u, v) == 0;
162 }
163
164 friend bool operator <= (const big_decimal &u,
165     &const big_decimal &v) {
166     return cmp(u, v) <= 0;
167 }
168
169 friend big_decimal decimal_plus(const big_decimal
170     &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数
171     big_decimal o;
172
173     o.a[0] = max(u.a[0], v.a[0]);

```

```

172     for (int i = 1; i <= u.a[0] || i <= v.a[0]; i++)
173         o.a[i] += u.a[i] + v.a[i];
174
175     if (o.a[i] >= 10) {
176         o.a[i + 1]++;
177         o.a[i] -= 10;
178     }
179 }
180
181 if (o.a[o.a[0] + 1])
182     o.a[0]++;
183
184 return o;
185 }

186 friend big_decimal decimal_minus(const big_decimal
187     &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数
188     // 的话可以直接调用
189     int k = cmp(u, v);
190
191     if (k == -1)
192         return -decimal_minus(v, u);
193     else if (k == 0)
194         return big_decimal(0);
195
196     big_decimal o;
197
198     o.a[0] = u.a[0];
199
200     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++) {
201         o.a[i] += u.a[i] - v.a[i];
202
203         if (o.a[i] < 0) {
204             o.a[i] += 10;
205             o.a[i + 1]--;
206         }
207     }
208
209     while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
210         o.a[0]--;
211
212     return o;
213 }

214 friend big_decimal decimal_multi(const big_decimal
215     &u, const big_decimal &v) {
216     big_decimal o;
217
218     o.a[0] = u.a[0] + v.a[0] - 1;
219
220     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++)
221         for (int j = 1; j <= v.a[0]; j++)
222             o.a[i + j - 1] += u.a[i] * v.a[j];
223
224     for (int i = 1; i <= o.a[0]; i++)
225         if (o.a[i] >= 10) {
226             o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
227             o.a[i] %= 10;
228         }
229
230     if (o.a[o.a[0] + 1])
231         o.a[0]++;
232
233     return o;
234 }

235 friend pair<big_decimal, big_decimal>
236     decimal_divide(big_decimal u, big_decimal v) {
237     // 整除
238
239     big_decimal o;
240     o.a[0] = u.a[0] - v.a[0] + 1;
241
242     int m = v.a[0];
243     v <= u.a[0] - m;
244
245     for (int i = u.a[0]; i >= m; i--) {
246         while (u >= v) {
247             u = u - v;
248             o.a[i - m + 1]++;
249         }
250
251         v >= 1;
252     }
253
254     while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
255         o.a[0]--;
256
257     return make_pair(o, u);
258 }

259 friend big_decimal operator + (const big_decimal
260     &u, const big_decimal &v) {
261     if (u.negative || v.negative) {
262         if (u.negative && v.negative)
263             return -decimal_plus(-u, -v);
264
265         if (u.negative)
266             return v - (-u);
267
268         if (v.negative)
269             return u - (-v);
270     }
271
272     return decimal_plus(u, v);
273 }

274 friend big_decimal operator - (const big_decimal
275     &u, const big_decimal &v) {
276     if (u.negative || v.negative) {
277         if (u.negative && v.negative)
278             return -decimal_minus(-u, -v);
279
280         if (u.negative)
281             return -decimal_plus(-u, v);
282
283         if (v.negative)
284             return decimal_plus(u, -v);
285     }
286
287     return decimal_minus(u, v);
288 }

289 friend big_decimal operator * (const big_decimal
290     &u, const big_decimal &v) {
291     if (u.negative || v.negative) {
292         big_decimal o = decimal_multi(abs(u),
293             abs(v));
294
295         if (u.negative ^ v.negative)
296             return -o;
297         return o;
298     }
299
300     return decimal_multi(u, v);
301 }

```

```

300 }
301
302 big_decimal operator * (long long x) const {
303     if (x >= 10)
304         return *this * big_decimal(x);
305
306     if (negative)
307         return -(*this * x);
308
309     big_decimal o;
310
311     o.a[0] = a[0];
312
313     for (int i = 1; i <= a[0]; i++) {
314         o.a[i] += a[i] * x;
315
316         if (o.a[i] >= 10) {
317             o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
318             o.a[i] %= 10;
319         }
320     }
321
322     if (o.a[a[0] + 1])
323         o.a[0]++;
324
325     return o;
326 }
327
328 friend pair<big_decimal, big_decimal>
329     → decimal_div(const big_decimal &u, const
330     → big_decimal &v) {
331     if (u.negative || v.negative) {
332         pair<big_decimal, big_decimal> o =
333             → decimal_div(abs(u), abs(v));
334
335         if (u.negative ^ v.negative)
336             return make_pair(-o.first, -o.second);
337         return o;
338     }
339
340     return decimal_divide(u, v);
341
342 friend big_decimal operator / (const big_decimal
343     → &u, const big_decimal &v) { // v不能是0
344     if (u.negative || v.negative) {
345         big_decimal o = abs(u) / abs(v);
346
347         if (u.negative ^ v.negative)
348             return -o;
349         return o;
350     }
351
352     return decimal_divide(u, v).first;
353
354 friend big_decimal operator % (const big_decimal
355     → &u, const big_decimal &v) {
356     if (u.negative || v.negative) {
357         big_decimal o = abs(u) % abs(v);
358
359         if (u.negative ^ v.negative)
360             return -o;
361         return o;
362     }
363
364     return decimal_divide(u, v).second;
365 }

```

8.5 笛卡尔树

```

1 int s[maxn], root, lc[maxn], rc[maxn];
2
3 int top = 0;
4 s[++top] = root = 1;
5 for (int i = 2; i <= n; i++) {
6     s[top + 1] = 0;
7     while (top && a[i] < a[s[top]]) // 小根笛卡尔树
8         top--;
9
10    if (top)
11        rc[s[top]] = i;
12    else
13        root = i;
14
15    lc[i] = s[top + 1];
16    s[++top] = i;
17 }

```

8.6 GarsiaWachs 算法 ($O(n \log n)$ 合并石子)

设序列是 $\{a_i\}$, 从左往右, 找到一个最小的且满足 $a_{k-1} \leq a_{k+1}$ 的 k , 找到后合并 a_k 和 a_{k-1} , 再从当前位置开始向左找最大的 j 满足 $a_j \geq a_k + a_{k-1}$ (当然是指合并前的), 然后把 $a_k + a_{k-1}$ 插到 j 的后面就行. 一直重复, 直到只剩下一堆石子就可以了.

另外在这个过程中, 可以假设 a_{-1} 和 a_n 是正无穷的, 可省略边界的判别. 把 a_0 设为INF, a_{n+1} 设为INF-1, 可实现剩余一堆石子时自动结束.

8.7 常用 NTT 素数及原根

$p = r \times 2^k + 1$	r	k	最小原根
104857601	25	22	3
167772161	5	25	3
469762049	7	26	3
985661441	235	22	3
998244353	119	23	3
1004535809	479	21	3
1005060097*	1917	19	5
2013265921	15	27	31
2281701377	17	27	3
31525197391593473	7	52	3
180143985094819841	5	55	6
1945555039024054273	27	56	5
4179340454199820289	29	57	3

*注: 1005060097 有点危险, 在变化长度大于 $524288 = 2^{19}$ 时不可用.

8.8 xorshift

```

1 ull k1, k2;
2 const int mod = 100000000;
3 ull xorShift128Plus() {
4     ull k3 = k1, k4 = k2;
5     k1 = k4;
6     k3 ^= (k3 << 23);
7     k2 = k3 ^ k4 ^ (k3 >> 17) ^ (k4 >> 26);
8     return k2 + k4;
9 }
10 void gen(ull _k1, ull _k2) {
11     k1 = _k1, k2 = _k2;
12     int x = xorShift128Plus() % threshold + 1;
13     // do sth
14 }

```

```

15
16
17 uint32_t xor128(void) {
18     static uint32_t x = 123456789;
19     static uint32_t y = 362436069;
20     static uint32_t z = 521288629;
21     static uint32_t w = 88675123;
22     uint32_t t;
23
24     t = x ^ (x << 11);
25     x = y; y = z; z = w;
26     return w = w ^ (w >> 19) ^ (t ^ (t >> 8));
27 }

```

8.9 枚举子集

(注意这是 $t \neq 0$ 的写法, 如果可以等于 0 需要在循环里手动`break`)

```

1 for (int t = s; t; (--t) &= s) {
2     // do something
3 }

```

8.10 STL

8.10.1 vector

- `vector(int nSize)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize
- `vector(int nSize, const T &value)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize, 且值均为value
- `vector(begin, end)`: 复制 [begin, end) 区间内另一个数组的元素到vector中
- `void assign(int n, const T &x)`: 设置向量中前n个元素的值为x
- `void assign(const_iterator first, const_iterator last)`: 向量中 [first, last) 中元素设置成当前向量元素
- `void emplace_back(Args&& ... args)`: 自动构造并push_back一个元素, 例如对一个存储pair的vector可以 `v.emplace_back(x, y)`

8.10.2 list

- `assign()` 给list赋值
- `back()` 返回最后一个元素
- `begin()` 返回指向第一个元素的迭代器
- `clear()` 删除所有元素
- `empty()` 如果list是空的则返回true
- `end()` 返回末尾的迭代器
- `erase()` 删除一个元素
- `front()` 返回第一个元素
- `insert()` 插入一个元素到list中
- `max_size()` 返回list能容纳的最大元素数量
- `merge()` 合并两个list
- `pop_back()` 删除最后一个元素
- `pop_front()` 删除第一个元素
- `push_back()` 在list的末尾添加一个元素
- `push_front()` 在list的头部添加一个元素
- `rbegin()` 返回指向第一个元素的逆向迭代器
- `remove()` 从list删除元素
- `remove_if()` 按指定条件删除元素
- `rend()` 指向list末尾的逆向迭代器
- `resize()` 改变list的大小
- `reverse()` 把list的元素倒转
- `size()` 返回list中的元素个数
- `sort()` 给list排序
- `splice()` 合并两个list
- `swap()` 交换两个list
- `unique()` 删除list中重复的元

8.10.3 unordered_set/map

- `unordered_map<int, int, hash>`: 自定义哈希函数, 其中hash是一个带重载括号的类.

8.10.4 自定义 Hash

```

1 struct fuck_hash {
2     fuck_hash() = default;
3
4     size_t operator()(const fuck &f) const {
5         return (size_t)f[0] ^ ((size_t)f[1] << 7) ^
6                ((size_t)f[2] << 15) ^ ((size_t)f[3] <<
7                    23);
8    }
9
10 unordered_map<fuck, int, fuck_hash> cnt, sum;

```

8.11 Public Based DataStructure (PB_DS)

8.11.1 哈希表

```

1 #include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include<ext/pb_ds/hash_policy.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 cc_hash_table<string, int> mp1; // 拉链法
6 gp_hash_table<string, int> mp2; // 查探法 (快一些)

```

8.11.2 堆

默认也是大根堆, 和`std::priority_queue`保持一致.

```

1 #include<ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
2 using namespace __gnu_pbds;
3
4 __gnu_pbds::priority_queue<int> q;
5 __gnu_pbds::priority_queue<int, greater<int>,
6                           pairing_heap_tag> pq;

```

效率参考:

- * 共有五种操作: `push`、`pop`、`modify`、`erase`、`join`
- * `pairing_heap_tag`: `push`和`join`为 $O(1)$, 其余为均摊 $\Theta(\log n)$
- * `binary_heap_tag`: 只支持`push`和`pop`, 均为均摊 $\Theta(\log n)$
- * `binomial_heap_tag`: `push`为均摊 $O(1)$, 其余为 $\Theta(\log n)$
- * `rc_binomial_heap_tag`: `push`为 $O(1)$, 其余为 $\Theta(\log n)$
- * `thin_heap_tag`: `push`为 $O(1)$, 不支持`join`, 其余为 $\Theta(\log n)$; 如果只有`increase_key`, 那么`modify`为均摊 $O(1)$

* “不支持”不是不能用, 而是用起来很慢. csdn.net/TRiddle

常用操作:

- `push()`: 向堆中压入一个元素, 返回迭代器
- `pop()`: 将堆顶元素弹出
- `top()`: 返回堆顶元素
- `size()`: 返回元素个数
- `empty()`: 返回是否非空
- `modify(point_iterator, const key)`: 把迭代器位置的 key 修改为传入的 key
- `erase(point_iterator)`: 把迭代器位置的键值从堆中删除
- `join(__gnu_pbds::priority_queue &other)`: 把 other 合并到 *this, 并把 other 清空

8.11.3 平衡树

```

1 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
6   → tree_order_statistics_node_update> t;
7
// rb_tree_tag 红黑树 (还有splay_tree_tag和ov_tree_tag,
→ 后者不知道是什么)

```

注意第五个参数要填tree_order_statistics_node_update才能使用排名操作.

- `insert(x)`: 向树中插入一个元素x, 返回`pair<point_iterator, bool>`
- `erase(x)`: 从树中删除一个元素/迭代器x, 返回一个`bool`表明是否删除成功
- `order_of_key(x)`: 返回x的排名, 0-based
- `find_by_order(x)`: 返回排名 (0-based) 所对应元素的迭代器
- `lower_bound(x) / upper_bound(x)`: 返回第一个 \geq 或者 $>x$ 的元素的迭代器
- `join(x)`: 将x树并入当前树, 前提是两棵树的类型一样, 并且二者值域不能重叠, x树会被删除
- `split(x, b)`: 分裂成两部分, 小于等于x的属于当前树, 其余的属于b树
- `empty()`: 返回是否为空
- `size()`: 返回大小

(注意平衡树不支持多重值, 如果需要多重值, 可以再开一个`unordered_map`来记录值出现的次数, 将`x<<32`后加上出现的次数后插入. 注意此时应该为long long类型.)

8.12 rope

```

1 #include <ext/rope>
2 using namespace __gnu_cxx;
3
4 push_back(x); // 在末尾添加x
5 insert(pos, x); // 在pos插入x, 自然支持整个char数组的一
   → 次插入
6 erase(pos, x); // 从pos开始删除x个, 不要只传一个参数, 有
   → 毒
7 copy(pos, len, x); // 从pos开始到pos + len为止的部分, 赋
   → 值给x
8 replace(pos, x); // 从pos开始换成x
9 substr(pos, x); // 提取pos开始x个
10 at(x) / [x]; // 访问第x个元素

```

8.13 其他 C++ 相关

8.13.1 <cmath>

- `std::log1p(x)`: (注意是数字1) 返回 $\ln(1 + x)$ 的值, x 非常接近 0 时比直接`exp`精确得多.
- `std::hypot(x, y[, z])`: 返回平方和的平方根, 或者说到原点的欧几里得距离.

8.13.2 <algorithm>

- `std::all_of(begin, end, f)`: 检查范围内元素调用函数f后是否全返回真. 类似地还有`std::any_of`和`std::none_of`.
- `std::for_each(begin, end, f)`: 对范围内所有元素调用一次f. 如果传入的是引用, 也可以用f修改. (例如`for_each(a, a + n, [](int &x){cout << ++x << "\n";})`)
- `std::for_each_n(begin, n, f)`: 同上, 只不过范围改成了从begin开始的n个元素.

- `std::copy()`, `std::copy_n()`: 用法谁都会, 但标准里说如果元素是可平凡复制的 (比如`int`), 那么它会避免批量赋值, 并且调用`std::memmove()`之类的快速复制函数. (一句话总结: 它跑得快)
- `std::rotate(begin, mid, end)`: 循环移动, 移动后mid位置的元素会跑到first位置. C++11起会返回begin位置的元素移动后的位置.
- `std::unique(begin, end)`: 去重, 返回去重后的end.
- `std::partition(begin, end, f)`: 把f为true的放在前面, false的放在后面, 返回值是第二部分的开头, 不保持相对顺序. 如果要保留相对顺序可以用`std::stable_partition()`, 比如写整体二分.
- `std::partition_copy(begin, end, begin_t, begin_f, f)`: 不修改原数组, 把true的扔到begin_t, false的扔到begin_f. 返回值是两部分结尾的迭代器的pair.
- `std::equal_range(begin, end, x)`: 在已经排好序的数组里找到等于x的范围.
- `std::minmax(a, b)`: 返回`pair(min(a, b), max(a, b))`. 但是要注意返回的是引用, 所以不能直接用来交换 l, r.

8.13.3 std::tuple

- `std::make_tuple(...)`: 返回构造好的tuple
- `std::get<i>(tup)`: 返回tuple的第i项
- `std::tuple_cat(...)`: 传入几个tuple, 返回按顺序连起来的tuple
- `std::tie(x, y, z, ...)`: 把传入的变量的左值引用绑起来作为tuple返回, 例如可以`std::tie(x, y, z) = std::make_tuple(a, b, c)`.

8.13.4 <complex>

- `complex<double> imaginary = 1i, x = 2 + 3i`: 可以这样直接构造复数.
- `real/imag(x)`: 返回实部/虚部.
- `conj(x)`: 返回共轭复数.
- `arg(x)`: 返回辐角.
- `norm(x)`: 返回模的平方. (直接求模用`abs(x)`.)
- `polar(len, theta)`: 用绝对值和辐角构造复数.

8.14 一些游戏

8.14.1 德州扑克

一般来说德扑里Ace都是最大的, 所以把Ace的点数规定为14会好写许多.

附一个高低奥马哈的参考代码, 除了有四张底牌和需要比低之外和德扑区别不大.

```

1 struct Card {
2     int suit, value; // Ace is treated as 14
3
4     Card(string s) {
5         char a = s[0];
6
7         if (isdigit(a))
8             value = a - '0';
9         else if (a == 'T')
10            value = 10;
11        else if (a == 'A')
12            value = 14;
13        else if (a == 'J')
14            value = 11;
15        else if (a == 'Q')
16            value = 12;
17        else if (a == 'K')
18            value = 13;
19        else
20            value = 0;
21     }
22
23     bool operator< (const Card& c) const {
24         if (suit != c.suit)
25             return suit < c.suit;
26         else
27             return value < c.value;
28     }
29
30     void print() const {
31         cout << suit << " " << value;
32     }
33 };

```

```

20     value = -1; // error
21
22     char b = s[1];
23     suit = b; // Club, Diamond, Heart, Spade
24 }
25
26 friend bool operator < (const Card &a, const Card
27     &b) {
28     return a.value < b.value;
29 }
30
31 friend bool operator == (const Card &a, const Card
32     &b) {
33     return a.value == b.value;
34 }
35
36 constexpr int Highcard = 1, Pair = 2, TwoPairs = 3,
37     ThreeofaKind = 4, Straight = 5,
38 Flush = 6, FullHouse = 7, FourofaKind = 8,
39     StraightFlush = 9;
40
41 struct Hand {
42     vector<Card> v;
43     int type;
44
45     Hand() : type(0) {}
46
47     Hand(const Hand &o) : v(o.v), type(o.type) {}
48
49     Hand(const vector<Card> &v) : v(v), type(0) {}
50
51     void init_high() {
52         sort(v.begin(), v.end()); // 升序排序
53
54         bool straight = false;
55         if (v.back().value == 14) {
56             if (v[0].value == 2 && v[1].value == 3 &&
57                 v[2].value == 4 && v[3].value == 5) {
58                 straight = true;
59                 rotate(v.begin(), v.begin() + 1,
60                         v.end());
61             }
62         }
63
64         if (!straight) {
65             bool ok = true;
66             for (int i = 1; i < 5; i++)
67                 ok &= (v[i].value == v[i - 1].value +
68                         1);
69
70             if (ok)
71                 straight = true;
72         }
73
74         bool flush = all_of(v.begin(), v.end(), [&]
75             (const Card &a) {return a.suit ==
76             v.front().suit;});
77
78         if (flush && straight) { // 同花顺
79             type = StraightFlush;
80             reverse(v.begin(), v.end());
81             return;
82         }
83
84         vector<int> c;
85         c.assign(15, 0);
86
87         for (auto &o : v)
88             c[o.value]++;
89     }
90
91     void print() {
92         cout << "Hand: ";
93         for (const Card &c : v)
94             cout << c;
95     }
96 }

```

```

81     vector<int> kind[5];
82
83     for (int i = 2; i <= 14; i++)
84         if (c[i] > 1)
85             kind[c[i]].push_back(i);
86
87
88     if (!kind[4].empty()) { // 四条
89         type = FourofaKind;
90
91         for (int i = 0; i < 4; i++)
92             if (v[i].value != kind[4].front())
93                 swap(v[i], v.back());
94             break;
95         }
96
97         return;
98     }
99
100
101    if (!kind[3].empty() && !kind[2].empty()) {
102        type = FullHouse;
103
104        sort(v.begin(), v.end(), [&] (const Card
105            &a, const Card &b) {
106            bool ta = (a.value == kind[3].front()),
107                tb = (b.value == kind[3].front());
108
109            return ta > tb;
110        });
111
112        return;
113    }
114
115    if (flush) {
116        type = Flush;
117        sort(v.begin(), v.end());
118        reverse(v.begin(), v.end());
119
120        return;
121    }
122
123    if (straight) {
124        type = Straight;
125        reverse(v.begin(), v.end());
126        return;
127    }
128
129    if (!kind[3].empty()) {
130        type = ThreeofaKind;
131
132        sort(v.begin(), v.end(), [&] (const Card
133            &a, const Card &b) {
134            bool ta = (a.value == kind[3].front()),
135                tb = (b.value == kind[3].front());
136
137            return ta > tb;
138        });
139
140        if (v[3] < v[4])
141            swap(v[3], v[4]);
142
143        return;
144    }
145
146    if ((int)kind[2].size() == 2) {
147        type = TwoPairs;
148
149        sort(v.begin(), v.end(), [&] (const Card
150            &a, const Card &b) {

```

```

145     |     |     |     bool ta = (c[a.value] == 2), tb =
146     |     |     |     → (c[b.value] == 2);
147     |     |     |     if (ta != tb)
148     |     |     |     return ta > tb;
149     |     |     |
150     |     |     |     return a.value > b.value;
151     |     |     | );
152     |     |
153     |     |     return;
154     |     | );
155
156     if ((int)kind[2].size() == 1) {
157         type = Pair;
158
159         sort(v.begin(), v.end(), [&] (const Card
160             → &a, const Card &b) {
161             bool ta = (c[a.value] == 2), tb =
162                 → (c[b.value] == 2);
163
164             if (ta != tb)
165                 return ta > tb;
166
167             return a.value > b.value;
168         });
169
170         return;
171     }
172
173     type = Highcard;
174
175     sort(v.begin(), v.end());
176     reverse(v.begin(), v.end());
177 }
178
179 void init_low() {
180     for (auto &o : v)
181         if (o.value == 14)
182             o.value = 1;
183
184     sort(v.begin(), v.end());
185     reverse(v.begin(), v.end());
186 }
187
188 friend int cmp_high(const Hand &a, const Hand &b) {
189     if (a.type != b.type)
190         return a.type < b.type ? -1 : 1;
191
192     if (a.v != b.v)
193         return a.v < b.v ? -1 : 1;
194
195     return 0;
196 }
197
198 friend bool small_high(const Hand &a, const Hand
199     → &b) {
200     return cmp_high(a, b) < 0;
201 }
202
203 friend int cmp_low(const Hand &a, const Hand &b) {
204     for (int i = 0; i < 5; i++)
205         if (a.v[i].value != b.v[i].value)
206             return a.v[i] < b.v[i] ? 1 : -1;
207
208     return 0;
209 }
210
211     }
212
213     bool operator ! () const {
214         return v.empty();
215     }
216
217     string str() const {
218         stringstream ss;
219
220         for (auto &o : v)
221             ss << o.value << ' ';
222
223         return ss.str();
224     };
225
226 Hand get_max_high(vector<Card> u, vector<Card> v) { // ← private, public
227     Hand ans;
228
229     for (int i = 0; i < 4; i++)
230         for (int j = i + 1; j < 4; j++)
231             for (int k = 0; k < 5; k++)
232                 for (int p = k + 1; p < 5; p++)
233                     for (int q = p + 1; q < 5; q++) {
234                         Hand tmp{u[i], u[j], v[k],
235                             → v[p], v[q]};
236
237                         tmp.init_high();
238
239                         if (!ans || cmp_high(tmp, ans)
240                             → > 0)
241                             ans = tmp;
242
243         return ans;
244     }
245
246 Hand get_max_low(vector<Card> tu, vector<Card> tv) {
247     vector<Card> u, v;
248
249     for (auto o : tu)
250         if (o.value == 14 || o.value <= 8)
251             u.push_back(o);
252
253     for (auto o : tv)
254         if (o.value == 14 || o.value <= 8)
255             v.push_back(o);
256
257     Hand ans;
258
259     for (int i = 0; i < (int)u.size(); i++)
260         for (int j = i + 1; j < (int)u.size(); j++)
261             for (int k = 0; k < (int)v.size(); k++)
262                 for (int p = k + 1; p < (int)v.size();
263                     → p++)
264                     for (int q = p + 1; q <
265                         → (int)v.size(); q++) {
266                         vector<Card> vec = {u[i], u[j],
267                             → v[k], v[p], v[q]};
268
269                         bool bad = false;
270
271                         for (int a = 0; a < 5; a++)
272                             for (int b = a + 1; b < 5;
273                                 → b++)
274                                 if (vec[a].value ==
275                                     → vec[b].value)
276                                     bad = true;

```

```

271         if (bad)
272             continue;
273
274         Hand tmp(vec);
275
276         tmp.init_low();
277
278         if (!ans || cmp_low(tmp, ans) >
279             -> 0)
280             ans = tmp;
281
282     }
283
284     return ans;
285 }
286
287 int main() {
288
289     ios::sync_with_stdio(false);
290
291     int T;
292     cin >> T;
293
294     while (T--) {
295         int p;
296         cin >> p;
297
298         vector<Card> alice, bob, pub;
299
300         for (int i = 0; i < 4; i++) {
301             string s;
302             cin >> s;
303             alice.push_back(Card(s));
304         }
305
306         for (int i = 0; i < 4; i++) {
307             string s;
308             cin >> s;
309             bob.push_back(Card(s));
310         }
311
312         for (int i = 0; i < 5; i++) {
313             string s;
314             cin >> s;
315             pub.push_back(Card(s));
316         }
317
318         Hand alice_high = get_max_high(alice, pub),
319             -> bob_high = get_max_high(bob, pub);
320         Hand alice_low = get_max_low(alice, pub),
321             -> bob_low = get_max_low(bob, pub);
322
323         int dh = cmp_high(alice_high, bob_high);
324         int ans[2] = {0};
325
326         if (!alice_low && !bob_low) {
327             if (!dh) {
328                 ans[0] = p - p / 2;
329                 ans[1] = p / 2;
330             }
331             else
332                 ans[dh == -1] = p;
333         }
334         else if (!alice_low || !bob_low) {
335             ans[!alice_low] += p / 2;
336
337             if (!dh) {
338                 ans[0] += p - p / 2 - (p - p / 2) / 2;
339                 ans[1] += (p - p / 2) / 2;
340             }
341             else
342                 ans[dh == -1] += p - p / 2;
343
344             if (!dh) {
345                 ans[0] += p / 2 - p / 2 / 2;
346                 ans[1] += p / 2 / 2;
347             }
348             else
349                 ans[dh == -1] += p / 2;
350
351             if (!dh) {
352                 ans[0] += p - p / 2 - (p - p / 2) / 2;
353                 ans[1] += (p - p / 2) / 2;
354             }
355             else
356                 ans[dh == -1] += p - p / 2;
357
358             cout << ans[0] << ' ' << ans[1] << '\n';
359         }
360     }
361
362     return 0;
363 }
```

8.14.2 炉石传说

两个随从 (a_i, h_i) 和 (a_j, h_j) 皇城PK, 最后只有 $a_i \times h_i$ 较大的一方才有可能活下来, 当然也有可能一起死.

8.15 OEIS

如果没有特殊说明, 那么以下数列都从第 0 项开始, 除非没有定义也没有好的办法解释第 0 项的意义.

8.15.1 计数相关

1. 卡特兰数 (A000108)

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, ...

性质见1.10.7.卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数(16页).

2. (大) 施罗德数 (A006318)

1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, 206098, 1037718, 5293446, 27297738, 142078746, 745387038, ... (0-based)

性质同样见1.10.7.卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数(16页).

3. 小施罗德数 (A001003)

1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049, 518859, 2646723, 13648869, 71039373, 372693519, ... (0-based)

性质位置同上.

小施罗德数除了第 0 项以外都是施罗德数的一半.

4. 默慈金数 (Motzkin numbers, A001006)

1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, 2356779, ... (0-based)

性质位置同上.

5. 将点按顺序排成一圈后不自交的树的个数 (A001764)

1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, 43263, 246675, 1430715, 8414640, 50067108, 300830572, 1822766520, ... (0-based)

$$a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{2n+1}$$

也就是说, 在圆上按顺序排列的 n 个点之间连 $n - 1$ 条不相交 (除端点外) 的弦, 组成一棵树的方案数.

也等于每次只能向右或向上, 并且不能高于 $y = 2x$ 这条直线, 从 $(0, 0)$ 走到 $(n, 2n)$ 的方案数.

扩展: 如果改成不能高于 $y = kx$ 这条直线, 走到 (n, kn) 的方案数, 那么答案就是 $\frac{\binom{(k+1)n}{n}}{kn+1}$.

6. n 个点的圆上画不相交的弦的方案数 (A054726)

1, 1, 2, 8, 48, 352, 2880, 25216, 231168, 2190848, 21292032, 211044352, 2125246464, 21681954816, ... (0-based)

$a_n = 2^n s_{n-2}$ ($n > 2$), s_n 是上面的小施罗德数.

和上面的区别在于, 这里可以不连满 $n - 1$ 条边. 另外默慈金数画的弦不能共享端点, 但是这里可以.

7. Wedderburn-Etherington numbers(A001190)

0, 1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 46, 98, 207, 451, 983, 2179, 4850, 10905, 24631, 56011, 127912, 293547, ... (0-based)

每个结点都有 0 或者 2 个儿子, 且总共有 n 个叶子结点的二叉树方案数. (无标号)

同时也是 $n - 1$ 个结点的无标号二叉树个数.

$$A(x) = x + \frac{A(x^2)^2 + A(x^2)}{2} = 1 - \sqrt{1 - 2x - A(x^2)}$$

8. 划分数 (A000041)

1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, 792, 1002, ... (0-based)

9. 贝尔数 (A000110)

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, ... (0-based)

10. 错位排列数 (A0000166)

1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, ... (0-based)

11. 交替阶乘 (A005165)

0, 1, 1, 5, 19, 101, 619, 4421, 35899, 326981, 3301819, 36614981, 442386619, 5784634181, 81393657019, ...

$$n! - (n-1)! + (n-2)! - \dots 1! = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i)!$$

$a_0 = 0$, $a_n = n! - a_{n-1}$.

8.15.2 线性递推数列

1. Lucas数 (A000032)

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, ...

2. 斐波那契数 (A000045)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

3. 泰波那契数 (Tribonacci, A000071)

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, ...

$a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$.

4. Pell数 (A0000129)

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, ...

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

5. 帕多万 (Padovan) 数 (A0000931)

1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833, 31572, ...

$a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$.

6. Jacobsthal numbers(A001045)

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, 87381, 174763, ...

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

同时也是最接近 $\frac{2^n}{3}$ 的整数.

7. 佩林数 (A001608)

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853, ...

$a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

8.15.3 数论相关

1. Carmichael数, 伪质数 (A002997)

561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973, 75361, 101101, 115921, 126217, 162401, 172081, 188461, 252601, 278545, 294409, 314821, 334153, 340561, 399001, 410041, 449065, 488881, 512461, ...

满足 \forall 与 n 互质的 a , 都有 $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 的所有合数 n 被称为Carmichael数.

Carmichael数在 10^8 以内只有255个.

2. 反质数 (A002182)

1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 7560, 10080, 15120, 20160, 25200, 27720, 45360, 50400, 55440, 83160, 110880, 166320, 221760, 277200, 332640, 498960, 554400, 665280, 720720, 1081080, 1441440, 2162160, ...

比所有更小的数的约数数量都更多的数.

3. 前 n 个质数的乘积 (A002110)

1, 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, 9699690, 223092870, 6469693230, 200560490130, 7420738134810, ...

4. 梅森质数 (A000668)

3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, 618970019642690137449562111, 162259276829213363391578010288127,

170141183460469231731687303715884105727

p 是质数, 同时 $2^p - 1$ 也是质数.

8.15.4 其他

1. 伯努利数 (A027641)

见1.10.2.伯努利数, 自然数幂次和(14页).

2. 四个柱子的汉诺塔 (A007664)

0, 1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, 41, 49, 65, 81, 97, 113, 129, 161, 193, 225, 257, 289, 321, 385, 449, ...

差分之后可以发现其实就是1次+1, 2次+2, 3次+4, 4次+8...的规律.

3. 乌拉姆数 (Ulam numbers, A002858)

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, 72, 77, 82, 87, 97, 99, 102, 106, 114, 126, 131, 138, 145, 148, 155, 175, 177, 180, 182, 189, 197, 206, 209, 219, 221, 236, 238, 241, 243, 253, 258, 260, 273, 282, 309, 316, 319, 324, 339, ...

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, a_n 表示在所有 $> a_{n-1}$ 的数中, 最小的, 能被表示成 (前面的两个不同的元素的和) 的数.

8.16 编译选项

- `-O2 -g -std=c++17`: 狗都知道
- `-Wall -Wextra -Wshadow -Wconversion`: 更多警告
 - `-Werror`: 强制将所有Warning变成Error
- `-fsanitize=(address/undefined/ftrapv)`: 检查数组越界/有符号整数溢出 (算ub)
 - 调试神器, 在遇到错误时会输出信息.
 - 注意无符号类型溢出不算ub.
- `-fno-ms-extensions`: 关闭一些和msvc保持一致的特性, 例如, 不标返回值类型的函数会报CE而不是默认为int.
 - 但是不写return的话它还是管不了.
- `#define debug(x) cout << #x << " = " << x << endl`

8.17 附录: VScode 相关

8.17.1 插件

- Chinese (Simplified) (简体中文语言包)
- C/C++
- C++ Intellisense (前提是让用)
- Better C++ Syntax
- Python
- Pylance (前提是让用)
- Rainbow Brackets (前提是让用)

8.17.2 设置选项

- Editor: Insert Spaces (取消勾选, 改为tab缩进)
- Editor: Line Warp (开启折行)
- 改配色, “深色+：默认深色”
- 自动保存 (F1 → “auto”)
- Terminal → Integrated: Cursor Style (修改终端光标形状)
- Terminal → Integrated: Cursor Blinking (终端光标闪烁)
- 字体改为Cascadia Code/Mono SemiLight (Windows可用)

8.17.3 快捷键

- F1 / Ctrl+Shift+P: 万能键, 打开命令面板
- F8: 下一个Error Shift+F8: 上一个Error
- Ctrl+\: 水平分栏, 最多3栏
- Ctrl+1/2/3: 切到对应栏
- Ctrl+[/: 当前行向左/右缩进
- Alt+F12: 查看定义的缩略图 (显示小窗, 不跳过去)
- Ctrl+H: 查找替换
- Ctrl+D: 下一个匹配的也被选中 (用于配合Ctrl+F)
- Ctrl+U: 回退上一个光标操作 (防止光标飞了找不回去)
- Ctrl+/: 切换行注释
- Ctrl+` (键盘左上角的倒引号): 显示终端

更多快捷键参见最后两页, 分别是Windows和Linux下的快捷键列表.

8.18 附录：骂人的艺术—梁实秋

古今中外没有一个不骂人的人。骂人就是有道德观念的意思，因为在骂人的时候，至少在骂人者自己总觉得那人有该骂的地方。何者该骂，何者不该骂，这个抉择的标准，是极道德的。所以根本不骂人，大可不必。骂人是一种发泄感情的方法，尤其是那一种怨怒的感情。想骂人的时候而不骂，时常在身体上弄出毛病，所以想骂人时，骂骂何妨？

但是，骂人是一种高深的学问，不是人人都可以随便试的。有因为骂人挨嘴巴的，有因为骂人吃官司的，有因为骂人反被人骂的，这都是不会骂人的原故。今以研究所得，公诸同好，或可为骂人时之一助乎？

1. 知己知彼

骂人是和动手打架一样的，你如其敢打人一拳，你先要自己忖度下，你吃得起别人的一拳否。这叫做知己知彼。骂人也是一样。譬如你骂他是“屈死”，你先要反省，自己和“屈死”有无分别。你骂别人荒唐，你自己想想曾否吃喝嫖赌。否则别人回敬你一二句，你就受不了。所以别人有着某种短处，而足下也正有同病，那么你在骂他的时候只得割爱。

2. 无骂不如己者

要骂人须要挑比你大一点的人物，比你漂亮一点的或者比你坏得万倍而比你得势的人物，总之，你要骂人，那人无论在好的方面或坏的一方面都要能胜过你，你才不吃亏。你骂大人物，就怕他不理你，他一回骂，你就算骂着了。因为身份相同的人才肯对骂。在坏的一方面胜过你的，你骂他就如教训一般，他既便回骂，一般人仍不会理会他的。假如你骂一个无关痛痒的人，你越骂他他越得意，时常可以把一个无名小卒骂出名了，你看冤与不冤？

3. 适可而止

骂大人物骂到他回骂的时候，便不可再骂；再骂则一般人对你必无同情，以为你是无理取闹。骂小人物骂到他不能回骂的时候，便不可再骂；再骂下去则一般人对你也必无同情，以为你是欺负弱者。

4. 旁敲侧击

他偷东西，你骂他是贼；他抢东西，你骂他是盗，这是笨伯。骂人必须先明虚实掩映之法，须要烘托旁衬，旁敲侧击，于要紧处只一语便得，所谓杀于咽喉处着刀。越要骂他你越要原谅他，即便说些恭维话亦不为过，这样的骂法才能显得你所骂的句句是真实确凿，让旁人看起来也可见得你的度量。

5. 态度镇定

骂人最忌浮躁。一语不合，面红筋跳，暴躁如雷，此灌夫骂座，泼妇骂街之术，不足以言骂人。善骂者必须态度镇静，行若无事。普通一般骂人，谁的声音高便算谁占理，谁的来势猛便算谁骂赢，惟真善骂人者，乃能避其锋而击其懈。你等他骂得疲倦的时候，你只消轻轻的回敬他一句，让他再狂吼一阵。在他暴躁不堪的时候，你不妨对他冷笑几声，包管你不费力气，把他气得死去活来，骂得他针针见血。

6. 出言典雅

骂人要骂得微妙含蓄，你骂他一句要使他不甚觉得是骂，等到想

过一遍才慢慢觉悟这句话不是好话，让他笑着的面孔由白而红，由红而紫，由紫而灰，这才是骂人的上乘。欲达到此种目的，深刻之用意固不可少，而典雅之言词则尤为重要。言词典雅可使听者不致刺耳。如要骂人骂得典雅，则首先要在骂时万勿提起女人身上的某一部分，万勿不要涉及生理学范围。骂人一骂到生理学范围以内，底下再有什么话都不好说了。譬如你骂某甲，千万别提起他的令堂令妹。因为那样一来，便无是非可言，并且你自己也不免有令堂令妹，他若回敬起来，岂非势均力敌，半斤八两？再者骂人的时候，最好不要加入以种种难堪的名词，称呼起来总要客气，即使他是极卑鄙的小人，你也不妨称他先生，越客气，越骂得有力量。骂得时节最好引用他自己的词句，这不但可以使他难堪，还可以减轻他对你骂的力量。俗语少用，因为俗语一览无遗，不若典雅古文曲折含蓄。

7. 以退为进

两人对骂，而自己亦有理屈之处，则处于开骂伊始，特宜注意，最好是毅然将自己理屈之处完全承认下来，即使道歉认错均不妨事。先把自己理屈之处轻轻遮掩过去，然后你再重整旗鼓，着着逼人，方可无后顾之忧。即使自己没有理屈的地方，也绝不可自行夸张，务必要谦逊不遑，把自己的位置降到一个不可再降的位置，然后骂起人来，自有一种公正光明的态度。否则你骂他一两句，他便以你个人的事反唇相讥，一场对骂，会变成两人私下口角，是非曲直，无从判断。所以骂人者自己要低声下气，此所谓以退为进。

8. 预设埋伏

你把这句话骂过去，你便要想想看，他将用什么话骂回来。有眼光的骂人者，便处处留神，或是先将他要骂你的话替他说出来，或是预先安设埋伏，令他骂回来的话失去效力。他骂你的话，你替他说出来，这便等于缴了他的械一般。预设埋伏，便是在要攻击你的地方，你先轻轻的安下话根，然后他骂过来就等于枪弹打在沙包上，不能中伤。

9. 小题大做

如对方有该骂之处，而题目身小，不值一骂，或你所知不多，不足一骂，那时节你便可用小题大做的方法，来扩大题目。先用诚恳而怀疑的态度引申对方的意思，由不紧要之点引到大题目上去，处处用严谨的逻辑逼他说出不逻辑的话来，或是逼他说出合于逻辑但不合乎理的话来，然后你再大举骂他，骂到体无完肤为止，而原来惹动你的小题目，轻轻一提便了。

10. 远交近攻

一个时候，只能骂一个人，或一种人，或一派。决不宜多树敌。所以骂人的时候，万勿连累旁人，即使必须牵涉多人，你也要表示好意，否则回骂之声纷至沓来，使你无从应付。

骂人的艺术，一时所能想起来的有上面十条，信手拈来，并无条理。我做此文的用意，是助人骂人。同时也是想把骂人的技术揭破一点，供爱骂人者参考。挨骂的人看看，骂人的心理原来是这样的，也算是揭破一张黑幕给你瞧瞧！

8.19 附录：Cheat Sheet

见后面几页。

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Definitions		Series
$f(n) = O(g(n))$	iff \exists positive c, n_0 such that $0 \leq f(n) \leq cg(n) \forall n \geq n_0$.	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. In general: $\sum_{i=1}^n i^m = \frac{1}{m+1} \left[(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{i=1}^n ((i+1)^{m+1} - i^{m+1} - (m+1)i^m) \right]$ $\sum_{i=1}^{n-1} i^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$
$f(n) = \Omega(g(n))$	iff \exists positive c, n_0 such that $f(n) \geq cg(n) \geq 0 \forall n \geq n_0$.	
$f(n) = \Theta(g(n))$	iff $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \Omega(g(n))$.	
$f(n) = o(g(n))$	iff $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$.	
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	iff $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ such that $ a_n - a < \epsilon, \forall n \geq n_0$.	
$\sup S$	least $b \in \mathbb{R}$ such that $b \geq s, \forall s \in S$.	Geometric series: $\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}, \quad c \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1 - c}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1 - c}, \quad c < 1,$ $\sum_{i=0}^n i c^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(c-1)^2}, \quad c \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i c^i = \frac{c}{(1-c)^2}, \quad c < 1.$
$\inf S$	greatest $b \in \mathbb{R}$ such that $b \leq s, \forall s \in S$.	
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_i \mid i \geq n, i \in \mathbb{N}\}$.	Harmonic series: $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad \sum_{i=1}^n i H_i = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_i \mid i \geq n, i \in \mathbb{N}\}$.	$\sum_{i=1}^n H_i = (n+1)H_n - n, \quad \sum_{i=1}^n \binom{i}{m} H_i = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right).$
$\binom{n}{k}$	Combinations: Size k subsets of a size n set.	
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	Stirling numbers (1st kind): Arrangements of an n element set into k cycles.	1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad 3. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$	Stirling numbers (2nd kind): Partitions of an n element set into k non-empty sets.	4. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad 5. \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$
$\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$	1st order Eulerian numbers: Permutations $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ on $\{1, 2, \dots, n\}$ with k ascents.	6. $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}, \quad 7. \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$
$\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$	2nd order Eulerian numbers.	8. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad 9. \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$
C_n	Catalan Numbers: Binary trees with $n+1$ vertices.	10. $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}, \quad 11. \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1,$
14. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$	15. $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!H_{n-1},$	12. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad 13. \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\},$
18. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix},$	19. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2},$	16. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad 17. \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\},$
22. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1,$	23. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1-k \end{smallmatrix} \right\rangle,$	20. $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!, \quad 21. C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$
25. $\left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } k=0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	26. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 2^n - n - 1,$	24. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$
28. $x^n = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{x+k}{n},$	29. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^m \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n (-1)^k,$	27. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\rangle = 3^n - (n+1)2^n + \binom{n+1}{2},$
31. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k!,$	32. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1,$	30. $m! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{k}{n-m},$
34. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (2n-1-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$		33. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{for } n \neq 0,$
36. $\left\{ \begin{smallmatrix} x \\ x-n \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n},$	37. $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right\} (m+1)^{n-k},$	35. $\sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \frac{(2n)^n}{2^n},$

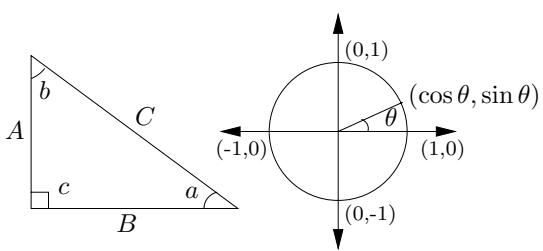
Theoretical Computer Science Cheat Sheet		
Identities Cont.		Trees
38. $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} n^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$,	39. $\begin{bmatrix} x \\ x-n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{2n}$,	Every tree with n vertices has $n-1$ edges.
40. $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$,	41. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$,	Kraft inequality: If the depths of the leaves of a binary tree are d_1, \dots, d_n : $\sum_{i=1}^n 2^{-d_i} \leq 1,$
42. $\begin{Bmatrix} m+n+1 \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^m k \begin{Bmatrix} n+k \\ k \end{Bmatrix}$,	43. $\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m k(n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}$,	and equality holds only if every internal node has 2 sons.
44. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$,	45. $(n-m)! \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{m-k}$, for $n \geq m$,	
46. $\begin{Bmatrix} n \\ n-m \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} m-n \\ m+k \end{bmatrix} \binom{m+n}{n+k} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}$,	47. $\begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} m-n \\ m+k \end{bmatrix} \binom{m+n}{n+k} \begin{Bmatrix} m+k \\ k \end{Bmatrix}$,	
48. $\begin{Bmatrix} n \\ \ell+m \end{Bmatrix} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-k \\ m \end{Bmatrix} \binom{n}{k}$,	49. $\begin{bmatrix} n \\ \ell+m \end{bmatrix} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-k \\ m \end{bmatrix} \binom{n}{k}$.	
Recurrences		
<p>Master method: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, $a \geq 1, b > 1$</p> <p>If $\exists \epsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.</p> <p>If $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.</p> <p>If $\exists \epsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, and $\exists c < 1$ such that $af(n/b) \leq cf(n)$ for large n, then $T(n) = \Theta(f(n))$.</p> <p>Substitution (example): Consider the following recurrence $T_{i+1} = 2^{2^i} \cdot T_i^2$, $T_1 = 2$.</p> <p>Note that T_i is always a power of two. Let $t_i = \log_2 T_i$. Then we have $t_{i+1} = 2^i + 2t_i$, $t_1 = 1$.</p> <p>Let $u_i = t_i/2^i$. Dividing both sides of the previous equation by 2^{i+1} we get $\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} = \frac{2^i}{2^{i+1}} + \frac{t_i}{2^i}$.</p> <p>Substituting we find $u_{i+1} = \frac{1}{2} + u_i$, $u_1 = \frac{1}{2}$,</p> <p>which is simply $u_i = i/2$. So we find that T_i has the closed form $T_i = 2^{i2^{i-1}}$.</p> <p>Summing factors (example): Consider the following recurrence $T(n) = 3T(n/2) + n$, $T(1) = 1$.</p> <p>Rewrite so that all terms involving T are on the left side $T(n) - 3T(n/2) = n$.</p> <p>Now expand the recurrence, and choose a factor which makes the left side “telescope”</p>	$1(T(n) - 3T(n/2) = n)$ $3(T(n/2) - 3T(n/4) = n/2)$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $3^{\log_2 n-1}(T(2) - 3T(1) = 2)$ <p>Let $m = \log_2 n$. Summing the left side we get $T(n) - 3^m T(1) = T(n) - 3^m = T(n) - n^k$ where $k = \log_2 3 \approx 1.58496$. Summing the right side we get</p> $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{n}{2^i} 3^i = n \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i.$ <p>Let $c = \frac{3}{2}$. Then we have</p> $\begin{aligned} n \sum_{i=0}^{m-1} c^i &= n \left(\frac{c^m - 1}{c - 1} \right) \\ &= 2n(c^{\log_2 n} - 1) \\ &= 2n(c^{(k-1)\log_c n} - 1) \\ &= 2n^k - 2n, \end{aligned}$ <p>and so $T(n) = 3n^k - 2n$. Full history recurrences can often be changed to limited history ones (example): Consider</p> $T_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} T_j, \quad T_0 = 1.$ <p>Note that</p> $T_{i+1} = 1 + \sum_{j=0}^i T_j.$ <p>Subtracting we find</p> $\begin{aligned} T_{i+1} - T_i &= 1 + \sum_{j=0}^i T_j - 1 - \sum_{j=0}^{i-1} T_j \\ &= T_i. \end{aligned}$ <p>And so $T_{i+1} = 2T_i = 2^{i+1}$.</p>	<p>Generating functions:</p> <ol style="list-style-type: none"> Multiply both sides of the equation by x^i. Sum both sides over all i for which the equation is valid. Choose a generating function $G(x)$. Usually $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i g_i$. Rewrite the equation in terms of the generating function $G(x)$. Solve for $G(x)$. The coefficient of x^i in $G(x)$ is g_i. <p>Example: $g_{i+1} = 2g_i + 1$, $g_0 = 0$.</p> <p>Multiply and sum: $\sum_{i \geq 0} g_{i+1} x^i = \sum_{i \geq 0} 2g_i x^i + \sum_{i \geq 0} x^i$.</p> <p>We choose $G(x) = \sum_{i \geq 0} x^i g_i$. Rewrite in terms of $G(x)$:</p> $\frac{G(x) - g_0}{x} = 2G(x) + \sum_{i \geq 0} x^i.$ <p>Simplify: $\frac{G(x)}{x} = 2G(x) + \frac{1}{1-x}.$</p> <p>Solve for $G(x)$:</p> $G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$ <p>Expand this using partial fractions:</p> $\begin{aligned} G(x) &= x \left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right) \\ &= x \left(2 \sum_{i \geq 0} 2^i x^i - \sum_{i \geq 0} x^i \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} (2^{i+1} - 1)x^{i+1}. \end{aligned}$ <p>So $g_i = 2^i - 1$.</p>

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

$\pi \approx 3.14159, e \approx 2.71828, \gamma \approx 0.57721, \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -.61803$				
i	2^i	p_i	General	Probability
1	2	2	Bernoulli Numbers ($B_i = 0$, odd $i \neq 1$): $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$	Continuous distributions: If $\Pr[a < X < b] = \int_a^b p(x) dx,$ then p is the probability density function of X . If $\Pr[X < a] = P(a),$ then P is the distribution function of X . If P and p both exist then $P(a) = \int_{-\infty}^a p(x) dx.$
2	4	3		
3	8	5		
4	16	7	Change of base, quadratic formula: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$	
5	32	11		
6	64	13		
7	128	17	Euler's number e : $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$	Expectation: If X is discrete $E[g(X)] = \sum_x g(x) \Pr[X = x].$
8	256	19		If X continuous then $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP(x).$
9	512	23		Variance, standard deviation: $\text{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2,$ $\sigma = \sqrt{\text{VAR}[X]}.$
10	1,024	29		For events A and B : $\Pr[A \vee B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \wedge B]$
11	2,048	31		$\Pr[A \wedge B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B],$ iff A and B are independent.
12	4,096	37		$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \wedge B]}{\Pr[B]}$
13	8,192	41	Harmonic numbers: $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \dots$	For random variables X and Y : $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y],$ if X and Y are independent.
14	16,384	43		$E[X + Y] = E[X] + E[Y],$ $E[cX] = cE[X].$
15	32,768	47		Bayes' theorem:
16	65,536	53		$\Pr[A_i B] = \frac{\Pr[B A_i] \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[A_j] \Pr[B A_j]}.$
17	131,072	59		Inclusion-exclusion:
18	262,144	61		$\Pr\left[\bigvee_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[X_i] + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \Pr\left[\bigwedge_{j=1}^k X_{i_j}\right].$
19	524,288	67	Factorial, Stirling's approximation: $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, \dots$	Moment inequalities:
20	1,048,576	71		$\Pr[X \geq \lambda E[X]] \leq \frac{1}{\lambda},$ $\Pr[X - E[X] \geq \lambda \cdot \sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$
21	2,097,152	73		Geometric distribution:
22	4,194,304	79		$\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p,$ $E[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$
23	8,388,608	83	Ackermann's function and inverse: $a(i, j) = \begin{cases} 2^j & i = 1 \\ a(i-1, 2) & j = 1 \\ a(i-1, a(i, j-1)) & i, j \geq 2 \end{cases}$ $\alpha(i) = \min\{j \mid a(j, j) \geq i\}.$	
24	16,777,216	89		
25	33,554,432	97		
26	67,108,864	101		
27	134,217,728	103		
28	268,435,456	107	Binomial distribution: $\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p,$ $E[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$	
29	536,870,912	109		
30	1,073,741,824	113	Poisson distribution: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad E[X] = \lambda.$	
31	2,147,483,648	127	Normal (Gaussian) distribution: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad E[X] = \mu.$	
32	4,294,967,296	131	The "coupon collector": We are given a random coupon each day, and there are n different types of coupons. The distribution of coupons is uniform. The expected number of days to pass before we collect all n types is $nH_n.$	
Pascal's Triangle				
	1			
	1 1			
	1 2 1			
	1 3 3 1			
	1 4 6 4 1			
	1 5 10 10 5 1			
	1 6 15 20 15 6 1			
	1 7 21 35 35 21 7 1			
	1 8 28 56 70 56 28 8 1			
	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1			
	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1			

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Trigonometry



Pythagorean theorem:

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

Definitions:

$$\sin a = A/C, \quad \cos a = B/C,$$

$$\csc a = C/A, \quad \sec a = C/B,$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{A}{B}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{B}{A}.$$

Area, radius of inscribed circle:

$$\frac{1}{2}AB, \quad \frac{AB}{A+B+C}.$$

Identities:

$$\sin x = \frac{1}{\csc x},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x},$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x,$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$\sin x = \sin(\pi - x),$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x),$$

$$\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$\cot x = -\cot(\pi - x),$$

$$\csc x = \cot \frac{x}{2} - \cot x,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x},$$

$$\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y,$$

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

Euler's equation:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{i\pi} = -1.$$

v2.02 ©1994 by Steve Seiden

sseiden@acm.org

<http://www.csc.lsu.edu/~seiden>

Matrices

Multiplication:

$$C = A \cdot B, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Determinants: $\det A \neq 0$ iff A is non-singular.

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B,$$

$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n \text{sign}(\pi) a_{i,\pi(i)}.$$

2×2 and 3×3 determinant:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd.$$

Permanents:

$$\text{perm } A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}.$$

Hyperbolic Functions

Definitions:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

Identities:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1,$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1, \quad \sinh(-x) = -\sinh x,$$

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x},$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2 \sinh^2 \frac{x}{2} = \cosh x - 1, \quad 2 \cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1.$$

$$\begin{array}{cccc} \theta & \sin \theta & \cos \theta & \tan \theta \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{array}$$

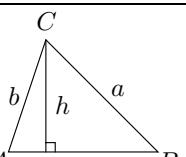
$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & \infty \end{array}$$

... in mathematics you don't understand things, you just get used to them.

– J. von Neumann

More Trig.



Law of cosines:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Area:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}hc, \\ &= \frac{1}{2}ab \sin C, \\ &= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}. \end{aligned}$$

Heron's formula:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s \cdot s_a \cdot s_b \cdot s_c}, \\ s &= \frac{1}{2}(a+b+c), \\ s_a &= s-a, \\ s_b &= s-b, \\ s_c &= s-c. \end{aligned}$$

More identities:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$= \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

$$\cot \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}},$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$

$$= \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\tan x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

$$= -i \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1},$$

$$\sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i},$$

$$\cos x = \cosh ix,$$

$$\tan x = \frac{\tanh ix}{i}.$$

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Theoretical Computer Science Cheat Sheet										
Number Theory	Graph Theory									
<p>The Chinese remainder theorem: There exists a number C such that:</p> $C \equiv r_1 \pmod{m_1}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $C \equiv r_n \pmod{m_n}$ <p>if m_i and m_j are relatively prime for $i \neq j$.</p> <p>Euler's function: $\phi(x)$ is the number of positive integers less than x relatively prime to x. If $\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ is the prime factorization of x then</p> $\phi(x) = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i-1} (p_i - 1).$ <p>Euler's theorem: If a and b are relatively prime then</p> $1 \equiv a^{\phi(b)} \pmod{b}.$ <p>Fermat's theorem:</p> $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$ <p>The Euclidean algorithm: if $a > b$ are integers then</p> $\gcd(a, b) = \gcd(a \bmod b, b).$ <p>If $\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ is the prime factorization of x then</p> $S(x) = \sum_{d x} d = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}.$ <p>Perfect Numbers: x is an even perfect number iff $x = 2^{n-1}(2^n - 1)$ and $2^n - 1$ is prime.</p> <p>Wilson's theorem: n is a prime iff</p> $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$ <p>Möbius inversion:</p> $\mu(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1. \\ 0 & \text{if } i \text{ is not square-free.} \\ (-1)^r & \text{if } i \text{ is the product of } r \text{ distinct primes.} \end{cases}$ <p>If</p> $G(a) = \sum_{d a} F(d),$ <p>then</p> $F(a) = \sum_{d a} \mu(d) G\left(\frac{a}{d}\right).$ <p>Prime numbers:</p> $p_n = n \ln n + n \ln \ln n - n + n \frac{\ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$ $\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!n}{(\ln n)^3} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^4}\right).$	<p>Definitions:</p> <ul style="list-style-type: none"> <i>Loop</i>: An edge connecting a vertex to itself. <i>Directed</i>: Each edge has a direction. <i>Simple</i>: Graph with no loops or multi-edges. <i>Walk</i>: A sequence $v_0 e_1 v_1 \dots e_\ell v_\ell$. <i>Trail</i>: A walk with distinct edges. <i>Path</i>: A trail with distinct vertices. <i>Connected</i>: A graph where there exists a path between any two vertices. <i>Component</i>: A maximal connected subgraph. <i>Tree</i>: A connected acyclic graph. <i>Free tree</i>: A tree with no root. <i>DAG</i>: Directed acyclic graph. <i>Eulerian</i>: Graph with a trail visiting each edge exactly once. <i>Hamiltonian</i>: Graph with a cycle visiting each vertex exactly once. <i>Cut</i>: A set of edges whose removal increases the number of components. <i>Cut-set</i>: A minimal cut. <i>Cut edge</i>: A size 1 cut. <i>k-Connected</i>: A graph connected with the removal of any $k-1$ vertices. <i>k-Tough</i>: $\forall S \subseteq V, S \neq \emptyset$ we have $k \cdot c(G-S) \leq S$. <i>k-Regular</i>: A graph where all vertices have degree k. <i>k-Factor</i>: A k-regular spanning subgraph. <i>Matching</i>: A set of edges, no two of which are adjacent. <i>Clique</i>: A set of vertices, all of which are adjacent. <i>Ind. set</i>: A set of vertices, none of which are adjacent. <i>Vertex cover</i>: A set of vertices which cover all edges. <i>Planar graph</i>: A graph which can be embedded in the plane. <i>Plane graph</i>: An embedding of a planar graph. 	<p>Notation:</p> <ul style="list-style-type: none"> $E(G)$: Edge set $V(G)$: Vertex set $c(G)$: Number of components $G[S]$: Induced subgraph $\deg(v)$: Degree of v $\Delta(G)$: Maximum degree $\delta(G)$: Minimum degree $\chi(G)$: Chromatic number $\chi_E(G)$: Edge chromatic number G^c: Complement graph K_n: Complete graph K_{n_1, n_2}: Complete bipartite graph $r(k, \ell)$: Ramsey number 								
		Geometry								
		<p>Projective coordinates: triples (x, y, z), not all x, y and z zero.</p> $(x, y, z) = (cx, cy, cz) \quad \forall c \neq 0.$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%;">Cartesian</td><td style="width: 50%;">Projective</td></tr> <tr> <td>(x, y)</td><td>$(x, y, 1)$</td></tr> <tr> <td>$y = mx + b$</td><td>$(m, -1, b)$</td></tr> <tr> <td>$x = c$</td><td>$(1, 0, -c)$</td></tr> </table> <p>Distance formula, L_p and L_∞ metric:</p> $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$ $[x_1 - x_0 ^p + y_1 - y_0 ^p]^{1/p},$ $\lim_{p \rightarrow \infty} [x_1 - x_0 ^p + y_1 - y_0 ^p]^{1/p}.$ <p>Area of triangle (x_0, y_0), (x_1, y_1) and (x_2, y_2):</p> $\frac{1}{2} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$ <p>Angle formed by three points:</p> $\cos \theta = \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}.$ <p>Line through two points (x_0, y_0) and (x_1, y_1):</p> $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ <p>Area of circle, volume of sphere:</p> $A = \pi r^2, \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3.$	Cartesian	Projective	(x, y)	$(x, y, 1)$	$y = mx + b$	$(m, -1, b)$	$x = c$	$(1, 0, -c)$
Cartesian	Projective									
(x, y)	$(x, y, 1)$									
$y = mx + b$	$(m, -1, b)$									
$x = c$	$(1, 0, -c)$									
		<p>If I have seen farther than others, it is because I have stood on the shoulders of giants. – Issac Newton</p>								

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

π	Calculus
<p>Wallis' identity: $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$</p> <p>Brouncker's continued fraction expansion: $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\ddots}}}}$</p> <p>Gregory's series: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$</p> <p>Newton's series: $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \cdots$</p> <p>Sharp's series: $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \right)$</p> <p>Euler's series: $\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{12} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots \end{aligned}$</p>	<p>Derivatives:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx},$ 2. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$ 3. $\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$ 4. $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx},$ 5. $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(\frac{du}{dx}) - u(\frac{dv}{dx})}{v^2},$ 6. $\frac{d(e^{cu})}{dx} = ce^{cu} \frac{du}{dx},$ 7. $\frac{d(c^u)}{dx} = (\ln c)c^u \frac{du}{dx},$ 8. $\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx},$ 10. $\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx},$ 12. $\frac{d(\cot u)}{dx} = \csc^2 u \frac{du}{dx},$ 14. $\frac{d(\csc u)}{dx} = -\cot u \csc u \frac{du}{dx},$ 16. $\frac{d(\arccos u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx},$ 18. $\frac{d(\operatorname{arccot} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx},$ 20. $\frac{d(\operatorname{arccsc} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx},$ 22. $\frac{d(\cosh u)}{dx} = \sinh u \frac{du}{dx},$ 24. $\frac{d(\coth u)}{dx} = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx},$ 26. $\frac{d(\operatorname{csch} u)}{dx} = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx},$ 28. $\frac{d(\operatorname{arccosh} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ 30. $\frac{d(\operatorname{arccoth} u)}{dx} = \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{dx},$ 32. $\frac{d(\operatorname{arccsch} u)}{dx} = \frac{-1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}.$ <p>Integrals:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int cu \, dx = c \int u \, dx,$ 2. $\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx,$ 3. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1,$ 4. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x,$ 5. $\int e^x \, dx = e^x,$ 6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,$ 7. $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx,$ 8. $\int \sin x \, dx = -\cos x,$ 9. $\int \cos x \, dx = \sin x,$ 10. $\int \tan x \, dx = -\ln \cos x ,$ 11. $\int \cot x \, dx = \ln \cos x ,$ 12. $\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x ,$ 13. $\int \csc x \, dx = \ln \csc x + \cot x ,$ 14. $\int \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0,$
<p>Let $N(x)$ and $D(x)$ be polynomial functions of x. We can break down $N(x)/D(x)$ using partial fraction expansion. First, if the degree of N is greater than or equal to the degree of D, divide N by D, obtaining</p> $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{N'(x)}{D(x)},$ <p>where the degree of N' is less than that of D. Second, factor $D(x)$. Use the following rules: For a non-repeated factor:</p> $\frac{N(x)}{(x-a)D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{N'(x)}{D(x)},$ <p>where</p> $A = \left[\frac{N(x)}{D(x)} \right]_{x=a}.$ <p>For a repeated factor:</p> $\frac{N(x)}{(x-a)^m D(x)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k}{(x-a)^{m-k}} + \frac{N'(x)}{D(x)},$ <p>where</p> $A_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{N(x)}{D(x)} \right) \right]_{x=a}.$ <p>The reasonable man adapts himself to the world; the unreasonable persists in trying to adapt the world to himself. Therefore all progress depends on the unreasonable. – George Bernard Shaw</p>	

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Calculus Cont.

15. $\int \arccos \frac{x}{a} dx = \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0,$
16. $\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2), \quad a > 0,$
17. $\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2a} (ax - \sin(ax) \cos(ax)),$
18. $\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2a} (ax + \sin(ax) \cos(ax)),$
19. $\int \sec^2 x dx = \tan x,$
20. $\int \csc^2 x dx = -\cot x,$
21. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
22. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,$
23. $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
24. $\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
25. $\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
26. $\int \csc^n x dx = -\frac{\cot x \csc^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
27. $\int \sinh x dx = \cosh x, \quad 28. \int \cosh x dx = \sinh x,$
29. $\int \tanh x dx = \ln |\cosh x|, \quad 30. \int \coth x dx = \ln |\sinh x|, \quad 31. \int \operatorname{sech} x dx = \arctan \sinh x, \quad 32. \int \operatorname{csch} x dx = \ln |\tanh \frac{x}{2}|,$
33. $\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2}x, \quad 34. \int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) + \frac{1}{2}x, \quad 35. \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x,$
36. $\int \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, \quad a > 0,$
37. $\int \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |a^2 - x^2|,$
38. $\int \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{if } \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} > 0 \text{ and } a > 0, \\ x \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{if } \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} < 0 \text{ and } a > 0, \end{cases}$
39. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right), \quad a > 0,$
40. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
41. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
42. $\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
43. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
44. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, \quad 45. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}},$
46. $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{a^2 \pm x^2} \right|,$
47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|, \quad a > 0,$
48. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a+bx} \right|,$
49. $\int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2},$
50. $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx,$
51. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0,$
52. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$
53. $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2},$
54. $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
55. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$
56. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2},$
57. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
58. $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|,$
59. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|}, \quad a > 0,$
60. $\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2},$
61. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}} \right|,$

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Calculus Cont.

- 62.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|}, \quad a > 0,$ **63.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x},$
64. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2},$ **65.** $\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4} dx = \mp \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{3a^2 x^3},$
66. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|, & \text{if } b^2 > 4ac, \\ \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, & \text{if } b^2 < 4ac, \end{cases}$
67. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right|, & \text{if } a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, & \text{if } a < 0, \end{cases}$
68. $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ax - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$
69. $\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$
70. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right|, & \text{if } c > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}}, & \text{if } c < 0, \end{cases}$
71. $\int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} dx = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}a^2)(x^2 + a^2)^{3/2},$
72. $\int x^n \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x^n \cos(ax) + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos(ax) dx,$
73. $\int x^n \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x^n \sin(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin(ax) dx,$
74. $\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,$
75. $\int x^n \ln(ax) dx = x^{n+1} \left(\frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right),$
76. $\int x^n (\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln ax)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln ax)^{m-1} dx.$

$$\begin{array}{llll}
x^1 & x^1 & = & x^{\bar{1}} \\
x^2 & x^2 + x^1 & = & x^{\bar{2}} - x^{\bar{1}} \\
x^3 & x^3 + 3x^2 + x^1 & = & x^{\bar{3}} - 3x^{\bar{2}} + x^{\bar{1}} \\
x^4 & x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x^1 & = & x^{\bar{4}} - 6x^{\bar{3}} + 7x^{\bar{2}} - x^{\bar{1}} \\
x^5 & x^5 + 15x^4 + 25x^3 + 10x^2 + x^1 & = & x^{\bar{5}} - 15x^{\bar{4}} + 25x^{\bar{3}} - 10x^{\bar{2}} + x^{\bar{1}} \\
x^{\bar{1}} & x^1 & x^{\bar{1}} & x^1 \\
x^{\bar{2}} & x^2 + x^1 & x^{\bar{2}} & x^2 - x^1 \\
x^{\bar{3}} & x^3 + 3x^2 + 2x^1 & x^{\bar{3}} & x^3 - 3x^2 + 2x^1 \\
x^{\bar{4}} & x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1 & x^{\bar{4}} & x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x^1 \\
x^{\bar{5}} & x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x^1 & x^{\bar{5}} & x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x^1
\end{array}$$

Finite Calculus

Difference, shift operators:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\mathrm{E} f(x) = f(x+1).$$

Fundamental Theorem:

$$f(x) = \Delta F(x) \Leftrightarrow \sum f(x) \delta x = F(x) + C.$$

$$\sum_a^b f(x) \delta x = \sum_{i=a}^{b-1} f(i).$$

Differences:

$$\Delta(cu) = c\Delta u, \quad \Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v,$$

$$\Delta(uv) = u\Delta v + \mathrm{E} v \Delta u,$$

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1},$$

$$\Delta(H_x) = x^{-1}, \quad \Delta(2^x) = 2^x,$$

$$\Delta(c^x) = (c-1)c^x, \quad \Delta(\binom{x}{m}) = \binom{x}{m-1}.$$

Sums:

$$\sum cu \delta x = c \sum u \delta x,$$

$$\sum(u+v) \delta x = \sum u \delta x + \sum v \delta x,$$

$$\sum u \Delta v \delta x = uv - \sum \mathrm{E} v \Delta u \delta x,$$

$$\sum x^n \delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \sum x^{-1} \delta x = H_x,$$

$$\sum c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1}, \quad \sum \binom{x}{m} \delta x = \binom{x}{m+1}.$$

Falling Factorial Powers:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1) \cdots (x-n+1), \quad n > 0,$$

$$x^{\underline{0}} = 1,$$

$$x^{\bar{n}} = \frac{1}{(x+1) \cdots (x+|n|)}, \quad n < 0,$$

$$x^{\underline{n+m}} = x^{\underline{m}} (x-m)^{\underline{n}}.$$

Rising Factorial Powers:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1), \quad n > 0,$$

$$x^{\overline{0}} = 1,$$

$$x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x-1) \cdots (x-|n|)}, \quad n < 0,$$

$$x^{\overline{n+m}} = x^{\overline{m}} (x+m)^{\overline{n}}.$$

Conversion:

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}}$$

$$= 1/(x+1)^{\overline{-n}},$$

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^{\underline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}$$

$$= 1/(x-1)^{\underline{-n}},$$

$$x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}},$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k,$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Series

Taylor's series:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

Expansions:

$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} x^i,$
$\frac{1}{1-cx}$	$= 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i,$
$\frac{1}{1-x^n}$	$= 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} x^{ni},$
$\frac{x}{(1-x)^2}$	$= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} ix^i,$
$x^k \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1-x} \right)$	$= x + 2^nx^2 + 3^nx^3 + 4^nx^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i,$
e^x	$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i},$
$\ln \frac{1}{1-x}$	$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i},$
$\sin x$	$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$
$\cos x$	$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!},$
$\tan^{-1} x$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)},$
$(1+x)^n$	$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$
$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$	$= 1 + (n+1)x + \binom{n+2}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+n}{i} x^i,$
$\frac{x}{e^x - 1}$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!},$
$\frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$	$= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} x^i,$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$	$= 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} x^i,$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^n$	$= 1 + (2+n)x + \binom{4+n}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i+n}{i} x^i,$
$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$	$= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i,$
$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{1-x} \right)^2$	$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{H_{i-1} x^i}{i},$
$\frac{x}{1-x-x^2}$	$= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i,$
$\frac{F_n x}{1 - (F_{n-1} + F_{n+1})x - (-1)^n x^2}$	$= F_n x + F_{2n} x^2 + F_{3n} x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} F_{ni} x^i.$

Ordinary power series:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Exponential power series:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}.$$

Dirichlet power series:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^x}.$$

Binomial theorem:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Difference of like powers:

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

For ordinary power series:

$$\alpha A(x) + \beta B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i,$$

$$x^k A(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i,$$

$$\frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i,$$

$$A(cx) = \sum_{i=0}^{\infty} c^i a_i x^i,$$

$$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i,$$

$$xA'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i,$$

$$\int A(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{i} x^i,$$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} x^{2i},$$

$$\frac{A(x) - A(-x)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i+1}.$$

Summation: If $b_i = \sum_{j=0}^i a_j$ then

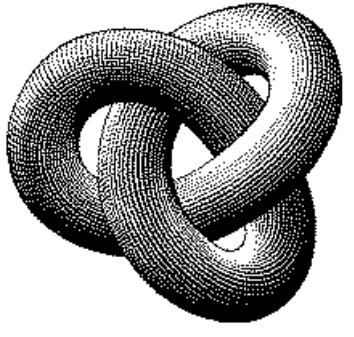
$$B(x) = \frac{1}{1-x} A(x).$$

Convolution:

$$A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i.$$

God made the natural numbers;
all the rest is the work of man.
— Leopold Kronecker

Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Series	Escher's Knot																																																																																																				
<p>Expansions:</p> $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (H_{n+i} - H_n) \binom{n+i}{i} x^i,$ $x^{\frac{n}{k}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$ $\left(\ln \frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \frac{n! x^i}{i!},$ $\tan x = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)B_{2i}x^{2i-1}}{(2i)!},$ $\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i^x},$ $\zeta(x) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-x}},$ $\zeta^2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(i)}{i^x} \quad \text{where } d(n) = \sum_{d n} 1,$ $\zeta(x)\zeta(x-1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S(i)}{i^x} \quad \text{where } S(n) = \sum_{d n} d,$ $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n} }{(2n)!} \pi^{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$ $\frac{x}{\sin x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(4^i - 2)B_{2i}x^{2i}}{(2i)!},$ $\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(2i+n-1)!}{i!(n+i)!} x^i,$ $e^x \sin x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i/2} \sin \frac{i\pi}{4}}{i!} x^i,$ $\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4i)!}{16^i \sqrt{2}(2i)!(2i+1)!} x^i,$ $\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4^i i!^2}{(i+1)(2i+1)!} x^{2i}.$																																																																																																					
	Stieltjes Integration																																																																																																				
	<p>If G is continuous in the interval $[a, b]$ and F is nondecreasing then</p> $\int_a^b G(x) dF(x)$ <p>exists. If $a \leq b \leq c$ then</p> $\int_a^c G(x) dF(x) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_b^c G(x) dF(x).$ <p>If the integrals involved exist</p> $\int_a^b (G(x) + H(x)) dF(x) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_a^b H(x) dF(x),$ $\int_a^b G(x) d(F(x) + H(x)) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_a^b G(x) dH(x),$ $\int_a^b c \cdot G(x) dF(x) = \int_a^b G(x) d(c \cdot F(x)) = c \int_a^b G(x) dF(x),$ $\int_a^b G(x) dF(x) = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b F(x) dG(x).$																																																																																																				
<p>Cramer's Rule</p> <p>If we have equations:</p> $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$ $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n$ <p>Let $A = (a_{i,j})$ and B be the column matrix (b_i). Then there is a unique solution iff $\det A \neq 0$. Let A_i be A with column i replaced by B. Then</p> $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$	<p>Fibonacci Numbers</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>00</td><td>47</td><td>18</td><td>76</td><td>29</td><td>93</td><td>85</td><td>34</td><td>61</td><td>52</td></tr> <tr><td>86</td><td>11</td><td>57</td><td>28</td><td>70</td><td>39</td><td>94</td><td>45</td><td>02</td><td>63</td></tr> <tr><td>95</td><td>80</td><td>22</td><td>67</td><td>38</td><td>71</td><td>49</td><td>56</td><td>13</td><td>04</td></tr> <tr><td>59</td><td>96</td><td>81</td><td>33</td><td>07</td><td>48</td><td>72</td><td>60</td><td>24</td><td>15</td></tr> <tr><td>73</td><td>69</td><td>90</td><td>82</td><td>44</td><td>17</td><td>58</td><td>01</td><td>35</td><td>26</td></tr> <tr><td>68</td><td>74</td><td>09</td><td>91</td><td>83</td><td>55</td><td>27</td><td>12</td><td>46</td><td>30</td></tr> <tr><td>37</td><td>08</td><td>75</td><td>19</td><td>92</td><td>84</td><td>66</td><td>23</td><td>50</td><td>41</td></tr> <tr><td>14</td><td>25</td><td>36</td><td>40</td><td>51</td><td>62</td><td>03</td><td>77</td><td>88</td><td>99</td></tr> <tr><td>21</td><td>32</td><td>43</td><td>54</td><td>65</td><td>06</td><td>10</td><td>89</td><td>97</td><td>78</td></tr> <tr><td>42</td><td>53</td><td>64</td><td>05</td><td>16</td><td>20</td><td>31</td><td>98</td><td>79</td><td>87</td></tr> </table> <p>Definitions:</p> $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad F_0 = F_1 = 1,$ $F_{-i} = (-1)^{i-1} F_i,$ $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^i - \hat{\phi}^i),$ <p>Cassini's identity: for $i > 0$:</p> $F_{i+1}F_{i-1} - F_i^2 = (-1)^i.$ <p>Additive rule:</p> $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n,$ $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n.$ <p>Calculation by matrices:</p> $\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$	00	47	18	76	29	93	85	34	61	52	86	11	57	28	70	39	94	45	02	63	95	80	22	67	38	71	49	56	13	04	59	96	81	33	07	48	72	60	24	15	73	69	90	82	44	17	58	01	35	26	68	74	09	91	83	55	27	12	46	30	37	08	75	19	92	84	66	23	50	41	14	25	36	40	51	62	03	77	88	99	21	32	43	54	65	06	10	89	97	78	42	53	64	05	16	20	31	98	79	87
00	47	18	76	29	93	85	34	61	52																																																																																												
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63																																																																																												
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04																																																																																												
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15																																																																																												
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26																																																																																												
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30																																																																																												
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41																																																																																												
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99																																																																																												
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78																																																																																												
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87																																																																																												
<p>Improvement makes strait roads, but the crooked roads without Improvement, are roads of Genius. – William Blake (The Marriage of Heaven and Hell)</p>	<p>The Fibonacci number system: Every integer n has a unique representation</p> $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m},$ <p>where $k_i \geq k_{i+1} + 2$ for all i, $1 \leq i < m$ and $k_m \geq 2$.</p>																																																																																																				



Toggle Tab moves focus

File management

Ctrl+M	Toggle Tab moves focus
Search and replace	
Ctrl+F	Find
Ctrl+H	Replace
F3 / Shift+F3	Find next/previous
Alt+Enter	Select all occurrences of Find match
Ctrl+D	Add selection to next Find match
Ctrl+K Ctrl+W	Move last selection to next Find match
Alt+C / R / W	Toggle case-sensitive / regex / whole word
Multi-cursor and selection	
Alt+Click	Insert cursor
Ctrl+Alt+ 1 / 1	Insert cursor above / below
Ctrl+U	Undo last cursor operation
Shift+Alt+I	Insert cursor at end of each line selected
Ctrl+L	Select current line
Ctrl+Shift+L	Select all occurrences of current selection
Ctrl+F2	Select all occurrences of current word
Shift+Alt+→	Expand selection
Shift+Alt+←	Shrink selection
Shift+Alt+ (drag mouse)	Column (box) selection
Ctrl+Shift+Alt + (arrow key)	Column (box) selection
Ctrl+Shift+Alt +PgUp/PgDn	Column (box) selection page up/down
Rich languages editing	
Ctrl+Space, Ctrl+I	Trigger suggestion
Ctrl+Shift+Space	Trigger parameter hints
Shift+Alt+F	Format document
Ctrl+K Ctrl+F	Format selection
F12	Go to Definition
Alt+F12	Peek Definition
Ctrl+K F12	Open Definition to the side
Ctrl+.	Quick Fix
Shift+F12	Show References
F2	Rename Symbol
Ctrl+K Ctrl+X	Trim trailing whitespace
Ctrl+K M	Change file language
Navigation	
Ctrl+T	Show all Symbols
Ctrl+G	Go to Line...
Ctrl+P	Go to File...
Ctrl+Shift+O	Go to Symbol...
Ctrl+Shift+M	Show Problems panel
F8	Go to next error or warning
Shift+F8	Navigate editor group history
Ctrl+Shift+Tab	Move active editor group left/right
Alt+ ← / →	Move back / forward
Editor management	
Ctrl+`	Show integrated terminal
Ctrl+Shift+`	Create new terminal
Ctrl+C	Copy selection
Ctrl+V	Paste into active terminal
Ctrl+↑ / ↓	Scroll up/down
Shift+PgUp / PgDn	Scroll page up/down
Ctrl+Home / End	Scroll to top/bottom
Other operating systems' keyboard shortcuts and additional unassigned shortcuts available at aka.ms/vscodetkeybindings	



Multi-cursor and selection

Editor management

General

Basic editing	
Ctrl+Shift+P	Show Command Palette
Ctrl+P	Quick Open, Go to File...
Ctrl+Shift+N	New window/instance
Ctrl+W	Close window/instance
Ctrl+,	User Settings
Ctrl+K Ctrl+S	Keyboard Shortcuts
Rich languages editing	
Ctrl+Space, Ctrl+I	Trigger suggestion
Ctrl+Shift+Space	Trigger parameter hints
Ctrl+Shift+I	Format document
Ctrl+K Ctrl+F	Format selection
F12	Go to Definition
Ctrl+Shift+F10	Peek Definition
Ctrl+K F12	Open Definition to the side
Ctrl+,	Quick Fix
Shift+F12	Show References
F2	Rename Symbol
Ctrl+K Ctrl+X	Trim trailing whitespace
Ctrl+K M	Change file language

Display

F11	Shift+Alt+O	Toggle full screen
Ctrl+ / -	Zoom in/out	Toggle editor layout (horizontal/vertical)
Ctrl+B	Toggle Sidebar visibility	Show Explorer / Toggle focus
Ctrl+Shift+E	Show Search	Show Search
Ctrl+Shift+F	Show Source Control	Show Source Control
Ctrl+Shift+G	Show Debug	Show Debug
Ctrl+Shift+D	Show Extensions	Show Extensions
Ctrl+Shift+X	Replace in files	Replace in files
Ctrl+Shift+H	Toggle Search details	Toggle Search details
Ctrl+Shift+J	Open new command prompt/terminal	Open new command prompt/terminal
Ctrl+Shift+C	Show Output panel	Show Output panel
Ctrl+K Ctrl+H	Open Markdown preview	Open Markdown preview
Ctrl+Shift+V	Open Markdown preview to the side	Open Markdown preview to the side
Ctrl+K V	Zen Mode (Esc Esc to exit)	Zen Mode (Esc Esc to exit)
Ctrl+K Z		
Search and replace		
Ctrl+F	Find	Find
Ctrl+H	Replace	Replace
F3 / Shift+F3	Find next/previous	Find next/previous
Alt+Enter	Select all occurrences of Find match	Select all occurrences of Find match
Ctrl+D	Add selection to next Find match	Add selection to next Find match
Ctrl+K Ctrl+D	Move last selection to next Find match	Move last selection to next Find match
Navigation		
Ctrl+T	Show all Symbols	Show all Symbols
Ctrl+G	Go to Line...	Go to Line...
Ctrl+P	Go to File...	Go to File...
Ctrl+Shift+O	Go to Symbol...	Go to Symbol...
Ctrl+Shift+M	Show Problems panel	Show Problems panel
F8	Go to next error or warning	Go to next error or warning
Shift+F8	Go to previous error or warning	Go to previous error or warning
Ctrl+Shift+Tab	Navigate editor group history	Navigate editor group history
Ctrl+Alt+-	Go back	Go back
Ctrl+Shift+-	Go forward	Go forward
Ctrl+M	Toggle Tab moves focus	Toggle Tab moves focus

File management

Ctrl+N	New File
Ctrl+O	Open File...
Ctrl+S	Save
Ctrl+Shift+S	Save As...
Ctrl+W	Close
Ctrl+K Ctrl+W	Close All
Ctrl+Shift+T	Reopen closed editor
Ctrl+K Enter	Keep preview mode editor open
Ctrl+Tab	Open next
Ctrl+Shift+Tab	Open previous
Ctrl+K P	Copy path of active file
Ctrl+K R	Reveal active file in Explorer
Ctrl+K O	Show active file in new window-instance
<hr/>	
Debug	
F9	Toggle breakpoint
F5	Start / Continue
F11 / Shift+F11	Step into/out
F10	Step over
Shift+F5	Stop
Ctrl+K Ctrl+I	Show hover
<hr/>	
Integrated terminal	
Ctrl+`	Show integrated terminal
Ctrl+Shift+`	Create new terminal
Ctrl+Shift+C	Copy selection
Ctrl+Shift+V	Paste into active terminal
Ctrl+Shift+↑ / ↓	Scroll up/down
Shift+ PgUp / PgDn	Scroll page up/down
Shift+ Home / End	Scroll to top/bottom

* The Alt+Click gesture may not work on some Linux distributions. You can change the modifier key for the Insert cursor command to Ctrl+Click with the “`editor.multiCursorModifier`” setting.



