



# All-in at the River

## Standard Code Library

Shanghai Jiao Tong University

Desprado2 fstqwq AntiLeaf

# Contents

<b>1 数学</b>	<b>1</b>	
1.1 多项式	1	
1.1.1 FFT	1	
1.1.2 NTT	1	
1.1.3 任意模数卷积(MTT, 毛梯梯)	2	
1.1.4 多项式操作	3	
1.1.5 更优秀的多项式多点求值	5	
1.1.6 多项式快速插值	6	
1.1.7 拉格朗日反演(多项式复合逆)	8	
1.1.8 分治FFT	8	
1.1.9 半在线卷积	8	
1.1.10 常系数齐次线性递推 $O(k \log k \log n)$	8	
1.1.11 应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘	9	
1.2 插值	9	
1.2.1 牛顿插值	9	
1.2.2 拉格朗日(Lagrange)插值	10	
1.3 FWT快速沃尔什变换	10	
1.3.1 三行FWT	10	
1.4 线性代数	10	
1.4.1 矩阵乘法	10	
1.4.2 高斯消元	10	
1.4.3 行列式取模	11	
1.4.4 线性基(消成对角)	11	
1.4.5 线性代数知识	11	
1.4.6 矩阵树定理, BEST定理	11	
1.5 Berlekamp-Massey最小递推式	11	
1.5.1 优化矩阵快速幂DP	12	
1.5.2 求矩阵最小多项式	12	
1.5.3 求稀疏矩阵的行列式	12	
1.5.4 求稀疏矩阵的秩	12	
1.5.5 解稀疏方程组	12	
1.6 单纯形	13	
1.6.1 线性规划对偶原理	13	
1.7 博弈论	14	
1.7.1 SG定理	14	
1.7.2 纳什均衡	14	
1.7.3 经典博弈	14	
1.7.4 例题	14	
1.8 自适应Simpson积分	14	
1.9 常见数列	14	
1.9.1 斐波那契数 卢卡斯数	14	
1.9.2 伯努利数, 自然数幂次和	15	
1.9.3 分拆数	15	
1.9.4 斯特林数	15	
1.9.5 贝尔数	16	
1.9.6 欧拉数(Eulerian Number)	16	
1.9.7 卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数	16	
1.10 常用公式及结论	17	
1.10.1 方差	17	
1.10.2 min-max反演	17	
1.10.3 单位根反演(展开整除条件 $[n k]$ )	17	
1.10.4 康托展开(排列的排名)	17	
1.10.5 连通图计数	17	
1.10.6 线性齐次线性常系数递推求通项	17	
1.11 常用生成函数变换	17	
<b>2 数论</b>	<b>18</b>	
2.1 $O(n)$ 预处理逆元	18	
2.2 线性筛	18	
2.3 杜教筛	18	
2.4 Powerful Number筛	18	
2.5 洲阁筛	19	
2.6 Miller-Rabin	20	
2.7 Pollard's Rho	20	
2.8 快速阶乘算法	21	
2.9 扩展欧几里德	21	
2.9.1 求通解的方法	21	
2.9.2 类欧几里德算法(直线下整点个数)	21	
2.10 中国剩余定理	21	
2.10.1 ex-CRT	21	
2.11 原根 阶	22	
2.12 常用数论公式	22	
2.12.1 莫比乌斯反演	22	
2.12.2 降幂公式	22	
2.12.3 其他常用公式	22	
<b>3 图论</b>	<b>23</b>	
3.1 最小生成树	23	
3.1.1 Boruvka算法	23	
3.1.2 动态最小生成树	23	
3.1.3 最小树形图	24	
3.1.4 Steiner Tree 斯坦纳树	25	
3.1.5 最小直径生成树	26	
3.2 最短路	27	
3.2.1 Dijkstra	27	
3.2.2 Johnson算法(负权图多源最短路)	27	
3.2.3 $k$ 短路	27	
3.3 Tarjan算法	28	
3.3.1 强连通分量	28	
3.3.2 割点 点双	28	
3.3.3 桥 边双	29	
3.4 仙人掌	29	
3.4.1 仙人掌DP	29	
3.5 二分图	30	
3.5.1 匈牙利	30	
3.5.2 Hopcroft-Karp二分图匹配	30	
3.5.3 KM二分图最大权匹配	31	
3.5.4 二分图原理	32	
3.6 一般图匹配	32	
3.6.1 高斯消元	32	
3.6.2 带花树	33	
3.6.3 带权带花树	34	
3.6.4 原理	36	
3.7 支配树	36	
3.8 2-SAT	37	
3.9 最大流	37	
3.9.1 Dinic	37	
3.9.2 ISAP	38	
3.9.3 HLPP 最高标号预流推进	38	
3.10 费用流	39	
3.10.1 SPFA费用流	39	
3.10.2 Dijkstra费用流	40	
3.11 网络流原理	41	
3.11.1 最大流	41	
3.11.2 最小割	41	
3.11.3 费用流	41	
3.11.4 上下界网络流	41	
3.11.5 常见建图方法	41	
3.11.6 例题	41	
3.12 Prüfer序列	41	
3.13 弦图相关	42	
<b>4 数据结构</b>	<b>43</b>	
4.1 线段树	43	
4.1.1 非递归线段树	43	
4.1.2 线段树维护矩形并	43	
4.1.3 历史和	44	
4.2 陈丹琦分治	45	

4.2.1 动态图连通性(分治并查集) . . . . .	45	6 动态规划 . . . . .	<b>76</b>
4.2.2 四维偏序 . . . . .	46	6.1 决策单调性 $O(n \log n)$ . . . . .	76
4.3 整体二分 . . . . .	46		
4.4 平衡树 . . . . .	47	7 计算几何 . . . . .	<b>77</b>
4.4.1 Treap . . . . .	47	7.1 Delaunay三角剖分 . . . . .	77
4.4.2 无旋Treap/可持久化Treap . . . . .	48		
4.4.3 Splay . . . . .	49		
4.5 树链剖分 . . . . .	49	8 杂项 . . . . .	<b>80</b>
4.5.1 动态树形DP(最大权独立集) . . . . .	49	8.1 $O(1)$ 快速乘 . . . . .	80
4.6 树分治 . . . . .	51	8.2 Kahan求和算法(减少浮点数累加的误差) . . . . .	80
4.6.1 动态树分治 . . . . .	51	8.3 Python Decimal . . . . .	80
4.6.2 紫荆花之恋 . . . . .	52	8.4 $O(n^2)$ 高精度 . . . . .	80
4.7 LCT动态树 . . . . .	55	8.5 笛卡尔树 . . . . .	83
4.7.1 不换根(弹飞绵羊) . . . . .	55	8.6 GarsiaWachs算法( $O(n \log n)$ 合并石子) . . . . .	83
4.7.2 换根/维护生成树 . . . . .	55	8.7 常用NTT素数及原根 . . . . .	83
4.7.3 维护子树信息 . . . . .	57	8.8 xorshift . . . . .	83
4.7.4 模板题:动态QTREE4 . . . . .	58	8.9 枚举子集 . . . . .	84
4.8 K-D树 . . . . .	60	8.10 STL . . . . .	84
4.8.1 动态K-D树(定期重构) . . . . .	60	8.10.1 vector . . . . .	84
4.9 LCA最近公共祖先 . . . . .	61	8.10.2 list . . . . .	84
4.9.1 Tarjan LCA $O(n + m)$ . . . . .	61	8.10.3 unordered_set/map . . . . .	84
4.10 虚树 . . . . .	61	8.11 Public Based DataStructure(PB_DS) . . . . .	84
4.11 长链剖分 . . . . .	63	8.11.1 哈希表 . . . . .	84
4.11.1 梯子剖分 . . . . .	63	8.11.2 堆 . . . . .	84
4.12 堆 . . . . .	64	8.11.3 平衡树 . . . . .	84
4.12.1 左偏树 . . . . .	64	8.12 rope . . . . .	85
4.12.2 二叉堆 . . . . .	64	8.13 其他C++相关 . . . . .	85
4.13 莫队 . . . . .	64	8.13.1 <cmath> . . . . .	85
4.13.1 莫队二次离线 . . . . .	64	8.13.2 <algorithm> . . . . .	85
4.13.2 带修莫队在线化 $O(n^{\frac{5}{3}})$ . . . . .	66	8.13.3 std::tuple . . . . .	85
4.13.3 莫队二次离线 在线化 $O((n + m)\sqrt{n})$ . . . . .	66	8.13.4 <complex> . . . . .	85
4.14 常见根号思路 . . . . .	67	8.14 一些游戏 . . . . .	85
<b>5 字符串</b> . . . . .	<b>68</b>	8.14.1 炉石传说 . . . . .	85
5.1 KMP . . . . .	68	8.15 OEIS . . . . .	85
5.1.1 ex-KMP . . . . .	68	8.15.1 计数相关 . . . . .	85
5.2 AC自动机 . . . . .	68	8.15.2 线性递推数列 . . . . .	86
5.3 后缀数组 . . . . .	69	8.15.3 数论相关 . . . . .	86
5.3.1 倍增 . . . . .	69	8.15.4 其他 . . . . .	86
5.3.2 SA-IS . . . . .	69	8.16 编译选项 . . . . .	86
5.3.3 SAMSA . . . . .	70	8.17 注意事项 . . . . .	87
5.4 后缀平衡树 . . . . .	71	8.17.1 常见下毒手法 . . . . .	87
5.5 后缀自动机 . . . . .	71	8.17.2 场外相关 . . . . .	87
5.5.1 广义后缀自动机 . . . . .	71	8.17.3 做题策略与心态调节 . . . . .	87
5.5.2 区间本质不同子串计数 . . . . .	72	8.18 附录: VScode相关 . . . . .	87
5.6 回文树 . . . . .	72	8.18.1 插件 . . . . .	87
5.6.1 广义回文树 . . . . .	73	8.18.2 设置选项 . . . . .	87
5.7 Manacher马拉车 . . . . .	74	8.18.3 快捷键 . . . . .	87
5.8 字符串原理 . . . . .	75	8.19 附录: 骂人的艺术—梁实秋 . . . . .	88
		8.20 附录: Cheat Sheet . . . . .	88

# 1 数学

## 1.1 多项式

### 1.1.1 FFT

```

1 // 使用时一定要注意double的精度是否足够(极限大概是10 ^ ↪ 14)
2
3 const double pi = acos((double)-1.);
4
5 // 手写复数类
6 // 支持加减乘三种运算
7 // += 运算符如果用的不多可以不重载
8 struct Complex {
9     double a, b; // 由于long double精度和double几乎相同,
    → 通常没有必要用long double
10
11     Complex(double a = 0., double b = 0.) : a(a), b(b)
    → {}
12
13     Complex operator + (const Complex &x) const {
14         return Complex(a + x.a, b + x.b);
15     }
16
17     Complex operator - (const Complex &x) const {
18         return Complex(a - x.a, b - x.b);
19     }
20
21     Complex operator * (const Complex &x) const {
22         return Complex(a * x.a - b * x.b, a * x.b + b * ↪ x.a);
23     }
24
25     Complex operator * (double x) const {
26         return Complex(a * x, b * x);
27     }
28
29     Complex &operator += (const Complex &x) {
30         return *this = *this + x;
31     }
32
33     Complex conj() const { // 共轭, 一般只有MTT需要用
34         return Complex(a, -b);
35     }
36 } omega[maxn], omega_inv[maxn];
37 const Complex ima = Complex(0, 1); // i = sqrt(-1)
38
39 int fft_n; // 要在主函数里初始化
40
41 // FFT初始化
42 void FFT_init(int n) {
43     fft_n = n;
44
45     for (int i = 0; i < n; i++) // 根据单位根的旋转性质
        → 可以节省计算单位根逆元的时间
        omega[i] = Complex(cos(2 * pi / n * i), sin(2 * ↪ pi / n * i));
46
47     omega_inv[0] = omega[0];
48     for (int i = 1; i < n; i++)
        omega_inv[i] = omega[n - i];
49
50     // 当然不存单位根也可以, 只不过在FFT次数较多时很可能
        → 会增大常数
51 }
52
53 // FFT主过程
54 void FFT(Complex *a, int n, int tp) {
55     for (int i = 1, j = 0, k; i < n - 1; i++) {

```

```

57         k = n;
58         do
59             j ≈ (k >= 1);
60         while (j < k);
61
62         if (i < j)
63             swap(a[i], a[j]);
64     }
65
66     for (int k = 2, m = fft_n / 2; k ≤ n; k *= 2, m /= ↪ 2)
67         for (int i = 0; i < n; i += k)
68             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
69                 Complex u = a[i + j], v = (tp > 0 ?
                    → omega : omega_inv)[m * j] * a[i + j
                    → + k / 2];
70
71                 a[i + j] = u + v;
72                 a[i + j + k / 2] = u - v;
73             }
74
75         if (tp < 0)
76             for (int i = 0; i < n; i++) {
77                 a[i].a /= n;
78                 a[i].b /= n; // 一般情况下是不需要的, 只
                    → 有MTT时才需要
79         }
80     }

```

### 1.1.2 NTT

```

1 constexpr int p = 998244353; // p为模数
2
3 int ntt_n, omega[maxn], omega_inv[maxn]; // ntt_n要在主
    → 函数里初始化
4
5 void NTT_init(int n) {
6     ntt_n = n;
7
8     int wn = qpow(3, (p - 1) / n); // 这里的3代表模数的
    → 任意一个原根
9
10    omega[0] = omega_inv[0] = 1;
11
12    for (int i = 1; i < n; i++)
13        omega_inv[n - i] = omega[i] = (long
            → long)omega[i - 1] * wn % p;
14
15
16 void NTT(int *a, int n, int tp) { // n为变换长度,
    → tp为1或-1, 表示正/逆变换
17
18     for (int i = 1, j = 0, k; i < n - 1; i++) { // → O(n)旋转算法, 原理是模拟加1
19         k = n;
20         do
21             j ≈ (k >= 1);
22         while (j < k);
23
24         if (i < j)
25             swap(a[i], a[j]);
26     }
27
28     for (int k = 2, m = ntt_n / 2; k ≤ n; k *= 2, m /= ↪ 2)
29         for (int i = 0; i < n; i += k)
30             for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
31                 int w = (tp > 0 ? omega : omega_inv)[m
                    → * j];

```

```

32     int u = a[i + j], v = (long long)w *
33         ↪ a[i + j + k / 2] % p;
34     a[i + j] = u + v;
35     if (a[i + j] ≥ p)
36         a[i + j] -= p;
37
38     a[i + j + k / 2] = u - v;
39     if (a[i + j + k / 2] < 0)
40         a[i + j + k / 2] += p;
41 }
42
43 if (tp < 0) {
44     int inv = qpow(n, p - 2);
45     for (int i = 0; i < n; i++)
46         a[i] = (long long)a[i] * inv % p;
47 }

```

### 1.1.3 任意模数卷积(MTT, 毛梯梯)

三模数NTT和直接拆系数FFT都太慢了, 不要用.

MTT的原理就是拆系数FFT, 只不过优化了做变换的次数.

考虑要对 $A(x), B(x)$ 两个多项式做DFT, 可以构造两个复多项式

$$P(x) = A(x) + iB(x) \quad Q(x) = A(x) - iB(x)$$

只需要DFT一个, 另一个DFT实际上就是前者反转再取共轭, 再利用

$$A(x) = \frac{P(x) + Q(x)}{2} \quad B(x) = \frac{P(x) - Q(x)}{2i}$$

即可还原出 $A(x), B(x)$ .

IDFT的道理更简单, 如果要对 $A(x)$ 和 $B(x)$ 做IDFT, 只需要对 $A(x) + iB(x)$ 做IDFT即可, 因为IDFT的结果必定为实数, 所以结果的实部和虚部就分别是 $A(x)$ 和 $B(x)$ .

实际上任何同时对两个实序列进行DFT, 或者同时对结果为实序列的DFT进行逆变换时都可以按照上面的方法优化, 可以减少一半的DFT次数.

```

30     FFT(c, n, -1);
31
32     for (int i = 0; i < n; i++) {
33         a[i].a = c[i].a;
34         b[i].a = c[i].b;
35     }
36 }
37
38 Complex a[2][maxn], b[2][maxn], c[3][maxn];
39 int ans[maxn];
40
41 int main() {
42     int n, m;
43     scanf("%d%d%d", &n, &m, &p);
44     n++;
45     m++;
46
47     base = (int)(sqrt(p) + 0.5);
48
49     for (int i = 0; i < n; i++) {
50         int x;
51         scanf("%d", &x);
52         x %= p;
53
54         a[1][i].a = x / base;
55         a[0][i].a = x % base;
56     }
57
58     for (int i = 0; i < m; i++) {
59         int x;
60         scanf("%d", &x);
61         x %= p;
62
63         b[1][i].a = x / base;
64         b[0][i].a = x % base;
65     }
66
67     int N = 1;
68     while (N < n + m - 1)
69         N <<= 1;
70
71     FFT_init(N);
72
73     DFT(a[0], a[1], N);
74     DFT(b[0], b[1], N);
75
76     for (int i = 0; i < N; i++)
77         c[0][i] = a[0][i] * b[0][i];
78
79     for (int i = 0; i < N; i++)
80         c[1][i] = a[0][i] * b[1][i] + a[1][i] * b[0]
81             ↪ [i];
82
83     for (int i = 0; i < N; i++)
84         c[2][i] = a[1][i] * b[1][i];
85
86     FFT(c[1], N, -1);
87     IDFT(c[0], c[2], N);
88
89     for (int j = 2; ~j; j--)
90         for (int i = 0; i < n + m - 1; i++)
91             ans[i] = ((long long)ans[i] * base + (long
92                 ↪ long)(c[j][i].a + 0.5)) % p;
93
94     // 实际上就是c[2] * base ^ 2 + c[1] * base + c[0],
95     // 这样写可以改善地址访问连续性
96
97     for (int i = 0; i < n + m - 1; i++) {
98         if (i)
99
100            ans[i] = ((long long)ans[i] * base + (long
101                ↪ long)(c[2][i].a + 0.5)) % p;
102
103    }
104
105    printf("%d\n", ans[n + m - 1]);
106
107    return 0;
108 }
```

```

1 // 常量和复数类略
2
3 const Complex ima = Complex(0, 1);
4
5 int p, base;
6
7 // FFT略
8
9 void DFT(Complex *a, Complex *b, int n) {
10     static Complex c[maxn];
11
12     for (int i = 0; i < n; i++)
13         c[i] = Complex(a[i].a, b[i].a);
14
15     FFT(c, n, 1);
16
17     for (int i = 0; i < n; i++) {
18         int j = (n - i) & (n - 1);
19
20         a[i] = (c[i] + c[j].conj() * 0.5;
21         b[i] = (c[i] - c[j].conj() * -0.5 * ima;
22     }
23
24 void IDFT(Complex *a, Complex *b, int n) {
25     static Complex c[maxn];
26
27     for (int i = 0; i < n; i++)
28         c[i] = a[i] + ima * b[i];
29
30 }
```

```

96     printf(" ");
97
98     printf("%d", ans[i]);
99
100    return 0;
101}

```

### 1.1.4 多项式操作

```

1 // A为输入, C为输出, n为所需长度且必须是2^k
2 // 多项式求逆, 要求A常数项不为0
3 void get_inv(int *A, int *C, int n) {
4     static int B[maxn];
5
6     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
7     C[0] = qpow(A[0], p - 2); // 一般常数项都是1, 直接赋
→ 值为1就可以
8
9     for (int k = 2; k <= n; k *= 2) {
10        memcpy(B, A, sizeof(int) * k);
11        memset(B + k, 0, sizeof(int) * k);
12
13        NTT(B, k * 2, 1);
14        NTT(C, k * 2, 1);
15
16        for (int i = 0; i < k * 2; i++) {
17            C[i] = (2 - (long long)B[i] * C[i]) % p *
→ C[i] % p;
18            if (C[i] < 0)
19                C[i] += p;
20        }
21
22        NTT(C, k * 2, -1);
23
24        memset(C + k, 0, sizeof(int) * k);
25    }
26
27 // 开根
28 void get_sqrt(int *A, int *C, int n) {
29     static int B[maxn], D[maxn];
30
31     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
32     C[0] = 1; // 如果不是1就要考虑二次剩余
33
34     for (int k = 2; k <= n; k *= 2) {
35        memcpy(B, A, sizeof(int) * k);
36        memset(B + k, 0, sizeof(int) * k);
37
38        get_inv(C, D, k);
39
40        NTT(B, k * 2, 1);
41        NTT(D, k * 2, 1);
42
43        for (int i = 0; i < k * 2; i++)
44            B[i] = (long long)B[i] * D[i] % p;
45
46        NTT(B, k * 2, -1);
47
48        for (int i = 0; i < k; i++)
49            C[i] = (long long)(C[i] + B[i]) * inv_2 %
→ p; // inv_2是2的逆元
50    }
51
52 // 求导
53 void get_derivative(int *A, int *C, int n) {
54     for (int i = 1; i < n; i++)

```

```

57         C[i - 1] = (long long)A[i] * i % p;
58
59     C[n - 1] = 0;
60 }
61
62 // 不定积分, 最好预处理逆元
63 void get_integrate(int *A, int *C, int n) {
64     for (int i = 1; i < n; i++)
65         C[i] = (long long)A[i - 1] * qpow(i, p - 2) %
→ p;
66
67     C[0] = 0; // 不定积分没有常数项
68 }
69
70 // 多项式ln, 要求A常数项不为0
71 void get_ln(int *A, int *C, int n) { // 通常情况下A常数
→ 项都是1
72     static int B[maxn];
73
74     get_derivative(A, B, n);
75     memset(B + n, 0, sizeof(int) * n);
76
77     get_inv(A, C, n);
78
79     NTT(B, n * 2, 1);
80     NTT(C, n * 2, 1);
81
82     for (int i = 0; i < n * 2; i++)
83         B[i] = (long long)B[i] * C[i] % p;
84
85     NTT(B, n * 2, -1);
86
87     get_integrate(B, C, n);
88
89     memset(C + n, 0, sizeof(int) * n);
90 }
91
92 // 多项式exp, 要求A没有常数项
93 // 常数很大且总代码较长, 一般来说最好替换为分治FFT
94 // 分治FFT依据: 设 $G(x) = \exp F(x)$ , 则有
95 //  $\rightarrow g_i = \sum_{k=1}^{i-1} f_{i-k} * k * g_k$ 
96 void get_exp(int *A, int *C, int n) {
97     static int B[maxn];
98
99     memset(C, 0, sizeof(int) * (n * 2));
100    C[0] = 1;
101
102    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
103        get_ln(C, B, k);
104
105    for (int i = 0; i < k; i++) {
106        B[i] = A[i] - B[i];
107        if (B[i] < 0)
108            B[i] += p;
109    }
110    (++B[0]) %= p;
111
112    NTT(B, k * 2, 1);
113    NTT(C, k * 2, 1);
114
115    for (int i = 0; i < k * 2; i++)
116        C[i] = (long long)C[i] * B[i] % p;
117
118    NTT(C, k * 2, -1);
119
120    memset(C + k, 0, sizeof(int) * k);
121 }
122
123 // 多项式k次幂, 在A常数项不为1时需要转化

```

```

124 // 常数较大且总代码较长，在时间要求不高时最好替换为暴力快
125 // →速幂
126 void get_pow(int *A, int *C, int n, int k) {
127     static int B[maxn];
128
129     get_ln(A, B, n);
130
131     for (int i = 0; i < n; i++)
132         B[i] = (long long)B[i] * k % p;
133
134     get_exp(B, C, n);
135 }
136
137 // 多项式除法，A / B，结果输出在C
138 // A的次数为n, B的次数为m
139 void get_div(int *A, int *B, int *C, int n, int m) {
140     static int f[maxn], g[maxn], gi[maxn];
141
142     if (n < m) {
143         memset(C, 0, sizeof(int) * m);
144         return;
145     }
146
147     int N = 1;
148     while (N < (n - m + 1))
149         N *= 2;
150
151     memset(f, 0, sizeof(int) * N * 2);
152     memset(g, 0, sizeof(int) * N * 2);
153     // memset(gi, 0, sizeof(int) * N);
154
155     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
156         f[i] = A[n - i - 1];
157     for (int i = 0; i < m && i < n - m + 1; i++)
158         g[i] = B[m - i - 1];
159
160     get_inv(g, gi, N);
161
162     for (int i = n - m + 1; i < N; i++)
163         gi[i] = 0;
164
165     NTT(f, N * 2, 1);
166     NTT(gi, N * 2, 1);
167
168     for (int i = 0; i < N * 2; i++)
169         f[i] = (long long)f[i] * gi[i] % p;
170
171     NTT(f, N * 2, -1);
172
173     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
174         C[i] = f[n - m - i];
175
176 // 多项式取模，余数输出到C，商输出到D
177 void get_mod(int *A, int *B, int *C, int *D, int n, int
178             m) {
179     static int b[maxn], d[maxn];
180
181     if (n < m) {
182         memcpy(C, A, sizeof(int) * n);
183
184         if (D)
185             memset(D, 0, sizeof(int) * m);
186
187         return;
188     }
189
190     get_div(A, B, d, n, m);
191
192     for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
193         D[i] = d[i];
194
195     int N = 1;
196     while (N < n)
197         N *= 2;
198
199     memcpy(b, B, sizeof(int) * m);
200
201     NTT(b, N, 1);
202     NTT(d, N, 1);
203
204     for (int i = 0; i < N; i++)
205         b[i] = (long long)d[i] * b[i] % p;
206
207     NTT(b, N, -1);
208
209     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
210         C[i] = (A[i] - b[i] + p) % p;
211
212     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
213     memset(d, 0, sizeof(int) * N);
214
215 }
216
217 // 多点求值要用的数组
218 int q[maxn], ans[maxn]; // q是要代入的各个系数, ans是求
219 // →出的值
220 int tg[25][maxn * 2], tf[25][maxn]; // 辅助数组, tg是预
221 // →处理乘积
222 // tf是项数越来越少的f, tf[0]就是原来的函数
223 void pretreat(int l, int r, int k) { // 多点求值预处理
224     static int A[maxn], B[maxn];
225
226     int *g = tg[k] + l * 2;
227
228     if (r - l + 1 ≤ 200) { // 小范围暴力, 能跑得快点
229         g[0] = 1;
230
231         for (int i = l; i ≤ r; i++) {
232             for (int j = i - l + 1; j; j--) {
233                 g[j] = (g[j - 1] - (long long)g[j] *
234                     → q[i]) % p;
235                 if (g[j] < 0)
236                     g[j] += p;
237             }
238             g[0] = (long long)g[0] * (p - q[i]) % p;
239
240         }
241
242         return;
243     }
244
245     int mid = (l + r) / 2;
246
247     pretreat(l, mid, k + 1);
248     pretreat(mid + 1, r, k + 1);
249
250     if (!k)
251         return;
252
253     int N = 1;
254     while (N ≤ r - l + 1)
255         N *= 2;
256
257     int *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr = tg[k + 1] + (mid
258         → + 1) * 2;
259
260     memset(A, 0, sizeof(int) * N);

```

```

257     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
258
259     memcpy(A, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
260     memcpy(B, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
261
262     NTT(A, N, 1);
263     NTT(B, N, 1);
264
265     for (int i = 0; i < N; i++)
266         A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
267
268     NTT(A, N, -1);
269
270     for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
271         g[i] = A[i];
272 }
273
274 void solve(int l, int r, int k) { // 多项式多点求值主过
→ 程
275     int *f = tf[k];
276
277     if (r - l + 1 <= 200) {
278         for (int i = l; i <= r; i++) {
279             int x = q[i];
280
281             for (int j = r - l; ~j; j--) {
282                 ans[i] = ((long long)ans[i] * x + f[j])
283                     → % p;
284             }
285
286             return;
287         }
288
289         int mid = (l + r) / 2;
290         int *ff = tf[k + 1], *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr =
→ tg[k + 1] + (mid + 1) * 2;
291
292         get_mod(f, gl, ff, nullptr, r - l + 1, mid - l +
→ 2);
293         solve(l, mid, k + 1);
294
295         memset(gl, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
296         memset(ff, 0, sizeof(int) * (mid - l + 1));
297
298         get_mod(f, gr, ff, nullptr, r - l + 1, r - mid +
→ 1);
299         solve(mid + 1, r, k + 1);
300
301         memset(gr, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
302         memset(ff, 0, sizeof(int) * (r - mid));
303     }
304 // f < x^n, m个询问, 询问是0-based, 当然改成1-based也很
→ 简单
305 void get_value(int *f, int *x, int *a, int n, int m) {
306     if (m <= n)
307         m = n + 1;
308     if (n < m - 1)
309         n = m - 1; // 补零方便处理
310
311     memcpy(tf[0], f, sizeof(int) * n);
312     memcpy(q, x, sizeof(int) * m);
313
314     pretreat(0, m - 1, 0);
315     solve(0, m - 1, 0);
316
317     if (a) // 如果a是nullptr, 代表不复制答案, 直接
→ 用ans数组
318     memcpy(a, ans, sizeof(int) * m);

```

319 }

### 1.1.5 更优秀的多项式多点求值

这个做法不需要写取模, 求逆也只有一次, 但是神乎其技, 完全搞不懂原理

清空和复制之类的地方容易抄错, 抄的时候要注意

```

1 int q[maxn], ans[maxn]; // q是要代入的各个系数, ans是求
→ 出的值
2 int tg[25][maxn * 2], tf[25][maxn]; // 辅助数组, tg是预
→ 处理乘积,
3 // tf是项数越来越少的f, tf[0]就是原来的函数
4
5 void pretreat(int l, int r, int k) { // 预处理
6     static int A[maxn], B[maxn];
7
8     int *g = tg[k] + l * 2;
9
10    if (r - l + 1 <= 1) { // 小范围暴力
11        g[0] = 1;
12
13        for (int i = l; i <= r; i++) {
14            for (int j = i - l + 1; j; j--) {
15                g[j] = (g[j - 1] - (long long)g[j] *
→ q[i]) % p;
16                if (g[j] < 0)
17                    g[j] += p;
18            }
19            g[0] = (long long)g[0] * (p - q[i]) % p;
20        }
21
22        reverse(g, g + r - l + 2);
23
24        return;
25    }
26
27    int mid = (l + r) / 2;
28
29    pretreat(l, mid, k + 1);
30    pretreat(mid + 1, r, k + 1);
31
32    int N = 1;
33    while (N <= r - l + 1)
34        N *= 2;
35
36    int *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr = tg[k + 1] + (mid
→ + 1) * 2;
37
38    memset(A, 0, sizeof(int) * N);
39    memset(B, 0, sizeof(int) * N);
40
41    memcpy(A, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
42    memcpy(B, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
43
44    NTT(A, N, 1);
45    NTT(B, N, 1);
46
47    for (int i = 0; i < N; i++)
48        A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
49
50    NTT(A, N, -1);
51
52    for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
53        g[i] = A[i];
54
55
56 void solve(int l, int r, int k) { // 主过程
57     static int a[maxn], b[maxn];
58

```

```

59     int *f = tf[k];
60
61     if (l == r) {
62         ans[l] = f[0];
63         return;
64     }
65
66     int mid = (l + r) / 2;
67     int *ff = tf[k + 1], *gl = tg[k + 1] + l * 2, *gr =
68     ↪ tg[k + 1] + (mid + 1) * 2;
69
70     int N = 1;
71     while (N < r - l + 2)
72         N *= 2;
73
74     memcpy(a, f, sizeof(int) * (r - l + 2));
75     memcpy(b, gr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
76     reverse(b, b + r - mid + 1);
77
78     NTT(a, N, 1);
79     NTT(b, N, 1);
80     for (int i = 0; i < N; i++)
81         b[i] = (long long)a[i] * b[i] % p;
82
83     reverse(b + 1, b + N);
84     NTT(b, N, 1);
85     int n_inv = qpow(N, p - 2);
86     for (int i = 0; i < N; i++)
87         b[i] = (long long)b[i] * n_inv % p;
88
89     for (int i = 0; i < mid - l + 2; i++)
90         ff[i] = b[i + r - mid];
91
92     memset(a, 0, sizeof(int) * N);
93     memset(b, 0, sizeof(int) * N);
94
95     solve(l, mid, k + 1);
96
97     memset(ff, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
98
99     memcpy(a, f, sizeof(int) * (r - l + 2));
100    memcpy(b, gl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
101    reverse(b, b + mid - l + 2);
102
103    NTT(a, N, 1);
104    NTT(b, N, 1);
105    for (int i = 0; i < N; i++)
106        b[i] = (long long)a[i] * b[i] % p;
107
108    reverse(b + 1, b + N);
109    NTT(b, N, 1);
110    for (int i = 0; i < N; i++)
111        b[i] = (long long)b[i] * n_inv % p;
112
113    for (int i = 0; i < r - mid + 1; i++)
114        ff[i] = b[i + mid - l + 1];
115
116    memset(a, 0, sizeof(int) * N);
117    memset(b, 0, sizeof(int) * N);
118
119    solve(mid + 1, r, k + 1);
120
121    memset(gl, 0, sizeof(int) * (mid - l + 2));
122    memset(gr, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
123    memset(ff, 0, sizeof(int) * (r - mid + 1));
124
125 // f < x^n, m个询问, θ-based
126 void get_value(int *f, int *x, int *a, int n, int m) {

```

```

127     static int c[maxn], d[maxn];
128
129     if (m ≤ n)
130         m = n + 1;
131     if (n < m - 1)
132         n = m - 1; // 补零
133
134     memcpy(q, x, sizeof(int) * m);
135     pretreat(0, m - 1, 0);
136
137     int N = 1;
138     while (N < m)
139         N *= 2;
140
141     get_inv(tg[0], c, N);
142
143     fill(c + m, c + N, 0);
144     reverse(c, c + m);
145
146     memcpy(d, f, sizeof(int) * m);
147
148     NTT(c, N * 2, 1);
149     NTT(d, N * 2, 1);
150     for (int i = 0; i < N * 2; i++)
151         c[i] = (long long)c[i] * d[i] % p;
152     NTT(c, N * 2, -1);
153
154     for (int i = 0; i < m; i++)
155         tf[0][i] = c[i + n];
156
157     solve(0, m - 1, 0);
158
159     if (a) // 如果a是nullptr, 代表不复制答案, 直接
160     ↪ 用ans数组
161         memcpy(a, ans, sizeof(int) * m);
162

```

### 1.1.6 多项式快速插值

问题: 给出 $n$ 个 $x_i$ 与 $y_i$ , 求一个 $n-1$ 次多项式满足 $F(x_i) = y_i$ . 考虑拉格朗日插值:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} y_i$$

第一步要先对每个 $i$ 求出

$$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

设

$$M(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

那么想要的是

$$\frac{M(x)}{x - x_i}$$

取 $x = x_i$ 时, 上下都为0, 使用洛必达法则, 则原式化为 $M'(x)$ . 使用分治算出 $M(x)$ , 使用多点求值即可算出每个

$$\prod_{i \neq j} (x_i - x_j) = M'(x_i)$$

设

$$v_i = \frac{y_i}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

## 第二步要求出

$$\sum_{i=1}^n v_i \prod_{i \neq j} (x - x_j)$$

使用分治. 设

$$L(x) = \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (x - x_i), \quad R(x) = \prod_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n (x - x_i)$$

则原式化为

$$\left( \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} v_i \prod_{i \neq j, j \leq \lfloor n/2 \rfloor} (x - x_j) \right) R(x) +$$

$$\left( \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n v_i \prod_{i \neq j, j > \lfloor n/2 \rfloor} (x - x_j) \right) L(x)$$

递归计算, 复杂度 $O(n \log^2 n)$

注意由于整体和局部的 $M(x)$ 都要用到，要预处理一下

```

1 int qx[maxn], qy[maxn];
2 int th[25][maxn * 2], ansf[maxn]; // th存的是各阶段
3   → 的M(x)
4 void pretreat2(int l, int r, int k) { // 预处理
5     static int A[maxn], B[maxn];
6     int *h = th[k] + l * 2;
7
8     if (l == r) {
9       h[0] = p - qx[l];
10      h[1] = 1;
11      return;
12    }
13
14    int mid = (l + r) / 2;
15
16    pretreat2(l, mid, k + 1);
17    pretreat2(mid + 1, r, k + 1);
18
19    int N = 1;
20    while (N <= r - l + 1)
21      N *= 2;
22
23    int *hl = th[k + 1] + l * 2, *hr = th[k + 1] +
24      → + 1) * 2;
25
26    memset(A, 0, sizeof(int) * N);
27    memset(B, 0, sizeof(int) * N);
28
29    memcpy(A, hl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
30    memcpy(B, hr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
31
32    NTT(A, N, 1);
33    NTT(B, N, 1);
34
35    for (int i = 0; i < N; i++)
36      A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
37
38    NTT(A, N, -1);
39
40    for (int i = 0; i <= r - l + 1; i++)
41      h[i] = A[i];
42
43 void solve2(int l, int r, int k) { // 分治
44   static int A[maxn], B[maxn], t[maxn];

```

```

46     if (l == r)
47         return;
48
49     int mid = (l + r) / 2;
50
51     solve2(l, mid, k + 1);
52     solve2(mid + 1, r, k + 1);
53
54     int *hl = th[k + 1] + l * 2, *hr = th[k + 1] + (mid
55     ↪ + 1) * 2;
56
57     int N = 1;
58
59     while (N < r - l + 1)
60         N *= 2;
61
62     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
63     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
64
65     memcpy(A, ansf + l, sizeof(int) * (mid - l + 1));
66     memcpy(B, hr, sizeof(int) * (r - mid + 1));
67
68     NTT(A, N, 1);
69     NTT(B, N, 1);
70
71     for (int i = 0; i < N; i++)
72         t[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
73
74     memset(A, 0, sizeof(int) * N);
75     memset(B, 0, sizeof(int) * N);
76
77     memcpy(A, ansf + mid + 1, sizeof(int) * (r - mid));
78     memcpy(B, hl, sizeof(int) * (mid - l + 2));
79
80     NTT(A, N, 1);
81     NTT(B, N, 1);
82
83     for (int i = 0; i < N; i++)
84         t[i] = (t[i] + (long long)A[i] * B[i]) % p;
85
86     NTT(t, N, -1);
87
88     memcpy(ansf + l, t, sizeof(int) * (r - l + 1));
89 }
90
91 // 主过程
92 // 如果x, y传nullptr表示询问已经存在了qx, qy里
93 void interpolation(int *x, int *y, int n, int *f =
94     ↪ nullptr) {
95     static int d[maxn];
96
97     if (x)
98         memcpy(qx, x, sizeof(int) * n);
99     if (y)
100        memcpy(qy, y, sizeof(int) * n);
101
102    pretreat2(0, n - 1, 0);
103
104    get_derivative(th[0], d, n + 1);
105
106    multipoint_eval(d, qx, nullptr, n, n);
107
108    for (int i = 0; i < n; i++)
109        ansf[i] = (long long)qy[i] * qpow(ans[i], p -
110        ↪ 2) % p;
111
112    solve2(0, n - 1, 0);
113
114    if (f)
115        memcpy(f, ansf, sizeof(int) * n);

```

113 }

### 1.1.7 拉格朗日反演(多项式复合逆)

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为复合逆，则有

$$[x^n] g(x) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] \left( \frac{x}{f(x)} \right)^n$$

$$[x^n] h(g(x)) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] h'(x) \left( \frac{x}{f(x)} \right)^n$$

### 1.1.8 分治FFT

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (l == r)
3         return;
4
5     int mid = (l + r) / 2;
6
7     solve(l, mid);
8
9     int N = 1;
10    while (N <= r - l + 1)
11        N *= 2;
12
13    for (int i = l; i <= mid; i++)
14        B[i - l] = (long long)A[i] * fac_inv[i] % p;
15    fill(B + mid - l + 1, B + N, 0);
16    for (int i = 0; i < N; i++)
17        C[i] = fac_inv[i];
18
19    NTT(B, N, 1);
20    NTT(C, N, 1);
21
22    for (int i = 0; i < N; i++)
23        B[i] = (long long)B[i] * C[i] % p;
24
25    NTT(B, N, -1);
26
27    for (int i = mid + 1; i <= r; i++)
28        A[i] = (A[i] + B[i - l] * 2 % p * (long
29            → long)fac[i] % p) % p;
30
31    solve(mid + 1, r);
32 }
```

### 1.1.9 半在线卷积

```

1 void solve(int l, int r) {
2     if (r <= m)
3         return;
4
5     if (r - l == 1) {
6         if (l == m)
7             f[l] = a[m];
8         else
9             f[l] = (long long)f[l] * inv[l - m] % p;
10
11     for (int i = l, t = (long long)l * f[l] % p; i
12         → ≤ n; i += l)
13         g[i] = (g[i] + t) % p;
14
15     return;
16 }
17
18     int mid = (l + r) / 2;
19
20     solve(l, mid);
21 }
```

```

21
22     if (l == 0) {
23         for (int i = 1; i < mid; i++) {
24             A[i] = f[i];
25             B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
26         }
27         NTT(A, r, 1);
28         NTT(B, r, 1);
29         for (int i = 0; i < r; i++)
30             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
31         NTT(A, r, -1);
32
33         for (int i = mid; i < r; i++)
34             f[i] = (f[i] + A[i]) % p;
35     }
36     else {
37         for (int i = 0; i < r - l; i++) {
38             A[i] = f[i];
39             for (int i = l; i < mid; i++)
40                 B[i - l] = (c[i] + g[i]) % p;
41         NTT(A, r - l, 1);
42         NTT(B, r - l, 1);
43         for (int i = 0; i < r - l; i++)
44             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
45         NTT(A, r - l, -1);
46
47         for (int i = mid; i < r; i++)
48             f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
49
50         memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
51         memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
52
53         for (int i = l; i < mid; i++) {
54             A[i - l] = f[i];
55             for (int i = 0; i < r - l; i++)
56                 B[i] = (c[i] + g[i]) % p;
57         NTT(A, r - l, 1);
58         NTT(B, r - l, 1);
59         for (int i = 0; i < r - l; i++)
60             A[i] = (long long)A[i] * B[i] % p;
61         NTT(A, r - l, -1);
62
63         for (int i = mid; i < r; i++)
64             f[i] = (f[i] + A[i - l]) % p;
65     }
66
67     memset(A, 0, sizeof(int) * (r - l));
68     memset(B, 0, sizeof(int) * (r - l));
69
70     solve(mid, r);
71 }
```

### 1.1.10 常系数齐次线性递推 $O(k \log k \log n)$

如果只有一次这个操作可以照抄，否则就开一个全局flag。

```

1 // 多项式取模，余数输出到C，商输出到D
2 void get_mod(int *A, int *B, int *C, int *D, int n, int
3 → m) {
4     static int b[maxn], d[maxn];
5     static bool flag = false;
6
7     if (n < m) {
8         memcpy(C, A, sizeof(int) * n);
9
10     if (D)
11         memset(D, 0, sizeof(int) * m);
12
13     return;
14 }
```

```

14
15     get_div(A, B, d, n, m);
16
17     if (D) { // D是商, 可以选择不要
18         for (int i = 0; i < n - m + 1; i++)
19             D[i] = d[i];
20     }
21
22     int N = 1;
23     while (N < n)
24         N *= 2;
25
26     if (!flag) {
27         memcpy(b, B, sizeof(int) * m);
28         NTT(b, N, 1);
29
30         flag = true;
31     }
32
33     NTT(d, N, 1);
34
35     for (int i = 0; i < N; i++)
36         d[i] = (long long)d[i] * b[i] % p;
37
38     NTT(d, N, -1);
39
40     for (int i = 0; i < m - 1; i++)
41         C[i] = (A[i] - d[i] + p) % p;
42
43     // memset(b, 0, sizeof(int) * N);
44     memset(d, 0, sizeof(int) * N);
45 }

// g < x^n, f是输出答案的数组
46 void pow_mod(long long k, int *g, int n, int *f) {
47     static int a[maxn], t[maxn];
48
49     memset(f, 0, sizeof(int) * (n * 2));
50
51     f[0] = a[1] = 1;
52
53     int N = 1;
54     while (N < n * 2 - 1)
55         N *= 2;
56
57     while (k) {
58         NTT(a, N, 1);
59
60         if (k & 1) {
61             memcpy(t, f, sizeof(int) * N);
62
63             NTT(t, N, 1);
64             for (int i = 0; i < N; i++)
65                 t[i] = (long long)t[i] * a[i] % p;
66             NTT(t, N, -1);
67
68             get_mod(t, g, f, NULL, n * 2 - 1, n);
69         }
70
71         for (int i = 0; i < N; i++)
72             a[i] = (long long)a[i] * a[i] % p;
73         NTT(a, N, -1);
74
75         memcpy(t, a, sizeof(int) * (n * 2 - 1));
76         get_mod(t, g, a, NULL, n * 2 - 1, n);
77         fill(a + n - 1, a + N, 0);
78
79         k >>= 1;
80     }
81
82 }

```

```

84     memset(a, 0, sizeof(int) * (n * 2));
85 }
86
87 // f_n = \sum_{i=1}^m f_{n-i} a_i
88 // f是0~m-1项的初值
89 int linear_recurrence(long long n, int m, int *f, int
90     *a) {
91     static int g[maxn], c[maxn];
92
93     memset(g, 0, sizeof(int) * (m * 2 + 1));
94
95     for (int i = 0; i < m; i++)
96         g[i] = (p - a[m - i]) % p;
97     g[m] = 1;
98
99     pow_mod(n, g, m + 1, c);
100
101    int ans = 0;
102    for (int i = 0; i < m; i++)
103        ans = (ans + (long long)c[i] * f[i]) % p;
104
105    return ans;
106 }

```

### 1.1.11 应用: $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ 快速求阶乘

问题: 求  $n! \pmod{p}$ ,  $n < p$ ,  $p$  是 NTT 模数.

考虑令  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ , 那么我们可以写出连续  $m$  个数相乘的多项式:

$$f(x) = \prod_{i=1}^m (x + i)$$

那么显然就有

$$n! = \left( \prod_{k=0}^{m-1} f(km) \right) \prod_{i=m^2+1}^n i$$

$f(x)$  的系数可以用倍增求(或者懒一点直接分治 FFT), 然后  $f(km)$  可以用多项式多点求值求出, 所以总复杂度就是  $O(\sqrt{n} \log^2 n)$ .

当然如果  $p$  不变并且多次询问的话我们只需要取一个  $m$ , 也就是预处理  $O(\sqrt{p} \log^2 p)$ , 询问  $O(\sqrt{p})$ .

## 1.2 插值

### 1.2.1 牛顿插值

牛顿插值的原理是二项式反演.

二项式反演:

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g(k) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

可以用  $e^x$  和  $e^{-x}$  的麦克劳林展开式证明.

套用二项式反演的结论即可得到牛顿插值:

$$f(n) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} r_i$$

$$r_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} f(j)$$

其中  $k$  表示  $f(n)$  的最高次项系数.

实现时可以用  $k$  次差分替代右边的式子:

```

1 for (int i = 0; i <= k; i++)
2     r[i] = f(i);
3 for (int j = 0; j < k; j++)
4     for (int i = k; i > j; i--)
5         r[i] -= r[i - 1];

```

注意到预处理 $r_i$ 的式子满足卷积形式,必要时可以用FFT优化至 $O(k \log k)$ 预处理.

### 1.2.2 拉格朗日(Lagrange)插值

$$f(x) = \sum_i f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

## 1.3 FWT快速沃尔什变换

```

// 注意FWT常数比较小, 这点与FFT/NTT不同
// 以下代码均以模质数情况为例, 其中n为变换长度, tp表示
// → 正/逆变换

// 按位或版本
void FWT_or(int *A, int n, int tp) {
    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
        for (int i = 0; i < n; i += k)
            for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
                if (tp > 0)
                    A[i + j + k / 2] = (A[i + j + k / 2] + A[i + j]) % p;
                else
                    A[i + j + k / 2] = (A[i + j] - A[i + j] + p) % p;
            }
}

// 按位与版本
void FWT_and(int *A, int n, int tp) {
    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
        for (int i = 0; i < n; i += k)
            for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
                if (tp > 0)
                    A[i + j] = (A[i + j] + A[i + j + k / 2]) % p;
                else
                    A[i + j] = (A[i + j] - A[i + j + k / 2] + p) % p;
            }
}

// 按位异或版本
void FWT_xor(int *A, int n, int tp) {
    for (int k = 2; k <= n; k *= 2)
        for (int i = 0; i < n; i += k)
            for (int j = 0; j < k / 2; j++) {
                int a = A[i + j], b = A[i + j + k / 2];
                A[i + j] = (a + b) % p;
                A[i + j + k / 2] = (a - b + p) % p;
            }

    if (tp < 0) {
        int inv = qpow(n % p, p - 2); // n的逆元, 在不取
        // 模时需要用每层除以2代替
        for (int i = 0; i < n; i++)
            A[i] = A[i] * inv % p;
    }
}

```

### 1.3.1 三行FWT

```

1 void fwt_or(int *a, int n, int tp) {
2     for (int j = 0; (1 << j) < n; j++)
3         for (int i = 0; i < n; i++)
4             if (i >> j & 1) {
5                 if (tp > 0)
6                     a[i] += a[i ^ (1 << j)];
7                 else
8                     a[i] -= a[i ^ (1 << j)];
9             }
10
11 // and自然就是or反过来
12 void fwt_and(int *a, int n, int tp) {
13     for (int j = 0; (1 << j) < n; j++)
14         for (int i = 0; i < n; i++)
15             if (!(i >> j & 1)) {
16                 if (tp > 0)
17                     a[i] += a[i | (1 << j)];
18                 else
19                     a[i] -= a[i | (1 << j)];
20             }
21
22 }
23 // xor同理

```

## 1.4 线性代数

稀疏矩阵操作参见Berlekamp-Massey算法的应用(12页).

### 1.4.1 矩阵乘法

```

1 for (int i = 1; i <= n; i++)
2     for (int k = 1; k <= n; k++)
3         for (int j = 1; j <= n; j++)
4             a[i][j] += b[i][k] * c[k][j];
5 // 通过改善内存访问连续性, 显著提升速度

```

### 1.4.2 高斯消元

**高斯-约当消元法 Gauss-Jordan** 每次选取当前行绝对值最大的数作为代表元, 在做浮点数消元时可以很好地保证精度.

```

1 void Gauss_Jordan(int A[][maxn], int n) {
2     for (int i = 1; i <= n; i++) {
3         int ii = i;
4         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
5             if (fabs(A[j][i]) > fabs(A[ii][i]))
6                 ii = j;
7
8         if (ii != i) // 这里没有判是否无解, 如果有可能无
9             // 解的话要判一下
10            for (int j = i; j <= n + 1; j++)
11                swap(A[i][j], A[ii][j]);
12
13         for (int j = 1; j <= n; j++)
14             if (j != i) // 消成对角
15                 for (int k = n + 1; k >= i; k--)
16                     A[j][k] -= A[j][i] / A[i][i] * A[i]
17                         ^ [k];
18     }
19 }

```

**解线性方程组** 在矩阵的右边加上一列表示系数即可, 如果消成上三角的话最后要倒序回代.

**求逆矩阵** 维护一个矩阵 $B$ , 初始设为 $n$ 阶单位矩阵, 在消元的同时对 $B$ 进行一样的操作, 当把 $A$ 消成单位矩阵时 $B$ 就是逆矩阵.

**行列式** 消成对角之后把代表元乘起来. 如果是任意模数, 要注意消元时每交换一次行列要取反一次.

### 1.4.3 行列式取模

```

1 int p;
2
3 int Gauss(int A[maxn][maxn], int n) {
4     int det = 1;
5
6     for (int i = 1; i <= n; i++) {
7         for (int j = i + 1; j <= n; j++)
8             while (A[j][i]) {
9                 int t = (p - A[i][i] / A[j][i]) % p;
10                for (int k = i; k <= n; k++)
11                    A[i][k] = (A[i][k] + (long
12                        ↪ long)A[j][k] * t) % p;
13
14                swap(A[i], A[j]);
15                det = (p - det) % p; // 交换一次之后行列
16                ↪ 式取负
17            }
18
19            if (!A[i][i])
20                return 0;
21
22            det = (long long)det * A[i][i] % p;
23        }
24
25    return det;
26 }
```

### 1.4.4 线性基(消成对角)

```

1 void add(unsigned long long x) {
2     for (int i = 63; i >= 0; i--)
3         if (x >> i & 1) {
4             if (b[i])
5                 x ^= b[i];
6             else {
7                 b[i] = x;
8
9                 for (int j = i - 1; j >= 0; j--)
10                    if (b[j] && (b[i] >> j & 1))
11                        b[i] ^= b[j];
12
13                 for (int j = i + 1; j < 64; j++)
14                     if (b[j] >> i & 1)
15                         b[j] ^= b[i];
16
17                 break;
18             }
19         }
20 }
```

### 1.4.5 线性代数知识

**行列式:**

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,\sigma_i}$$

**逆矩阵:**

$$B = A^{-1} \iff AB = 1$$

**代数余子式:**

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}|$$

也就是 $A$ 去掉一行一列之后的行列式.

伴随矩阵:

$$A^* = C^T$$

即代数余子式矩阵的转置.

同时我们有

$$A^* = |A|A^{-1}$$

**特征多项式:**

$$P_A(x) = \det(Ix - A)$$

**特征根:** 特征多项式的所有 $n$ 个根(可能有重根).

### 1.4.6 矩阵树定理, BEST定理

**无向图** 设图 $G$ 的基尔霍夫矩阵 $L(G)$ 等于度数矩阵减去邻接矩阵, 则 $G$ 的生成树个数等于 $L(G)$ 的任意一个代数余子式的值.

**有向图** 类似地定义 $L_{in}(G)$ 等于入度矩阵减去邻接矩阵( $i$ 指向 $j$ 有边, 则 $A_{i,j} = 1$ ),  $L_{out}(G)$ 等于出度矩阵减去邻接矩阵.

则以 $i$ 为根的内向树个数即为 $L_{out}$ 的第 $i$ 个主子式(即关于第 $i$ 行第 $i$ 列的余子式), 外向树个数即为 $L_{in}$ 的第 $i$ 个主子式.

(可以看出, 只有无向图才满足 $L(G)$ 的所有代数余子式都相等.)

**BEST定理(有向图欧拉回路计数)** 如果 $G$ 是有向欧拉图, 则 $G$ 的欧拉回路的个数等于以一个任意点为根的内/外向树个数乘以 $\prod_v (\deg(v) - 1)!$ .

并且在欧拉图里, 无论以哪个结点为根, 无论内向树还是外向树, 个数都是一样的.

另外无向图欧拉回路计数是NP问题.

## 1.5 Berlekamp-Massey最小递推式

如果要求出一个次数为 $k$ 的递推式, 则输入的数列需要至少有 $2k$ 项. 返回的内容满足 $\sum_{j=0}^{m-1} a_{i-j} c_j = 0$ , 并且 $c_0 = 1$ . 称为最小递推式. 如果不加最后的处理的话, 代码返回的结果会变成 $a_i = \sum_{j=0}^{m-1} c_{j-1} a_{i-j}$ , 有时候这样会方便接着跑递推, 需要的话就删掉最后的处理.

(实际上Berlekamp-Massey是对每个前缀都求出了递推式, 但一般没啥用.)

```

1 vector<int> berlekamp_massey(const vector<int> &a) {
2     vector<int> v, last; // v is the answer, 0-based
3     int k = -1, delta = 0;
4
5     for (int i = 0; i < (int)a.size(); i++) {
6
7         int tmp = 0;
8         for (int j = 0; j < (int)v.size(); j++)
9             tmp = (tmp + (long long)a[i - j - 1] *
10                  ↪ v[j]) % p;
11
12         if (a[i] == tmp)
13             continue;
14
15         if (k < 0) {
16             k = i;
17             delta = (a[i] - tmp + p) % p;
18             v = vector<int>(i + 1);
19
20             continue;
21         }
22
23         vector<int> u = v;
24         int val = (long long)(a[i] - tmp + p) *
25             ↪ qpow(delta, p - 2) % p;
26
27         if (v.size() < last.size() + i - k)
28             v.resize(last.size() + i - k);
```

```

27     v[i - k - 1] += val) %= p;
28
29     for (int j = 0; j < (int)last.size(); j++) {
30         v[i - k + j] = (v[i - k + j] - (long)
31             → long)val * last[j]) % p;
32         if (v[i - k + j] < 0)
33             v[i - k + j] += p;
34     }
35
36     if ((int)u.size() - i < (int)last.size() - k) {
37         last = u;
38         k = i;
39         delta = a[i] - tmp;
40         if (delta < 0)
41             delta += p;
42     }
43
44
45     for (auto &x : v) // 一般是需要最小递推式的, 所以处理
46         ← 一下
47         x = (p - x) % p;
48     v.insert(v.begin(), 1);
49
50     return v; // ∀i, ∑_{j=0}^m a_{i-j}v_j = 0
}

```

如果要求向量序列的递推式, 就把每位乘一个随机权值(或者说是乘一个随机行向量 $v^T$ )变成求数列递推式即可.

如果是矩阵序列的话就随机一个行向量 $u^T$ 和列向量 $v$ , 然后把矩阵变成 $u^T A v$ 的数列就行了.

### 1.5.1 优化矩阵快速幂DP

如果 $f_i$ 是一个向量, 并且转移是一个矩阵, 那显然 $\{f_i\}$ 是一个线性递推序列.

假设 $f_i$ 有 $n$ 维, 先暴力求出 $f_{0-2n-1}$ , 然后跑Berlekamp-Massey, 最后调用前面的快速齐次线性递推(8页)即可. (快速齐次线性递推的结果是一个序列, 某个给定初值的结果就是点乘, 所以只需要跑一次.)

如果要求 $f_m$ , 并且矩阵有 $k$ 个非零项的话, 复杂度就是 $O(nk + n \log m \log n)$ . (因为暴力求前 $2n - 1$ 个 $f_i$ 需要 $O(nk)$ 时间.)

### 1.5.2 求矩阵最小多项式

矩阵 $A$ 的最小多项式是次数最小的并且 $f(A) = 0$ 的多项式 $f$ .

实际上最小多项式就是 $\{A^i\}$ 的最小递推式, 所以直接调用Berlekamp-Massey就好了, 并且显然它的次数不超过 $n$ .

瓶颈在于求出 $A^i$ , 实际上我们只要处理 $A^i v$ 就行了, 每次对向量做递推.

假设 $A$ 有 $k$ 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$ .

### 1.5.3 求稀疏矩阵的行列式

如果能求出特征多项式, 则常数项乘上 $(-1)^n$ 就是行列式, 但是最小多项式不一定就是特征多项式.

把 $A$ 乘上一个随机对角阵 $B$ (实际上就是每行分别乘一个随机数), 则 $AB$ 的最小多项式有很大概率就是特征多项式, 最后再除掉 $\det B$ 就行了.

设 $A$ 有 $k$ 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$ .

### 1.5.4 求稀疏矩阵的秩

设 $A$ 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 首先随机一个 $n \times n$ 的对角阵 $P$ 和一个 $m \times m$ 的对角阵 $Q$ , 然后计算 $QAPAT^Q$ 的最小多项式即可.

实际上不用计算这个矩阵, 因为求最小多项式时要用它乘一个向量, 我们依次把这几个矩阵乘到向量里就行了. 答案就是最小多项式除掉所有 $x$ 因子后剩下的次数.

设 $A$ 有 $k$ 个非零项, 复杂度为 $O(kn + n^2)$ .

### 1.5.5 解稀疏方程组

**问题**  $Ax = b$ , 其中 $A$ 是一个 $n \times n$ 的满秩稀疏矩阵,  $b$ 和 $x$ 是 $1 \times n$ 的列向量,  $A, b$ 已知, 需要解出 $x$ .

**做法** 显然 $x = A^{-1}b$ . 如果我们能求出 $\{A^i b\}(i \geq 0)$ 的最小递推式 $\{r_{0-m-1}\}(m \leq n)$ , 那么就有结论

$$A^{-1}b = -\frac{1}{r_{m-1}} \sum_{i=0}^{m-2} A^i b r_{m-2-i}$$

因为 $A$ 是稀疏矩阵, 直接按定义递推出 $b \sim A^{2n-1}b$ 即可. 设 $A$ 中有 $k$ 个非零项, 则复杂度为 $O(kn + n^2)$ .

```

1 vector<int> solve_sparse_equations(const
2     → vector<tuple<int, int, int>> &A, const vector<int>
3     → &b) {
4         int n = (int)b.size(); // 0-based
5
6         vector<vector<int>> f({b});
7
8         for (int i = 1; i < 2 * n; i++) {
9             vector<int> v(n);
10            auto &u = f.back();
11
12            for (auto [x, y, z] : A)// [x, y, value]
13                v[x] = (v[x] + (long long)u[y] * z) % p;
14
15            f.push_back(v);
16        }
17
18        vector<int> w(n);
19        mt19937 gen;
20        for (auto &x : w)
21            x = uniform_int_distribution<int>(1, p - 1)
22                → (gen);
23
24        vector<int> a(2 * n);
25        for (int i = 0; i < 2 * n; i++)
26            for (int j = 0; j < n; j++)
27                a[i] = (a[i] + (long long)f[i][j] * w[j]) %
28                    → p;
29
30        auto c = berlekamp_massey(a);
31        int m = (int)c.size();
32
33        vector<int> ans(n);
34
35        for (int i = 0; i < m - 1; i++)
36            for (int j = 0; j < n; j++)
37                ans[j] = (ans[j] + (long long)c[m - 2 - i]
38                    → * f[i][j]) % p;
39
40        int inv = qpow(p - c[m - 1], p - 2);
41
42        for (int i = 0; i < n; i++)
43            ans[i] = (long long)ans[i] * inv % p;
44
45        return ans;
46    }

```

## 1.6 单纯形

```

1 const double eps = 1e-10;
2
3 double A[maxn][maxn], x[maxn];
4 int n, m, t, id[maxn * 2];
5
6 // 方便起见, 这里附上主函数
7 int main() {
8     scanf("%d%d%d", &n, &m, &t);
9
10    for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
11        scanf("%lf", &A[0][i]);
12        id[i] = i;
13    }
14
15    for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
16        for (int j = 1; j ≤ n; j++) {
17            scanf("%lf", &A[i][j]);
18
19            scanf("%lf", &A[i][0]);
20        }
21
22    if (!initialize())
23        printf("Infeasible"); // 无解
24    else if (!simplex())
25        printf("Unbounded"); // 最优解无限大
26
27    else {
28        printf("%.15lf\n", -A[0][0]);
29        if (t) {
30            for (int i = 1; i ≤ m; i++)
31                x[id[i + n]] = A[i][0];
32            for (int i = 1; i ≤ n; i++)
33                printf("%.15lf ", x[i]);
34        }
35    }
36    return 0;
37}

```

// 初始化

// 对于初始解可行的问题, 可以把初始化省略掉

```

41 bool initialize() {
42     while (true) {
43         double t = 0.0;
44         int l = 0, e = 0;
45
46         for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
47             if (A[i][0] + eps < t) {
48                 t = A[i][0];
49                 l = i;
50             }
51
52         if (!l)
53             return true;
54
55         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
56             if (A[l][i] < -eps && (!e || id[i] <
57             → id[e])) {
58                 e = i;
59
60             if (!e)
61                 return false;
62
63             pivot(l, e);
64         }
65
66 // 求解
67 bool simplex() {

```

```

68     while (true) {
69         int l = 0, e = 0;
70         for (int i = 1; i ≤ n; i++)
71             if (A[0][i] > eps && (!e || id[i] < id[e]))
72                 e = i;
73
74         if (!e)
75             return true;
76
77         double t = 1e50;
78         for (int i = 1; i ≤ m; i++)
79             if (A[i][e] > eps && A[i][0] / A[i][e] < t)
80                 → {
81                     l = i;
82                     t = A[i][0] / A[i][e];
83                 }
84
85         if (!l)
86             return false;
87
88         pivot(l, e);
89     }
90
91 // 转轴操作, 本质是在凸包上沿着一条棱移动
92 void pivot(int l, int e) {
93     swap(id[e], id[n + l]);
94     double t = A[l][e];
95     A[l][e] = 1.0;
96
97     for (int i = 0; i ≤ n; i++)
98         A[l][i] /= t;
99
100    for (int i = 0; i ≤ m; i++) {
101        if (i != l) {
102            t = A[i][e];
103            A[i][e] = 0.0;
104            for (int j = 0; j ≤ n; j++)
105                A[i][j] -= t * A[l][j];
106        }
107    }

```

### 1.6.1 线性规划对偶原理

给定一个原始线性规划:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i,$$

$$x_j \geq 0$$

定义它的对偶线性规划为:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j,$$

$$y_i \geq 0$$

用矩阵可以更形象地表示为:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Subject to} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \iff \text{Subject to} & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{x} \geq 0 & \mathbf{y} \geq 0 \end{array}$$

## 1.7 博弈论

### 1.7.1 SG定理

对于一个平等游戏，可以为每个状态定义一个SG函数。

一个状态的SG函数等于所有它能一步到达的状态的SG函数的mex，也就是最小的没有出现过的自然数。

那么所有先手必败态的SG函数为0，先手必胜态的SG函数非0。

如果有一个游戏，它由若干个独立的子游戏组成，且每次行动时只能选一个子游戏进行操作，则这个游戏的SG函数就是所有子游戏的SG函数的异或和。（比如最经典的Nim游戏，每次只能选一堆取若干个石子。）

同时操作多个子游戏的结论参见1.7.3.经典博弈(14页)。

### 1.7.2 纳什均衡

**纯策略，混合策略** 纯策略是指你一定会选择某个选项，混合策略是指你对每个选项都有一个概率分布 $p_i$ ，你会以相应的概率选择这个选项。

考虑这样的游戏：有几个人（当然也可以是两个）各自独立地做决定，然后同时公布每个人的决定，而每个人的收益和所有人的选择有关。

那么纳什均衡就是每个人都决定一个混合策略，使得在其他人都是纯策略的情况下，这个人最坏情况下（也就是说其他人的纯策略最针对他的时候）的收益是最大的。也就是说，收益函数对这个人的混合策略求一个偏导，结果是0（因为是极大值）。

纳什均衡点可能存在多个，不过在一个双人零和游戏中，纳什均衡点一定唯一存在。

### 1.7.3 经典博弈

#### 1. 阶梯博弈

台阶的每层都有一些石子，每次可以选一层（但不能是第0层），把任意一个石子移到低一层。

**结论** 奇数层的石子数量进行异或和即可。

实际上只要路径长度唯一就可以，比如在树上博弈，然后石子向根节点方向移动，那么就是奇数深度的石子数量进行异或和。

#### 2. 可以同时操作多个子游戏

如果某个游戏由若干个独立的子游戏组成，并且每次可以任意选几个（当然至少一个）子游戏进行操作，那么结论是：所有子游戏都必败时先手才会必败，否则先手必胜。

#### 3. 每次最多操作 $k$ 个子游戏(Nim-K)

如果每次最多操作 $k$ 个子游戏，结论是：把所有子游戏的SG函数写成二进制表示，如果每一位上的1个数都是 $(k+1)$ 的倍数，则先手必败，否则先手必胜。

（实际上上面一条可以看做 $k = \infty$ 的情况，也就是所有SG值都是0时才会先手必败。）

如果要求整个游戏的SG函数，就按照上面的方法每个二进制位相加后 $\text{mod}(k+1)$ ，视为 $(k+1)$ 进制数后求值即可。（未验证）

#### 4. 反Nim游戏(Anti-Nim)

和Nim游戏差不多，唯一的不同是取走最后一个石子的输。

分两种情况：

- 所有堆石子个数都是1：有偶数堆时先手必胜，否则先手必败。
- 存在某个堆石子数多于1：异或和不为0则先手必胜，否则先手必败。

当然石子个数实际上就是SG函数，所以判别条件全都改成SG函数也是一样的。

#### 5. 威佐夫博弈

有两堆石子，每次要么从一堆中取任意个，要么从两堆中都取走相同数量。也等价于两个人移动一个只能向左上方走的皇后，不能动的输。

**结论** 设两堆石子分别有 $a$ 个和 $b$ 个，且 $a < b$ ，则先手必败当且仅当 $a = \left\lfloor (b-a)\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor$ 。

#### 6. 删子树博弈

有一棵有根树，两个人轮流操作，每次可以选一个点（除了根节点）然后把它的子树都删掉，不能操作的输。

#### 结论

$$SG(u) = \text{XOR}_{v \in \text{son}_u} (SG(v) + 1)$$

#### 7. 无向图游戏

在一个无向图上的某个点上摆一个棋子，两个人轮流把棋子移动到相邻的点，并且每个点只能走一次，不能操作的输。

**结论** 如果某个点一定在最大匹配中，则先手必胜，否则先手必败。

#### 1.7.4 例题

##### 1. 黑白棋游戏

一些棋子排成一列，棋子两面分别是黑色和白色。两个人轮流行动，每次可以选择一个白色朝上的棋子，把它和它左边的所有棋子都翻转，不能行动的输。

**结论** 只需要看最左边的棋子即可，因为每次操作最左边的棋子都一定会被翻转。

二维情况同理，如果每次是把左上角的棋子全部翻转，那么就只需要看左上角的那个棋子。

## 1.8 自适应Simpson积分

Forked from fstqwq's template.

```

1 // Adaptive Simpson's method : double simpson::solve
2   ↪ (double (*f) (double), double l, double r, double
3     ↪ eps) : integrates f over (l, r) with error eps.
4
5 double area (double (*f) (double), double l, double r)
6   ↪ {
7     double m = l + (r - l) / 2;
8     return (f(l) + 4 * f(m) + f(r)) * (r - l) / 6;
9   }
10
11 double solve (double (*f) (double), double l, double r,
12   ↪ double eps, double a) {
13   double m = l + (r - l) / 2;
14   double left = area(f, l, m), right = area(f, m, r);
15   if (fabs(left + right - a) ≤ 15 * eps)
16     return left + right + (left + right - a) /
17       ↪ 15.0;
18   return solve(f, l, m, eps / 2, left) + solve(f, m,
19             ↪ r, eps / 2, right);
20 }
21
22 double solve (double (*f) (double), double l, double r,
23   ↪ double eps) {
24   return solve(f, l, r, eps, area (f, l, r));
25 }
```

## 1.9 常见数列

查表参见8.15.OEIS(85页)。

### 1.9.1 斐波那契数 卢卡斯数

**斐波那契数**  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$   
 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$

**卢卡斯数**  $L_0 = 2, L_1 = 1$

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots$

通项公式  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$F_n = \frac{\phi^n - \hat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ ,  $L_n = \phi^n + \hat{\phi}^n$

实际上有  $\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ , 所以求通项的话写一个类然后快速幂就可以同时得到两者.

快速倍增法  $F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$ ,  $F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

```

1 pair<int, int> fib(int n) { // 返回F(n)和F(n + 1)
2     if (n == 0)
3         return {0, 1};
4     auto p = fib(n >> 1);
5     int c = p.first * (2 * p.second - p.first);
6     int d = p.first * p.first + p.second * p.second;
7     if (n & 1)
8         return {d, c + d};
9     else
10        return {c, d};
11 }
```

### 1.9.2 伯努利数, 自然数幂次和

指数生成函数:  $B(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{B_i x^i}{i!} = \frac{x}{e^x - 1}$

$$B_n = [n=0] - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{B_i}{n-k+1}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} B_i = 0$$

$$S_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} i^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B_{n-i} \frac{m^{i+1}}{i+1}$$

$B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$ ,  $B_8 = -\frac{1}{30}$ , ...

(除了  $B_1 = -\frac{1}{2}$  以外, 伯努利数的奇数项都是0.)

自然数幂次和关于次数的EGF:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^n i^k}{k!} x^k \\ &= \sum_{i=0}^n e^{ix} \\ &= \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} \end{aligned}$$

### 1.9.3 分拆数

```

1 int b = sqrt(n);
2 ans[0] = tmp[0] = 1;
3
4 for (int i = 1; i <= b; ++i) {
5     for (int rep = 0; rep < 2; ++rep)
6         for (int j = i; j <= n - i * i; ++j)
7             add(tmp[j], tmp[j - i]);
8
9     for (int j = i * i; j <= n; ++j)
10        add(ans[j], tmp[j - i * i]);
11 }
12 // —
13
14 long long a[100010];
15 long long p[50005]; // 欧拉五边形数定理
16
17 int main() {
```

```

19     p[0] = 1;
20     p[1] = 1;
21     p[2] = 2;
22     int i;
23     for (i = 1; i < 50005; i++) { // 递推式系
24         a[2 * i] = i * (i * 3 - 1) / 2; // 五边形数
25         // 为1, 5, 12, 22 ... i*(3*i-1)/2
26         a[2 * i + 1] = i * (i * 3 + 1) / 2;
27     }
28     for (i = 3; i < 50005; i++) { //
29         p[n] = p[n-1] + p[n-2] - p[n-5] -
30         p[n-7] + p[12] + p[15] - ... + p[n-i*[3i-1]/2] + p[n-
31         i*[3i+1]/2]
32         p[i] = 0;
33         int j;
34         for (j = 2; a[j] <= i; j++) { // 可能为负数, 式
35             // 中加1000007
36             if (j & 2)
37                 p[i] = (p[i] + p[i - a[j]] + 1000007) %
38             // 1000007;
39             else
40                 p[i] = (p[i] - p[i - a[j]] + 1000007) %
41             // 1000007;
42     }
43     int n;
44     while (~scanf("%d", &n))
45         printf("%lld\n", p[n]);
46 }
```

### 1.9.4 斯特林数

#### 1. 第一类斯特林数

$[n]_k$  表示  $n$  个元素划分成  $k$  个轮换的方案数.

递推式:  $[n]_k = [n-1]_{k-1} + (n-1)[n-1]_k$ .

求同一行: 分治FFT  $O(n \log^2 n)$ , 或者倍增  $O(n \log n)$ (每次都是  $f(x) = g(x)g(x+d)$  的形式, 可以用  $g(x)$  反转之后做一个卷积求出后者).

$$\sum_{k=0}^n [n]_k x^k = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$$

求同一列: 用一个轮换的指数生成函数做  $k$  次幂

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n]_k \frac{x^n}{n!} = \frac{(\ln(1-x))^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \left( \frac{\ln(1-x)}{x} \right)^k$$

#### 2. 第二类斯特林数

$\{n\}_k$  表示  $n$  个元素划分成  $k$  个子集的方案数.

递推式:  $\{n\}_k = \{n-1\}_{k-1} + k \{n-1\}_k$ .

求一个: 容斥, 狗都会做

$$\{n\}_k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(k-i)^n}{(k-i)!}$$

求同一行: FFT, 狗都会做

求同一列: 指数生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n\}_k \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \frac{x^k}{k!} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^k$$

普通生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{n\}_k x^n = x^k \left( \prod_{i=1}^k (1 - ix) \right)^{-1}$$

## 3. 斯特林反演

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} g(k) \iff g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} f(k)$$

## 4. 幂的转换

上升幂与普通幂的转换

$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\bar{k}}$$

下降幂与普通幂的转换

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k = \sum_k \binom{x}{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} k!$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

另外, 多项式的点值表示的每项除以阶乘之后卷上  $e^{-x}$  乘上阶乘之后是牛顿插值表示, 或者不乘阶乘就是下降幂系数表示. 反过来的转换当然卷上  $e^x$  就行了. 原理是每次差分等价于乘以  $(1-x)$ , 展开之后用一次卷积取代多次差分.

## 5. 斯特林多项式(斯特林数关于斜线的性质)

定义:

$$\sigma_n(x) = \frac{\begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix}}{x(x-1)\dots(x-n)}$$

$\sigma_n(x)$  的最高次数是  $x^{n-1}$ . (所以作为唯一的特例,  $\sigma_0(x) = \frac{1}{x}$  不是多项式.)

斯特林多项式实际上非常神奇, 它与两类斯特林数都有关系.

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix} = n^{k+1} \sigma_k(n)$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix} = (-1)^{k+1} n^{k+1} \sigma_k(-(n-k))$$

不过它并不好求. 可以  $O(k^2)$  直接计算前几个点值然后插值, 或者如果要推式子的话可以用后面提到的二阶欧拉数.

## 1.9.5 贝尔数

$$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5,$$

$$B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

递推式:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

指数生成函数:

$$B(x) = e^{e^x - 1}$$

Touchard同余:

$$B_{n+p} \equiv (B_n + B_{n+1}) \pmod{p}, \quad p \text{ is a prime}$$

## 1.9.6 欧拉数(Eulerian Number)

## 1. 欧拉数

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ :  $n$ 个数的排列, 有  $k$ 个上升的方案数.

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = (n-k) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = n!$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{n}$$

$$k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \binom{i}{n-k}$$

## 2. 二阶欧拉数

$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ : 每个数都出现两次的多重排列, 并且每个数两次出现之间的数都比它要大. 在此前提下有  $k$ 个上升的方案数.

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = (2n-k-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + (k+1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = (2n-1)!! = \frac{(2n)^n}{2^n}$$

## 3. 二阶欧拉数与斯特林数的关系

$$\begin{Bmatrix} x \\ x-n \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+n-k-1}{2n}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ x-n \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{2n}$$

## 1.9.7 卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数

## 1. 卡特兰数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

- $n$ 个元素按顺序入栈, 出栈序列方案数
- 长为  $2n$  的合法括号序列数
- $n+1$  个叶子的满二叉树个数

递推式:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n = C_{n-1} \frac{4n-2}{n+1}$$

普通生成函数:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

扩展: 如果有  $n$  个左括号和  $m$  个右括号, 方案数为

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{m-1}$$

## 2. 施罗德数

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i S_{n-i-1}$$

$$(n+1)s_n = (6n-3)s_{n-1} - (n-2)s_{n-2}$$

其中  $S_n$  是(大)施罗德数,  $s_n$  是小施罗德数(也叫超级卡特兰数).

除了  $S_0 = s_0 = 1$  以外, 都有  $S_i = 2s_i$ .

施罗德数的组合意义:

- 从  $(0, 0)$  走到  $(n, n)$ , 每次可以走右, 上, 或者右上一步, 并且不能超过  $y = x$  这条线的方案数
  - 长为  $n$  的括号序列, 每个位置也可以为空, 并且括号对数和空位置数加起来等于  $n$  的方案数
  - 凸  $n$  边形的任意剖分方案数
- (有些人会把大(而不是小)施罗德数叫做超级卡特兰数.)

## 3. 默慈金数

$$M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i} = \frac{(2n+3)M_n + 3nM_{n-1}}{n+3}$$

$$M_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} C_i$$

在圆上的  $n$  个不同的点之间画任意条不相交(包括端点)的弦的方案数.

也等价于在网格图上, 每次可以走右上, 右下, 正右方一步, 且不能走到  $y < 0$  的位置, 在此前提下从  $(0, 0)$  走到  $(n, 0)$  的方案数.

扩展: 默慈金数画的弦不可以共享端点. 如果可以共享端点的话是 A054726, 后面的表里可以查到.

## 1.10 常用公式及结论

## 1.10.1 方差

$m$  个数的方差:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2}{m} - \bar{x}^2$$

随机变量的方差:  $D^2(x) = E(x^2) - E^2(x)$

## 1.10.2 min-max 反演

$$\max(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \min(T)$$

$$\min(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|+1} \max(T)$$

推广: 求第  $k$  大

$$k\text{-}\max(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|T|-k} \binom{|T|-1}{k-1} \min(T)$$

显然只有大小至少为  $k$  的子集才是有用的.

1.10.3 单位根反演(展开整除条件  $[n|k]$ )

$$[n|k] = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^{ik}$$

$$\sum_{i \geq 0} [x^{ik}] f(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f(\omega_k^j)$$

## 1.10.4 康托展开(排列的排名)

求排列的排名: 先对每个数都求出它后面有几个数比它小(可以用树状数组预处理), 记为  $c_i$ , 则排列的排名就是

$$\sum_{i=1}^n c_i (n-i)!$$

已知排名构造排列: 从前到后先分别求出  $c_i$ , 有了  $c_i$  之后再用一个平衡树(需要维护排名)倒序处理即可.

## 1.10.5 连通图计数

设大小为  $n$  的满足一个限制  $P$  的简单无向图数量为  $g_n$ , 满足限制  $P$  且连通的简单无向图数量为  $f_n$ , 如果已知  $g_{1 \dots n}$  求  $f_n$ , 可以得到递推式

$$f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f_k g_{n-k}$$

这个递推式的意义就是用任意图的数量减掉不连通的数量, 而不连通的数量可以通过枚举 1 号点所在连通块大小来计算.

注意, 由于  $f_0 = 0$ , 因此递推式的枚举下界取 0 和 1 都是可以的. 推一推式子会发现得到一个多项式求逆, 再仔细看看, 其实就是一个多项式  $\ln$ .

## 1.10.6 线性齐次线性常系数递推求通项

- 定理 3.1: 设数列  $\{u_n : n \geq 0\}$  满足  $r$  阶齐次线性常系数递推关系  $u_n = \sum_{j=1}^r c_j u_{n-j}$  ( $n \geq r$ ). 则

$$(i). \quad U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n = \frac{h(x)}{1 - \sum_{j=1}^r c_j x^j}, \quad \deg(h(x)) < r.$$

(ii). 若特征多项式

$$c(x) = x^r - \sum_{j=1}^r c_j x^{r-j} = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_s)^{e_s},$$

其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  互异,  $e_1 + \dots + e_s = r$  则  $u_n$  有表达式

$$u_n = p_1(n)\alpha_1^n + \dots + p_s(n)\alpha_s^n, \quad \deg(p_i) < e_i, i = 1, \dots, s.$$

多项式  $p_1, \dots, p_s$  的共  $e_1 + \dots + e_s = r$  个系数可由初始值  $u_0, \dots, u_{r-1}$  唯一确定.



## 1.11 常用生成函数变换

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{i \geq 0} i x^i$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{i+k-1}{k-1} x^i, \quad k > 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! \frac{x^k (1-x)^{n-k}}{(1-x)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{(n-i)!} \sum_{k=0}^i \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k! (n-k)! \frac{(-1)^{i-k}}{(i-k)!} \end{aligned}$$

(用上面的方法可以把分子化成一个  $n$  次以内的多项式, 并且可以用一次卷积求出来.)

如果把  $i^n$  换成任意的一个  $n$  次多项式, 那么我们可以求出它的下降幂表示形式(或者说是牛顿插值)的系数  $r_i$ , 发现用  $r_k$  替换掉上面的  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k!$  之后其余过程完全相同.

2 数论

## 2.1 $O(n)$ 预处理逆元

```
// 要求p为质数
1 inv[0] = inv[1] = 1;
2 for (int i = 2; i <= n; i++)
3     inv[i] = (long long)(p - (p / i)) * inv[p % i] % p;
4     → // p为模数
5 // i ^ -1 = -(p / i) * (p % i) ^ -1
```

## 2.2 线性筛

```
40 |  
41 |  
42 |  
43 |  
44 |
```

2.3 杜教筛

$$S_\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{d=2}^n S_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

$$S_\mu(n) = 1 - \sum_{d=2}^n S_\mu\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

```

1 // 用于求可以用狄利克雷卷积构造出好求和的东西的函数的前缀
2 // ↪ 和(有点绕)
3 // 有些题只要求  $n \leq 10^9$ , 这时就没必要开 long long 了, 但
4 // ↪ 记得乘法时强转
5
6 // 常量/全局变量/数组定义
7 const int maxn = 5000005, table_size = 5000000, p =
8 // ↪ 1000000007, inv_2 = (p + 1) / 2;
9 bool notp[maxn];
10 int prime[maxn / 20], phi[maxn], tbl[100005];
11 // tbl用来顶替哈希表, 其实开到  $n^{1/3}$  就够了, 不过保险
12 // ↪ 起见开成  $\sqrt{n}$  比较好
13 long long N;
14
15 // 主函数前面加上这么一句
16 memset(tbl, -1, sizeof(tbl));
17
18 // 线性筛预处理部分略去
19
20 // 杜教筛主过程 总计  $O(n^{2/3})$ 
21 // 递归调用自身
22 // 递推式还需具体情况具体分析, 这里以求欧拉函数前缀和(mod
23 // ↪ 10^9 + 7)为例
24 int S(long long n) {
25     if (n <= table_size)
26         return phi[n];
27     else if (~tbl[N / n])
28         return tbl[N / n];
29     // 原理: n除以所有可能的数的结果一定互不相同
30
31     int ans = 0;
32     for (long long i = 2, last; i <= n; i = last + 1) {
33         last = n / (n / i);
34         ans = (ans + (last - i + 1) % p * S(n / i)) %
35             p; // 如果n是int范围的话记得强转
36     }
37
38     ans = (n % p * ((n + 1) % p) % p * inv_2 - ans + p)
39     // ↪ % p; // 同上
40     return tbl[N / n] = ans;
41 }

```

## 2.4 Powerful Number筛

注意 Powerful Number 篛只能求积性函数的前缀和。  
 本质上就是构造一个方便求前缀和的函数，然后做类似杜教筛的操作。  
 定义 Powerful Number 表示每个质因子幂次都大于 1 的数，显然最多有  $\sqrt{n}$  个。  
 设我们要求和的函数是  $f(n)$ ，构造一个方便求前缀和的积性函数  $g(n)$  使得  $g(p) = f(p)$ 。  
 那么就存在一个积性函数  $h = f * g^{-1}$ ，也就是  $f = g * h$ 。可以证明  $h(p) = 0$ ，所以只有 Powerful Number 的  $h$  值不为 0。

$$S_f(i) = \sum_{d=1}^n h(d) S_g\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

只需要枚举每个 Powerful Number 作为  $d$ , 然后用杜教筛计算  $g$  的前缀和.

求  $h(d)$  时要先预处理  $h(p^k)$ , 显然有

$$h(p^k) = f(p^k) - \sum_{i=1}^k g(p^i) h(p^{k-i})$$

处理完之后 DFS 就行了. (显然只需要筛  $\sqrt{n}$  以内的质数.)

复杂度取决于杜教筛的复杂度, 特殊题目构造的好也可以做到  $O(\sqrt{n})$ .

例题:

- $f(p^k) = p^k(p^k - 1)$  :  $g(n) = \text{id}(n)\varphi(n)$ .
- $f(p^k) = p \text{xor } k$  :  $n$  为偶数时  $g(n) = 3\varphi(n)$ , 否则  $g(n) = \varphi(n)$ .

## 2.5 洲阁筛

计算积性函数  $f(n)$  的前  $n$  项之和时, 我们可以把所有项按照是否有  $> \sqrt{n}$  的质因子分两类讨论, 最后将两部分的贡献加起来即可.

### 1. 有 $> \sqrt{n}$ 的质因子

显然  $> \sqrt{n}$  的质因子幂次最多为 1, 所以这一部分的贡献就是

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} f(i) \sum_{d=\sqrt{n}+1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} [d \in \mathbb{P}] f(d)$$

我们可以 DP 后面的和式. 由于  $f(p)$  是一个关于  $p$  的低次多项式, 我们可以对每个次幂分别 DP: 设  $g_{i,j}$  表示  $[1, j]$  中和前  $i$  个质数都互质的数的  $k$  次方之和. 设  $\sqrt{n}$  以内的质数总共有  $m$  个, 显然贡献就转换成了

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} i^k g_{m, \lfloor \frac{n}{i} \rfloor}$$

边界显然就是自然数幂次和, 转移是

$$g_{i,j} = g_{i-1,j} - p_i^k g_{i-1, \lfloor \frac{j}{p_i} \rfloor}$$

也就是减掉和第  $i$  个质数不互质的贡献.

在滚动数组的基础上再优化一下: 首先如果  $j < p_i$  那肯定就只有一个数; 如果  $p_i \leq j < p_i^2$ , 显然就有  $g_{i,j} = g_{i-1,j} - p_i^k$ , 那么对每个  $j$  记下最大的  $i$  使得  $p_i^2 \leq j$ , 比这个还大的情况就不需要递推了, 用到的时候再加上一个前缀和解决.

### 2. 所有质因子都 $\leq \sqrt{n}$

类似的道理, 我们继续 DP:  $h_{i,j}$  表示只含有第  $i$  到  $m$  个质数作为质因子的所有数的  $f(i)$  之和. (这里不需要对每个次幂单独 DP 了; 另外倒着 DP 是为了方便卡上限.)

边界显然是  $h_{m+1,j} = 1$ , 转移是

$$h_{i,j} = h_{i+1,j} + \sum_c f(p_i^c) h_{i+1, \lfloor \frac{j}{p_i^c} \rfloor}$$

跟上面一样的道理优化, 分成三段:  $j < p_i$  时  $h_{i,j} = 1$ ,  $j < p_i^2$  时  $h_{i,j} = h_{i+1,j} + f(p_i)$  (同样用前缀和解决), 再小的部分就老实递推.

预处理  $\sqrt{n}$  以内的部分之后跑两次 DP, 最后把两部分的贡献加起来就行了.

两部分的复杂度都是  $\Theta\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$  的.

以下代码以洛谷 P5325 ( $f(p^k) = p^k(p^k - 1)$ ) 为例.

```

1 constexpr int maxn = 200005, p = 1000000007;
2
3 long long N, val[maxn]; // 询问的n和存储所有整除结果的表
4 int sqrtn;
5
6 inline int getid(long long x) {
7     if (x <= sqrtn)
8         return x;
9
10    return val[0] - N / x + 1;
11}
12
13 bool notp[maxn];
14 int prime[maxn], prime_cnt, rem[maxn]; // 线性筛用数组
15
16 int f[maxn], pr[maxn], g[2][maxn], dp[maxn];
17 int l[maxn], r[maxn];
18
19 // 线性筛省略
20
21 inline int get_sum(long long n, int k) {
22     n %= p;
23
24     if (k == 1)
25         return n * (n + 1) % p * ((p + 1) / 2) % p;
26
27     else
28         return n * (n + 1) % p * (2 * n + 1) % p * ((p
29             - 1) / 6) % p;
30 }
31
32 void get_dp(long long n, int k, int *dp) {
33     for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
34         dp[j] = get_sum(val[j], k);
35
36     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++) {
37         long long lb = (long long)prime[i] * prime[i];
38         int pw = (k == 1 ? prime[i] : (int)(lb % p));
39
40         pr[i] = (pr[i - 1] + pw) % p;
41
42         for (int j = val[0]; j && val[j] >= lb; j--) {
43             int t = getid(val[j] / prime[i]);
44
45             int tmp = dp[t];
46             if (l[t] < i)
47                 tmp = (tmp - pr[min(i - 1, r[t])] +
48                     pr[l[t]]) % p;
49
50             dp[j] = (dp[j] - (long long)pw * tmp) % p;
51             if (dp[j] < 0)
52                 dp[j] += p;
53         }
54
55         for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
56             dp[j] = (dp[j] - pr[r[j]] + pr[l[j]]) % p;
57
58         dp[j] = (dp[j] + p - 1) % p; // 因为DP数组是
59             // 有1的, 但后面计算不应该有1
60     }
61
62     int calc1(long long n) {
63         get_dp(n, 1, g[0]);
64         get_dp(n, 2, g[1]);
65
66         int ans = 0;

```

```

67     for (int i = 1; i <= sqrtN; i++)
68         ans = (ans + (long long)f[i] * (g[1][getid(N /
69             → i)] - g[0][getid(N / i)])) % p;
70
71     if (ans < 0)
72         ans += p;
73
74     return ans;
75 }
76
77 int calc2(long long n) {
78     for (int j = 1; j <= val[0]; j++)
79         dp[j] = 1;
80
81     for (int i = 1; i <= prime_cnt; i++)
82         pr[i] = (pr[i - 1] + f[prime[i]]) % p;
83
84     for (int i = prime_cnt; i; i--) {
85         long long lb = (long long)prime[i] * prime[i];
86
87         for (int j = val[0]; j && val[j] ≥ lb; j--)
88             for (long long pc = prime[i]; pc ≤ val[j];
89                 → pc *= prime[i]) {
90                 int t = getid(val[j] / pc);
91
92                 int tmp = dp[t];
93                 if (r[t] > i)
94                     tmp = (tmp + pr[r[t]] - pr[max(i,
95                         → l[t])]) % p;
96
97                 dp[j] = (dp[j] + pc % p * ((pc - 1) %
98                     → p) % p * tmp) % p;
99             }
100
101     }
102
103     return (long long)(dp[val[0]] + pr[r[val[0]]] -
104         → pr[l[val[0]]] + p) % p;
105 }
106
107 int main() {
108
109     // ios::sync_with_stdio(false);
110
111     cin >> N;
112
113     sqrtN = (int)sqrt(N);
114
115     get_table(sqrtN);
116
117     for (int i = 1; i <= sqrtN; i++)
118         val[++val[0]] = i;
119
120     for (int i = 1; i <= sqrtN; i++)
121         val[++val[0]] = N / i;
122
123     sort(val + 1, val + val[0] + 1);
124
125     val[0] = unique(val + 1, val + val[0] + 1) - val -
126         → 1;
127
128     int li = 0, ri = 0;
129     for (int j = 1; j <= val[0]; j++) {
130         while (ri < prime_cnt && prime[ri + 1] ≤
131             → val[j])
132             ri++;
133
134         while (li < prime_cnt && (long long)prime[li]
135             → * prime[li] ≤ val[j])
136             li++;
137     }
138 }
```

```

129     l[j] = li - 1;
130     r[j] = ri;
131 }
132
133 cout << (calc1(N) + calc2(N)) % p << endl;
134
135 }
136 }
```

## 2.6 Miller-Rabin

```

1 // 复杂度可以认为是常数
2
3 // 封装好的函数体
4 // 需要调用check
5 bool Miller_Rabin(long long n) {
6     if (n == 1)
7         return false;
8     if (n == 2)
9         return true;
10    if (n % 2 == 0)
11        return false;
12
13    for (int i : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,
14        → 31, 37}) {
15        if (i ≥ n)
16            break;
17        if (!check(n, i))
18            return false;
19    }
20
21    return true;
22}
23
24 // 用一个数检测
25 // 需要调用long long快速幂和O(1)快速乘
26 bool check(long long n, long long b) { // b: base
27     long long a = n - 1;
28     int k = 0;
29
30     while (a % 2 == 0) {
31         a /= 2;
32         k++;
33     }
34
35     long long t = qpow(b, a, n); // 这里的快速幂函数需要
36         → 写O(1)快速乘
37     if (t == 1 || t == n - 1)
38         return true;
39
40     while (k--) {
41         t = mul(t, t, n); // mul是O(1)快速乘函数
42         if (t == n - 1)
43             return true;
44     }
45 }
```

## 2.7 Pollard's Rho

```

1 // 注意, 虽然Pollard's Rho的理论复杂度是O( $n^{1/4}$ )的,
2 // 但实际跑起来比较慢, 一般用于做long long范围内的质因数
3 // 分解
4
5 // 封装好的函数体
6 // 需要调用solve
```

```

7 void factorize(long long n, vector<long long> &v) { // 
8     → v用于存分解出来的质因子，重复的会放多个
9     for (int i : {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}) {
10        while (n % i == 0) {
11            v.push_back(i);
12            n /= i;
13        }
14    }
15    solve(n, v);
16    sort(v.begin(), v.end()); // 从小到大排序后返回
17}
18
19 // 递归过程
20 // 需要调用Pollard's Rho主过程，同时递归调用自身
21 void solve(long long n, vector<long long> &v) {
22     if (n == 1)
23         return;
24
25     long long p;
26     do
27         p = Pollards_Rho(n);
28     while (!p); // p是任意一个非平凡因子
29
30     if (p == n) {
31         v.push_back(p); // 说明n本身就是质数
32         return;
33     }
34
35     solve(p, v); // 递归分解两半
36     solve(n / p, v);
37
38 // Pollard's Rho主过程
39 // 需要使用Miller-Rabin作为子算法
40 // 同时需要调用O(1)快速乘和gcd函数
41 long long Pollards_Rho(long long n) {
42     // assert(n > 1);
43
44     if (Miller_Rabin(n))
45         return n;
46
47     long long c = rand() % (n - 2) + 1, i = 1, k = 2, x
48     → = rand() % (n - 3) + 2, u = 2; // 注意这里rand函
49     → 数需要重定义一下
50     while (true) {
51         i++;
52         x = (mul(x, x, n) + c) % n; // mul是O(1)快速乘函
53         → 数
54
55         long long g = gcd((u - x + n) % n, n);
56         if (g > 1 && g < n)
57             return g;
58
59         if (u == x)
60             return 0; // 失败，需要重新调用
61
62         if (i == k) {
63             u = x;
64             k *= 2;
65         }
66     }
67 }

```

## 2.8 快速阶乘算法

参见1.1.11.应用:  $O(\sqrt{n} \log^2 n)$  快速求阶乘(9页).

## 2.9 扩展欧几里德

```

1 void exgcd(LL a, LL b, LL &c, LL &x, LL &y) {
2     if (b == 0) {
3         c = a;
4         x = 1;
5         y = 0;
6         return;
7     }
8
9     exgcd(b, a % b, c, x, y);
10
11    LL tmp = x;
12    x = y;
13    y = tmp - (a / b) * y;

```

### 2.9.1 求通解的方法

假设我们已经找到了一组解  $(p_0, q_0)$  满足  $ap_0 + bq_0 = \gcd(a, b)$ , 那么其他的解都满足

$$p = p_0 + \frac{b}{\gcd(a, b)} \times t \quad q = q_0 - \frac{a}{\gcd(a, b)} \times t$$

其中  $t$  为任意整数.

### 2.9.2 类欧几里德算法(直线下整点个数)

$a, b \geq 0, m > 0$ , 计算  $\sum_{i=0}^{n-1} \lfloor \frac{a+bi}{m} \rfloor$ .

```

1 int solve(int n, int a, int b, int m) {
2     if (!b)
3         return n * (a / m);
4     if (a ≥ m)
5         return n * (a / m) + solve(n, a % m, b, m);
6     if (b ≥ m)
7         return (n - 1) * n / 2 * (b / m) + solve(n, a,
8             → b % m, m);
9
10    return solve((a + b * n) / m, (a + b * n) % m, m,
11        → b);

```

## 2.10 中国剩余定理

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$M = \prod_i m_i, M_i = \frac{M}{m_i}$$

$$M'_i \equiv M_i^{-1} \pmod{m_i}$$

$$x \equiv \sum_i a_i M_i M'_i \pmod{M}$$

### 2.10.1 ex-CRT

设两个方程分别是  $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$  和  $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$ .

将它们转化为不定方程  $x = m_1 p + a_1 = m_2 q + a_2$ , 其中  $p, q$  是整数, 则有  $m_1 p - m_2 q = a_2 - a_1$ .

当  $a_2 - a_1$  不能被  $\gcd(m_1, m_2)$  整除时无解, 否则可以通过扩展欧几里德解出来一组可行解  $(p, q)$ .

则原来的两方程组成的模方程组的解为  $x \equiv b \pmod{M}$ , 其中  $b = m_1 p + a_1$ ,  $M = \text{lcm}(m_1, m_2)$ .

## 2.11 原根阶

**阶** 最小的整数  $k$  使得  $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ , 记为  $\delta_p(a)$ .

显然  $a$  在阶以下的幂次是两两不同的.

一个性质: 如果  $a, b$  均与  $p$  互质, 则  $\delta_p(ab) = \delta_p(a)\delta_p(b)$  的充分必要条件是  $\gcd(\delta_p(a), \delta_p(b)) = 1$ .

另外, 如果  $a$  与  $p$  互质, 则有  $\delta_p(a^k) = \frac{\delta_p(a)}{\gcd(\delta_p(a), k)}$ . (也就是环上一次跳  $k$  步的周期.)

**原根** 阶等于  $\varphi(p)$  的数.

只有形如  $2, 4, p^k, 2p^k$  ( $p$  是奇素数) 的数才有原根, 并且如果一个数  $n$  有原根, 那么原根的个数是  $\varphi(\varphi(n))$  个.

暴力找原根代码:

```

1 def split(n): # 分解质因数
2     i = 2
3     a = []
4     while i * i <= n:
5         if n % i == 0:
6             a.append(i)
7
8             while n % i == 0:
9                 n /= i
10
11            i += 1
12
13        if n > 1:
14            a.append(n)
15
16    return a
17
18 def getg(p): # 找原根
19     def judge(g):
20         for i in d:
21             if pow(g, (p - 1) / i, p) == 1:
22                 return False
23         return True
24
25     d = split(p - 1)
26     g = 2
27
28     while not judge(g):
29         g += 1
30
31     return g
32
33 print(getg(int(input())))

```

## 2.12 常用数论公式

### 2.12.1 莫比乌斯反演

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d)$$

$$f(d) = \sum_{d|k} g(k) \Leftrightarrow g(d) = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) f(k)$$

### 2.12.2 降幂公式

$$a^k \equiv a^{k \bmod \varphi(p)+\varphi(p)}, k \geq \varphi(p)$$

### 2.12.3 其他常用公式

$$\mu * I = e \quad (e(n) = [n = 1])$$

$$\mu * id = \varphi$$

$$\sigma_0 = I * I, \sigma_1 = id * I, \sigma_k = id^{k-1} * I$$

$$\sum_{i=1}^n [(i, n) = 1] i = n \frac{\varphi(n) + e(n)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i [(i, j) = d] = S_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i, j) = d] = \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^n f(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(j) = \sum_{i=1}^n g(i) \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} f(j)$$

# 3 图论

## 3.1 最小生成树

### 3.1.1 Boruvka算法

思想: 每次选择连接每个连通块的最小边, 把连通块缩起来.

每次连通块个数至少减半, 所以迭代 $O(\log n)$ 次即可得到最小生成树.

一种比较简单的实现方法: 每次迭代遍历所有边, 用并查集维护连通性和每个连通块的最小边权.

应用: 最小异或生成树

### 3.1.2 动态最小生成树

动态最小生成树的离线算法比较容易, 而在线算法通常极为复杂.

一个跑得比较快的离线做法是对时间分治, 在每层分治时找出一定在不在MST上的边, 只带着不确定边继续递归.

简单起见, 找确定边的过程用Kruskal算法实现, 过程中的两种重要操作如下:

- Reduction: 待修改边标为 $+\infty$ , 跑MST后把非树边删掉, 减少无用边
- Contraction: 待修改边标为 $-\infty$ , 跑MST后缩除待修改边之外的所有MST边, 计算必须边

每轮分治需要Reduction-Contraction, 借此减少不确定边, 从而保证复杂度.

复杂度证明: 假设当前区间有 $k$ 条待修改边,  $n$ 和 $m$ 表示点数和边数, 那么最坏情况下R-C的效果为 $(n, m) \rightarrow (n, n + k - 1) \rightarrow (k + 1, 2k)$ .

```

1 // 全局结构体与数组定义
2 struct edge { // 边的定义
3     int u, v, w, id; // id表示边在原图中的编号
4     bool vis; // 在Kruskal时用, 记录这条边是否是树边
5     bool operator < (const edge &e) const { return w <
6         → e.w; }
7 } e[20][maxn], t[maxn]; // 为了便于回滚, 在每层分治存一个
8 → 副本
9
10 // 用于存储修改的结构体, 表示第id条边的权值从u修改为v
11 struct A {
12     int id, u, v;
13 } a[maxn];
14
15 int id[20][maxn]; // 每条边在当前图中的编号
16 int p[maxn], size[maxn], stk[maxn], top; // p和size是并
17 → 查集数组, stk是用来撤销的栈
18 int n, m, q; // 点数, 边数, 修改数
19
20 // 方便起见, 附上可能需要用到的预处理代码
21 int main() {
22     for (int i = 1; i ≤ n; i++) { // 并查集初始化
23         p[i] = i;
24         size[i] = 1;
25     }
26
27     for (int i = 1; i ≤ m; i++) { // 读入与预标号
28         scanf("%d%d%d", &e[0][i].u, &e[0][i].v, &e[0]
29             → [i].w);
30         e[0][i].id = i;
31         id[0][i] = i;
32     }
33
34     for (int i = 1; i ≤ q; i++) { // 预处理出调用数组
35         scanf("%d%d", &a[i].id, &a[i].v);
36     }
37 }
```

```

35     a[i].u = e[0][a[i].id].w;
36     e[0][a[i].id].w = a[i].v;
37 }
38
39 for(int i = q; i; i--)
40     e[0][a[i].id].w = a[i].u;
41
42 CDQ(1, q, 0, m, 0); // 这是调用方法
43 }

44 // 分治主过程 O(nlog^2n)
45 // 需要调用Reduction和Contraction
46 void CDQ(int l, int r, int d, int m, long long ans) {
47     ← // CDQ分治
48     if (l == r) { // 区间长度已减小到1, 输出答案, 退出
49         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].v;
50         printf("%lld\n", ans + Kruskal(m, e[d]));
51         e[d][id[d][a[l].id]].w = a[l].u;
52         return;
53     }
54
55     int tmp = top;
56
57     Reduction(l, r, d, m);
58     ans += Contraction(l, r, d, m); // R-C
59
60     int mid = (l + r) / 2;
61
62     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
63     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
64         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 准备好下一层要用的
65 → 数组
66
67     CDQ(l, mid, d + 1, m, ans);
68
69     for (int i = l; i ≤ mid; i++)
70         e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].v; // 进行左边的修
71 → 改
72
73     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, e[d + 1] + 1);
74     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
75         id[d + 1][e[d][i].id] = i; // 重新准备下一层要用
76 → 的数组
77
78     CDQ(mid + 1, r, d + 1, m, ans);
79
80     for (int i = top; i > tmp; i--)
81         cut(stk[i]); // 撤销所有操作
82     top = tmp;
83
84 // Reduction(减少无用边): 待修改边标为 $+\infty$ , 跑MST后把非树边
85 → 删掉, 减少无用边
86 // 需要调用Kruskal
87 void Reduction(int l, int r, int d, int &m) {
88     for (int i = l; i ≤ r; i++)
89         e[d][id[d][a[i].id]].w = INF; // 待修改的边标为INF
90
91     Kruskal(m, e[d]);
92
93     copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
94
95     int cnt = 0;
96     for (int i = 1; i ≤ m; i++)
97         if (t[i].w == INF || t[i].vis) { // 非树边扔掉
98             id[d][t[i].id] = ++cnt; // 给边重新编号
99             e[d][cnt] = t[i];
99     }
99 }
```

```

100
101    for (int i = r; i >= l; i--) {
102        e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
103        // 改回去
104    }
105
106
107
108 // Contraction(缩必须边):待修改边标为- $\text{INF}$ ,跑MST后缩除待修
109 // →改边之外的所有树边
110 // 返回缩掉的边的总权值
111 // 需要调用Kruskal
112 long long Contraction(int l, int r, int d, int &m) {
113     long long ans = 0;
114
115     for (int i = l; i <= r; i++) {
116         e[d][id[d][a[i].id]].w = - $\text{INF}$ ; // 待修改边标
117         // →为- $\text{INF}$ 
118
119         Kruskal(m, e[d]);
120         copy(e[d] + 1, e[d] + m + 1, t + 1);
121
122         int cnt = 0;
123         for (int i = 1; i <= m; i++) {
124
125             if (t[i].w != - $\text{INF}$  && t[i].vis) { // 必须边
126                 ans += t[i].w;
127                 mergeset(t[i].u, t[i].v);
128             }
129             else { // 不确定边
130                 id[d][t[i].id] = ++cnt;
131                 e[d][cnt] = t[i];
132             }
133
134         for (int i = r; i >= l; i--) {
135             e[d][id[d][a[i].id]].w = a[i].u; // 把待修改的边
136             // 改回去
137             e[d][id[d][a[i].id]].vis = false;
138
139         m = cnt;
140
141         return ans;
142
143
144 // Kruskal算法  $O(m \log n)$ 
145 // 方便起见,这里直接沿用进行过缩点的并查集,在过程结束后撤
146 // →销即可
147 long long Kruskal(int m, edge *e) {
148     int tmp = top;
149     long long ans = 0;
150
151     sort(e + 1, e + m + 1); // 比较函数在结构体中定义过
152     // →了
153
154     for (int i = 1; i <= m; i++) {
155         if (findroot(e[i].u) != findroot(e[i].v)) {
156             e[i].vis = true;
157             ans += e[i].w;
158             mergeset(e[i].u, e[i].v);
159         }
160         else
161             e[i].vis = false;
162
163     for (int i = top; i > tmp; i--)
164         cut(stk[i]); // 撤销所有操作

```

```

164     top = tmp;
165
166     return ans;
167 }
168
169 // 以下是并查集相关函数
170 int findroot(int x) { // 因为需要撤销,不写路径压缩
171     while (p[x] != x)
172         x = p[x];
173
174     return x;
175 }
176
177 void mergeset(int x, int y) { // 按size合并,如果想跑得更
178 // →快就写一个按秩合并
179     x = findroot(x); // 但是按秩合并要再开一个栈记录合并
180     // →之前的秩
181     y = findroot(y);
182
183     if (x == y)
184         return;
185
186     if (size[x] > size[y])
187         swap(x, y);
188
189     p[x] = y;
190     size[y] += size[x];
191     stk[++top] = x;
192
193 void cut(int x) { // 并查集撤销
194     int y = x;
195
196     do
197         size[y = p[y]] -= size[x];
198     while (p[y] != y);
199
200     p[x] = x;
201 }

```

### 3.1.3 最小树形图

对每个点找出最小的入边,如果是一个DAG那么就已经结束了.否则把环都缩起来,每个点的边权减去环上的边权之后再跑一遍,直到没有环为止.

可以用可并堆优化到 $O(m \log n)$ ,需要写一个带懒标记的左偏树.  
 $O(nm)$ 版本

```

1 constexpr int maxn = 105, maxe = 10005, inf =
2     // → 0x3f3f3f3f;
3
4 struct edge {
5     int u, v, w;
6 } e[maxe];
7
8 int mn[maxn], pr[maxn], ufs[maxn], vis[maxn];
9 bool alive[maxn];
10
11 int edmonds(int n, int m, int rt) {
12     for (int i = 1; i <= n; i++)
13         alive[i] = true;
14
15     int ans = 0;
16
17     while (true) {
18         memset(mn, 63, sizeof(int) * (n + 1));
19         memset(pr, 0, sizeof(int) * (n + 1));
20         memset(ufs, 0, sizeof(int) * (n + 1));
21
22         for (int i = 1; i <= m; i++)
23             if (mn[e[i].v] > e[i].w) {
24                 mn[e[i].v] = e[i].w;
25                 pr[e[i].v] = e[i].u;
26             }
27
28         for (int i = 1; i <= n; i++)
29             if (!alive[i]) break;
30         else {
31             ans += mn[rt];
32             for (int i = rt; i != pr[i]; i = pr[i])
33                 alive[i] = false;
34         }
35
36     }
37
38     return ans;
39 }

```

```

20     memset(vis, 0, sizeof(int) * (n + 1));
21
22     mn[rt] = 0;
23
24     for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
25         if (e[i].u != e[i].v && e[i].w <
26             → mn[e[i].v]) {
27             mn[e[i].v] = e[i].w;
28             pr[e[i].v] = e[i].u;
29         }
30
31         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
32             if (!alive[i]) {
33                 if (mn[i] ≥ inf)
34                     return -1; // 不存在最小树形图
35
36             ans += mn[i];
37         }
38
39         bool flag = false;
40
41         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
42             if (!alive[i])
43                 continue;
44
45             int x = i;
46             while (x && !vis[x]) {
47                 vis[x] = i;
48                 x = pr[x];
49             }
50
51             if (x && vis[x] == i) {
52                 flag = true;
53                 for (int u = x; !ufs[u]; u = pr[u])
54                     ufs[u] = x;
55             }
56
57             for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
58                 e[i].w -= mn[e[i].v];
59
60                 if (ufs[e[i].u])
61                     e[i].u = ufs[e[i].u];
62                 if (ufs[e[i].v])
63                     e[i].v = ufs[e[i].v];
64             }
65
66             if (!flag)
67                 return ans;
68
69             for (int i = 1; i ≤ n; i++)
70                 if (ufs[i] && i != ufs[i])
71                     alive[i] = false;
72     }
73 }
```

$O(m \log n)$  版本

(堆优化版本可以参考fstqwq的模板，在最后没有目录的部分。)

### 3.1.4 Steiner Tree 斯坦纳树

问题：一张图上有  $k$  个关键点，求让关键点两两连通的最小生成树

做法：状压 DP， $f_{i,S}$  表示以  $i$  号点为树根， $i$  与  $S$  中的点连通的最小边权和

转移有两种：

1. 枚举子集：

$$f_{i,S} = \min_{T \subset S} \{f_{i,T} + f_{i,S \setminus T}\}$$

2. 新加一条边：

$$f_{i,S} = \min_{(i,j) \in E} \{f_{j,S} + w_{i,j}\}$$

第一种直接枚举子集 DP 就行了，第二种可以用 SPFA 或者 Dijkstra 松弛（显然负边一开始全选就行了，所以只需要处理非负边）。

复杂度  $O(n3^k + 2^k \text{SSSP}(n, m))$ ，其中  $\text{SSSP}(n, m)$  可以是  $nm$  或者  $n^2 + m$  或者  $m \log n$ 。

```

1 constexpr int maxn = 105, inf = 0x3f3f3f3f;
2
3 int dp[maxn][(1 << 10) + 1];
4 int g[maxn][maxn], a[15];
5 bool inq[maxn];
6
7 int main() {
8
9     int n, m, k;
10    scanf("%d%d%d", &n, &m, &k);
11
12    memset(g, 63, sizeof(g));
13
14    while (m--) {
15        int u, v, c;
16        scanf("%d%d%d", &u, &v, &c);
17
18        g[u][v] = g[v][u] = min(g[u][v], c); // 不要忘了
19        → 是双向边
20    }
21
22    memset(dp, 63, sizeof(dp));
23
24    for (int i = 0; i < k; i++) {
25        scanf("%d", &a[i]);
26
27        dp[a[i]][1 << i] = 0;
28    }
29
30    for (int s = 1; s < (1 << k); s++) {
31        for (int i = 1; i ≤ n; i++)
32            for (int t = (s - 1) & s; t; (~t) &= s)
33                dp[i][s] = min(dp[i][s], dp[i][t] +
34                    → dp[i][s ^ t]);
35
36    // SPFA
37    queue<int> q;
38    for (int i = 1; i ≤ n; i++)
39        if (dp[i][s] < inf) {
40            q.push(i);
41            inq[i] = true;
42        }
43
44    while (!q.empty()) {
45        int i = q.front();
46        q.pop();
47        inq[i] = false; // 最终结束时 inq 一定全 0，所
48        → 以不用清空
49
50        for (int j = 1; j ≤ n; j++)
51            if (dp[i][s] + g[i][j] < dp[j][s]) {
52                dp[j][s] = dp[i][s] + g[i][j];
53                if (!inq[j]) {
54                    q.push(j);
55                    inq[j] = true;
56                }
57            }
58    }
59 }
```

```

57
58     int ans = inf;
59     for (int i = 1; i <= n; i++)
60         ans = min(ans, dp[i][(1 << k) - 1]);
61
62     printf("%d\n", ans);
63
64     return 0;
65 }

3.1.5 最小直径生成树
首先要找到图的绝对中心(可能在点上, 也可能在某条边上), 然后以绝对中心为起点建最短路树就是最小直径生成树.

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 505;
6 constexpr long long inf = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
7
8 int g[maxn][maxn], id[maxn][maxn], pr[maxn]; // g是邻接
9     → 矩阵
10    long long f[maxn][maxn], d[maxn];
11    bool vis[maxn];
12
13 vector<pair<int, int>>
14     → minimum_diameter_spanning_tree(int n) { // 1-based
15     for (int i = 1; i <= n; i++)
16         for (int j = 1; j <= n; j++)
17             g[i][j] *= 2; // 输入的边权都要乘2
18
19     memset(f, 63, sizeof(f));
20
21     for (int i = 1; i <= n; i++)
22         f[i][i] = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= n; i++)
25         for (int j = 1; j <= n; j++)
26             if (g[i][j])
27                 f[i][j] = g[i][j];
28
29     for (int k = 1; k <= n; k++)
30         for (int i = 1; i <= n; i++)
31             for (int j = 1; j <= n; j++)
32                 f[i][j] = min(f[i][j], f[i][k] + f[k]
33                                     → [j]);
34
35     for (int i = 1; i <= n; i++) {
36         for (int j = 1; j <= n; j++)
37             id[i][j] = j; // 距离i第j近的点
38
39         sort(id[i] + 1, id[i] + n + 1, [&i] (int x, int
40             → y) {
41             return f[i][x] < f[i][y];
42         });
43     }
44
45     int o = 0;
46     long long ansv = inf; // vertex
47
48     for (int i = 1; i <= n; i++)
49         if (f[i][id[i][n]] * 2 < ansv) {
50             ansv = f[i][id[i][n]] * 2;
51             o = i;
52         }
53
54     int u = 0, v = 0;
55     long long disu = -inf, disv = -inf, anse = inf;
56
57     for (int x = 1; x <= n; x++)
58         for (int y = 1; y <= n; y++)
59             if (g[x][y]) { // 如果g[x][y] = 0说明没有边
60                 int w = g[x][y];
61
62                 for (int i = n - 1, j = n; i; i--)
63                     if (f[y][id[x][i]] > f[y][id[x]
64                                     → [j]]) {
65                         long long tmp = f[x][id[x][i]]
66                             → + f[y][id[x][j]] + w;
67                         if (tmp < anse) {
68                             anse = tmp;
69                             u = x;
70                             v = y;
71                         }
72                     }
73
74                 printf("%lld\n", min(ansv, anse) / 2); // 直径
75
76                 memset(d, 63, sizeof(d));
77
78                 if (ansv <= anse)
79                     d[o] = 0;
80                 else {
81                     d[u] = disu;
82                     d[v] = disv;
83                 }
84
85                 for (int k = 1; k <= n; k++) { // Dijkstra
86                     int x = 0;
87                     for (int i = 1; i <= n; i++)
88                         if (!vis[i] && d[i] < d[x])
89                             x = i;
90
91                     vis[x] = true;
92                     for (int y = 1; y <= n; y++)
93                         if (g[x][y] && !vis[y]) {
94                             if (d[y] > d[x] + g[x][y]) {
95                                 d[y] = d[x] + g[x][y];
96                                 pr[y] = x;
97                             }
98                         else if (d[y] == d[x] + g[x][y] &&
99                             → d[pr[y]] < d[x])
100                             pr[y] = x;
101
102                     vector<pair<int, int>> vec;
103                     for (int i = 1; i <= n; i++)
104                         if (pr[i])
105                             vec.emplace_back(i, pr[i]);
106
107                     if (ansv > anse)
108                         vec.emplace_back(u, v);
109
110                     return vec;
111     }
112
113     int main() {
114
115         int n, m;

```

```

116 scanf("%d%d", &n, &m);
117
118 while (m--) {
119     int x, y, z;
120     scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
121
122     g[x][y] = g[y][x] = z; // 无向图
123 }
124
125 auto vec = minimum_diameter_spanning_tree(n);
126 for (auto [x, y] : vec)
127     printf("%d %d\n", x, y);
128
129 return 0;
130

```

## 3.2 最短路

### 3.2.1 Dijkstra

参见3.2.3.k短路(27页), 注意那边是求到 $t$ 的最短路.

### 3.2.2 Johnson算法(负权图多源最短路)

首先前提是图没有负环.

先任选一个起点 $s$ , 跑一遍SPFA, 计算每个点的势 $h_u = d_{s,u}$ , 然后将每条边 $u \rightarrow v$ 的权值 $w$ 修改为 $w + h[u] - h[v]$ 即可, 由最短路的性质显然修改后边权非负.

然后对每个起点跑Dijkstra, 再修正距离 $d_{u,v} = d'_{u,v} - h_u + h_v$ 即可, 复杂度 $O(nm \log n)$ , 在稀疏图上是要优于Floyd的.

### 3.2.3 k短路

```

1 // 注意这是个多项式算法, 在k比较大时很有优势, 但k比较小时
2 // →最好还是用A*
3 // DAG和有环的情况都可以, 有重边或自环也无所谓, 但不能有
4 // →零环
5 // 以下代码以Dijkstra + 可持久化左偏树为例
6
7 constexpr int maxn = 1005, maxe = 10005, maxm = maxe *
8 //→ 30; //点数,边数,左偏树结点数
9
10 struct A { // 用来求最短路
11     int x, d;
12
13     A(int x, int d) : x(x), d(d) {}
14
15     bool operator < (const A &a) const {
16         return d > a.d;
17     }
18
19 struct node { // 左偏树结点
20     int w, i, d; // i: 最后一条边的编号 d: 左偏树附加信息
21     node *lc, *rc;
22
23     node() {}
24
25     node(int w, int i) : w(w), i(i), d(0) {}
26
27     void refresh(){
28         d = rc → d + 1;
29    }
30 } null[maxn], *ptr = null, *root[maxn];
31
32 struct B { // 维护答案用
33     int x, w; // x是结点编号, w表示之前已经产生的权值

```

```

33     node *rt; // 这个答案对应的堆顶,注意可能不等于任何一个结点的堆
34
35     B(int x, node *rt, int w) : x(x), w(w), rt(rt) {}
36
37     bool operator < (const B &a) const {
38         return w + rt → w > a.w + a.rt → w;
39     }
40 }
41
42 // 全局变量和数组定义
43 vector<int> G[maxn], W[maxn], id[maxn]; // 最开始要存反
44 //→ 向图, 然后把G清空作为儿子列表
45 bool vis[maxn], used[maxe]; // used表示边是否在最短路树
46 //→ 上
47 int u[maxe], v[maxe], w[maxe]; // 存下每条边,注意是有向
48 //→ 边
49 int d[maxn], p[maxn]; // p表示最短路树上每个点的父边
50 int n, m, k, s, t; // s, t分别表示起点和终点
51
52 // 以下是主函数中较关键的部分
53 for (int i = 0; i ≤ n; i++)
54     root[i] = null; // 一定要加上!!!
55
56 // (读入&建反向图)
57 Dijkstra();
58
59 // (清空G, W, id)
60
61 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
62     if (p[i]) {
63         used[p[i]] = true; // 在最短路树上
64         G[v[p[i]]].push_back(i);
65     }
66
67 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
68     w[i] = d[u[i]] - d[v[i]]; // 现在的w[i]表示这条边能
69 //→ 使路径长度增加多少
70     if (!used[i])
71         root[u[i]] = merge(root[u[i]], newnode(w[i],
72 //→ i));
73
74 dfs(t);
75
76 priority_queue<B> heap;
77 heap.push(B(s, root[s], 0)); // 初始状态是找贡献最小的边
78 //→ 加进去
79
80 printf("%d\n", d[s]); // 第1短路需要特判
81 while (--k) { // 其余k - 1短路径用二叉堆维护
82     if (heap.empty())
83         printf("-1\n");
84     else {
85         int x = heap.top().x, w = heap.top().w;
86         node *rt = heap.top().rt;
87         heap.pop();
88
89         printf("%d\n", d[s] + w + rt → w);
90
91         if (rt → lc != null || rt → rc != null)
92             heap.push(B(x, merge(rt → lc, rt → rc),
93 //→ w)); // pop掉当前边,换成另一条贡献大一
94 //→ 点的边
95         if (root[v[rt → i]] != null)
96             heap.push(B(v[rt → i], root[v[rt → i]], w
97 //→ + rt → w)); // 保留当前边,往后面再接上
98 //→ 另一条边
99     }
100 }
```

```

93 }
94 // 主函数到此结束
95
96
97 // Dijkstra预处理最短路  $O(m \log n)$ 
98 void Dijkstra() {
99     memset(d, 63, sizeof(d));
100    d[t] = 0;
101    priority_queue<A> heap;
102    heap.push(A(t, 0));
103
104    while (!heap.empty()) {
105        int x = heap.top().x;
106        heap.pop();
107
108        if (vis[x])
109            continue;
110
111        vis[x] = true;
112        for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
113            if (!vis[G[x][i]] && d[G[x][i]] > d[x] +
114                → W[x][i]) {
115                d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
116                p[G[x][i]] = id[x][i];
117
118                heap.push(A(G[x][i], d[G[x][i]]));
119            }
120    }
121
122 // dfs求出每个点的堆 总计 $O(m \log n)$ 
123 // 需要调用merge，同时递归调用自身
124 void dfs(int x) {
125     root[x] = merge(root[x], root[v[p[x]]]);
126
127     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
128         dfs(G[x][i]);
129 }
130
131 // 包装过的new node() O(1)
132 node *newnode(int w, int i) {
133     *ptr = node(w, i);
134     ptr → lc = ptr → rc = null;
135     return ptr;
136 }
137
138 // 带可持久化的左偏树合并 总计 $O(\log n)$ 
139 // 递归调用自身
140 node *merge(node *x, node *y) {
141     if (x == null)
142         return y;
143     if (y == null)
144         return x;
145
146     if (x → w > y → w)
147         swap(x, y);
148
149     node *z = newnode(x → w, x → i);
150     z → lc = x → lc;
151     z → rc = merge(x → rc, y);
152
153     if (z → lc → d < z → rc → d)
154         swap(z → lc, z → rc);
155     z → refresh();
156
157     return z;
158 }

```

### 3.3 Tarjan算法

#### 3.3.1 强连通分量

```

1 int dfn[maxn], low[maxn], tim = 0;
2 vector<int> G[maxn], scc[maxn];
3 int sccid[maxn], scc_cnt = 0, stk[maxn];
4 bool instk[maxn];
5
6 void dfs(int x) {
7     dfn[x] = low[x] = ++tim;
8
9     stk[++stk[0]] = x;
10    instk[x] = true;
11
12    for (int y : G[x]) {
13        if (!dfn[y]) {
14            dfs(y);
15            low[x] = min(low[x], low[y]);
16        } else if (instk[y])
17            low[x] = min(low[x], dfn[y]);
18    }
19
20    if (dfn[x] == low[x]) {
21        scc_cnt++;
22
23        int u;
24        do {
25            u = stk[stk[0]--];
26            instk[u] = false;
27            sccid[u] = scc_cnt;
28            scc[scc_cnt].push_back(u);
29        } while (u != x);
30    }
31 }
32
33 void tarjan(int n) {
34     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
35         if (!dfn[i])
36             dfs(i);
37 }
38

```

#### 3.3.2 割点 点双

```

1 vector<int> G[maxn], bcc[maxn];
2 int dfn[maxn], low[maxn], tim = 0, bccid[maxn], bcc_cnt
3 → = 0;
4 bool iscut[maxn];
5
6 pair<int, int> stk[maxn];
7 int stk_cnt = 0;
8
9 void dfs(int x, int pr) {
10    int child = 0;
11    dfn[x] = low[x] = ++tim;
12
13    for (int y : G[x]) {
14        if (!dfn[y]) {
15            stk[++stk_cnt] = make_pair(x, y);
16            child++;
17            dfs(y, x);
18            low[x] = min(low[x], low[y]);
19
20            if (low[y] ≥ dfn[x]) {
21                iscut[x] = true;
22                bcc_cnt++;
23            }
24        }
25    }
26 }
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38

```

```

24     auto pi = stk[stk_cnt--];
25
26     if (bccid[pi.first] != bcc_cnt) {
27         bcc[bcc_cnt].push_back(pi.first);
28         bccid[pi.first] = bcc_cnt;
29     }
30     if (bccid[pi.second] != bcc_cnt) {
31         bcc[bcc_cnt].push_back(pi.second);
32         bccid[pi.second] = bcc_cnt;
33     }
34
35     if (pi.first == x && pi.second ==
36         ~y)
37         break;
38     }
39 }
40 else if (dfn[y] < dfn[x] && y != pr) {
41     stk[++stk_cnt] = make_pair(x, y);
42     low[x] = min(low[x], dfn[y]);
43 }
44
45 if (!pr && child == 1)
46     iscut[x] = false;
47 }
48
49 void Tarjan(int n) {
50     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
51         if (!dfn[i])
52             dfs(i, 0);
53 }

```

### 3.3.3 桥 边双

```

1 int u[maxe], v[maxe];
2 vector<int> G[maxn]; // 存的是边的编号
3
4 int stk[maxn], top, dfn[maxn], low[maxn], tim, bcc_cnt;
5 vector<int> bcc[maxn];
6
7 bool isbridge[maxe];
8
9 void dfs(int x, int pr) { // 这里pr是入边的编号
10     dfn[x] = low[x] = ++tim;
11     stk[++top] = x;
12
13     for (int i : G[x]) {
14         int y = (u[i] == x ? v[i] : u[i]);
15
16         if (!dfn[y]) {
17             dfs(y, i);
18             low[x] = min(low[x], low[y]);
19
20             if (low[y] > dfn[x])
21                 bridge[i] = true;
22         }
23         else if (i != pr)
24             low[x] = min(low[x], dfn[y]);
25     }
26
27     if (dfn[x] == low[x]) {
28         bcc_cnt++;
29         int y;
30         do {
31             y = stk[top--];
32             bcc[bcc_cnt].push_back(y);
33         } while (y != x);
34     }

```

35 }

## 3.4 仙人掌

一般来说仙人掌问题都可以通过圆方树转成有两种点的树上问题来做。

### 3.4.1 仙人掌DP

```

1 struct edge {
2     int to, w, prev;
3 } e[maxn * 2];
4
5 vector<pair<int, int>> v[maxn];
6 vector<long long> d[maxn];
7 stack<int> stk;
8
9 int p[maxn];
10 bool vis[maxn], vise[maxn * 2];
11 int last[maxn], cnt;
12
13 long long f[maxn], g[maxn], sum[maxn];
14 int n, m, cnt;
15
16 void addedge(int x, int y, int w) {
17     v[x].push_back(make_pair(y, w));
18 }
19
20 void dfs(int x) {
21
22     vis[x] = true;
23
24     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev) {
25         if (vise[i ^ 1])
26             continue;
27
28         int y = e[i].to, w = e[i].w;
29
30         vise[i] = true;
31
32         if (!vis[y]) {
33             stk.push(i);
34             p[y] = x;
35             dfs(y);
36
37             if (!stk.empty() && stk.top() == i) {
38                 stk.pop();
39                 addedge(x, y, w);
40             }
41         }
42
43         else {
44             cnt++;
45
46             long long tmp = w;
47             while (!stk.empty()) {
48                 int i = stk.top();
49                 stk.pop();
50
51                 int yy = e[i].to, ww = e[i].w;
52
53                 addedge(cnt, yy, 0);
54
55                 d[cnt].push_back(tmp);
56
57                 tmp += ww;
58
59                 if (e[i ^ 1].to == y)
60                     break;
61             }
62         }
63     }
64 }

```

```

61     }
62
63     addedge(y, cnt, 0);
64
65     sum[cnt] = tmp;
66 }
67
68 }
69
70 void dp(int x) {
71
72     for (auto o : v[x]) {
73         int y = o.first, w = o.second;
74         dp(y);
75     }
76
77     if (x <= n) {
78         for (auto o : v[x]) {
79             int y = o.first, w = o.second;
80
81             f[x] += 2 * w + f[y];
82         }
83
84         g[x] = f[x];
85
86         for (auto o : v[x]) {
87             int y = o.first, w = o.second;
88
89             g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] - 2 * w + g[y]
90                         ↪ + w);
91         }
92     } else {
93         f[x] = sum[x];
94         for (auto o : v[x]) {
95             int y = o.first;
96
97             f[x] += f[y];
98         }
99
100        g[x] = f[x];
101
102        for (int i = 0; i < (int)v[x].size(); i++) {
103            int y = v[x][i].first;
104
105            g[x] = min(g[x], f[x] - f[y] + g[y] +
106                         ↪ min(d[x][i], sum[x] - d[x][i]));
107        }
108    }

```

```

15     return true;
16 }
17
18     return false;
19 }
20
21 int hungary() {
22     int ans = 0;
23
24     for (int i = 1; i <= n; i++)
25         if (!girl[i]) {
26             memset(vis, 0, sizeof(vis));
27             ans += dfs(i);
28         }
29
30     return ans;
31 }
32

```

### 3.5.2 Hopcroft-Karp二分图匹配

其实长得和Dinic差不多，或者说像匈牙利和Dinic的缝合怪。

```

1 vector<int> G[maxn];
2
3 int girl[maxn], boy[maxn]; // girl: 左边匹配右边 boy:
4   ↪ 右边匹配左边
5
6 bool vis[maxn]; // 右半的点是否已被访问
7 int dx[maxn], dy[maxn];
8 int q[maxn];
9
10 bool bfs(int n) {
11     memset(dx, -1, sizeof(int) * (n + 1));
12     memset(dy, -1, sizeof(int) * (n + 1));
13
14     int head = 0, tail = 0;
15     for (int i = 1; i <= n; i++)
16         if (!girl[i]) {
17             q[tail++] = i;
18             dx[i] = 0;
19         }
20
21     bool flag = false;
22
23     while (head != tail) {
24         int x = q[head++];
25
26         for (auto y : G[x])
27             if (dy[y] == -1) {
28                 dy[y] = dx[x] + 1;
29
30                 if (boy[y]) {
31                     if (dx[boy[y]] == -1) {
32                         dx[boy[y]] = dy[y] + 1;
33                         q[tail++] = boy[y];
34                     }
35                 } else
36                     flag = true;
37             }
38
39     }
40
41     return flag;
42 }
43
44 bool dfs(int x) {
45     for (int y : G[x])
46         if (!vis[y] && dy[y] == dx[x] + 1) {

```

## 3.5 二分图

### 3.5.1 匈牙利

```

1 vector<int> G[maxn];
2
3 int girl[maxn], boy[maxn]; // 男孩在左边，女孩在右边
4 bool vis[maxn];
5
6 bool dfs(int x) {
7     for (int y : G[x])
8         if (!vis[y]) {
9             vis[y] = true;
10
11             if (!boy[y] || dfs(boy[y])) {
12                 girl[x] = y;
13                 boy[y] = x;
14             }
15         }
16     }
17
18 }
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45

```

```

46     vis[y] = true;
47
48     if (boy[y] && !dfs(boy[y]))
49         continue;
50
51     girl[x] = y;
52     boy[y] = x;
53     return true;
54 }
55
56 return false;
57 }

58 int hopcroft_karp(int n) {
59     int ans = 0;
60
61     for (int x = 1; x ≤ n; x++) // 先贪心求出一组初始匹
→配, 当然不写贪心也行
62         for (int y : G[x])
63             if (!boy[y]) {
64                 girl[x] = y;
65                 boy[y] = x;
66                 ans++;
67                 break;
68             }
69
70     while (bfs(n)) {
71         memset(vis, 0, sizeof(bool) * (n + 1));
72
73         for (int x = 1; x ≤ n; x++)
74             if (!girl[x])
75                 ans += dfs(x);
76     }
77
78     return ans;
79 }
80

```

```

28     return true;
29 }

30 // bfs每个点
31 void bfs(int x) {
32     memset(q, 0, sizeof(q));
33     head = tail = 0;
34
35     q[tail++] = x;
36     visx[x] = true;
37
38     while (true) {
39         while (head != tail) {
40             int x = q[head++];
41
42             for (int y = 1; y ≤ N; y++)
43                 if (!visy[y]) {
44                     long long d = lx[x] + ly[y] - w[x]
→ [y];
45
46                     if (d < slack[y]) {
47                         p[y] = x;
48                         slack[y] = d;
49
50                     if (!slack[y] && check(y))
51                         return;
52                 }
53             }
54         }
55     }
56
57     long long d = INF;
58     for (int i = 1; i ≤ N; i++)
59         if (!visy[i])
60             d = min(d, slack[i]);
61
62     for (int i = 1; i ≤ N; i++) {
63         if (visx[i])
64             lx[i] -= d;
65
66         if (visy[i])
67             ly[i] += d;
68         else
69             slack[i] -= d;
70     }
71
72     for (int i = 1; i ≤ N; i++)
73         if (!visy[i] && !slack[i] && check(i))
74             return;
75 }
76
77 // 主过程
78 long long KM() {
79     for (int i = 1; i ≤ N; i++) {
80         // lx[i] = 0;
81         ly[i] = -INF;
82         // boy[i] = girl[i] = -1;
83
84         for (int j = 1; j ≤ N; j++)
85             ly[i] = max(ly[i], w[j][i]);
86     }
87
88     for (int i = 1; i ≤ N; i++) {
89         memset(slack, 0x3f, sizeof(slack));
90         memset(visx, 0, sizeof(visx));
91         memset(visy, 0, sizeof(visy));
92         bfs(i);
93     }
94 }

```

### 3.5.3 KM二分图最大权匹配

```

1 const long long INF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3f;
2
3 long long w[maxn][maxn], lx[maxn], ly[maxn],
→ slack[maxn];
4 // 边权 顶标 slack
5 // 如果要求最大权完美匹配就把不存在的边设为-INF, 否则所有
→ 边对0取max
6
7 bool visx[maxn], visy[maxn];
8
9 int boy[maxn], girl[maxn], p[maxn], q[maxn], head,
→ tail; // p : pre
10
11 int n, m, N, e;
12
13 // 增广
14 bool check(int y) {
15     visy[y] = true;
16
17     if (boy[y]) {
18         visx[boy[y]] = true;
19         q[tail++] = boy[y];
20         return false;
21     }
22
23     while (y) {
24         boy[y] = p[y];
25         swap(y, girl[p[y]]);
26     }
27

```

```

96 long long ans = 0;
97 for (int i = 1; i <= N; i++)
98 | ans += w[i][girl[i]];
99 return ans;
100 }

102 // 为了方便贴上主函数
103 int main() {
104
105     scanf("%d%d%d", &n, &m, &e);
106     N = max(n, m);
107
108     while (e--) {
109         int x, y, c;
110         scanf("%d%d%d", &x, &y, &c);
111         w[x][y] = max(c, 0);
112     }
113
114     printf("%lld\n", KM());
115
116     for (int i = 1; i <= n; i++) {
117         if (i > 1)
118             printf(" ");
119         printf("%d", w[i][girl[i]] > 0 ? girl[i] : 0);
120     }
121     printf("\n");
122
123     return 0;
124 }
```

### 3.5.4 二分图原理

- 最大匹配的可行边与必须边，关键点

以下的“残量网络”指网络流图的残量网络。

- 可行边：一条边的两个端点在残量网络中处于同一个SCC，不论是正向边还是反向边。
- 必须边：一条属于当前最大匹配的边，且残量网络中两个端点不在同一个SCC中。
- 关键点(必须点)：这里不考虑网络流图而只考虑原始的图，将匹配边改成从右到左之后从左边的每个未匹配点进行floodfill，左边没有被标记的点即为关键点。右边同理。

- 独立集

二分图独立集可以看成最小割问题，割掉最少的点使得S和T不连通，则剩下的点自然都在独立集中。

所以独立集输出方案就是求出不在最小割中的点，独立集的必须点/可行点就是最小割的不可行点/非必须点。

割点等价于割掉它与源点或汇点相连的边，可以通过设置中间的边权为无穷以保证不能割掉中间的边，然后按照上面的方法判断即可。

(由于一个点最多流出一个流量，所以中间的边权其实是可以任取的。)

- 二分图最大权匹配

二分图最大权匹配的对偶问题是最小顶标和问题，即：为图中的每个顶点赋予一个非负顶标，使得对于任意一条边，两端点的顶标和都要不小于边权，最小化顶标之和。

显然KM算法的原理实际上就是求最小顶标和。

## 3.6 一般图匹配

### 3.6.1 高斯消元

```

1 // 这个算法基于Tutte定理和高斯消元，思维难度相对小一些,
2 // → 也更方便进行可行边的判定
3 // 注意这个算法复杂度是满的，并且常数有点大，而带花树通常
4 // → 是跑不满的
5 // 以及，根据Tutte定理，如果求最大匹配的大小的话直接输
6 // → 出Tutte矩阵的秩/2即可
```

```

4 // 需要输出方案时才需要再写后面那些乱七八糟的东西
5
6
7 // 复杂度和常数所限，1s之内500已经是这个算法的极限了
8 const int maxn = 505, p = 1000000007; // p可以是任意10^9以内的质数
9
10 // 全局数组和变量定义
11 int A[maxn][maxn], B[maxn][maxn], t[maxn][maxn],
12 |→ id[maxn], a[maxn];
13 bool row[maxn] = {false}, col[maxn] = {false};
14 int n, m, girl[maxn]; // girl是匹配点，用来输出方案
15
16 // 为了方便使用，贴上主函数
17 // 需要调用高斯消元和eliminate
18 int main() {
19     srand(19260817);
20
21     scanf("%d%d", &n, &m); // 点数和边数
22     while (m--) {
23         int x, y;
24         scanf("%d%d", &x, &y);
25         A[x][y] = rand() % p;
26         A[y][x] = -A[x][y]; // Tutte矩阵是反对称矩阵
27     }
28
29     for (int i = 1; i <= n; i++)
30         id[i] = i; // 输出方案用的，因为高斯消元的时候会
31         → 交换列
32     memcpy(t, A, sizeof(t));
33     Gauss(A, NULL, n);
34
35     m = n;
36     n = 0; // 这里变量复用纯属个人习惯
37
38     for (int i = 1; i <= m; i++) {
39         if (A[id[i]][id[i]])
40             a[++n] = i; // 找出一个极大满秩子矩阵
41
42     for (int i = 1; i <= n; i++) {
43         for (int j = 1; j <= n; j++)
44             A[i][j] = t[a[i]][a[j]];
45
46     Gauss(A, B, n);
47
48     for (int i = 1; i <= n; i++) {
49         if (!girl[a[i]])
50             for (int j = i + 1; j <= n; j++)
51                 if (!girl[a[j]] && t[a[i]][a[j]] &&
52                     → B[j][i]) {
53                     // 注意上面那句if的写法，现在t是邻接
54                     → 矩阵的备份，
55                     // 逆矩阵j行i列不为0当且仅当这条边可
56                     → 行
57                     girl[a[i]] = a[j];
58                     girl[a[j]] = a[i];
59
60                     eliminate(i, j);
61                     eliminate(j, i);
62                     break;
63                 }
64
65     }
66
67     printf("%d\n", n / 2);
68     for (int i = 1; i <= m; i++)
69         printf("%d ", girl[i]);
70
71     return 0;
72 }
73
74 // 高斯消元 O(n^3)
```

```

68 // 在传入B时表示计算逆矩阵, 传入NULL则只需计算矩阵的秩
69 void Gauss(int A[][maxn], int B[][maxn], int n) {
70     if(B) {
71         memset(B, 0, sizeof(t));
72         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
73             B[i][i] = 1;
74         }
75
76         for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
77             if (!A[i][i]) {
78                 for (int j = i + 1; j ≤ n; j++) {
79                     if (A[j][i]) {
80                         swap(id[i], id[j]);
81                         for (int k = i; k ≤ n; k++) {
82                             swap(A[i][k], A[j][k]);
83
84                             if (B)
85                                 for (int k = 1; k ≤ n; k++)
86                                     swap(B[i][k], B[j][k]);
87                             break;
88                         }
89
90             if (!A[i][i])
91                 continue;
92         }
93
94         int inv = qpow(A[i][i], p - 2);
95
96         for (int j = 1; j ≤ n; j++)
97             if (i != j && A[j][i]) {
98                 int t = (long long)A[j][i] * inv % p;
99
100            for (int k = i; k ≤ n; k++)
101                if (A[i][k])
102                    A[j][k] = (A[j][k] - (long
103                                     → long)t * A[i][k]) % p;
104
105            if (B)
106                for (int k = 1; k ≤ n; k++)
107                    if (B[i][k])
108                        B[j][k] = (B[j][k] - (long
109                                     → long)t * B[i][k]) % p;
110
111        if (B)
112            for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
113                int inv = qpow(A[i][i], p - 2);
114
115                for (int j = 1; j ≤ n; j++)
116                    if (B[i][j])
117                        B[i][j] = (long long)B[i][j] * inv
118                                     → % p;
119    }
120
121 // 消去一行一列 O(n^2)
122 void eliminate(int r, int c) {
123     row[r] = col[c] = true; // 已经被消掉
124
125     int inv = qpow(B[r][c], p - 2);
126
127     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
128         if (!row[i] && B[i][c]) {
129             int t = (long long)B[i][c] * inv % p;
130
131             for (int j = 1; j ≤ n; j++)
132                 if (!col[j] && B[r][j])
133                     B[i][j] = (B[i][j] - (long long)t *
134                                     → B[r][j]) % p;
135     }
136 }

```

```

134     }
135 }

```

### 3.6.2 带花树

```

1 // 带花树通常比高斯消元快很多, 但在只需要求最大匹配大小的
2 → 时候并没有高斯消元好写
3 // 当然输出方案要方便很多
4
5 // 全局数组与变量定义
6 vector<int> G[maxn];
7 int girl[maxn], f[maxn], t[maxn], p[maxn], vis[maxn],
8      → tim, q[maxn], head, tail;
9 int n, m;
10
11 // 封装好的主过程 O(nm)
12 int blossom() {
13     int ans = 0;
14
15     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
16         if (!girl[i])
17             ans += bfs(i);
18
19     return ans;
20
21 // bfs找增广路 O(m)
22 bool bfs(int s) {
23     memset(t, 0, sizeof(t));
24     memset(p, 0, sizeof(p));
25
26     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
27         f[i] = i; // 并查集
28
29     head = tail = 0;
30     q[tail++] = s;
31     t[s] = 1;
32
33     while (head != tail) {
34         int x = q[head++];
35         for (int y : G[x]) {
36             if (findroot(y) == findroot(x) || t[y] ==
37                                     → 2)
38                 continue;
39
40             if (!t[y]) {
41                 t[y] = 2;
42                 p[y] = x;
43
44                 if (!girl[y]) {
45                     for (int u = y, t; u; u = t) {
46                         t = girl[p[u]];
47                         girl[p[u]] = u;
48                         girl[u] = p[u];
49                     }
50                 }
51             }
52
53             t[girl[y]] = 1;
54             q[tail++] = girl[y];
55         }
56         else if (t[y] == 1) {
57             int z = LCA(x, y);
58
59             shrink(x, y, z);
60             shrink(y, x, z);
61         }
62     }
63 }

```

```

61     }
62 }
63 }
64
65     return false;
66 }
67
68 //缩奇环 O(n)
69 void shrink(int x, int y, int z) {
70     while (findroot(x) != z) {
71         p[x] = y;
72         y = girl[x];
73
74         if (t[y] == 2) {
75             t[y] = 1;
76             q[tail++] = y;
77         }
78
79         if (findroot(x) == x)
80             f[x] = z;
81         if (findroot(y) == y)
82             f[y] = z;
83
84         x = p[y];
85     }
86 }
87
88 //暴力找LCA O(n)
89 int LCA(int x, int y) {
90     tim++;
91     while (true) {
92         if (x) {
93             x = findroot(x);
94
95             if (vis[x] == tim)
96                 return x;
97             else {
98                 vis[x] = tim;
99                 x = p[girl[x]];
100            }
101        }
102        swap(x, y);
103    }
104 }
105
106 //并查集的查找 O(1)
107 int findroot(int x) {
108     return x == f[x] ? x : (f[x] = findroot(f[x]));
109 }

```

### 3.6.3 带权带花树

Forked from the template of Imperisble Night.  
(有一说一这玩意实在太难写了，抄之前建议先想想算法是不是假的  
或者有SB做法)

```

    }
}

return false;
}

//缩奇环 O(n)
void shrink(int x, int y, int z) {
    while (findroot(x) != z) {
        p[x] = y;
        y = girl[x];

        if (t[y] == 2) {
            t[y] = 1;
            q[tail++] = y;
        }

        if (findroot(x) == x)
            f[x] = z;
        if (findroot(y) == y)
            f[y] = z;

        x = p[y];
    }
}

//暴力找LCA O(n)
int LCA(int x, int y) {
    tim++;
    while (true) {
        if (x) {
            x = findroot(x);

            if (vis[x] == tim)
                return x;
            else {
                vis[x] = tim;
                x = p[girl[x]];
            }
        }
        swap(x, y);
    }
}

//并查集的查找 O(1)
int findroot(int x) {
    return x == f[x] ? x : (f[x] = findroot(f[x]));
}

3.6.3 带权带花树

Forked from the template of Imperisble Night.  

(有一说一这玩意实在太难写了，抄之前建议先想想算法是不是假的  

或者有SB做法)

//maximum weight blossom, change g[u][v].w to INF -  

→ g[u][v].w when minimum weight blossom is needed  

//type of ans is long long  

//replace all int to long long if weight of edge is  

→ long long

struct WeightGraph {
    static const int INF = INT_MAX;
    static const int MAXN = 400;
    struct edge{
        int u, v, w;
        edge() {}
    };
    int n, n_x;
    edge g[MAXN * 2 + 1][MAXN * 2 + 1];
    int lab[MAXN * 2 + 1];
    int match[MAXN * 2 + 1], slack[MAXN * 2 + 1];
    → st[MAXN * 2 + 1], pa[MAXN * 2 + 1];
    int flower_from[MAXN * 2 + 1][MAXN+1], S[MAXN * 2 +
    → 1], vis[MAXN * 2 + 1];
    vector<int> flower[MAXN * 2 + 1];
    queue<int> q;
    inline int e_delta(const edge &e){ // does not work
        → inside blossoms
        return lab[e.u] + lab[e.v] - g[e.u][e.v].w * 2;
    }
    inline void update_slack(int u, int x){
        if(!slack[x] || e_delta(g[u][x]) <
        → e_delta(g[slack[x]][x]))
            slack[x] = u;
    }
    inline void set_slack(int x){
        slack[x] = 0;
        for(int u = 1; u ≤ n; ++u)
            if(g[u][x].w > 0 && st[u] != x && S[st[u]] ==
            → 0)
                update_slack(u, x);
    }
    void q_push(int x){
        if(x ≤ n)q.push(x);
        else for(size_t i = 0; i < flower[x].size(); i+
        → +)
            q.push(flower[x][i]);
    }
    inline void set_st(int x, int b){
        st[x]=b;
        if(x > n) for(size_t i = 0; i <
        → flower[x].size(); ++i)
            set_st(flower[x][i], b);
    }
    inline int get_pr(int b, int xr){
        int pr = find(flower[b].begin(),
        → flower[b].end(), xr) - flower[b].begin();
        if(pr % 2 == 1){
            reverse(flower[b].begin() + 1,
            → flower[b].end());
            return (int)flower[b].size() - pr;
        } else return pr;
    }
    inline void set_match(int u, int v){
        match[u]=g[u][v].v;
        if(u > n){
            edge e=g[u][v];
            int xr = flower_from[u][e.u], pr=get_pr(u,
            → xr);
            for(int i = 0; i < pr; ++i)
                set_match(flower[u][i], flower[u][i ^
                → 1]);
            set_match(xr, v);
            rotate(flower[u].begin(),
            → flower[u].begin() + pr, flower[u].end());
        }
    }
    inline void augment(int u, int v){
        for(; ; ){
            int xnv=st[match[u]];
            set_match(u, v);
            if(!xnv) return;
            set_match(xnv, st[pa[xnv]]);
            u=st[pa[xnv]], v=xnv;
        }
    }
}

```

```

70 }
71 inline int get_lca(int u, int v){
72     static int t=0;
73     for(;; u || v; swap(u, v)){
74         if(u == 0) continue;
75         if(vis[u] == t) return u;
76         vis[u] = t;
77         u = st[match[u]];
78         if(u) u = st[pa[u]];
79     }
80     return 0;
81 }
82 inline void add_blossom(int u, int lca, int v){
83     int b = n + 1;
84     while(b <= n_x && st[b]) ++b;
85     if(b > n_x) ++n_x;
86     lab[b] = 0, S[b] = 0;
87     match[b] = match[lca];
88     flower[b].clear();
89     flower[b].push_back(lca);
90     for(int x = u, y; x != lca; x = st[pa[y]]) {
91         flower[b].push_back(x),
92         flower[b].push_back(y = st[match[x]]),
93         q_push(y);
94     }
95     reverse(flower[b].begin() + 1,
96             flower[b].end());
97     for(int x = v, y; x != lca; x = st[pa[y]]) {
98         flower[b].push_back(x),
99         flower[b].push_back(y = st[match[x]]),
100        q_push(y);
101    }
102    set_st(b, b);
103    for(int x = 1; x <= n_x; ++x) g[b][x].w = g[x]
104        ↪ [b].w = 0;
105    for(int x = 1; x <= n; ++x) flower_from[b][x] =
106        ↪ 0;
107    for(size_t i = 0 ; i < flower[b].size(); ++i){
108        int xs = flower[b][i];
109        for(int x = 1; x <= n_x; ++x)
110            if(g[b][x].w == 0 || e_delta(g(xs)[x])
111                ↪ < e_delta(g[b][x]))
112                g[b][x] = g[xs][x], g[x][b] = g[x]
113                    ↪ [xs];
114        for(int x = 1; x <= n; ++x)
115            if(flower_from[xs][x]) flower_from[b]
116                ↪ [x] = xs;
117    }
118    set_slack(b);
119 }
120 inline void expand_blossom(int b){ // S[b] == 1
121     for(size_t i = 0; i < flower[b].size(); ++i)
122         set_st(flower[b][i], flower[b][i]);
123     int xr = flower_from[b][g[b][pa[b]].u], pr =
124         ↪ get_pr(b, xr);
125     for(int i = 0; i < pr; i += 2){
126         int xs = flower[b][i], xns = flower[b][i +
127             ↪ 1];
128         pa[xs] = g[xns][xs].u;
129         S[xs] = 1, S[xns] = 0;
130         slack[xs] = 0, set_slack(xns);
131         q_push(xns);
132     }
133     S[xr] = 1, pa[xr] = pa[b];
134     for(size_t i = pr + 1; i < flower[b].size(); +
135         ↪ +i){
136         int xs = flower[b][i];
137         S[xs] = -1, set_slack(xs);
138     }

```

```

30     st[b] = 0;
31 }
32 inline bool on_found_edge(const edge &e){
33     int u = st[e.u], v = st[e.v];
34     if(S[v] == -1){
35         pa[v] = e.u, S[v] = 1;
36         int nu = st[match[v]];
37         slack[v] = slack[nu] = 0;
38         S[nu] = 0, q.push(nu);
39     }else if(S[v] == 0){
40         int lca = get_lca(u, v);
41         if(!lca) return augment(u, v), augment(v,
42             ↪ u), true;
43         else add_blossom(u, lca, v);
44     }
45     return false;
46 }
47 inline bool matching(){
48     memset(S + 1, -1, sizeof(int) * n_x);
49     memset(slack + 1, 0, sizeof(int) * n_x);
50     q = queue<int>();
51     for(int x = 1; x ≤ n_x; ++x)
52         if(st[x] == x && !match[x]) pa[x] = 0,
53             ↪ S[x] = 0, q.push(x);
54     if(q.empty()) return false;
55     for(;;){
56         while(q.size()){
57             int u = q.front(); q.pop();
58             if(S[st[u]] == 1) continue;
59             for(int v = 1; v ≤ n; ++v)
60                 if(g[u][v].w > 0 && st[u] != st[v])
61                     ↪ {
62                         if(e_delta(g[u][v]) == 0){
63                             if(on_found_edge(g[u]
64                                 ↪ [v])) return true;
65                         }else update_slack(u, st[v]);
66                     }
67             }
68             int d = INF;
69             for(int b = n + 1; b ≤ n_x; ++b)
70                 if(st[b] == b && S[b] == 1) d = min(d,
71                     ↪ lab[b]/2);
72             for(int x = 1; x ≤ n_x; ++x)
73                 if(st[x] == x && slack[x]){
74                     if(S[x] == -1) d = min(d,
75                         ↪ e_delta(g[slack[x]][x]));
76                     else if(S[x] == 0) d = min(d,
77                         ↪ e_delta(g[slack[x]][x])/2);
78                 }
79             for(int u = 1; u ≤ n; ++u){
80                 if(S[st[u]] == 0){
81                     if(lab[u] ≤ d) return 0;
82                     lab[u] -= d;
83                 }else if(S[st[u]] == 1) lab[u] += d;
84             }
85             for(int b = n+1; b ≤ n_x; ++b)
86                 if(st[b] == b){
87                     if(S[st[b]] == 0) lab[b] += d * 2;
88                     else if(S[st[b]] == 1) lab[b] -= d
89                         ↪ * 2;
90                 }
91             q = queue<int>();
92             for(int x = 1; x ≤ n_x; ++x)
93                 if(st[x] == x && slack[x] &&
94                     ↪ st[slack[x]] != x &&
95                     ↪ e_delta(g[slack[x]][x]) == 0)
96                     if(on_found_edge(g[slack[x]
97                         ↪ [x])) return true;
98             }
99         }
100     }
101 }
```

```

186     |     for(int b = n + 1; b <= n_x; ++b)
187     |     |     if(st[b] == b && S[b] == 1 && lab[b] ==
188     |     |     |     ~0)expand_blossom(b);
189     |
190     |     return false;
191 }
192 inline pair<long long, int> solve(){
193     memset(match + 1, 0, sizeof(int) * n);
194     n_x = n;
195     int n_matches = 0;
196     long long tot_weight = 0;
197     for(int u = 0; u <= n; ++u) st[u] = u,
198         |     flower[u].clear();
199     int w_max = 0;
200     for(int u = 1; u <= n; ++u)
201         |     for(int v = 1; v <= n; ++v){
202             |             flower_from[u][v] = (u == v ? u : 0);
203             |             w_max = max(w_max, g[u][v].w);
204         }
205     for(int u = 1; u <= n; ++u) lab[u] = w_max;
206     while(matching()) ++n_matches;
207     for(int u = 1; u <= n; ++u)
208         |     if(match[u] && match[u] < u)
209             |             tot_weight += g[u][match[u]].w;
210     return make_pair(tot_weight, n_matches);
211 }
212 inline void init(){
213     for(int u = 1; u <= n; ++u)
214         |     for(int v = 1; v <= n; ++v)
215             |             g[u][v]=edge(u, v, 0);
216 }
217 };

```

### 3.6.4 原理

设图 $G$ 的Tutte矩阵是 $\tilde{A}$ , 首先是最基础的引理:

- $G$ 的最大匹配大小是 $\frac{1}{2}\text{rank } \tilde{A}$ .
- $(\tilde{A}^{-1})_{i,j} \neq 0$ 当且仅当 $G - \{v_i, v_j\}$ 有完美匹配.  
(考虑到逆矩阵与伴随矩阵的关系, 这是显然的.)

构造最大匹配的方法见板子. 对于更一般的问题, 可以借助构造方法转化为完美匹配问题.

设最大匹配的大小为 $k$ , 新建 $n - 2k$ 个辅助点, 让它们和其他所有点连边, 那么如果一个点匹配了一个辅助点, 就说明它在原图的匹配中不匹配任何点.

- 最大匹配的可行边: 对原图中的任意一条边 $(u, v)$ , 如果删掉 $u, v$ 后新图仍然有完美匹配(也就是 $\tilde{A}_{u,v}^{-1} \neq 0$ ), 则它是一条可行边.
- 最大匹配的必须边: 待补充
- 最大匹配的必须点: 可以删掉这个点和一个辅助点, 然后判断剩下的图是否还有完美匹配, 如果有则说明它不是必须的, 否则是必须的. 只需要用到逆矩阵即可.
- 最大匹配的可行点: 显然对于任意一个点, 只要它不是孤立点, 就是可行点.

## 3.7 支配树

记得建反图!

```

1 vector<int> G[maxn], R[maxn], son[maxn]; // R是反图,
2     |     → son存的是sdom树上的儿子
3
4 int ufs[maxn];
5
6 int idom[maxn], sdom[maxn], anc[maxn]; // anc:
    |     → sdom的dfn最小的祖先

```

```

7 int p[maxn], dfn[maxn], id[maxn], tim;
8
9 int findufs(int x) {
10     if (ufs[x] == x)
11         return x;
12
13     int t = ufs[x];
14     ufs[x] = findufs(ufs[x]);
15
16     if (dfn[sdom[anc[x]]] > dfn[sdom[anc[t]]])
17         anc[x] = anc[t];
18
19     return ufs[x];
20 }
21
22 void dfs(int x) {
23     dfn[x] = ++tim;
24     id[tim] = x;
25     sdom[x] = x;
26
27     for (int y : G[x])
28         if (!dfn[y]) {
29             p[y] = x;
30             dfs(y);
31         }
32 }
33
34 void get_dominator(int n) {
35     for (int i = 1; i <= n; i++)
36         ufs[i] = anc[i] = i;
37
38 dfs(1);
39
40 for (int i = n; i > 1; i--) {
41     int x = id[i];
42
43     for (int y : R[x])
44         if (dfn[y]) {
45             findufs(y);
46             if (dfn[sdom[x]] > dfn[sdom[anc[y]]])
47                 sdom[x] = sdom[anc[y]];
48         }
49
50     son[sdom[x]].push_back(x);
51     ufs[x] = p[x];
52
53     for (int u : son[p[x]]) {
54         findufs(u);
55         idom[u] = (sdom[u] == sdom[anc[u]] ? p[x] :
56                     anc[u]);
57     }
58
59     son[p[x]].clear();
60
61     for (int i = 2; i <= n; i++) {
62         int x = id[i];
63
64         if (idom[x] != sdom[x])
65             idom[x] = idom[idom[x]];
66
67         son[idom[x]].push_back(x);
68     }
69 }

```

## 3.8 2-SAT

如果限制满足对称性(每个命题的逆否命题对应的边也存在), 那么可以使用Tarjan算法求SCC搞定.

具体来说就是，如果某个变量的两个点在同一SCC中则显然无解，否则按拓扑序倒序尝试选择每个SCC即可。

由于Tarjan算法的特性，找到SCC的顺序就是拓扑序倒序，所以判断完是否有解之后，每个变量只需要取SCC编号较小的那个。

```

1 if (!ok)
2     printf("IMPOSSIBLE\n");
3 else {
4     printf("POSSIBLE\n");
5
6     for (int i = 1; i <= n; i++)
7         printf("%d%c", sccid[i * 2 - 1] > sccid[i * 2],
8             i < n ? ' ' : '\n');
9 }
```

如果要字典序最小就用DFS，注意可以压位优化。另外代码是0-base的。

```

1 bool vis[maxn];
2 int stk[maxn], top;
3
4 // 主函数
5 for (int i = 0; i < n; i += 2)
6     if (!vis[i] && !vis[i ^ 1]) {
7         top = 0;
8         if (!dfs(i)) {
9             while (top)
10                 vis[stk[top--]] = false;
11
12             if (!dfs(i + 1))
13                 bad = true;
14             break;
15         }
16     }
17
18 // 最后stk中的所有元素就是选中的值
19
20 // dfs
21 bool dfs(int x) {
22     if (vis[x ^ 1])
23         return false;
24
25     if (vis[x])
26         return true;
27
28     vis[x] = true;
29     stk[++top] = x;
30
31     for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
32         if (!dfs(G[x][i]))
33             return false;
34
35     return true;
36 }
```

```

10 memset(last, -1, sizeof(last));
11
12 void AddEdge(int x, int y, int z) {
13     e[len].to = y;
14     e[len].cap = z;
15     e[len].prev = last[x];
16     last[x] = len++;
17 }
18
19 void addedge(int x, int y, int z) {
20     AddEdge(x, y, z);
21     AddEdge(y, x, 0);
22 }
23
24 void bfs() {
25     int head = 0, tail = 0;
26     memset(d, -1, sizeof(int) * (t + 5));
27     q[tail++] = s;
28     d[s] = 0;
29
30     while (head != tail) {
31         int x = q[head++];
32         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
33             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == -1) {
34                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
35                 q[tail++] = e[i].to;
36             }
37     }
38 }
39
40 int dfs(int x, int a) {
41     if (x == t || !a)
42         return a;
43
44     int flow = 0, f;
45     for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
46         if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] == d[x] + 1 &&
47             (f = dfs(e[i].to, min(e[i].cap, a))) > 0) {
48             e[i].cap -= f;
49             e[i ^ 1].cap += f;
50             flow += f;
51             a -= f;
52
53             if (!a)
54                 break;
55         }
56
57     return flow;
58 }
59
60 int Dinic() {
61     int flow = 0;
62     while (bfs(), ~d[t]) {
63         memcpy(cur, last, sizeof(int) * (t + 5));
64         flow += dfs(s, inf);
65     }
66     return flow;
67 }
```

## 3.9 最大流

### 3.9.1 Dinic

```

1 // 注意Dinic适用于二分图或分层图，对于一般稀疏图ISAP更
2 // 优，稠密图则HLPP更优
3
4 struct edge {
5     int to, cap, prev;
6 } e[maxn * 2];
7
8 int last[maxn], len, d[maxn], cur[maxn], q[maxn];
9
// main函数里要初始化
```

### 3.9.2 ISAP

可能有毒，慎用。

```

1 // 注意ISAP适用于一般稀疏图，对于二分图或分层图情
2 // 况Dinic比较优，稠密图则HLPP更优
3
4 // 边的定义
// 这里没有记录起点和反向边，因为反向边即为正向边xor 1,
// → 起点即为反向边的终点
```

```

5 struct edge {
6     int to, cap, prev;
7 } e[maxe * 2];
8
9 // 全局变量和数组定义
10 int last[maxn], cnte = 0, d[maxn], p[maxn], c[maxn],
11    ~cur[maxn], q[maxn];
12 int n, m, s, t; // s, t一定要开成全局变量
13
14 void AddEdge(int x, int y, int z) {
15     e[cnte].to = y;
16     e[cnte].cap = z;
17     e[cnte].prev = last[x];
18     last[x] = cnte++;
19 }
20
21 void addedge(int x, int y, int z) {
22     AddEdge(x, y, z);
23     AddEdge(y, x, 0);
24 }
25
26 // 预处理到t的距离标号
27 // 在测试数据组数较少时可以省略, 把所有距离标号初始化为0
28 void bfs() {
29     memset(d, -1, sizeof(d));
30
31     int head = 0, tail = 0;
32     d[t] = 0;
33     q[tail++] = t;
34
35     while (head != tail) {
36         int x = q[head++];
37
38         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
39             if (e[i ^ 1].cap && d[e[i].to] == -1) {
40                 d[e[i].to] = d[x] + 1;
41                 q[tail++] = e[i].to;
42             }
43     }
44 }
45
46 // augment函数 O(n) 沿增广路增广一次, 返回增广的流量
47 int augment() {
48     int a = (~0u) >> 1; // INT_MAX
49
50     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
51         a = min(a, e[p[x]].cap);
52
53     for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
54         e[p[x]].cap -= a;
55         e[p[x] ^ 1].cap += a;
56     }
57
58     return a;
59 }
60
61 // 主过程 O(n^2 m), 返回最大流的流量
62 // 注意这里的n是编号最大值, 在这个值不为n的时候一定要开个
63 // 变量记录下来并修改代码
64 int ISAP() {
65     bfs();
66
67     memcpy(cur, last, sizeof(cur));
68
69     int x = s, flow = 0;
70
71     while (d[s] < n) {
72         if (x == t) { // 如果走到了t就增广一次, 并返
73             // 回s重新找增广路
74
75             flow += augment();
76             x = s;
77         }
78
79         bool ok = false;
80         for (int &i = cur[x]; ~i; i = e[i].prev)
81             if (e[i].cap && d[x] == d[e[i].to] + 1) {
82                 p[e[i].to] = i;
83                 x = e[i].to;
84             }
85
86         if (!ok) { // 修改距离标号
87             int tmp = n - 1;
88             for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
89                 if (e[i].cap)
90                     tmp = min(tmp, d[e[i].to] + 1);
91
92             if (!--c[d[x]])
93                 break; // gap优化, 一定要加上
94
95             c[d[x]] = tmp++;
96             cur[x] = last[x];
97
98             if (x != s)
99                 x = e[p[x] ^ 1].to;
100
101        }
102    }
103
104 // 重要! main函数最前面一定要加上如下初始化
105 memset(last, -1, sizeof(last));
106

```

### 3.9.3 HLPP 最高标号预流推进

```

1 constexpr int maxn = 1205, maxe = 120005;
2
3 struct edge {
4     int to, cap, prev;
5 } e[maxe * 2];
6
7 int n, m, s, t;
8 int last[maxn], cnte;
9 int h[maxn], gap[maxn * 2];
10 long long ex[maxn]; // 多余流量
11 bool inq[maxn];
12
13 struct cmp {
14     bool operator()(int x, int y) const {
15         return h[x] < h[y];
16     }
17 };
18
19 priority_queue<int, vector<int>, cmp> heap;
20
21 void adde(int x, int y, int z) {
22     e[cnte].to = y;
23     e[cnte].cap = z;
24     e[cnte].prev = last[x];
25     last[x] = cnte++;
26 }
27
28 void addedge(int x, int y, int z) {
29     adde(x, y, z);
30     adde(y, x, 0);
31 }

```

```

32
33 bool bfs() {
34     static int q[maxn];
35
36     fill(h, h + n + 1, 2 * n); // 如果没有全局的n, 记得
37     // 改这里
38     int head = 0, tail = 0;
39     q[tail++] = t;
40     h[t] = 0;
41
42     while (head < tail) {
43         int x = q[head++];
44         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
45             if (e[i ^ 1].cap && h[e[i].to] > h[x] + 1)
46                 // {
47                 h[e[i].to] = h[x] + 1;
48                 q[tail++] = e[i].to;
49             }
50
51     return h[s] < 2 * n;
52 }
53
54 void push(int x) {
55     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
56         if (e[i].cap && h[x] == h[e[i].to] + 1) {
57             int d = min(ex[x], (long long)e[i].cap);
58
59             e[i].cap -= d;
60             e[i ^ 1].cap += d;
61             ex[x] -= d;
62             ex[e[i].to] += d;
63
64             if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
65                 !inq[e[i].to]) {
66                 heap.push(e[i].to);
67                 inq[e[i].to] = true;
68             }
69
70         }
71 }
72
73 void relabel(int x) {
74     h[x] = 2 * n;
75
76     for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
77         if (e[i].cap)
78             h[x] = min(h[x], h[e[i].to] + 1);
79 }
80
81 long long hlpp() {
82     if (!bfs())
83         return 0;
84
85     // memset(gap, 0, sizeof(int) * 2 * n);
86     h[s] = n;
87
88     for (int i = 1; i <= n; i++)
89         gap[h[i]]++;
90
91     for (int i = last[s]; ~i; i = e[i].prev)
92         if (e[i].cap) {
93             int d = e[i].cap;
94
95             e[i].cap -= d;
96             e[i ^ 1].cap += d;
97             ex[s] -= d;
98             ex[e[i].to] += d;

```

```

99
100    if (e[i].to != s && e[i].to != t &&
101        !inq[e[i].to]) {
102        heap.push(e[i].to);
103        inq[e[i].to] = true;
104    }
105
106    while (!heap.empty()) {
107        int x = heap.top();
108        heap.pop();
109        inq[x] = false;
110
111        push(x);
112        if (ex[x]) {
113            if (!--gap[h[x]]) { // gap
114                for (int i = 1; i <= n; i++)
115                    if (i != s && i != t && h[i] >
116                        h[x])
117                        h[i] = n + 1;
118
119            relabel(x);
120            ++gap[h[x]];
121            heap.push(x);
122            inq[x] = true;
123        }
124
125    }
126
127    return ex[t];
128
129 //记得初始化
130 memset(last, -1, sizeof(last));

```

## 3.10 费用流

### 3.10.1 SPFA费用流

```

1 constexpr int maxn = 20005, maxm = 200005;
2
3 struct edge {
4     int to, prev, cap, w;
5 } e[maxm * 2];
6
7 int last[maxn], cnte, d[maxn], p[maxn]; // 记得把last初
8 // 始化成-1, 不然会死循环
9 bool inq[maxn];
10
11 void spfa(int s) {
12
13     memset(d, -63, sizeof(d));
14     memset(p, -1, sizeof(p));
15
16     queue<int> q;
17
18     q.push(s);
19     d[s] = 0;
20
21     while (!q.empty()) {
22         int x = q.front();
23         q.pop();
24         inq[x] = false;
25
26         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
27             if (e[i].cap) {
28                 int y = e[i].to;
29
30                 if (d[x] + e[i].w > d[y]) {

```

```

30         p[y] = i;
31         d[y] = d[x] + e[i].w;
32         if (!inq[y]) {
33             q.push(y);
34             inq[y] = true;
35         }
36     }
37 }
38 }

39 }

40 int mcmf(int s, int t) {
41     int ans = 0;
42
43     while (spfa(s), d[t] > 0) {
44         int flow = 0x3f3f3f3f;
45         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
46             flow = min(flow, e[p[x]].cap);
47
48         ans += flow * d[t];
49
50         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
51             e[p[x]].cap -= flow;
52             e[p[x] ^ 1].cap += flow;
53         }
54     }
55
56     return ans;
57 }

58 void add(int x, int y, int c, int w) {
59     e[cnte].to = y;
60     e[cnte].cap = c;
61     e[cnte].w = w;
62
63     e[cnte].prev = last[x];
64     last[x] = cnte++;
65 }

66 void addedge(int x, int y, int c, int w) {
67     add(x, y, c, w);
68     add(y, x, 0, -w);
69 }

70 }
```

### 3.10.2 Dijkstra费用流

有的地方也叫原始-对偶费用流。

原理和求多源最短路的Johnson算法是一样的，都是给每个点维护一个势 $h_u$ ，使得对任何有向边 $u \rightarrow v$ 都满足 $w + h_u - h_v \geq 0$ 。

如果有负费用则从 $s$ 开始跑一遍SPFA初始化，否则可以直接初始化 $h_u = 0$ 。

每次增广时得到的路径长度就是 $d_{s,t} + h_t$ ，增广之后让所有 $h_u = h'_u + d'_{s,u}$ ，直到 $d_{s,t} = \infty$ (最小费用最大流)或 $d_{s,t} \geq 0$ (最小费用流)为止。

注意最大费用流要转成取负之后的最小费用流，因为Dijkstra求的是最短路。

```

1 struct edge {
2     int to, cap, prev, w;
3 } e[maxe * 2];
4
5 int last[maxn], cnte;
6
7 long long d[maxn], h[maxn];
8 int p[maxn];
9
10 bool vis[maxn];
11 int s, t;
12
13 void Adde(int x, int y, int z, int w) {
14     e[cnte].to = y;
```

```

15     e[cnte].cap = z;
16     e[cnte].w = w;
17     e[cnte].prev = last[x];
18     last[x] = cnte++;
19 }

20 void addedge(int x, int y, int z, int w) {
21     Adde(x, y, z, w);
22     Adde(y, x, 0, -w);
23 }

24 }

25 void dijkstra() {
26     memset(d, 63, sizeof(d));
27     memset(vis, 0, sizeof(vis));
28
29     priority_queue<pair<long long, int>> heap;
30
31     d[s] = 0;
32     heap.push(make_pair(0ll, s));
33
34     while (!heap.empty()) {
35         int x = heap.top().second;
36         heap.pop();
37
38         if (vis[x])
39             continue;
40
41         vis[x] = true;
42         for (int i = last[x]; ~i; i = e[i].prev)
43             if (e[i].cap > 0 && d[e[i].to] > d[x] +
44                 e[i].w + h[x] - h[e[i].to]) {
45                 d[e[i].to] = d[x] + e[i].w + h[x] -
46                 h[e[i].to];
47                 p[e[i].to] = i;
48                 heap.push(make_pair(-d[e[i].to],
49                                     e[i].to));
50             }
51     }
52 }
```

```

53 pair<long long, long long> mcmf() {
54     /*
55     spfa();
56     for (int i = 1; i <= t; i++)
57         h[i] = d[i];
58     // 如果初始有负权就像这样跑一遍SPFA预处理
59     */
60
61     long long flow = 0, cost = 0;
62
63     while (dijkstra(), d[t] < 0x3f3f3f3f) {
64         for (int i = 1; i <= t; i++)
65             h[i] += d[i];
66
67         int a = 0x3f3f3f3f;
68
69         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to)
70             a = min(a, e[p[x]].cap);
71
72         flow += a;
73         cost += (long long)a * h[t];
74
75         for (int x = t; x != s; x = e[p[x] ^ 1].to) {
76             e[p[x]].cap -= a;
77             e[p[x] ^ 1].cap += a;
78         }
79     }
80 }
```

```

81     return make_pair(flow, cost);
82 }
83
84 // 记得初始化
85 memset(last, -1, sizeof(last));

```

## 3.11 网络流原理

### 3.11.1 最大流

- 判断一条边是否必定满流

在残量网络中跑一遍Tarjan, 如果某条满流边的两端处于同一SCC中则说明它不一定满流. (因为可以找出包含反向边的环, 增广之后就不满流了.)

### 3.11.2 最小割

首先牢记最小割的定义: 选权值和尽量小的一些边, 使得删除这些边之后  $s$  无法到达  $t$ .

- 最小割输出一种方案

在残量网络上从  $S$  开始 floodfill, 源点可达的记为  $S$  集, 不可达的记为  $T$ , 如果一条边的起点在  $S$  集而终点在  $T$  集, 就将其加入最小割中.

- 最小割的可行边与必须边

- 可行边: 满流, 且残量网络上不存在  $u$  到  $v$  的路径, 也就是  $u$  和  $v$  不在同一 SCC 中. (实际上也就是最大流必定满流的边.)
- 必须边: 满流, 且残量网络上  $S$  可达  $u$ ,  $v$  可达  $T$ .

- 字典序最小的最小割

直接按字典序从小到大的顺序依次判断每条边能否在最小割中即可. 如果一条边是可行边, 我们就需要把它删掉, 同时进行退流,  $u \rightarrow s$  和  $t \rightarrow v$  都退掉等同于这条边容量的流量.

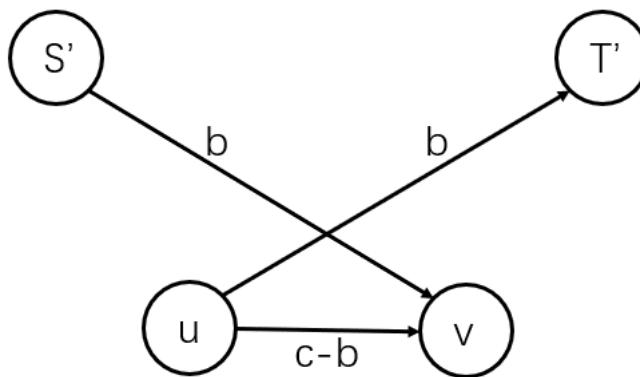
退流用Dinic实现即可.

### 3.11.3 费用流

### 3.11.4 上下界网络流

#### 有源汇上下界最大流

新建超级源汇  $S'$ ,  $T'$ , 然后如图所示转化每一条边.



然后从  $S'$  到  $S$ , 从  $T$  到  $T'$  分别连容量为正无穷的边即可.

因为附加边实际上算了两次流量, 所以最终答案应该减掉所有下界之和.

#### 有源汇上下界最小流

按照上面的方法转换后先跑一遍最大流, 然后撤掉超级源汇和附加边, 反过来跑一次最大流退流, 最大流减去退掉的流量就是最小流.

#### 无源汇上下界可行流

转化方法和上面的图是一样的, 只不过不需要考虑原有的源汇了.

在新图跑一遍最大流之后检查一遍辅助边, 如果有辅助边没满流则无解, 否则把每条边的流量加上  $b$  就是一组可行方案.

### 3.11.5 常见建图方法

- 最大流/费用流

流量不是很多的时候可以理解成很多条路径, 并且每条边可以经过的次数有限.

- 最小割

常用的模型是最大权闭合子图. 当然它并不是万能的, 因为限制条件可以带权值.

- 如果某些点全部在  $S$  集或者  $T$  集则获得一个正的收益  
把这个条件建成一个点, 向要求的点连  $\infty$  边, 然后  $s$  向它连  $\infty$  边.  
(如果是  $T$  集就都反过来)

那么如果它在  $S$  集就一定满足它要求的点都在  $S$  集, 反之如果是  $T$  集亦然.

- 如果两个点不在同一集合中则需要付出代价  
建双向边, 那显然如果它们不在同一集合中就需要割掉中间的边, 付出对应的代价.

- 二分图, 如果相邻的两个点在同一集合则需要付出代价  
染色后给一半的点反转源汇, 就转换成上面的问题了.

### 3.11.6 例题

- 费用流

- 序列上选尽量大的数, 但连续  $k$  个数中最多选  $p$  个.

费用流建图, 先建一条  $n + 1$  个点的无限容量的链表示不选, 然后每个点往后面  $k$  个位置连边, 答案是流量为  $p$  的最大费用流. 因为条件等价于选  $p$  次并且每次选的所有数间隔都至少是  $k$ .

- 还要求连续  $k$  个数中最少选  $q$  个.

任选一个位置把图前后切开就会发现通过截面的流量总和恰为  $p$ . 注意到如果走了最开始的链就代表不选, 因此要限制至少有  $q$  的流量不走链, 那么只需要把链的容量改成  $p - q$  就行了.

## 3.12 Prufer序列

对一棵有  $n \geq 2$  个结点的树, 它的Prufer编码是一个长为  $n - 2$ , 且每个数都在  $[1, n]$  内的序列.

构造方法: 每次选取编号最小的叶子结点, 记录它的父亲, 然后把它删掉, 直到只剩两个点为止. (并且最后剩的两个点一定有一个是  $n$  号点.)

相应的, 由Prufer编码重构树的方法: 按顺序读入序列, 每次选取编号最小的且度数为 1 的结点, 把这个点和序列当前点连上, 然后两个点剩余度数同时 -1.

#### Prufer编码的性质

- 每个至少 2 个结点的树都唯一对应一个Prufer编码. (当然也可以做无根树哈希.)
- 每个点在Prufer序列中出现的次数恰好是度数 - 1. 所以如果给定某些点的度数然后求方案数, 就可以用简单的组合数解决.

最后, 构造和重构直接写都是  $O(n \log n)$  的, 想优化成线性需要一些技巧.

线性求Prufer序列代码:

```

1 // 0-based
2 vector<vector<int>> adj;
3 vector<int> parent;
4
5 void dfs(int v) {
6     for (int u : adj[v]) {
7         if (u != parent[v]) parent[u] = v, dfs(u);
8     }
9 }
10
11 vector<int> pruefer_code() { // pruefer 是德语
12     int n = adj.size();
13     parent.resize(n), parent[n - 1] = -1;
14     dfs(n - 1);
15 }

```

```

16 int ptr = -1;
17 vector<int> degree(n);
18 for (int i = 0; i < n; i++) {
19     degree[i] = adj[i].size();
20     if (degree[i] == 1 && ptr == -1) ptr = i;
21 }
22
23 vector<int> code(n - 2);
24 int leaf = ptr;
25 for (int i = 0; i < n - 2; i++) {
26     int next = parent[leaf];
27     code[i] = next;
28     if (--degree[next] == 1 && next < ptr)
29         leaf = next;
30     else {
31         ptr++;
32         while (degree[ptr] != 1)
33             ptr++;
34         leaf = ptr;
35     }
36 }
37 return code;
38 }
```

线性重构树代码:

```

1 // 0-based
2 vector<pair<int, int>> pruefer_decode(vector<int> const
3     &code) {
4     int n = code.size() + 2;
5     vector<int> degree(n, 1);
6     for (int i : code) degree[i]++;
7
8     int ptr = 0;
9     while (degree[ptr] != 1) ptr++;
10    int leaf = ptr;
11
12    vector<pair<int, int>> edges;
13    for (int v : code) {
14        edges.emplace_back(leaf, v);
15        if (--degree[v] == 1 && v < ptr)
16            leaf = v;
17        else {
18            ptr++;
19            while (degree[ptr] != 1)
20                ptr++;
21            leaf = ptr;
22        }
23    }
24    edges.emplace_back(leaf, n - 1);
25    return edges;
}
```

### 3.13 弦图相关

Forked from the template of NEW CODE!!.

1. 团数  $\leq$  色数 , 弦图团数 = 色数
2. 设  $next(v)$  表示  $N(v)$  中最前的点 . 令  $w^*$  表示所有满足  $A \in B$  的  $w$  中最后的一个点 , 判断  $v \cup N(v)$  是否为极大团 , 只需判断是否存在一个  $w$ , 满足  $Next(w) = v$  且  $|N(v)|+1 \leq |N(w)|$  即可 .
3. 最小染色 : 完美消除序列从后往前依次给每个点染色 , 给每个点染上可以染的最小的颜色
4. 最大独立集 : 完美消除序列从前往后能选就选
5. 弦图最大独立集数 = 最小团覆盖数 , 最小团覆盖 : 设最大独立集为  $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ , 则  $\{p_1 \cup N(p_1), \dots, p_t \cup N(p_t)\}$  为最小团覆盖

# 4 数据结构

## 4.1 线段树

### 4.1.1 非递归线段树

- 如果  $M = 2^k$ , 则只能维护  $[1, M - 2]$  范围
- 找叶子:  $i$  对应的叶子就是  $i + M$
- 单点修改: 找到叶子然后向上跳
- 区间查询: 左右区间各扩展一位, 转换成开区间查询

```

1 int query(int l, int r) {
2     l += M - 1;
3     r += M + 1;
4
5     int ans = 0;
6     while (l ^ r != 1) {
7         ans += sum[l ^ 1] + sum[r ^ 1];
8
9         l >>= 1;
10        r >>= 1;
11    }
12
13    return ans;
14 }
```

区间修改要标记永久化, 并且求区间和和求最值的代码不太一样.

### 区间加, 区间求和

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     int len = 1, cntl = 0, cntr = 0; // cntl, cntr 是左右
3     → 两边分别实际修改的区间长度
4     for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
5     → >>= 1, len <= 1) {
6         tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
7         if (~l & 1) tree[l ^ 1] += d * len, mark[l ^ 1]
8         → += d, cntl += len;
9         if (r & 1) tree[r ^ 1] += d * len, mark[r ^ 1]
10        → += d, cntr += len;
11    }
12
13    for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
14        tree[l] += cntl * d, tree[r] += cntr * d;
15
16    int query(int l, int r) {
17        int ans = 0, len = 1, cntl = 0, cntr = 0;
18        for (l += n - 1, r += n + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
19        → >>= 1, len <= 1) {
20            ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
21            if (~l & 1) ans += tree[l ^ 1], cntl += len;
22            if (r & 1) ans += tree[r ^ 1], cntr += len;
23        }
24
25        for (; l; l >>= 1, r >>= 1)
26            ans += cntl * mark[l] + cntr * mark[r];
27
28        return ans;
29    }
30 }
```

### 区间加, 区间求最大值

```

1 void update(int l, int r, int d) {
2     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >>= 1, r
3     → >>= 1) {
4         if (l < N) {
5             tree[l] = max(tree[l < 1], tree[l < 1 |
6             → 1]) + mark[l];
7         }
8     }
9 }
```

```

5         tree[r] = max(tree[r < 1], tree[r < 1 |
6             → 1]) + mark[r];
7     }
8
9     if (~l & 1) {
10         tree[l ^ 1] += d;
11         mark[l ^ 1] += d;
12     }
13     if (r & 1) {
14         tree[r ^ 1] += d;
15         mark[r ^ 1] += d;
16     }
17
18     for (; l; l >= 1, r >= 1)
19         if (l < N) tree[l] = max(tree[l < 1], tree[l
20         → < 1 | 1]) + mark[l],
21             tree[r] = max(tree[r < 1], tree[r
22         → < 1 | 1]) + mark[r];
23
24 void query(int l, int r) {
25     int maxl = -INF, maxr = -INF;
26
27     for (l += N - 1, r += N + 1; l ^ r ^ 1; l >= 1, r
28     → >= 1) {
29         maxl += mark[l];
30         maxr += mark[r];
31
32         if (~l & 1)
33             maxl = max(maxl, tree[l ^ 1]);
34         if (r & 1)
35             maxr = max(maxr, tree[r ^ 1]);
36
37         while (l) {
38             maxl += mark[l];
39             maxr += mark[r];
40
41             l >= 1;
42             r >= 1;
43         }
44
45     }
46
47     return max(maxl, maxr);
48 }
```

### 4.1.2 线段树维护矩形并

为线段树的每个结点维护  $cover_i$  表示这个区间被完全覆盖的次数. 更新时分情况讨论, 如果当前区间已被完全覆盖则长度就是区间长度, 否则长度是左右儿子相加.

```

1 constexpr int maxn = 100005, maxm = maxn * 70;
2
3 int lc[maxm], rc[maxm], cover[maxm], sum[maxm], root,
4     → seg_cnt;
5 int s, t, d;
6
7 void refresh(int l, int r, int o) {
8     if (cover[o])
9         sum[o] = r - l + 1;
10    else
11        sum[o] = sum[lc[o]] + sum[rc[o]];
12
13 void modify(int l, int r, int &o) {
14     if (!o)
15         o = ++seg_cnt;
16
17     if (s <= l && t >= r) {
```

```

18     cover[o] += d;
19     refresh(l, r, o);
20
21     return;
22 }
23
24 int mid = (l + r) / 2;
25
26 if (s <= mid)
27     modify(l, mid, lc[o]);
28 if (t > mid)
29     modify(mid + 1, r, rc[o]);
30
31 refresh(l, r, o);
32 }

33 struct modi {
34     int x, l, r, d;
35
36     bool operator < (const modi &o) {
37         return x < o.x;
38     }
39 } a[maxn * 2];
40
41 int main() {
42
43     int n;
44     scanf("%d", &n);
45
46     for (int i = 1; i <= n; i++) {
47         int lx, ly, rx, ry;
48         scanf("%d%d%d%d", &lx, &ly, &rx, &ry);
49
50         a[i * 2 - 1] = {lx, ly + 1, ry, 1};
51         a[i * 2] = {rx, ly + 1, ry, -1};
52     }
53
54     sort(a + 1, a + n * 2 + 1);
55
56     int last = -1;
57     long long ans = 0;
58
59     for (int i = 1; i <= n * 2; i++) {
60         if (last != -1)
61             ans += (long long)(a[i].x - last) * sum[1];
62         last = a[i].x;
63
64         s = a[i].l;
65         t = a[i].r;
66         d = a[i].d;
67
68         modify(1, 1e9, root);
69     }
70
71     printf("%lld\n", ans);
72
73     return 0;
74 }
```

#### 4.1.3 历史和

EC-Final2020 G, 原题是询问某个区间有多少子区间, 满足子区间中数的种类数为奇数.

离线之后转化成枚举右端点并用线段树维护左端点, 然后就是一个支持区间反转(0/1互换)和询问历史的线段树.

“既然标记会复合 就说明在两个标记中间没有经过任何 pushup 操作

也就是说一个这两个标记对应着 相同的 0 的数量 以及 相同的 1 的数量

那么标记对于答案的影响只能是  $a * 0 + b * 1$   
我们维护 a b 即可”

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = (1 << 20) + 5;
6
7 int cnt[maxn][2], mul[maxn][2];
8 bool rev[maxn];
9 long long sum[maxn];
10
11 int now;
12
13 void build(int l, int r, int o) {
14     cnt[o][0] = r - l + 1;
15
16     if (l == r)
17         return;
18
19     int mid = (l + r) / 2;
20
21     build(l, mid, o * 2);
22     build(mid + 1, r, o * 2 + 1);
23 }
24
25 void apply(int o, bool flip, long long w0, long long
26           ↪ w1) {
27     sum[o] += w0 * cnt[o][0] + w1 * cnt[o][1];
28
29     if (flip)
30         swap(cnt[o][0], cnt[o][1]);
31
32     if (rev[o])
33         swap(w0, w1);
34
35     mul[o][0] += w0;
36     mul[o][1] += w1;
37     rev[o] ^= flip;
38 }
39
40 void pushdown(int o) {
41     if (!mul[o][0] && !mul[o][1] && !rev[o])
42         return;
43
44     apply(o * 2, rev[o], mul[o][0], mul[o][1]);
45     apply(o * 2 + 1, rev[o], mul[o][0], mul[o][1]);
46
47     mul[o][0] = mul[o][1] = 0;
48     rev[o] = false;
49 }
50
51 void update(int o) {
52     cnt[o][0] = cnt[o * 2][0] + cnt[o * 2 + 1][0];
53     cnt[o][1] = cnt[o * 2][1] + cnt[o * 2 + 1][1];
54
55     sum[o] = sum[o * 2] + sum[o * 2 + 1];
56 }
57
58 int s, t;
59
60 void modify(int l, int r, int o) {
61     if (s <= l && t >= r) {
62         apply(o, true, 0, 0);
63         return;
64     }
65
66     int mid = (l + r) / 2;
67     pushdown(o);
68 }
```

```

67     if (s <= mid)
68         modify(l, mid, o * 2);
69     if (t > mid)
70         modify(mid + 1, r, o * 2 + 1);
71
72     update(o);
73 }
74
75
76 long long query(int l, int r, int o) {
77     if (s <= l && t >= r)
78         return sum[o];
79
80     int mid = (l + r) / 2;
81     pushdown(o);
82
83     long long ans = 0;
84     if (s <= mid)
85         ans += query(l, mid, o * 2);
86     if (t > mid)
87         ans += query(mid + 1, r, o * 2 + 1);
88
89     return ans;
90 }
91
92 vector<pair<int, int>> vec[maxn]; // pos, id
93
94 long long ans[maxn];
95 int a[maxn], last[maxn];
96
97 int main() {
98
99     int n;
100    scanf("%d", &n);
101
102    build(1, n, 1);
103
104    for (int i = 1; i <= n; i++)
105        scanf("%d", &a[i]);
106
107    int m;
108    scanf("%d", &m);
109
110    for (int i = 1; i <= m; i++) {
111        int l, r;
112        scanf("%d%d", &l, &r);
113
114        vec[r].emplace_back(l, i);
115    }
116
117    for (int i = 1; i <= n; i++) {
118        s = last[a[i]] + 1;
119        t = now = i;
120
121        modify(1, n, 1);
122        apply(1, false, 0, 1);
123
124        for (auto [l, k] : vec[i]) {
125            s = l;
126            ans[k] = query(1, n, 1);
127        }
128
129        last[a[i]] = i;
130    }
131
132    for (int i = 1; i <= m; i++)
133        printf("%lld\n", ans[i]);
134
135    return 0;
}

```

136 }

## 4.2 陈丹琦分治

### 4.2.1 动态图连通性(分治并查集)

```

1 vector<pair<int, int>> seg[(1 << 22) + 5];
2
3 int s, t;
4 pair<int, int> d;
5
6 void add(int l, int r, int o) {
7     if (s > t)
8         return;
9
10    if (s <= l && t >= r) {
11        seg[o].push_back(d);
12        return;
13    }
14
15    int mid = (l + r) / 2;
16
17    if (s <= mid)
18        add(l, mid, o * 2);
19    if (t > mid)
20        add(mid + 1, r, o * 2 + 1);
21 }
22
23 int ufs[maxn], sz[maxn], stk[maxn], top;
24
25 int findufs(int x) {
26     while (ufs[x] != x)
27         x = ufs[x];
28
29     return ufs[x];
30 }
31
32 void link(int x, int y) {
33     x = findufs(x);
34     y = findufs(y);
35
36     if (x == y)
37         return;
38
39     if (sz[x] < sz[y])
40         swap(x, y);
41
42     ufs[y] = x;
43     sz[x] += sz[y];
44     stk[++top] = y;
45 }
46
47 int ans[maxn];
48
49 void solve(int l, int r, int o) {
50     int tmp = top;
51
52     for (auto pi : seg[o])
53         link(pi.first, pi.second);
54
55     if (l == r)
56         ans[l] = top;
57     else {
58         int mid = (l + r) / 2;
59
60         solve(l, mid, o * 2);
61         solve(mid + 1, r, o * 2 + 1);
62     }
63 }

```

```

64     for (int i = top; i > tmp; i--) {
65         int x = stk[i];
66
67         sz[ufs[x]] -= sz[x];
68         ufs[x] = x;
69     }
70
71     top = tmp;
72 }
73
74 map<pair<int, int>, int> mp;

```

## 4.2.2 四维偏序

```

1 // 四维偏序
2
3 void CDQ1(int l, int r) {
4     if (l >= r)
5         return;
6
7     int mid = (l + r) / 2;
8
9     CDQ1(l, mid);
10    CDQ1(mid + 1, r);
11
12    int i = l, j = mid + 1, k = l;
13
14    while (i <= mid && j <= r) {
15        if (a[i].x < a[j].x) {
16            a[i].ins = true;
17            b[k++] = a[i++];
18        }
19        else {
20            a[j].ins = false;
21            b[k++] = a[j++];
22        }
23    }
24
25    while (i <= mid) {
26        a[i].ins = true;
27        b[k++] = a[i++];
28    }
29
30    while (j <= r) {
31        a[j].ins = false;
32        b[k++] = a[j++];
33    }
34
35    copy(b + l, b + r + 1, a + l); // 后面的分治会破坏排序, 所以要复制一份
36
37    CDQ2(l, r);
38 }
39
40 void CDQ2(int l, int r) {
41     if (l >= r)
42         return;
43
44     int mid = (l + r) / 2;
45
46     CDQ2(l, mid);
47     CDQ2(mid + 1, r);
48
49     int i = l, j = mid + 1, k = l;
50
51     while (i <= mid && j <= r) {
52         if (b[i].y < b[j].y) {
53             if (b[i].ins)
54                 add(b[i].z, 1); // 树状数组

```

```

55         t[k++] = b[i++];
56     }
57     else{
58         if (!b[j].ins)
59             ans += query(b[j].z - 1);
60
61         t[k++] = b[j++];
62     }
63 }
64
65 while (i <= mid) {
66     if (b[i].ins)
67         add(b[i].z, 1);
68
69     t[k++] = b[i++];
70 }
71
72 while (j <= r) {
73     if (!b[j].ins)
74         ans += query(b[j].z - 1);
75
76     t[k++] = b[j++];
77 }
78
79 for (i = l; i <= mid; i++)
80     if (b[i].ins)
81         add(b[i].z, -1);
82
83 copy(t + l, t + r + 1, b + l);
84 }
85

```

## 4.3 整体二分

修改和询问都要划分, 备份一下, 递归之前copy回去.

如果是满足可减性的问题(例如查询区间k小数)可以直接在划分的时候把询问的k修改一下. 否则需要维护一个全局的数据结构, 一般来说可以先递归右边再递归左边, 具体维护方法视情况而定.

以下代码以ZJOI K大数查询为例(区间都添加一个数, 询问区间k大数).

```

1 int op[maxn], ql[maxn], qr[maxn]; // 1: modify 2: query
2 long long qk[maxn]; // 修改和询问可以一起存
3
4 int ans[maxn];
5
6 void solve(int l, int r, vector<int> v) { // 如果想常可以用数组, 然后只需要传一个数组的l, r; 递归的时候类似归并反过来, 开两个辅助数组, 处理完再复制回去即可
7     if (v.empty())
8         return;
9
10    if (l == r) {
11        for (int i : v)
12            if (op[i] == 2)
13                ans[i] = l;
14
15        return;
16    }
17
18    int mid = (l + r) / 2;
19
20    vector<int> vl, vr;
21
22    for (int i : v) {
23        if (op[i] == 1) {
24            if (qk[i] <= mid)

```

```

25         vl.push_back(i);
26     else {
27         update(ql[i], qr[i], 1); // update是区间
28         vr.push_back(i);
29     }
30 }
31 else {
32     long long tmp = query(ql[i], qr[i]);
33
34     if (qk[i] <= tmp) // 因为是k大数查询
35         vr.push_back(i);
36     else {
37         qk[i] -= tmp;
38         vl.push_back(i);
39     }
40 }
41
42 for (int i : vr)
43     if (op[i] == 1)
44         update(ql[i], qr[i], -1);
45
46 v.clear();
47
48 solve(l, mid, vl);
49 solve(mid + 1, r, vr);
50 }
51
52
53 int main() {
54     int n, m;
55     scanf("%d%d", &n, &m);
56
57     M = 1;
58     while (M < n + 2)
59         M *= 2;
60
61     for (int i = 1; i <= m; i++)
62         scanf("%d%d%d%lld", &op[i], &ql[i], &qr[i],
63               &qk[i]);
64
65     vector<int> v;
66     for (int i = 1; i <= m; i++)
67         v.push_back(i);
68
69     solve(1, 1e9, v);
70
71     for (int i = 1; i <= m; i++)
72         if (op[i] == 2)
73             printf("%d\n", ans[i]);
74
75     return 0;
76 }
```

```

9   void refresh() {
10    size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
11    } // 更新子树大小(和附加信息, 如果有的话)
12 } null[maxn], *root = null, *ptr = null; // 数组名叫
13 → 做null是为了方便开哨兵节点
14 // 如果需要删除而空间不能直接开下所有结点, 则需要再写一个
15 → 垃圾回收
16 // 注意: 数组里的元素一定不能delete, 否则会导致RE
17
18 // 重要! 在主函数最开始一定要加上以下预处理:
19 null → ch[0] = null → ch[1] = null;
20 null → size = 0;
21
22 // 伪构造函数 O(1)
23 // 为了方便, 在结点类外面再定义一个伪构造函数
24 node *newnode(int x) { // 键值为x
25    *++ptr = node(x);
26    ptr → ch[0] = ptr → ch[1] = null;
27    return ptr;
28 }
29
30 // 插入键值 期望O(log n)
31 // 需要调用旋转
32 void insert(int x, node *&rt) { // rt为当前结点, 建议调
33    → 用时传入root, 下同
34    if (rt == null) {
35        rt = newnode(x);
36        return;
37    }
38
39    int d = x > rt → key;
40    insert(x, rt → ch[d]);
41    rt → refresh();
42 }
43
44 // 删除一个键值 期望O(log n)
45 // 要求键值必须存在至少一个, 否则会导致RE
46 // 需要调用旋转
47 void erase(int x, node *&rt) {
48    if (x == rt → key) {
49        if (rt → ch[0] != null && rt → ch[1] != null)
50            → {
51                int d = rt → ch[0] → p < rt → ch[1] →
52                    → p;
53                rot(rt, d);
54                erase(x, rt → ch[d]);
55            }
56        else
57            rt = rt → ch[rt → ch[0] == null];
58    }
59    else
60        erase(x, rt → ch[x > rt → key]);
61
62    if (rt != null)
63        rt → refresh();
64
65 // 求元素的排名(严格小于键值的个数 + 1) 期望O(log n)
66 // 非递归
67 int rank(int x, node *rt) {
68    int ans = 1, d;
69    while (rt != null) {
70        if ((d = x > rt → key))
71            ans += rt → ch[0] → size + 1;
72
73        rt = rt → ch[d];
74    }
75
76    return ans;
77 }

```

4.4 平衡树

`pb_ds`平衡树参见8.11.Public Based DataStructure(PB\_DS) (84页).

#### 4.4.1 Treap

```
// 注意: 相同键值可以共存
1
2
3 struct node { // 结点类定义
4     int key, size, p; // 分别为键值, 子树大小, 优先度
5     node *ch[2]; // 0表示左儿子, 1表示右儿子
6
7     node(int key = 0) : key(key), size(1), p(rand()) {}
```

```

73     }
74
75     return ans;
76 }
77
78 // 返回排名第k(从1开始)的键值对应的指针 期望O(log n)
79 // 非递归
80 node *kth(int x, node *rt) {
81     int d;
82     while (rt != null) {
83         if ((d = x > rt) → ch[0] → size + 1)
84             return rt;
85
86         if ((d = x > rt) → ch[0] → size)
87             x = rt → ch[0] → size + 1;
88
89         rt = rt → ch[d];
90     }
91
92     return rt;
93 }
94
95 // 返回前驱(最大的比给定键值小的键值)对应的指针 期
96 // →望O(log n)
97 // 非递归
98 node *pred(int x, node *rt) {
99     node *y = null;
100    int d;
101
102    while (rt != null) {
103        if ((d = x > rt) → key))
104            y = rt;
105
106        rt = rt → ch[d];
107    }
108
109    return y;
110 }
111
112 // 返回后继(最小的比给定键值大的键值)对应的指针 期
113 // →望O(log n)
114 // 非递归
115 node *succ(int x, node *rt) {
116     node *y = null;
117     int d;
118
119     while (rt != null) {
120         if ((d = x < rt) → key))
121             y = rt;
122
123         rt = rt → ch[d ^ 1];
124     }
125
126     return y;
127 }
128
129 // 旋转(Treap版本) O(1)
130 // 平衡树基础操作
131 // 要求对应儿子必须存在, 否则会导致后续各种莫名其妙的问题
132 void rot(node *&x, int d) { // x为被转下去的结点, 会被修
133     // 改以维护树结构
134     node *y = x → ch[d ^ 1];
135
136     x → ch[d ^ 1] = y → ch[d];
137     y → ch[d] = x;
138
139     x → refresh();
140     (x = y) → refresh();
141 }

```

#### 4.4.2 无旋Treap/可持久化Treap

```

1 struct node {
2     int val, size;
3     node *ch[2];
4
5     node(int val) : val(val), size(1) {}
6
7     inline void refresh() {
8         size = ch[0] → size + ch[1] → size;
9     }
10
11 } null[maxn];
12
13 node *copied(node *x) { // 如果不用可持久化的话, 直接用
14     // 就行了
15     return new node(*x);
16 }
17
18 node *merge(node *x, node *y) {
19     if (x == null)
20         return y;
21     if (y == null)
22         return x;
23
24     node *z;
25     if (rand() % (x → size + y → size) < x → size) {
26         z = copied(y);
27         z → ch[0] = merge(x, y → ch[0]);
28     }
29     else {
30         z = copied(x);
31         z → ch[1] = merge(x → ch[1], y);
32     }
33
34     z → refresh(); // 因为每次只有一边会递归到儿子, 所
35     // →以z不可能取到null
36     return z;
37 }
38 pair<node*, node*> split(node *x, int k) { // 左边大小
39     // →为k
40     if (x == null)
41         return make_pair(null, null);
42
43     pair<node*, node*> pi(null, null);
44
45     if (k ≤ x → ch[0] → size) {
46         pi = split(x → ch[0], k);
47
48         node *z = copied(x);
49         z → ch[0] = pi.second;
50         z → refresh();
51         pi.second = z;
52     }
53     else {
54         pi = split(x → ch[1], k - x → ch[0] → size -
55         // → 1);
56
57         node *y = copied(x);
58         y → ch[1] = pi.first;
59         y → refresh();
60         pi.first = y;
61     }
62 }
63

```

```

64 // 记得初始化null
65 int main() {
66     for (int i = 0; i <= n; i++)
67         null[i].ch[0] = null[i].ch[1] = null;
68     null → size = 0;
69
70     // do something
71
72     return 0;
73 }
```

#### 4.4.3 Splay

如果插入的话可以直接找到底然后splay一下，也可以直接splay前驱后继。

```

1 #define dir(x) ((x) == (x) → p → ch[1])
2
3 struct node {
4     int size;
5     bool rev;
6     node *ch[2], *p;
7
8     node() : size(1), rev(false) {}
9
10    void pushdown() {
11        if (!rev)
12            return;
13
14        ch[0] → rev ≈ true;
15        ch[1] → rev ≈ true;
16        swap(ch[0], ch[1]);
17
18        rev=false;
19    }
20
21    void refresh() {
22        size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
23    }
24 } null[maxn], *root = null;
25
26 void rot(node *x, int d) {
27     node *y = x → ch[d ^ 1];
28
29     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
30         y → ch[d] → p = x;
31     ((y → p = x → p) != null ? x → p → ch[dir(x)] :
32         → root) = y;
33     (y → ch[d] = x) → p = y;
34
35     x → refresh();
36     y → refresh();
37 }
38
39 void splay(node *x, node *t) {
40     while (x → p != t) {
41         if (x → p → p == t) {
42             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
43             break;
44         }
45
46         if (dir(x) == dir(x → p))
47             rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
48         else
49             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
50     }
51 }
52
53 node *kth(int k, node *o) {
```

```

54     int d;
55     k++; // 因为最左边有一个哨兵
56
57     while (o != null) {
58         o → pushdown();
59
60         if (k == o → ch[0] → size + 1)
61             return o;
62
63         if ((d = k > o → ch[0] → size)) {
64             k -= o → ch[0] → size + 1;
65             o = o → ch[d];
66         }
67
68         return null;
69    }
70
71 void reverse(int l, int r) {
72     splay(kth(l - 1));
73     splay(kth(r + 1), root);
74
75     root → ch[1] → ch[0] → rev ≈ true;
76 }
77
78 int n, m;
79
80 int main() {
81     null → size = 0;
82     null → ch[0] = null → ch[1] = null → p = null;
83
84     scanf("%d%d", &n, &m);
85     root = null + n + 1;
86     root → ch[0] = root → ch[1] = root → p = null;
87
88     for (int i = 1; i <= n; i++) {
89         null[i].ch[1] = null[i].p = null;
90         null[i].ch[0] = root;
91         root → p = null + i;
92         (root = null + i) → refresh();
93     }
94
95     null[n + 2].ch[1] = null[n + 2].p = null;
96     null[n + 2].ch[0] = root; // 这里直接建成一条链的,
97                             // → 如果想减少常数也可以递归建一个平衡的树
98     root → p = null + n + 2; // 总之记得建两个哨兵, 这
99                             // → 样splay起来不需要特判
100    (root = null + n + 2) → refresh();
101
102    // Do something
103
104    return 0;
105 }
```

## 4.5 树链剖分

### 4.5.1 动态树形DP(最大权独立集)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, maxm = 262155, inf =
6     ↪ 0x3f3f3f3f;
7
8 struct binary_heap {
9     priority_queue<int> q, t;
10
11     binary_heap() {}
```

```

11 void push(int x) {
12     q.push(x);
13 }
14
15 void erase(int x) {
16     t.push(x);
17 }
18
19 int top() {
20     while (!t.empty() && q.top() == t.top()) {
21         q.pop();
22         t.pop();
23     }
24
25     return q.top();
26 }
27 } heap;
28
29 int pool[maxm][2][2], (*pt)[2][2] = pool;
30
31 void merge(int a[2][2], int b[2][2]) {
32     static int c[2][2];
33     memset(c, 0, sizeof(c));
34
35     for (int i = 0; i < 2; i++)
36         for (int j = 0; j < 2; j++)
37             for (int k = 0; k < 2; k++)
38                 if (!(j & k))
39                     for (int t = 0; t < 2; t++)
40                         c[i][t] = max(c[i][t], a[i][j]
41                                         + b[k][t]);
42
43     memcpy(a, c, sizeof(c));
44 }
45
46 vector<pair<int, int> > tw;
47
48 struct seg_tree {
49     int (*tr)[2][2], n;
50
51     int s, d[2];
52
53     seg_tree() {}
54
55     void update(int o) {
56         memcpy(tr[o], tr[o * 2], sizeof(int) * 4);
57         merge(tr[o], tr[o * 2 + 1]);
58     }
59
60     void build(int l, int r, int o) {
61         if (l == r) {
62             tr[o][0][0] = tw[l - 1].first;
63             tr[o][0][1] = tr[o][1][0] = -inf;
64             tr[o][1][1] = tw[l - 1].second;
65
66             return;
67         }
68
69         int mid = (l + r) / 2;
70
71         build(l, mid, o * 2);
72         build(mid + 1, r, o * 2 + 1);
73
74         update(o);
75     }
76
77     void modify(int l, int r, int o) {
78         if (l == r) {
79             tr[o][0][0] = d[0];
80             tr[o][0][1] = tr[o][1][0] = -inf;
81             tr[o][1][1] = d[1];
82
83             return;
84         }
85
86         int mid = (l + r) / 2;
87
88         if (s <= mid)
89             modify(l, mid, o * 2);
90         else
91             modify(mid + 1, r, o * 2 + 1);
92
93         update(o);
94     }
95
96     int getval() {
97         int ans = 0;
98         for (int i = 0; i < 2; i++)
99             for (int j = 0; j < 2; j++)
100                 ans = max(ans, tr[1][i][j]);
101
102     return ans;
103 }
104
105 pair<int, int> getpair() {
106     int ans[2] = {0};
107     for (int i = 0; i < 2; i++)
108         for (int j = 0; j < 2; j++)
109             ans[i] = max(ans[i], tr[1][i][j]);
110
111     return make_pair(ans[0], ans[1]);
112 }
113
114 void build(int len) {
115     n = len;
116     int N = 1;
117     while (N < n * 2)
118         N *= 2;
119
120     tr = pt;
121     pt += N;
122
123     build(1, n, 1);
124 }
125
126 void modify(int x, int dat[2]) {
127     s = x;
128     for (int i = 0; i < 2; i++)
129         d[i] = dat[i];
130     modify(1, n, 1);
131 }
132 } seg[maxn];
133
134 vector<int> G[maxn];
135
136 int p[maxn], d[maxn], sz[maxn], son[maxn], top[maxn];
137 int dp[maxn][2], dptr[maxn][2], w[maxn];
138
139 void dfs1(int x) {
140     d[x] = d[p[x]] + 1;
141     sz[x] = 1;
142
143     for (int y : G[x])
144         if (y != p[x]) {
145             p[y] = x;
146             dfs1(y);
147
148             if (sz[y] > sz[son[x]])

```

```

149     |     |     son[x] = y;
150
151     |     |     sz[x] += sz[y];
152 }
153
154 void dfs2(int x) {
155     if (x == son[p[x]]) {
156         top[x] = top[p[x]];
157     } else {
158         top[x] = x;
159
160         for (int y : G[x])
161             if (y != p[x])
162                 dfs2(y);
163
164
165         dp[x][1] = w[x];
166         for (int y : G[x])
167             if (y != p[x] && y != son[x]) {
168                 dp[x][1] += dptr[y][0];
169                 dp[x][0] += max(dptr[y][0], dptr[y][1]);
170             }
171
172         if (top[x] == x) {
173             tw.clear();
174
175             for (int u = x; u; u = son[u])
176                 tw.push_back(make_pair(dp[u][0], dp[u]
177                                         → [1]));
178
179             seg[x].build((int)tw.size());
180
181             tie(dptr[x][0], dptr[x][1]) = seg[x].getpair();
182
183             heap.push(seg[x].getval());
184         }
185
186 void modify(int x, int dat) {
187     dp[x][1] -= w[x];
188     dp[x][1] += (w[x] = dat);
189
190     while (x) {
191         if (p[top[x]]) {
192             dp[p[top[x]]][0] -= max(dptr[top[x]][0],
193                                         → dptr[top[x]][1]);
194             dp[p[top[x]]][1] -= dptr[top[x]][0];
195         }
196
197         heap.erase(seg[top[x]].getval());
198         seg[top[x]].modify(d[x] - d[top[x]] + 1,
199                           → dp[x]);
200         heap.push(seg[top[x]].getval());
201
202         tie(dptr[top[x]][0], dptr[top[x]][1]) =
203             → seg[top[x]].getpair();
204
205         if (p[top[x]]) {
206             dp[p[top[x]]][0] += max(dptr[top[x]][0],
207                                         → dptr[top[x]][1]);
208             dp[p[top[x]]][1] += dptr[top[x]][0];
209         }
210
211         x = p[top[x]];
212     }
213
214     int main() {
215         int n, m;

```

```

214     scanf("%d%d", &n, &m);
215
216     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
217         scanf("%d", &w[i]);
218
219     for (int i = 1; i < n; i++) {
220         int x, y;
221         scanf("%d%d", &x, &y);
222
223         G[x].push_back(y);
224         G[y].push_back(x);
225     }
226
227     dfs1(1);
228     dfs2(1);
229
230     while (m--) {
231         int x, dat;
232         scanf("%d%d", &x, &dat);
233
234         modify(x, dat);
235
236         printf("%d\n", heap.top());
237     }
238
239     return 0;
240 }

```

## 4.6 树分治

### 4.6.1 动态树分治

```

1 // 为了减小常数, 这里采用bfs写法, 实测预处理比dfs快将近一
2 →半
3 // 以下以维护一个点到每个黑点的距离之和为例
4
5 // 全局数组定义
6 vector<int> G[maxn], W[maxn];
7 int size[maxn], son[maxn], q[maxn];
8 int p[maxn], depth[maxn], id[maxn][20], d[maxn][20]; //
9 →id是对应层所在子树的根
10 int a[maxn], ca[maxn], b[maxn][20], cb[maxn][20]; // 维
11 →护距离和用的
12 bool vis[maxn], col[maxn];
13
14 // 建树 总计O(n log n)
15 // 需要调用找重心和预处理距离, 同时递归调用自身
16 void build(int x, int k, int s, int pr) { // 结点, 深度,
17   →连通块大小, 点分树上的父亲
18   x = getcenter(x, s);
19   vis[x] = true;
20   depth[x] = k;
21   p[x] = pr;
22
23   for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
24       if (!vis[G[x][i]]) {
25           d[G[x][i]][k] = W[x][i];
26           p[G[x][i]] = x;
27
28           getdis(G[x][i], k, G[x][i]); // bfs每个子树,
29           →预处理距离
30       }
31
32   for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
33       if (!vis[G[x][i]])
34           build(G[x][i], k + 1, size[G[x][i]], x); // →递归建树
35
36 }

```

```

32 // 找重心 O(n)
33 int getcenter(int x, int s) {
34     int head = 0, tail = 0;
35     q[tail++] = x;
36
37     while (head != tail) {
38         x = q[head++];
39         size[x] = 1; // 这里不需要清空，因为以后要用的话
39         → 一定会重新赋值
40         son[x] = 0;
41
42         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
43             if (!vis[G[x][i]] && G[x][i] != p[x]) {
44                 p[G[x][i]] = x;
45                 q[tail++] = G[x][i];
46             }
47         }
48
49         for (int i = tail - 1; i; i--) {
50             x = q[i];
51             size[p[x]] += size[x];
52
53             if (size[x] > size[son[p[x]]])
54                 son[p[x]] = x;
55         }
56
57         x = q[0];
58         while (son[x] && size[son[x]] * 2 ≥ s)
59             x = son[x];
60
61         return x;
62     }
63
64 // 预处理距离 O(n)
65 // 方便起见，这里直接用了笨一点的方法，O(n log n)全存下来
66 void getdis(int x, int k, int rt) {
67     int head = 0, tail = 0;
68     q[tail++] = x;
69
70     while (head != tail) {
71         x = q[head++];
72         size[x] = 1;
73         id[x][k] = rt;
74
75         for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
76             if (!vis[G[x][i]] && G[x][i] != p[x]) {
77                 p[G[x][i]] = x;
78                 d[G[x][i]][k] = d[x][k] + w[x][i];
79
80                 q[tail++] = G[x][i];
81             }
82         }
83
84         for (int i = tail - 1; i; i--)
85             size[p[q[i]]] += size[q[i]]; // 后面递归建树要用
85             → 到子问题大小
86     }
87
88 // 修改 O(log n)
89 void modify(int x) {
90     if (col[x])
91         ca[x]--;
92     else
93         ca[x]++; // 记得先特判自己作为重心的那层
94
95     for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
95         → k--) {
96         if (col[x])
97             a[u] -= d[x][k];
98             ca[u]--;

```

```

99
100    b[id[x][k]][k] -= d[x][k];
101    cb[id[x][k]][k]--;
102
103    } else {
104        a[u] += d[x][k];
105        ca[u]++;
106
107        b[id[x][k]][k] += d[x][k];
108        cb[id[x][k]][k]++;
109    }
110
111    col[x] = true;
112 }
113
114 // 询问 O(log n)
115 int query(int x) {
116     int ans = a[x]; // 特判自己是重心的那层
117
118     for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
118         → k--)
119         ans += a[u] - b[id[x][k]][k] + d[x][k] * (ca[u]
119             → - cb[id[x][k]][k]);
120
121     return ans;
122 }
123

```

#### 4.6.2 紫荆花之恋

稍微重构了一下，修改了代码风格。

另外这个是BFS版本，跑得比DFS要快不少。（虽然主要复杂度并不在重构上）

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, maxk = 49;
6 constexpr double alpha = .75;
7
8 mt19937 rnd(23333333);
9
10 struct node {
11     int key, size, p;
12     node *ch[2];
13
14     node() {}
15
16     node(int key) : key(key), size(1), p(rnd()) {}
17
18     inline void update() {
19         size = ch[0] → size + ch[1] → size + 1;
20     }
21 } null[maxn * maxk], *pt = null;
22
23 vector<node*> pool;
24
25 node *newnode(int val) {
26     node *x;
27
28     if (!pool.empty())
28         x = pool.back();
29         pool.pop_back();
30     else
31         x = ++pt;
32
33     *x = node(val);
34

```

```

36     x → ch[0] = x → ch[1] = null;
37
38     return x;
39 }
40
41 void rot(node *&x, int d) {
42     node *y = x → ch[d ^ 1];
43     x → ch[d ^ 1] = y → ch[d];
44     y → ch[d] = x;
45
46     x → update();
47     (x = y) → update();
48 }
49
50 void insert(node *&o, int x) {
51     if (o == null) {
52         o = newnode(x);
53         return;
54     }
55
56     int d = (x > o → key);
57
58     insert(o → ch[d], x);
59     o → update();
60
61     if (o → ch[d] → p < o → p)
62         rot(o, d ^ 1);
63 }
64
65 int get_order(node *o, int x) {
66     int ans = 0;
67
68     while (o != null) {
69         int d = (x > o → key);
70
71         if (d)
72             ans += o → ch[0] → size + 1;
73
74         o = o → ch[d];
75     }
76
77     return ans;
78 }
79
80 void destroy(node *x) {
81     if (x == null)
82         return;
83
84     pool.push_back(x);
85     destroy(x → ch[0]);
86     destroy(x → ch[1]);
87 }
88
89 struct my_tree { // 封装了一下，如果不卡内存直接换
90     ↪成PBDS就好了
91     node *rt;
92
93     my_tree() : rt(null) {}
94
95     void clear() {
96         ::destroy(rt);
97         rt = null;
98     }
99
100    void insert(int x) {
101        ::insert(rt, x);
102    }
103
104    int order_of_key(int x) { // less than x
105        ↪
106    } tr[maxn], tre[maxn][maxk];
107
108    vector<pair<int, int>> G[maxn];
109
110    int p[maxn], depth[maxn], d[maxn][maxk], rid[maxn]
111        ↪ [maxk];
112    int sz[maxn], siz[maxn][maxk], q[maxn];
113    bool vis[maxn];
114
115    int w[maxn];
116
117    void destroy(int o) {
118        int head = 0, tail = 0;
119        q[tail++] = o;
120        vis[o] = false;
121
122        while (head != tail) {
123            int x = q[head++];
124            tr[x].clear();
125
126            for (int i = depth[o]; i ≤ depth[x]; i++) {
127                tre[x][i].clear();
128                d[x][i] = rid[x][i] = siz[x][i] = 0;
129            }
130
131            for (auto pi : G[x]) {
132                int y = pi.first;
133
134                if (vis[y] && depth[y] ≥ depth[o]) {
135                    vis[y] = false;
136                    q[tail++] = y;
137                }
138            }
139        }
140
141        int getcenter(int o, int s) {
142            int head = 0, tail = 0;
143            q[tail++] = o;
144
145            while (head != tail) {
146                int x = q[head++];
147                sz[x] = 1;
148
149                for (auto pi : G[x]) {
150                    int y = pi.first;
151
152                    if (!vis[y] && y != p[x]) {
153                        p[y] = x;
154                        q[tail++] = y;
155                    }
156                }
157
158                for (int i = s - 1; i; i--) {
159                    sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
160
161                    int x = o;
162                    while (true) {
163                        bool ok = false;
164
165                        for (auto pi : G[x]) {
166                            int y = pi.first;
167
168                            if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
169                                ↪
170                                {
171                                    x = y;
172                                    ok = true;
173                                    break;
174                                }
175
176                        }
177
178                    }
179
180                }
181            }
182
183            return o;
184        }
185
186        int getcenter(int o, int s) {
187            int head = 0, tail = 0;
188            q[tail++] = o;
189
190            while (head != tail) {
191                int x = q[head++];
192                sz[x] = 1;
193
194                for (auto pi : G[x]) {
195                    int y = pi.first;
196
197                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
198                        ↪
199                        {
200                            x = y;
201                            ok = true;
202                            break;
203                        }
204
205                }
206
207            }
208
209            return o;
210        }
211
212        int getcenter(int o, int s) {
213            int head = 0, tail = 0;
214            q[tail++] = o;
215
216            while (head != tail) {
217                int x = q[head++];
218                sz[x] = 1;
219
220                for (auto pi : G[x]) {
221                    int y = pi.first;
222
223                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
224                        ↪
225                        {
226                            x = y;
227                            ok = true;
228                            break;
229                        }
230
231                }
232
233            }
234
235            return o;
236        }
237
238        int getcenter(int o, int s) {
239            int head = 0, tail = 0;
240            q[tail++] = o;
241
242            while (head != tail) {
243                int x = q[head++];
244                sz[x] = 1;
245
246                for (auto pi : G[x]) {
247                    int y = pi.first;
248
249                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
250                        ↪
251                        {
252                            x = y;
253                            ok = true;
254                            break;
255                        }
256
257                }
258
259            }
260
261            return o;
262        }
263
264        int getcenter(int o, int s) {
265            int head = 0, tail = 0;
266            q[tail++] = o;
267
268            while (head != tail) {
269                int x = q[head++];
270                sz[x] = 1;
271
272                for (auto pi : G[x]) {
273                    int y = pi.first;
274
275                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
276                        ↪
277                        {
278                            x = y;
279                            ok = true;
280                            break;
281                        }
282
283                }
284
285            }
286
287            return o;
288        }
289
290        int getcenter(int o, int s) {
291            int head = 0, tail = 0;
292            q[tail++] = o;
293
294            while (head != tail) {
295                int x = q[head++];
296                sz[x] = 1;
297
298                for (auto pi : G[x]) {
299                    int y = pi.first;
300
301                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
302                        ↪
303                        {
304                            x = y;
305                            ok = true;
306                            break;
307                        }
308
309                }
310
311            }
312
313            return o;
314        }
315
316        int getcenter(int o, int s) {
317            int head = 0, tail = 0;
318            q[tail++] = o;
319
320            while (head != tail) {
321                int x = q[head++];
322                sz[x] = 1;
323
324                for (auto pi : G[x]) {
325                    int y = pi.first;
326
327                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
328                        ↪
329                        {
330                            x = y;
331                            ok = true;
332                            break;
333                        }
334
335                }
336
337            }
338
339            return o;
340        }
341
342        int getcenter(int o, int s) {
343            int head = 0, tail = 0;
344            q[tail++] = o;
345
346            while (head != tail) {
347                int x = q[head++];
348                sz[x] = 1;
349
350                for (auto pi : G[x]) {
351                    int y = pi.first;
352
353                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
354                        ↪
355                        {
356                            x = y;
357                            ok = true;
358                            break;
359                        }
360
361                }
362
363            }
364
365            return o;
366        }
367
368        int getcenter(int o, int s) {
369            int head = 0, tail = 0;
370            q[tail++] = o;
371
372            while (head != tail) {
373                int x = q[head++];
374                sz[x] = 1;
375
376                for (auto pi : G[x]) {
377                    int y = pi.first;
378
379                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
380                        ↪
381                        {
382                            x = y;
383                            ok = true;
384                            break;
385                        }
386
387                }
388
389            }
390
391            return o;
392        }
393
394        int getcenter(int o, int s) {
395            int head = 0, tail = 0;
396            q[tail++] = o;
397
398            while (head != tail) {
399                int x = q[head++];
400                sz[x] = 1;
401
402                for (auto pi : G[x]) {
403                    int y = pi.first;
404
405                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
406                        ↪
407                        {
408                            x = y;
409                            ok = true;
410                            break;
411                        }
412
413                }
414
415            }
416
417            return o;
418        }
419
420        int getcenter(int o, int s) {
421            int head = 0, tail = 0;
422            q[tail++] = o;
423
424            while (head != tail) {
425                int x = q[head++];
426                sz[x] = 1;
427
428                for (auto pi : G[x]) {
429                    int y = pi.first;
430
431                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
432                        ↪
433                        {
434                            x = y;
435                            ok = true;
436                            break;
437                        }
438
439                }
440
441            }
442
443            return o;
444        }
445
446        int getcenter(int o, int s) {
447            int head = 0, tail = 0;
448            q[tail++] = o;
449
450            while (head != tail) {
451                int x = q[head++];
452                sz[x] = 1;
453
454                for (auto pi : G[x]) {
455                    int y = pi.first;
456
457                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
458                        ↪
459                        {
460                            x = y;
461                            ok = true;
462                            break;
463                        }
464
465                }
466
467            }
468
469            return o;
470        }
471
472        int getcenter(int o, int s) {
473            int head = 0, tail = 0;
474            q[tail++] = o;
475
476            while (head != tail) {
477                int x = q[head++];
478                sz[x] = 1;
479
480                for (auto pi : G[x]) {
481                    int y = pi.first;
482
483                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
484                        ↪
485                        {
486                            x = y;
487                            ok = true;
488                            break;
489                        }
490
491                }
492
493            }
494
495            return o;
496        }
497
498        int getcenter(int o, int s) {
499            int head = 0, tail = 0;
500            q[tail++] = o;
501
502            while (head != tail) {
503                int x = q[head++];
504                sz[x] = 1;
505
506                for (auto pi : G[x]) {
507                    int y = pi.first;
508
509                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
510                        ↪
511                        {
512                            x = y;
513                            ok = true;
514                            break;
515                        }
516
517                }
518
519            }
520
521            return o;
522        }
523
524        int getcenter(int o, int s) {
525            int head = 0, tail = 0;
526            q[tail++] = o;
527
528            while (head != tail) {
529                int x = q[head++];
530                sz[x] = 1;
531
532                for (auto pi : G[x]) {
533                    int y = pi.first;
534
535                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
536                        ↪
537                        {
538                            x = y;
539                            ok = true;
540                            break;
541                        }
542
543                }
544
545            }
546
547            return o;
548        }
549
550        int getcenter(int o, int s) {
551            int head = 0, tail = 0;
552            q[tail++] = o;
553
554            while (head != tail) {
555                int x = q[head++];
556                sz[x] = 1;
557
558                for (auto pi : G[x]) {
559                    int y = pi.first;
560
561                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
562                        ↪
563                        {
564                            x = y;
565                            ok = true;
566                            break;
567                        }
568
569                }
570
571            }
572
573            return o;
574        }
575
576        int getcenter(int o, int s) {
577            int head = 0, tail = 0;
578            q[tail++] = o;
579
580            while (head != tail) {
581                int x = q[head++];
582                sz[x] = 1;
583
584                for (auto pi : G[x]) {
585                    int y = pi.first;
586
587                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
588                        ↪
589                        {
590                            x = y;
591                            ok = true;
592                            break;
593                        }
594
595                }
596
597            }
598
599            return o;
600        }
601
602        int getcenter(int o, int s) {
603            int head = 0, tail = 0;
604            q[tail++] = o;
605
606            while (head != tail) {
607                int x = q[head++];
608                sz[x] = 1;
609
610                for (auto pi : G[x]) {
611                    int y = pi.first;
612
613                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
614                        ↪
615                        {
616                            x = y;
617                            ok = true;
618                            break;
619                        }
620
621                }
622
623            }
624
625            return o;
626        }
627
628        int getcenter(int o, int s) {
629            int head = 0, tail = 0;
630            q[tail++] = o;
631
632            while (head != tail) {
633                int x = q[head++];
634                sz[x] = 1;
635
636                for (auto pi : G[x]) {
637                    int y = pi.first;
638
639                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
640                        ↪
641                        {
642                            x = y;
643                            ok = true;
644                            break;
645                        }
646
647                }
648
649            }
650
651            return o;
652        }
653
654        int getcenter(int o, int s) {
655            int head = 0, tail = 0;
656            q[tail++] = o;
657
658            while (head != tail) {
659                int x = q[head++];
660                sz[x] = 1;
661
662                for (auto pi : G[x]) {
663                    int y = pi.first;
664
665                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
666                        ↪
667                        {
668                            x = y;
669                            ok = true;
670                            break;
671                        }
672
673                }
674
675            }
676
677            return o;
678        }
679
680        int getcenter(int o, int s) {
681            int head = 0, tail = 0;
682            q[tail++] = o;
683
684            while (head != tail) {
685                int x = q[head++];
686                sz[x] = 1;
687
688                for (auto pi : G[x]) {
689                    int y = pi.first;
690
691                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
692                        ↪
693                        {
694                            x = y;
695                            ok = true;
696                            break;
697                        }
698
699                }
700
701            }
702
703            return o;
704        }
705
706        int getcenter(int o, int s) {
707            int head = 0, tail = 0;
708            q[tail++] = o;
709
710            while (head != tail) {
711                int x = q[head++];
712                sz[x] = 1;
713
714                for (auto pi : G[x]) {
715                    int y = pi.first;
716
717                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
718                        ↪
719                        {
720                            x = y;
721                            ok = true;
722                            break;
723                        }
724
725                }
726
727            }
728
729            return o;
730        }
731
732        int getcenter(int o, int s) {
733            int head = 0, tail = 0;
734            q[tail++] = o;
735
736            while (head != tail) {
737                int x = q[head++];
738                sz[x] = 1;
739
740                for (auto pi : G[x]) {
741                    int y = pi.first;
742
743                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
744                        ↪
745                        {
746                            x = y;
747                            ok = true;
748                            break;
749                        }
750
751                }
752
753            }
754
755            return o;
756        }
757
758        int getcenter(int o, int s) {
759            int head = 0, tail = 0;
760            q[tail++] = o;
761
762            while (head != tail) {
763                int x = q[head++];
764                sz[x] = 1;
765
766                for (auto pi : G[x]) {
767                    int y = pi.first;
768
769                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
770                        ↪
771                        {
772                            x = y;
773                            ok = true;
774                            break;
775                        }
776
777                }
778
779            }
780
781            return o;
782        }
783
784        int getcenter(int o, int s) {
785            int head = 0, tail = 0;
786            q[tail++] = o;
787
788            while (head != tail) {
789                int x = q[head++];
790                sz[x] = 1;
791
792                for (auto pi : G[x]) {
793                    int y = pi.first;
794
795                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
796                        ↪
797                        {
798                            x = y;
799                            ok = true;
800                            break;
801                        }
802
803                }
804
805            }
806
807            return o;
808        }
809
810        int getcenter(int o, int s) {
811            int head = 0, tail = 0;
812            q[tail++] = o;
813
814            while (head != tail) {
815                int x = q[head++];
816                sz[x] = 1;
817
818                for (auto pi : G[x]) {
819                    int y = pi.first;
820
821                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
822                        ↪
823                        {
824                            x = y;
825                            ok = true;
826                            break;
827                        }
828
829                }
830
831            }
832
833            return o;
834        }
835
836        int getcenter(int o, int s) {
837            int head = 0, tail = 0;
838            q[tail++] = o;
839
840            while (head != tail) {
841                int x = q[head++];
842                sz[x] = 1;
843
844                for (auto pi : G[x]) {
845                    int y = pi.first;
846
847                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
848                        ↪
849                        {
850                            x = y;
851                            ok = true;
852                            break;
853                        }
854
855                }
856
857            }
858
859            return o;
860        }
861
862        int getcenter(int o, int s) {
863            int head = 0, tail = 0;
864            q[tail++] = o;
865
866            while (head != tail) {
867                int x = q[head++];
868                sz[x] = 1;
869
870                for (auto pi : G[x]) {
871                    int y = pi.first;
872
873                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
874                        ↪
875                        {
876                            x = y;
877                            ok = true;
878                            break;
879                        }
880
881                }
882
883            }
884
885            return o;
886        }
887
888        int getcenter(int o, int s) {
889            int head = 0, tail = 0;
890            q[tail++] = o;
891
892            while (head != tail) {
893                int x = q[head++];
894                sz[x] = 1;
895
896                for (auto pi : G[x]) {
897                    int y = pi.first;
898
899                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
900                        ↪
901                        {
902                            x = y;
903                            ok = true;
904                            break;
905                        }
906
907                }
908
909            }
910
911            return o;
912        }
913
914        int getcenter(int o, int s) {
915            int head = 0, tail = 0;
916            q[tail++] = o;
917
918            while (head != tail) {
919                int x = q[head++];
920                sz[x] = 1;
921
922                for (auto pi : G[x]) {
923                    int y = pi.first;
924
925                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
926                        ↪
927                        {
928                            x = y;
929                            ok = true;
930                            break;
931                        }
932
933                }
934
935            }
936
937            return o;
938        }
939
940        int getcenter(int o, int s) {
941            int head = 0, tail = 0;
942            q[tail++] = o;
943
944            while (head != tail) {
945                int x = q[head++];
946                sz[x] = 1;
947
948                for (auto pi : G[x]) {
949                    int y = pi.first;
950
951                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
952                        ↪
953                        {
954                            x = y;
955                            ok = true;
956                            break;
957                        }
958
959                }
960
961            }
962
963            return o;
964        }
965
966        int getcenter(int o, int s) {
967            int head = 0, tail = 0;
968            q[tail++] = o;
969
970            while (head != tail) {
971                int x = q[head++];
972                sz[x] = 1;
973
974                for (auto pi : G[x]) {
975                    int y = pi.first;
976
977                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
978                        ↪
979                        {
980                            x = y;
981                            ok = true;
982                            break;
983                        }
984
985                }
986
987            }
988
989            return o;
990        }
991
992        int getcenter(int o, int s) {
993            int head = 0, tail = 0;
994            q[tail++] = o;
995
996            while (head != tail) {
997                int x = q[head++];
998                sz[x] = 1;
999
1000                for (auto pi : G[x]) {
1001                    int y = pi.first;
1002
1003                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1004                        ↪
1005                        {
1006                            x = y;
1007                            ok = true;
1008                            break;
1009                        }
1010
1011                }
1012
1013            }
1014
1015            return o;
1016        }
1017
1018        int getcenter(int o, int s) {
1019            int head = 0, tail = 0;
1020            q[tail++] = o;
1021
1022            while (head != tail) {
1023                int x = q[head++];
1024                sz[x] = 1;
1025
1026                for (auto pi : G[x]) {
1027                    int y = pi.first;
1028
1029                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1030                        ↪
1031                        {
1032                            x = y;
1033                            ok = true;
1034                            break;
1035                        }
1036
1037                }
1038
1039            }
1040
1041            return o;
1042        }
1043
1044        int getcenter(int o, int s) {
1045            int head = 0, tail = 0;
1046            q[tail++] = o;
1047
1048            while (head != tail) {
1049                int x = q[head++];
1050                sz[x] = 1;
1051
1052                for (auto pi : G[x]) {
1053                    int y = pi.first;
1054
1055                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1056                        ↪
1057                        {
1058                            x = y;
1059                            ok = true;
1060                            break;
1061                        }
1062
1063                }
1064
1065            }
1066
1067            return o;
1068        }
1069
1070        int getcenter(int o, int s) {
1071            int head = 0, tail = 0;
1072            q[tail++] = o;
1073
1074            while (head != tail) {
1075                int x = q[head++];
1076                sz[x] = 1;
1077
1078                for (auto pi : G[x]) {
1079                    int y = pi.first;
1080
1081                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1082                        ↪
1083                        {
1084                            x = y;
1085                            ok = true;
1086                            break;
1087                        }
1088
1089                }
1090
1091            }
1092
1093            return o;
1094        }
1095
1096        int getcenter(int o, int s) {
1097            int head = 0, tail = 0;
1098            q[tail++] = o;
1099
1100            while (head != tail) {
1101                int x = q[head++];
1102                sz[x] = 1;
1103
1104                for (auto pi : G[x]) {
1105                    int y = pi.first;
1106
1107                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1108                        ↪
1109                        {
1110                            x = y;
1111                            ok = true;
1112                            break;
1113                        }
1114
1115                }
1116
1117            }
1118
1119            return o;
1120        }
1121
1122        int getcenter(int o, int s) {
1123            int head = 0, tail = 0;
1124            q[tail++] = o;
1125
1126            while (head != tail) {
1127                int x = q[head++];
1128                sz[x] = 1;
1129
1130                for (auto pi : G[x]) {
1131                    int y = pi.first;
1132
1133                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1134                        ↪
1135                        {
1136                            x = y;
1137                            ok = true;
1138                            break;
1139                        }
1140
1141                }
1142
1143            }
1144
1145            return o;
1146        }
1147
1148        int getcenter(int o, int s) {
1149            int head = 0, tail = 0;
1150            q[tail++] = o;
1151
1152            while (head != tail) {
1153                int x = q[head++];
1154                sz[x] = 1;
1155
1156                for (auto pi : G[x]) {
1157                    int y = pi.first;
1158
1159                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1160                        ↪
1161                        {
1162                            x = y;
1163                            ok = true;
1164                            break;
1165                        }
1166
1167                }
1168
1169            }
1170
1171            return o;
1172        }
1173
1174        int getcenter(int o, int s) {
1175            int head = 0, tail = 0;
1176            q[tail++] = o;
1177
1178            while (head != tail) {
1179                int x = q[head++];
1180                sz[x] = 1;
1181
1182                for (auto pi : G[x]) {
1183                    int y = pi.first;
1184
1185                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1186                        ↪
1187                        {
1188                            x = y;
1189                            ok = true;
1190                            break;
1191                        }
1192
1193                }
1194
1195            }
1196
1197            return o;
1198        }
1199
1200        int getcenter(int o, int s) {
1201            int head = 0, tail = 0;
1202            q[tail++] = o;
1203
1204            while (head != tail) {
1205                int x = q[head++];
1206                sz[x] = 1;
1207
1208                for (auto pi : G[x]) {
1209                    int y = pi.first;
1210
1211                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1212                        ↪
1213                        {
1214                            x = y;
1215                            ok = true;
1216                            break;
1217                        }
1218
1219                }
1220
1221            }
1222
1223            return o;
1224        }
1225
1226        int getcenter(int o, int s) {
1227            int head = 0, tail = 0;
1228            q[tail++] = o;
1229
1230            while (head != tail) {
1231                int x = q[head++];
1232                sz[x] = 1;
1233
1234                for (auto pi : G[x]) {
1235                    int y = pi.first;
1236
1237                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1238                        ↪
1239                        {
1240                            x = y;
1241                            ok = true;
1242                            break;
1243                        }
1244
1245                }
1246
1247            }
1248
1249            return o;
1250        }
1251
1252        int getcenter(int o, int s) {
1253            int head = 0, tail = 0;
1254            q[tail++] = o;
1255
1256            while (head != tail) {
1257                int x = q[head++];
1258                sz[x] = 1;
1259
1260                for (auto pi : G[x]) {
1261                    int y = pi.first;
1262
1263                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1264                        ↪
1265                        {
1266                            x = y;
1267                            ok = true;
1268                            break;
1269                        }
1270
1271                }
1272
1273            }
1274
1275            return o;
1276        }
1277
1278        int getcenter(int o, int s) {
1279            int head = 0, tail = 0;
1280            q[tail++] = o;
1281
1282            while (head != tail) {
1283                int x = q[head++];
1284                sz[x] = 1;
1285
1286                for (auto pi : G[x]) {
1287                    int y = pi.first;
1288
1289                    if (!vis[y] && y != p[x] && sz[y] * 2 > s)
1290                        ↪
1291                        {
1292                            x = y;
1293                            ok = true;
1294                            break;
1295                        }
1296
1297                }
1298
1299            }
1300
1301            return o;
1302        }
1303
1304        int get
```

```

172     }
173 }
174 
175     if (!ok)
176         break;
177 }
178 
179 return x;
180 }

181 void getdis(int st, int o, int k) {
182     int head = 0, tail = 0;
183     q[tail++] = st;
184 
185     while (head != tail) {
186         int x = q[head++];
187         sz[x] = 1;
188         rid[x][k] = st;
189 
190         tr[o].insert(d[x][k] - w[x]);
191         tre[st][k].insert(d[x][k] - w[x]);
192 
193         for (auto pi : G[x]) {
194             int y = pi.first, val = pi.second;
195 
196             if (!vis[y] && y != p[x]) {
197                 p[y] = x;
198                 d[y][k] = d[x][k] + val;
199                 q[tail++] = y;
200             }
201         }
202     }
203 
204     for (int i = tail - 1; i; i--)
205         sz[p[q[i]]] += sz[q[i]];
206 
207     siz[st][k] = sz[st];
208 }
209 }

210 void rebuild(int x, int s, int pr) {
211     x = getcenter(x, s);
212     vis[x] = true;
213     p[x] = pr;
214     depth[x] = depth[pr] + 1;
215     sz[x] = s;
216 
217     tr[x].insert(-w[x]);
218 
219     for (auto pi : G[x]) {
220         int y = pi.first, val = pi.second;
221 
222         if (!vis[y]) {
223             p[y] = x;
224             d[y][depth[x]] = val;
225             getdis(y, x, depth[x]);
226         }
227     }
228 
229     for (auto pi : G[x]) {
230         int y = pi.first;
231 
232         if (!vis[y])
233             rebuild(y, sz[y], x);
234     }
235 }

236 long long add_node(int x, int nw) { // nw是边权
237     depth[x] = depth[p[x]] + 1;
238     sz[x] = 1;
239 }

240 vis[x] = true;
241 
242 tr[x].insert(-w[x]);
243 
244 long long tmp = 0;
245 int goat = 0; // 替罪羊
246 
247 for (int u = p[x], k = depth[x] - 1; u; u = p[u],
248     ~k--) {
249     d[x][k] = d[p[x]][k] + nw;
250     rid[x][k] = (rid[p[x]][k] ? rid[p[x]][k] : x);
251 
252     tmp += tr[u].order_of_key(w[x] - d[x][k] + 1);
253     tmp -= tre[rid[x][k]][k].order_of_key(w[x] -
254     ~d[x][k] + 1);
255 
256     tr[u].insert(d[x][k] - w[x]);
257     tre[rid[x][k]][k].insert(d[x][k] - w[x]);
258 
259     sz[u]++;
260     siz[rid[x][k]][k]++;
261 
262     if (siz[rid[x][k]][k] > sz[u] * alpha + 5)
263         goat = u;
264 }
265 
266 if (goat) {
267     destroy(goat);
268     rebuild(goat, sz[goat], p[goat]);
269 }
270 
271 return tmp;
272 }

273 int main() {
274 
275     null → ch[0] = null → ch[1] = null;
276     null → size = 0;
277 
278     int n;
279     scanf("%*d%d", &n);
280 
281     scanf("%*d%*d%d", &w[1]);
282     vis[1] = true;
283     sz[1] = 1;
284     tr[1].insert(-w[1]);
285 
286     printf("0\n");
287 
288     long long ans = 0;
289 
290     for (int i = 2; i ≤ n; i++) {
291         int nw;
292         scanf("%d%d%d", &p[i], &nw, &w[i]);
293 
294         p[i] ≈ (ans % 1000000000);
295 
296         G[i].push_back(make_pair(p[i], nw));
297         G[p[i]].push_back(make_pair(i, nw));
298 
299         ans += add_node(i, nw);
300 
301         printf("%lld\n", ans);
302     }
303 
304     return 0;
305 }

```

## 4.7 LCT动态树

### 4.7.1 不换根(弹飞绵羊)

```

1 #define isroot(x) ((x) != (x) -> p -> ch[0] && (x) !=  
2     -> (x) -> p -> ch[1]) // 判断是不是Splay的根  
3 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1]) // 判断它是它  
4     -> 父亲的左 / 右儿子  
5  
6 struct node { // 结点类定义  
7     int size; // Splay的子树大小  
8     node *ch[2], *p;  
9  
10    node() : size(1) {}  
11    void refresh() {  
12        size = ch[0] -> size + ch[1] -> size + 1;  
13    } // 附加信息维护  
14 } null[maxn];  
15  
16 // 在主函数开头加上这句初始化  
17 null -> size = 0;  
18  
19 // 初始化结点  
20 void initialize(node *x) {  
21     x -> ch[0] = x -> ch[1] = x -> p = null;  
22 }  
23  
24 // Access 均摊O(log n)  
25 // LCT核心操作, 把结点到根的路径打通, 顺便把与重儿子的连  
26     -> 边变成轻边  
27 // 需要调用splay  
28 node *access(node *x) {  
29     node *y = null;  
30  
31     while (x != null) {  
32         splay(x);  
33  
34         x -> ch[1] = y;  
35         (y = x) -> refresh();  
36  
37         x = x -> p;  
38     }  
39  
40     return y;  
41 }  
42  
43 // Link 均摊O(log n)  
44 // 把x的父亲设为y  
45 // 要求x必须为所在树的根节点否则会导致后续各种莫名其妙的  
46     -> 问题  
47 // 需要调用splay  
48 void link(node *x, node *y) {  
49     splay(x);  
50     x -> p = y;  
51 }  
52  
53 // Cut 均摊O(log n)  
54 // 把x与其父亲的连边断掉  
55 // x可以是所在树的根节点, 这时此操作没有任何实质效果  
56 // 需要调用access和splay  
57 void cut(node *x) {  
58     access(x);  
59     splay(x);  
60  
61     x -> ch[0] -> p = null;  
62     x -> ch[0] = null;  
63  
64     x -> refresh();  
65 }  
66  
67 // Splay 均摊O(log n)

```

```

68 // 需要调用旋转
69 void splay(node *x) {
70     while (!isroot(x)) {
71         if (isroot(x -> p)) {
72             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
73             break;
74         }
75         if (dir(x) == dir(x -> p))
76             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
77         else
78             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
79         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
80     }
81 }
82 // 旋转(LCT版本) O(1)
83 // 平衡树基本操作
84 // 要求对应儿子必须存在, 否则会导致后续各种莫名其妙的问题
85 void rot(node *x, int d) {
86     node *y = x -> ch[d ^ 1];
87  
88     y -> p = x -> p;
89     if (!isroot(x))
90         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
91  
92     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
93         y -> ch[d] -> p = x;
94     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
95  
96     x -> refresh();
97     y -> refresh();
98 }

```

### 4.7.2 换根/维护生成树

```

1 #define isroot(x) ((x) -> p == null || ((x) -> p -> ch[0] != (x) && (x) -> p -> ch[1] != (x)))
2 #define dir(x) ((x) == (x) -> p -> ch[1])
3
4 using namespace std;
5
6 const int maxn = 200005;
7
8 struct node{
9     int key, mx, pos;
10    bool rev;
11    node *ch[2], *p;
12
13    node(int key = 0): key(key), mx(key), pos(-1),
14          -> rev(false) {}
15
16    void pushdown() {
17        if (!rev)
18            return;
19
20        ch[0] -> rev ^= true;
21        ch[1] -> rev ^= true;
22        swap(ch[0], ch[1]);
23
24        if (pos != -1)
25            pos ^= 1;
26
27        rev = false;
28    }
29
30    void refresh() {
31        mx = key;
32        pos = -1;
33    }
34
35    void rotate(int d) {
36        node *y = ch[d ^ 1];
37
38        if (y -> rev)
39            y -> rev ^= true;
40
41        if (d == 1)
42            ch[0] -> p = y;
43        else
44            ch[1] -> p = y;
45
46        if (y -> pos != -1)
47            y -> pos ^= 1;
48
49        if (y -> rev)
50            y -> rev ^= true;
51
52        if (y -> pos != -1)
53            pos ^= 1;
54
55        if (y -> rev)
56            y -> rev ^= true;
57
58        if (y -> pos != -1)
59            pos ^= 1;
60
61        if (y -> rev)
62            y -> rev ^= true;
63
64        if (y -> pos != -1)
65            pos ^= 1;
66
67        if (y -> rev)
68            y -> rev ^= true;
69
70        if (y -> pos != -1)
71            pos ^= 1;
72
73        if (y -> rev)
74            y -> rev ^= true;
75
76        if (y -> pos != -1)
77            pos ^= 1;
78
79        if (y -> rev)
80            y -> rev ^= true;
81
82        if (y -> pos != -1)
83            pos ^= 1;
84
85        if (y -> rev)
86            y -> rev ^= true;
87
88        if (y -> pos != -1)
89            pos ^= 1;
90
91        if (y -> rev)
92            y -> rev ^= true;
93
94        if (y -> pos != -1)
95            pos ^= 1;
96
97        if (y -> rev)
98            y -> rev ^= true;
99
100       if (y -> pos != -1)
101           pos ^= 1;
102
103       if (y -> rev)
104           y -> rev ^= true;
105
106       if (y -> pos != -1)
107           pos ^= 1;
108
109       if (y -> rev)
110           y -> rev ^= true;
111
112       if (y -> pos != -1)
113           pos ^= 1;
114
115       if (y -> rev)
116           y -> rev ^= true;
117
118       if (y -> pos != -1)
119           pos ^= 1;
120
121       if (y -> rev)
122           y -> rev ^= true;
123
124       if (y -> pos != -1)
125           pos ^= 1;
126
127       if (y -> rev)
128           y -> rev ^= true;
129
130       if (y -> pos != -1)
131           pos ^= 1;
132
133       if (y -> rev)
134           y -> rev ^= true;
135
136       if (y -> pos != -1)
137           pos ^= 1;
138
139       if (y -> rev)
140           y -> rev ^= true;
141
142       if (y -> pos != -1)
143           pos ^= 1;
144
145       if (y -> rev)
146           y -> rev ^= true;
147
148       if (y -> pos != -1)
149           pos ^= 1;
150
151       if (y -> rev)
152           y -> rev ^= true;
153
154       if (y -> pos != -1)
155           pos ^= 1;
156
157       if (y -> rev)
158           y -> rev ^= true;
159
160       if (y -> pos != -1)
161           pos ^= 1;
162
163       if (y -> rev)
164           y -> rev ^= true;
165
166       if (y -> pos != -1)
167           pos ^= 1;
168
169       if (y -> rev)
170           y -> rev ^= true;
171
172       if (y -> pos != -1)
173           pos ^= 1;
174
175       if (y -> rev)
176           y -> rev ^= true;
177
178       if (y -> pos != -1)
179           pos ^= 1;
180
181       if (y -> rev)
182           y -> rev ^= true;
183
184       if (y -> pos != -1)
185           pos ^= 1;
186
187       if (y -> rev)
188           y -> rev ^= true;
189
190       if (y -> pos != -1)
191           pos ^= 1;
192
193       if (y -> rev)
194           y -> rev ^= true;
195
196       if (y -> pos != -1)
197           pos ^= 1;
198
199       if (y -> rev)
200           y -> rev ^= true;
201
202       if (y -> pos != -1)
203           pos ^= 1;
204
205       if (y -> rev)
206           y -> rev ^= true;
207
208       if (y -> pos != -1)
209           pos ^= 1;
210
211       if (y -> rev)
212           y -> rev ^= true;
213
214       if (y -> pos != -1)
215           pos ^= 1;
216
217       if (y -> rev)
218           y -> rev ^= true;
219
220       if (y -> pos != -1)
221           pos ^= 1;
222
223       if (y -> rev)
224           y -> rev ^= true;
225
226       if (y -> pos != -1)
227           pos ^= 1;
228
229       if (y -> rev)
230           y -> rev ^= true;
231
232       if (y -> pos != -1)
233           pos ^= 1;
234
235       if (y -> rev)
236           y -> rev ^= true;
237
238       if (y -> pos != -1)
239           pos ^= 1;
240
241       if (y -> rev)
242           y -> rev ^= true;
243
244       if (y -> pos != -1)
245           pos ^= 1;
246
247       if (y -> rev)
248           y -> rev ^= true;
249
250       if (y -> pos != -1)
251           pos ^= 1;
252
253       if (y -> rev)
254           y -> rev ^= true;
255
256       if (y -> pos != -1)
257           pos ^= 1;
258
259       if (y -> rev)
260           y -> rev ^= true;
261
262       if (y -> pos != -1)
263           pos ^= 1;
264
265       if (y -> rev)
266           y -> rev ^= true;
267
268       if (y -> pos != -1)
269           pos ^= 1;
270
271       if (y -> rev)
272           y -> rev ^= true;
273
274       if (y -> pos != -1)
275           pos ^= 1;
276
277       if (y -> rev)
278           y -> rev ^= true;
279
280       if (y -> pos != -1)
281           pos ^= 1;
282
283       if (y -> rev)
284           y -> rev ^= true;
285
286       if (y -> pos != -1)
287           pos ^= 1;
288
289       if (y -> rev)
290           y -> rev ^= true;
291
292       if (y -> pos != -1)
293           pos ^= 1;
294
295       if (y -> rev)
296           y -> rev ^= true;
297
298       if (y -> pos != -1)
299           pos ^= 1;
300
301       if (y -> rev)
302           y -> rev ^= true;
303
304       if (y -> pos != -1)
305           pos ^= 1;
306
307       if (y -> rev)
308           y -> rev ^= true;
309
310       if (y -> pos != -1)
311           pos ^= 1;
312
313       if (y -> rev)
314           y -> rev ^= true;
315
316       if (y -> pos != -1)
317           pos ^= 1;
318
319       if (y -> rev)
320           y -> rev ^= true;
321
322       if (y -> pos != -1)
323           pos ^= 1;
324
325       if (y -> rev)
326           y -> rev ^= true;
327
328       if (y -> pos != -1)
329           pos ^= 1;
330
331       if (y -> rev)
332           y -> rev ^= true;
333
334       if (y -> pos != -1)
335           pos ^= 1;
336
337       if (y -> rev)
338           y -> rev ^= true;
339
340       if (y -> pos != -1)
341           pos ^= 1;
342
343       if (y -> rev)
344           y -> rev ^= true;
345
346       if (y -> pos != -1)
347           pos ^= 1;
348
349       if (y -> rev)
350           y -> rev ^= true;
351
352       if (y -> pos != -1)
353           pos ^= 1;
354
355       if (y -> rev)
356           y -> rev ^= true;
357
358       if (y -> pos != -1)
359           pos ^= 1;
360
361       if (y -> rev)
362           y -> rev ^= true;
363
364       if (y -> pos != -1)
365           pos ^= 1;
366
367       if (y -> rev)
368           y -> rev ^= true;
369
370       if (y -> pos != -1)
371           pos ^= 1;
372
373       if (y -> rev)
374           y -> rev ^= true;
375
376       if (y -> pos != -1)
377           pos ^= 1;
378
379       if (y -> rev)
380           y -> rev ^= true;
381
382       if (y -> pos != -1)
383           pos ^= 1;
384
385       if (y -> rev)
386           y -> rev ^= true;
387
388       if (y -> pos != -1)
389           pos ^= 1;
390
391       if (y -> rev)
392           y -> rev ^= true;
393
394       if (y -> pos != -1)
395           pos ^= 1;
396
397       if (y -> rev)
398           y -> rev ^= true;
399
400       if (y -> pos != -1)
401           pos ^= 1;
402
403       if (y -> rev)
404           y -> rev ^= true;
405
406       if (y -> pos != -1)
407           pos ^= 1;
408
409       if (y -> rev)
410           y -> rev ^= true;
411
412       if (y -> pos != -1)
413           pos ^= 1;
414
415       if (y -> rev)
416           y -> rev ^= true;
417
418       if (y -> pos != -1)
419           pos ^= 1;
420
421       if (y -> rev)
422           y -> rev ^= true;
423
424       if (y -> pos != -1)
425           pos ^= 1;
426
427       if (y -> rev)
428           y -> rev ^= true;
429
430       if (y -> pos != -1)
431           pos ^= 1;
432
433       if (y -> rev)
434           y -> rev ^= true;
435
436       if (y -> pos != -1)
437           pos ^= 1;
438
439       if (y -> rev)
440           y -> rev ^= true;
441
442       if (y -> pos != -1)
443           pos ^= 1;
444
445       if (y -> rev)
446           y -> rev ^= true;
447
448       if (y -> pos != -1)
449           pos ^= 1;
450
451       if (y -> rev)
452           y -> rev ^= true;
453
454       if (y -> pos != -1)
455           pos ^= 1;
456
457       if (y -> rev)
458           y -> rev ^= true;
459
460       if (y -> pos != -1)
461           pos ^= 1;
462
463       if (y -> rev)
464           y -> rev ^= true;
465
466       if (y -> pos != -1)
467           pos ^= 1;
468
469       if (y -> rev)
470           y -> rev ^= true;
471
472       if (y -> pos != -1)
473           pos ^= 1;
474
475       if (y -> rev)
476           y -> rev ^= true;
477
478       if (y -> pos != -1)
479           pos ^= 1;
480
481       if (y -> rev)
482           y -> rev ^= true;
483
484       if (y -> pos != -1)
485           pos ^= 1;
486
487       if (y -> rev)
488           y -> rev ^= true;
489
490       if (y -> pos != -1)
491           pos ^= 1;
492
493       if (y -> rev)
494           y -> rev ^= true;
495
496       if (y -> pos != -1)
497           pos ^= 1;
498
499       if (y -> rev)
500           y -> rev ^= true;
501
502       if (y -> pos != -1)
503           pos ^= 1;
504
505       if (y -> rev)
506           y -> rev ^= true;
507
508       if (y -> pos != -1)
509           pos ^= 1;
510
511       if (y -> rev)
512           y -> rev ^= true;
513
514       if (y -> pos != -1)
515           pos ^= 1;
516
517       if (y -> rev)
518           y -> rev ^= true;
519
520       if (y -> pos != -1)
521           pos ^= 1;
522
523       if (y -> rev)
524           y -> rev ^= true;
525
526       if (y -> pos != -1)
527           pos ^= 1;
528
529       if (y -> rev)
530           y -> rev ^= true;
531
532       if (y -> pos != -1)
533           pos ^= 1;
534
535       if (y -> rev)
536           y -> rev ^= true;
537
538       if (y -> pos != -1)
539           pos ^= 1;
540
541       if (y -> rev)
542           y -> rev ^= true;
543
544       if (y -> pos != -1)
545           pos ^= 1;
546
547       if (y -> rev)
548           y -> rev ^= true;
549
550       if (y -> pos != -1)
551           pos ^= 1;
552
553       if (y -> rev)
554           y -> rev ^= true;
555
556       if (y -> pos != -1)
557           pos ^= 1;
558
559       if (y -> rev)
560           y -> rev ^= true;
561
562       if (y -> pos != -1)
563           pos ^= 1;
564
565       if (y -> rev)
566           y -> rev ^= true;
567
568       if (y -> pos != -1)
569           pos ^= 1;
570
571       if (y -> rev)
572           y -> rev ^= true;
573
574       if (y -> pos != -1)
575           pos ^= 1;
576
577       if (y -> rev)
578           y -> rev ^= true;
579
580       if (y -> pos != -1)
581           pos ^= 1;
582
583       if (y -> rev)
584           y -> rev ^= true;
585
586       if (y -> pos != -1)
587           pos ^= 1;
588
589       if (y -> rev)
590           y -> rev ^= true;
591
592       if (y -> pos != -1)
593           pos ^= 1;
594
595       if (y -> rev)
596           y -> rev ^= true;
597
598       if (y -> pos != -1)
599           pos ^= 1;
600
601       if (y -> rev)
602           y -> rev ^= true;
603
604       if (y -> pos != -1)
605           pos ^= 1;
606
607       if (y -> rev)
608           y -> rev ^= true;
609
610       if (y -> pos != -1)
611           pos ^= 1;
612
613       if (y -> rev)
614           y -> rev ^= true;
615
616       if (y -> pos != -1)
617           pos ^= 1;
618
619       if (y -> rev)
620           y -> rev ^= true;
621
622       if (y -> pos != -1)
623           pos ^= 1;
624
625       if (y -> rev)
626           y -> rev ^= true;
627
628       if (y -> pos != -1)
629           pos ^= 1;
630
631       if (y -> rev)
632           y -> rev ^= true;
633
634       if (y -> pos != -1)
635           pos ^= 1;
636
637       if (y -> rev)
638           y -> rev ^= true;
639
640       if (y -> pos != -1)
641           pos ^= 1;
642
643       if (y -> rev)
644           y -> rev ^= true;
645
646       if (y -> pos != -1)
647           pos ^= 1;
648
649       if (y -> rev)
650           y -> rev ^= true;
651
652       if (y -> pos != -1)
653           pos ^= 1;
654
655       if (y -> rev)
656           y -> rev ^= true;
657
658       if (y -> pos != -1)
659           pos ^= 1;
660
661       if (y -> rev)
662           y -> rev ^= true;
663
664       if (y -> pos != -1)
665           pos ^= 1;
666
667       if (y -> rev)
668           y -> rev ^= true;
669
670       if (y -> pos != -1)
671           pos ^= 1;
672
673       if (y -> rev)
674           y -> rev ^= true;
675
676       if (y -> pos != -1)
677           pos ^= 1;
678
679       if (y -> rev)
680           y -> rev ^= true;
681
682       if (y -> pos != -1)
683           pos ^= 1;
684
685       if (y -> rev)
686           y -> rev ^= true;
687
688       if (y -> pos != -1)
689           pos ^= 1;
690
691       if (y -> rev)
692           y -> rev ^= true;
693
694       if (y -> pos != -1)
695           pos ^= 1;
696
697       if (y -> rev)
698           y -> rev ^= true;
699
700       if (y -> pos != -1)
701           pos ^= 1;
702
703       if (y -> rev)
704           y -> rev ^= true;
705
706       if (y -> pos != -1)
707           pos ^= 1;
708
709       if (y -> rev)
710           y -> rev ^= true;
711
712       if (y -> pos != -1)
713           pos ^= 1;
714
715       if (y -> rev)
716           y -> rev ^= true;
717
718       if (y -> pos != -1)
719           pos ^= 1;
720
721       if (y -> rev)
722           y -> rev ^= true;
723
724       if (y -> pos != -1)
725           pos ^= 1;
726
727       if (y -> rev)
728           y -> rev ^= true;
729
730       if (y -> pos != -1)
731           pos ^= 1;
732
733       if (y -> rev)
734           y -> rev ^= true;
735
736       if (y -> pos != -1)
737           pos ^= 1;
738
739       if (y -> rev)
740           y -> rev ^= true;
741
742       if (y -> pos != -1)
743           pos ^= 1;
744
745       if (y -> rev)
746           y -> rev ^= true;
747
748       if (y -> pos != -1)
749           pos ^= 1;
750
751       if (y -> rev)
752           y -> rev ^= true;
753
754       if (y -> pos != -1)
755           pos ^= 1;
756
757       if (y -> rev)
758           y -> rev ^= true;
759
760       if (y -> pos != -1)
761           pos ^= 1;
762
763       if (y -> rev)
764           y -> rev ^= true;
765
766       if (y -> pos != -1)
767           pos ^= 1;
768
769       if (y -> rev)
770           y -> rev ^= true;
771
772       if (y -> pos != -1)
773           pos ^= 1;
774
775       if (y -> rev)
776           y -> rev ^= true;
777
778       if (y -> pos != -1)
779           pos ^= 1;
780
781       if (y -> rev)
782           y -> rev ^= true;
783
784       if (y -> pos != -1)
785           pos ^= 1;
786
787       if (y -> rev)
788           y -> rev ^= true;
789
790       if (y -> pos != -1)
791           pos ^= 1;
792
793       if (y -> rev)
794           y -> rev ^= true;
795
796       if (y -> pos != -1)
797           pos ^= 1;
798
799       if (y -> rev)
800           y -> rev ^= true;
801
802       if (y -> pos != -1)
803           pos ^= 1;
804
805       if (y -> rev)
806           y -> rev ^= true;
807
808       if (y -> pos != -1)
809           pos ^= 1;
810
811       if (y -> rev)
812           y -> rev ^= true;
813
814       if (y -> pos != -1)
815           pos ^= 1;
816
817       if (y -> rev)
818           y -> rev ^= true;
819
820       if (y -> pos != -1)
821           pos ^= 1;
822
823       if (y -> rev)
824           y -> rev ^= true;
825
826       if (y -> pos != -1)
827           pos ^= 1;
828
829       if (y -> rev)
830           y -> rev ^= true;
831
832       if (y -> pos != -1)
833           pos ^= 1;
834
835       if (y -> rev)
836           y -> rev ^= true;
837
838       if (y -> pos != -1)
839           pos ^= 1;
840
841       if (y -> rev)
842           y -> rev ^= true;
843
844       if (y -> pos != -1)
845           pos ^= 1;
846
847       if (y -> rev)
848           y -> rev ^= true;
849
850       if (y -> pos != -1)
851           pos ^= 1;
852
853       if (y -> rev)
854           y -> rev ^= true;
855
856       if (y -> pos != -1)
857           pos ^= 1;
858
859       if (y -> rev)
860           y -> rev ^= true;
861
862       if (y -> pos != -1)
863           pos ^= 1;
864
865       if (y -> rev)
866           y -> rev ^= true;
867
868       if (y -> pos != -1)
869           pos ^= 1;
870
871       if (y -> rev)
872           y -> rev ^= true;
873
874       if (y -> pos != -1)
875           pos ^= 1;
876
877       if (y -> rev)
878           y -> rev ^= true;
879
880       if (y -> pos != -1)
881           pos ^= 1;
882
883       if (y -> rev)
884           y -> rev ^= true;
885
886       if (y -> pos != -1)
887           pos ^= 1;
888
889       if (y -> rev)
890           y -> rev ^= true;
891
892       if (y -> pos != -1)
893           pos ^= 1;
894
895       if (y -> rev)
896           y -> rev ^= true;
897
898       if (y -> pos != -1)
899           pos ^= 1;
900
901       if (y -> rev)
902           y -> rev ^= true;
903
904       if (y -> pos != -1)
905           pos ^= 1;
906
907       if (y -> rev)
908           y -> rev ^= true;
909
910       if (y -> pos != -1)
911           pos ^= 1;
912
913       if (y -> rev)
914           y -> rev ^= true;
915
916       if (y -> pos != -1)
917           pos ^= 1;
918
919       if (y -> rev)
920           y -> rev ^= true;
921
922       if (y -> pos != -1)
923           pos ^= 1;
924
925       if (y -> rev)
926           y -> rev ^= true;
927
928       if (y -> pos != -1)
929           pos ^= 1;
930
931       if (y -> rev)
932           y -> rev ^= true;
933
934       if (y -> pos != -1)
935           pos ^= 1;
936
937       if (y -> rev)
938           y -> rev ^= true;
939
940       if (y -> pos != -1)
941           pos ^= 1;
942
943       if (y -> rev)
944           y -> rev ^= true;
945
946       if (y -> pos != -1)
947           pos ^= 1;
948
949       if (y -> rev)
950           y -> rev ^= true;
951
952       if (y -> pos != -1)
953           pos ^= 1;
954
955       if (y -> rev)
956           y -> rev ^= true;
957
958       if (y -> pos != -1)
959           pos ^= 1;
960
961       if (y -> rev)
962           y -> rev ^= true;
963
964       if (y -> pos != -1)
965           pos ^= 1;
966
967       if (y -> rev)
968           y -> rev ^= true;
969
970       if (y -> pos != -1)
971           pos ^= 1;
972
973       if (y -> rev)
974           y -> rev ^= true;
975
976       if (y -> pos != -1)
977           pos ^= 1;
978
979       if (y -> rev)
980           y -> rev ^= true;
981
982       if (y -> pos != -1)
983           pos ^= 1;
984
985       if (y -> rev
```

```

32     if (ch[0] → mx > mx) {
33         mx = ch[0] → mx;
34         pos = 0;
35     }
36     if (ch[1] → mx > mx) {
37         mx = ch[1] → mx;
38         pos = 1;
39     }
40 }
41 null[maxn * 2];
42
43 void init(node *x, int k) {
44     x → ch[0] = x → ch[1] = x → p = null;
45     x → key = x → mx = k;
46 }
47
48 void rot(node *x, int d) {
49     node *y = x → ch[d ^ 1];
50     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
51         y → ch[d] → p = x;
52
53     y → p = x → p;
54     if (!isroot(x))
55         x → p → ch[dir(x)] = y;
56
57     (y → ch[d] = x) → p = y;
58
59     x → refresh();
60     y → refresh();
61 }
62
63 void splay(node *x) {
64     x → pushdown();
65
66     while (!isroot(x)) {
67         if (!isroot(x → p))
68             x → p → p → pushdown();
69         x → p → pushdown();
70         x → pushdown();
71
72         if (isroot(x → p)) {
73             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
74             break;
75         }
76
77         if (dir(x) == dir(x → p))
78             rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
79         else
80             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
81
82         rot(x → p, dir(x) ^ 1);
83     }
84 }
85
86 node *access(node *x) {
87     node *y = null;
88
89     while (x != null) {
90         splay(x);
91
92         x → ch[1] = y;
93         (y = x) → refresh();
94
95         x = x → p;
96     }
97
98     return y;
99 }
100
101 void makeroot(node *x) {
102     access(x);
103     splay(x);
104     x → rev ^= true;
105 }
106
107 void link(node *x, node *y) {
108     makeroot(x);
109     x → p = y;
110 }
111
112 void cut(node *x, node *y) {
113     makeroot(x);
114     access(y);
115     splay(y);
116
117     y → ch[0] → p = null;
118     y → ch[0] = null;
119     y → refresh();
120 }
121
122 node *getroot(node *x) {
123     x = access(x);
124     while (x → pushdown(), x → ch[0] != null)
125         x = x → ch[0];
126     splay(x);
127     return x;
128 }
129
130 node *getmax(node *x, node *y) {
131     makeroot(x);
132     x = access(y);
133
134     while (x → pushdown(), x → pos != -1)
135         x = x → ch[x → pos];
136     splay(x);
137
138     return x;
139 }
140
141 // 以下为主函数示例
142 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
143     init(null + n + i, w[i]);
144     if (getroot(null + u[i]) != getroot(null + v[i])) {
145         ans[q + 1] -= k;
146         ans[q + 1] += w[i];
147
148         link(null + u[i], null + n + i);
149         link(null + v[i], null + n + i);
150         vis[i] = true;
151     }
152     else {
153         int ii = getmax(null + u[i], null + v[i]) -
154             → null - n;
155         if (w[ii] ≥ w[i])
156             continue;
157
158         cut(null + u[ii], null + n + ii);
159         cut(null + v[ii], null + n + ii);
160
161         link(null + u[ii], null + n + i);
162         link(null + v[ii], null + n + i);
163
164         ans[q + 1] -= w[ii];
165         ans[q + 1] += w[i];
166     }
167 }

```

## 4.7.3 维护子树信息

```

1 // 这个东西虽然只需要抄板子但还是极其难写，常数极其巨大，  

2 // 没必要的时候就不要用  

3 // 如果维护子树最小值就需要套一个可删除的堆来维护，复杂度  

4 // 会变成O(n\log^2 n)  

5 // 注意由于这道题与边权有关，需要边权拆点变点权  

6  

7 // 宏定义  

8 #define isroot(x) ((x) → p == null || ((x) != (x) → p  

9 // → ch[0] && (x) != (x) → p → ch[1]))  

10 #define dir(x) ((x) == (x) → p → ch[1])  

11  

12 // 节点类定义  

13 struct node { // 以维护子树中黑点到根距离和为例  

14     int w, chain_cnt, tree_cnt;  

15     long long sum, suml, sumr, tree_sum; // 由于换根需要  

16     // 子树反转，需要维护两个方向的信息  

17     bool rev, col;  

18     node *ch[2], *p;  

19  

20     node() : w(0), chain_cnt(0),  

21         → tree_cnt(0), sum(0), suml(0), sumr(0),  

22         → tree_sum(0), rev(false), col(false) {}  

23  

24     inline void pushdown() {  

25         if(!rev)  

26             return;  

27  

28         ch[0]→rev ≈ true;  

29         ch[1]→rev ≈ true;  

30         swap(ch[0], ch[1]);  

31         swap(suml, sumr);  

32  

33         rev = false;  

34     }  

35  

36     inline void refresh() { // 如果不想这样特判  

37         // 就pushdown一下  

38         // pushdown();  

39  

40         sum = ch[0] → sum + ch[1] → sum + w;  

41         suml = (ch[0] → rev ? ch[0] → sumr : ch[0] →  

42             → suml) + (ch[1] → rev ? ch[1] → sumr :  

43             → ch[1] → suml) + (tree_cnt + ch[1] →  

44             → chain_cnt) * (ch[0] → sum + w) + tree_sum;  

45         sumr = (ch[0] → rev ? ch[0] → suml : ch[0] →  

46             → sumr) + (ch[1] → rev ? ch[1] → suml :  

47             → ch[1] → sumr) + (tree_cnt + ch[0] →  

48             → chain_cnt) * (ch[1] → sum + w) + tree_sum;  

49         chain_cnt = ch[0] → chain_cnt + ch[1] →  

50             → chain_cnt + tree_cnt;  

51     }  

52     null[maxn * 2]; // 如果没有边权变点权就不用乘2了  

53  

54 // 封装构造函数  

55 node *newnode(int w) {  

56     node *x = nodes.front(); // 因为有删边加边，可以用一  

57     // 个队列维护可用结点  

58     nodes.pop();  

59     initialize(x);  

60     x → w = w;  

61     x → refresh();  

62     return x;  

63 }
64  

65 // 封装初始化函数  

66 // 记得在进行操作之前对所有结点调用一遍  

67 inline void initialize(node *x) {  

68     *x = node();  

69     x → ch[0] = x → ch[1] = x → p = null;

```

```

70 }  

71  

72 // 注意一下在Access的同时更新子树信息的方法  

73 node *access(node *x) {  

74     node *y = null;  

75  

76     while (x != null) {  

77         splay(x);  

78  

79         x → tree_cnt += x → ch[1] → chain_cnt - y →  

80             → chain_cnt;  

81         x → tree_sum += (x → ch[1] → rev ? x →  

82             → ch[1] → sumr : x → ch[1] → suml) - y →  

83             → suml;  

84         x → ch[1] = y;  

85  

86         (y = x) → refresh();  

87         x = x → p;  

88     }  

89  

90     return y;  

91 }  

92  

93 // 找到一个点所在连通块的根  

94 // 对比原版没有变化  

95 node *getroot(node *x) {  

96     x = access(x);  

97  

98     while (x → pushdown(), x → ch[0] != null)  

99         x = x → ch[0];  

100    splay(x);  

101  

102    return x;  

103 }  

104  

105 // 换根，同样没有变化  

106 void makeroott(node *x) {  

107     access(x);  

108     splay(x);  

109     x → rev ≈ true;  

110     x → pushdown();  

111  

112 // 连接两个点  

113 // !!! 注意这里必须把两者都变成根，因为只能修改根结点  

114 void link(node *x, node *y) {  

115     makeroott(x);  

116     makeroott(y);  

117  

118     x → p = y;  

119     y → tree_cnt += x → chain_cnt;  

120     y → tree_sum += x → suml;  

121     y → refresh();  

122  

123 // 删除一条边  

124 // 对比原版没有变化  

125 void cut(node *x, node *y) {  

126     makeroott(x);  

127     access(y);  

128     splay(y);  

129  

130     y → ch[0] → p = null;  

131     y → ch[0] = null;  

132     y → refresh();  

133  

134 // 修改/询问一个点，这里以询问为例  

135 // 如果是修改就在换根之后搞一些操作

```

```
122 long long query(node *x) {
123     makeroot(x);
124     return x -> suml;
125 }
126
127 // Splay函数
128 // 对比原版没有变化
129 void splay(node *x) {
130     x -> pushdown();
131
132     while (!isroot(x)) {
133         if (!isroot(x -> p))
134             x -> p -> p -> pushdown();
135         x -> p -> pushdown();
136         x -> pushdown();
137
138         if (isroot(x -> p)) {
139             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
140             break;
141         }
142
143         if (dir(x) == dir(x -> p))
144             rot(x -> p -> p, dir(x -> p) ^ 1);
145         else
146             rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
147
148         rot(x -> p, dir(x) ^ 1);
149     }
150 }
151
152 // 旋转函数
153 // 对比原版没有变化
154 void rot(node *x, int d) {
155     node *y = x -> ch[d ^ 1];
156
157     if ((x -> ch[d ^ 1] = y -> ch[d]) != null)
158         y -> ch[d] -> p = x;
159
160     y -> p = x -> p;
161     if (!isroot(x))
162         x -> p -> ch[dir(x)] = y;
163
164     (y -> ch[d] = x) -> p = y;
165
166     x -> refresh();
167     y -> refresh();
168 }
```

```

void push(long long x) {
    if (x > (-INF) >> 2)
        q1.push(x);
}

void erase(long long x) {
    if (x > (-INF) >> 2)
        q2.push(x);
}

long long top() {
    if (empty())
        return -INF;

    while (!q2.empty() && q1.top() == q2.top()) {
        q1.pop();
        q2.pop();
    }

    return q1.top();
}

long long top2() {
    if (size() < 2)
        return -INF;

    long long a = top();
    erase(a);
    long long b = top();
    push(a);
    return a + b;
}

int size() {
    return q1.size() - q2.size();
}

bool empty() {
    return q1.size() == q2.size();
}

```

heap // 全局堆维护每条链的最大子段和

```

struct node {
    long long sum, maxsum, prefix, suffix;
    int key;
    binary_heap heap; // 每个点的堆存的是它的子树中到它的
    → 最远距离, 如果它是黑点的话还会包括自己
    node *ch[2], *p;
    bool rev;
    node(int k = 0): sum(k), maxsum(-INF),
    → prefix(-INF),
    → suffix(-INF), key(k), rev(false) {}
    inline void pushdown() {
        if (!rev)
            return;

        ch[0] → rev ≈ true;
        ch[1] → rev ≈ true;
        swap(ch[0], ch[1]);
        swap(prefix, suffix);
        rev = false;
    }
    inline void refresh() {
        pushdown();
        ch[0] → pushdown();
        ch[1] → pushdown();
        sum = ch[0] → sum + ch[1] → sum + key;
        prefix = max(ch[0] → prefix,
                     ch[0] → sum + key + ch[1] →
                     → prefix);
        suffix = max(ch[1] → suffix,

```

#### 4.7.4 模板题:动态QTREE4(询问树上相距最远点)

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
4 #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
5
6 #define isroot(x) ((x) → p == null || ((x) != (x) → p → ch[1]))
7 #define dir(x) ((x) == (x) → p → ch[1])
8
9 using namespace std;
10 using namespace __gnu_pbds;
11
12 constexpr int maxn = 100005;
13 constexpr long long INF = 1000000000000000000l;
14
15 struct binary_heap {
16     __gnu_pbds::priority_queue<long long, less<long
17         → long>, binary_heap_tag> q1, q2;
18     binary_heap() {}
```

```

77         ch[1] → sum + key + ch[0] →
78             ↪ suffix);
79     maxsum = max(max(ch[0] → maxsum, ch[1] →
80         ↪ maxsum),
81         ch[0] → suffix + key + ch[1] →
82             ↪ prefix);
83
84     if (!heap.empty()) {
85         prefix = max(prefix,
86             ch[0] → sum + key +
87                 ↪ heap.top());
88         suffix = max(suffix,
89             ch[1] → sum + key +
90                 ↪ heap.top());
91         maxsum = max(maxsum, max(ch[0] → suffix,
92             ch[1] → prefix) +
93                 ↪ key +
94                     ↪ heap.top());
95
96         if (heap.size() > 1) {
97             maxsum = max(maxsum, heap.top2() +
98                 ↪ key);
99         }
100    }
101 }
102 }
```

103 } null[maxn < 1], \*ptr = null;

104 void addedge(int, int, int);  
105 void deledge(int, int);  
106 void modify(int, int, int);  
107 void modify\_color(int);  
108 node \*newnode(int);  
109 node \*access(node \*);  
110 void makeroott(node \*);  
111 void link(node \*, node \*);  
112 void cut(node \*, node \*);  
113 void splay(node \*);  
114 void rot(node \*, int);  
115  
116 queue<node \*> freenodes;  
117 tree<pair<int, int>, node \*> mp;  
118  
119 bool col[maxn] = {false};  
120 char c;  
121 int n, m, k, x, y, z;  
122  
123 int main() {
124 null → ch[0] = null → ch[1] = null → p = null;
125 scanf("%d%d%d", &n, &m, &k);
126
127 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
128 newnode(0);
129
130 heap.push(0);
131
132 while (k--) {
133 scanf("%d", &x);
134
135 col[x] = true;
136 null[x].heap.push(0);
137 }
138
139 for (int i = 1; i < n; i++) {
140 scanf("%d%d%d", &x, &y, &z);
141
142 if (x > y)
143 swap(x, y);
144 addedge(x, y, z);
145 }
146
147 while (m--) {
148 scanf(" %c%d", &c, &x);
149
150 if (c == 'A') {
151 scanf("%d", &y);
152
153 if (x > y)
154 swap(x, y);
155 deledge(x, y);
156 }
157 else if (c == 'B') {
158 scanf("%d%d", &y, &z);
159
160 if (x > y)
161 swap(x, y);
162 addedge(x, y, z);
163 }
164 else if (c == 'C') {
165 scanf("%d%d", &y, &z);
166
167 if (x > y)
168 swap(x, y);
169 modify(x, y, z);
170 }
171 else
172 modify\_color(x);
173
174 printf("%lld\n", (heap.top() > 0 ? heap.top() :
175 -1));
176 }
177
178 return 0;
179 }
180
181 void addedge(int x, int y, int z) {
182 node \*tmp;
183 if (freenodes.empty())
184 tmp = newnode(z);
185 else {
186 tmp = freenodes.front();
187 freenodes.pop();
188 \*tmp = node(z);
189 }
190
191 tmp → ch[0] = tmp → ch[1] = tmp → p = null;
192
193 heap.push(tmp → maxsum);
194 link(tmp, null + x);
195 link(tmp, null + y);
196 mp[make\_pair(x, y)] = tmp;
197 }
198
199 void deledge(int x, int y) {
200 node \*tmp = mp[make\_pair(x, y)];
201
202 cut(tmp, null + x);
203 cut(tmp, null + y);
204
205 freenodes.push(tmp);
206 heap.erase(tmp → maxsum);
207 mp.erase(make\_pair(x, y));
208 }
209
210 void modify(int x, int y, int z) {
211 node \*tmp = mp[make\_pair(x, y)];
212 makeroott(tmp);
213 tmp → pushdown();
214
215 heap.erase(tmp → maxsum);
216 tmp → key = z;
217 tmp → refresh();
218 heap.push(tmp → maxsum);
219 }
220
221 }

```

222 void modify_color(int x) {
223     makeroot(null + x);
224     col[x] ^= true;
225
226     if (col[x])
227         null[x].heap.push(0);
228     else
229         null[x].heap.erase(0);
230
231     heap.erase(null[x].maxsum);
232     null[x].refresh();
233     heap.push(null[x].maxsum);
234 }
235
236 node *newnode(int k) {
237     *(++ptr) = node(k);
238     ptr → ch[0] = ptr → ch[1] = ptr → p = null;
239     return ptr;
240 }
241
242 node *access(node *x) {
243     splay(x);
244     heap.erase(x → maxsum);
245     x → refresh();
246
247     if (x → ch[1] != null) {
248         x → ch[1] → pushdown();
249         x → heap.push(x → ch[1] → prefix);
250         x → refresh();
251         heap.push(x → ch[1] → maxsum);
252     }
253
254     x → ch[1] = null;
255     x → refresh();
256     node *y = x;
257     x = x → p;
258
259     while (x != null) {
260         splay(x);
261         heap.erase(x → maxsum);
262
263         if (x → ch[1] != null) {
264             x → ch[1] → pushdown();
265             x → heap.push(x → ch[1] → prefix);
266             heap.push(x → ch[1] → maxsum);
267         }
268
269         x → heap.erase(y → prefix);
270         x → ch[1] = y;
271         (y = x) → refresh();
272         x = x → p;
273     }
274
275     heap.push(y → maxsum);
276     return y;
277 }
278
279 void makeroot(node *x) {
280     access(x);
281     splay(x);
282     x → rev ^= true;
283 }
284
285 void link(node *x, node *y) { // 新添一条虚边, 维护y对应的堆
286     makeroot(x);
287     makeroot(y);
288
289     x → pushdown();
290     x → p = y;
291     heap.erase(y → maxsum);
292     y → heap.push(x → prefix);
293
294     y → refresh();
295     heap.push(y → maxsum);
296 }
297
298 void cut(node *x, node *y) { // 断开一条实边, 一条链变成
299     // 两条链, 需要维护全局堆
300     makeroot(x);
301     access(y);
302     splay(y);
303
304     heap.erase(y → maxsum);
305     heap.push(y → ch[0] → maxsum);
306     y → ch[0] → p = null;
307     y → ch[0] = null;
308     y → refresh();
309     heap.push(y → maxsum);
310
311     void splay(node *x) {
312         x → pushdown();
313
314         while (!isroot(x)) {
315             if (!isroot(x → p))
316                 x → p → p → pushdown();
317
318             x → p → pushdown();
319
320             if (isroot(x → p)) {
321                 rot(x → p, dir(x) ^ 1);
322                 break;
323             }
324
325             if (dir(x) == dir(x → p))
326                 rot(x → p → p, dir(x → p) ^ 1);
327             else
328                 rot(x → p, dir(x) ^ 1);
329
330             rot(x → p, dir(x) ^ 1);
331         }
332     }
333
334 void rot(node *x, int d) {
335     node *y = x → ch[d ^ 1];
336
337     if ((x → ch[d ^ 1] = y → ch[d]) != null)
338         y → ch[d] → p = x;
339
340     y → p = x → p;
341
342     if (!isroot(x))
343         x → p → ch[dir(x)] = y;
344
345     (y → ch[d] = x) → p = y;
346
347     x → refresh();
348     y → refresh();
349 }

```

## 4.8 K-D树

### 4.8.1 动态K-D树(定期重构)

```

1 int l[2], r[2], x[B + 10][2], w[B + 10];
2 int n, op, ans = 0, cnt = 0, tmp = 0;
3 int d;
4
5 struct node {
6     int x[2], l[2], r[2], w, sum;
7     node *ch[2];
8

```

```

9  bool operator < (const node &a) const {
10    return x[d] < a.x[d];
11  }
12
13  void refresh() {
14    sum = ch[0] → sum + ch[1] → sum + w;
15    l[0] = min(x[0], min(ch[0] → l[0], ch[1] →
16                → l[0]));
17    l[1] = min(x[1], min(ch[0] → l[1], ch[1] →
18                → l[1]));
19    r[0] = max(x[0], max(ch[0] → r[0], ch[1] →
20                → r[0]));
21    r[1] = max(x[1], max(ch[0] → r[1], ch[1] →
22                → r[1]));
23  }
24 } null[maxn], *root = null;
25
26 void build(int l, int r, int k, node *&rt) {
27   if (l > r) {
28     rt = null;
29     return;
30   }
31
32   int mid = (l + r) / 2;
33
34   d = k;
35   nth_element(null + l, null + mid, null + r + 1);
36
37   rt = null + mid;
38   build(l, mid - 1, k ^ 1, rt → ch[0]);
39   build(mid + 1, r, k ^ 1, rt → ch[1]);
40
41   rt → refresh();
42
43   void query(node *rt) {
44     if (l[0] ≤ rt → l[0] && l[1] ≤ rt → l[1] && rt
45     → → r[0] ≤ r[0] && rt → r[1] ≤ r[1]) {
46       ans += rt → sum;
47       return;
48     }
49     else if (l[0] > rt → r[0] || l[1] > rt → r[1] ||
50              → r[0] < rt → l[0] || r[1] < rt → l[1])
51       return;
52
53     if (l[0] ≤ rt → x[0] && l[1] ≤ rt → x[1] && rt
54     → → x[0] ≤ r[0] && rt → x[1] ≤ r[1])
55       ans += rt → w;
56
57     query(rt → ch[0]);
58     query(rt → ch[1]);
59   }
60
61   int main() {
62
63     null → l[0] = null → l[1] = 100000000;
64     null → r[0] = null → r[1] = -100000000;
65     null → sum = 0;
66     null → ch[0] = null → ch[1] = null;
67     scanf("%*d");
68
69     while (scanf("%d", &op) == 1 && op != 3) {
70       if (op == 1) {
71         tmp++;
72         scanf("%d%d%d", &x[tmp][0], &x[tmp][1],
73               → &w[tmp]);
74         x[tmp][0] ≈ ans;
75         x[tmp][1] ≈ ans;
76         w[tmp] ≈ ans;
77       }
78     }
79   }
80 }
```

```

71   if (tmp == B) {
72     for (int i = 1; i ≤ tmp; i++) {
73       null[cnt + i].x[0] = x[i][0];
74       null[cnt + i].x[1] = x[i][1];
75       null[cnt + i].w = w[i];
76     }
77
78     build(1, cnt + tmp, 0, root);
79     tmp = 0;
80   }
81 }
82 else {
83   scanf("%d%d%d", &l[0], &l[1], &r[0],
84         → &r[1]);
85   l[0] ≈ ans;
86   l[1] ≈ ans;
87   r[0] ≈ ans;
88   r[1] ≈ ans;
89   ans = 0;
90
91   for (int i = 1; i ≤ tmp; i++) {
92     if (l[0] ≤ x[i][0] && l[1] ≤ x[i][1]
93     → && x[i][0] ≤ r[0] && x[i][1] ≤
94     → r[1])
95       ans += w[i];
96
97   }
98
99   query(root);
100  printf("%d\n", ans);
101
102  return 0;
103 }
```

## 4.9 LCA最近公共祖先

### 4.9.1 Tarjan LCA $O(n + m)$

```

1 vector<pair<int, int>> q[maxn];
2 int lca[maxn];
3
4 void dfs(int x) {
5   dfn[x] = ++tim; // 其实求LCA是用不到DFS序的，但是一般其他步骤要用
6   ufs[x] = x;
7
8   for (auto pi : q[x]) {
9     int y = pi.first, i = pi.second;
10    if (dfn[y])
11      lca[i] = findufs(y);
12  }
13
14  for (int y : G[x])
15    if (y != p[x]) {
16      p[y] = x;
17      dfs(y);
18    }
19
20  ufs[x] = p[x];
21 }
```

## 4.10 虚树

```

1 struct Tree {
2   vector<int> G[maxn], W[maxn];
3   int p[maxn], d[maxn], size[maxn], mn[maxn],
4       mx[maxn];
```

```

4   bool col[maxn];
5   long long ans_sum;
6   int ans_min, ans_max;
7
8   void add(int x, int y, int z) {
9     G[x].push_back(y);
10    W[x].push_back(z);
11  }
12
13  void dfs(int x) {
14    size[x] = col[x];
15    mx[x] = (col[x] ? d[x] : -inf);
16    mn[x] = (col[x] ? d[x] : inf);
17
18    for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++) {
19      d[G[x][i]] = d[x] + W[x][i];
20      dfs(G[x][i]);
21      ans_sum += (long long)size[x] * size[G[x]
22        ↪ [i]] * d[x];
23      ans_max = max(ans_max, mx[x] + mx[G[x][i]]
24        ↪ - (d[x] << 1));
25      ans_min = min(ans_min, mn[x] + mn[G[x][i]]
26        ↪ - (d[x] << 1));
27      size[x] += size[G[x][i]];
28      mx[x] = max(mx[x], mx[G[x][i]]);
29      mn[x] = min(mn[x], mn[G[x][i]]);
30    }
31  }
32
33  void clear(int x) {
34    G[x].clear();
35    W[x].clear();
36    col[x] = false;
37  }
38
39  void solve(int rt) {
40    ans_sum = 0;
41    ans_max = -inf;
42    ans_min = inf;
43    dfs(rt);
44    ans_sum <= 1;
45  }
46  virtree;
47
48  void dfs(int);
49  int LCA(int, int);
50
51  vector<int> G[maxn];
52  int f[maxn][20], d[maxn], dfn[maxn], tim = 0;
53
54  bool cmp(int x, int y) {
55    return dfn[x] < dfn[y];
56  }
57
58  int n, m, lgn = 0, a[maxn], s[maxn], v[maxn];
59
60  int main() {
61    scanf("%d", &n);
62
63    for (int i = 1, x, y; i < n; i++) {
64      scanf("%d%d", &x, &y);
65      G[x].push_back(y);
66      G[y].push_back(x);
67    }
68
69    G[n + 1].push_back(1);
70    dfs(n + 1);
71
72    lgn--;
73
74    for (int j = 1; j <= lgn; j++)
75      for (int i = 1; i <= n; i++)
76        f[i][j] = f[f[i][j - 1]][j - 1];
77
78    scanf("%d", &m);
79
80    while (m--) {
81      int k;
82      scanf("%d", &k);
83
84      for (int i = 1; i <= k; i++)
85        scanf("%d", &a[i]);
86
87      sort(a + 1, a + k + 1, cmp);
88      int top = 0, cnt = 0;
89      s[++top] = v[++cnt] = n + 1;
90      long long ans = 0;
91
92      for (int i = 1; i <= k; i++) {
93        virtree.col[a[i]] = true;
94        ans += d[a[i]] - 1;
95        int u = LCA(a[i], s[top]);
96
97        if (s[top] != u) {
98          while (top > 1 && d[s[top - 1]] ≥
99            ↪ d[u]) {
100            virtree.add(s[top - 1], s[top],
101              ↪ d[s[top]] - d[s[top - 1]]);
102            top--;
103          }
104
105          if (s[top] != u) {
106            virtree.add(u, s[top], d[s[top]] -
107              ↪ d[u]);
108            s[top] = v[++cnt] = u;
109          }
110
111          s[++top] = a[i];
112        }
113
114        virtree.add(s[i], s[i + 1], d[s[i + 1]] -
115          ↪ d[s[i]]);
116
117        virtree.solve(n + 1);
118        ans *= k - 1;
119        printf("%lld %d %d\n", ans - virtree.ans_sum,
120              ↪ virtree.ans_min, virtree.ans_max);
121
122        for (int i = 1; i <= k; i++)
123          virtree.clear(a[i]);
124        for (int i = 1; i <= cnt; i++)
125          virtree.clear(v[i]);
126
127      }
128
129      void dfs(int x) {
130        dfn[x] = ++tim;
131        d[x] = d[f[x][0]] + 1;
132
133        while ((1 << lgn) < d[x])
134          lgn++;
135
136        for (int i = 0; i < (int)G[x].size(); i++)
137          if (G[x][i] != f[x][0]) {
138            f[G[x][i]][0] = x;
139            dfs(G[x][i]);
140          }
141      }
142    }
143  }
144
145  return 0;
146}

```

```

140     }
141 }
142
143 int LCA(int x, int y) {
144     if (d[x] != d[y]) {
145         if (d[x] < d[y])
146             swap(x, y);
147
148         for (int i = lgn; i ≥ 0; i--)
149             if (((d[x] - d[y]) > i) & 1)
150                 x = f[x][i];
151     }
152
153     if (x == y)
154         return x;
155
156     for (int i = lgn; i ≥ 0; i--)
157         if (f[x][i] != f[y][i]) {
158             x = f[x][i];
159             y = f[y][i];
160         }
161
162     return f[x][0];
163 }
```

```

42     v[x][h[x] - j - 1] += v[y][h[y] - j];
43
44     int t = v[x][h[x] - j - 1];
45     if (t > mx || (t == mx && h[x] - j - 1
46         ↪ > ans[x])) {
47         mx = t;
48         ans[x] = h[x] - j - 1;
49     }
50
51     v[y].clear();
52 }
53 }
```

## 4.11 长链剖分

```

1 // 顾名思义，长链剖分是取最深的儿子作为重儿子
2
3 // O(n)维护以深度为下标的子树信息
4 vector<int> G[maxn], v[maxn];
5 int n, p[maxn], h[maxn], son[maxn], ans[maxn];
6
7 // 原题题意：求每个点的子树中与它距离是几的点最多，相同的
8 // → 取最大深度
9 // 由于vector只能在后面加入元素，为了写代码方便，这里反过来存
10 // 或者开一个结构体维护倒过来的vector
11 void dfs(int x) {
12     h[x] = 1;
13
14     for (int y : G[x])
15         if (y != p[x]){
16             p[y] = x;
17             dfs(y);
18
19             if (h[y] > h[son[x]])
20                 son[x] = y;
21
22     if (!son[x]) {
23         v[x].push_back(1);
24         ans[x] = 0;
25         return;
26     }
27
28     h[x] = h[son[x]] + 1;
29     swap(v[x], v[son[x]]);
30
31     if (v[x][ans[son[x]]] == 1)
32         ans[x] = h[x] - 1;
33     else
34         ans[x] = ans[son[x]];
35
36     v[x].push_back(1);
37
38     int mx = v[x][ans[x]];
39     for (int y : G[x])
40         if (y != p[x] && y != son[x]) {
41             for (int j = 1; j ≤ h[y]; j++) {
```

### 4.11.1 梯子剖分

```

1 // 在线求一个点的第k祖先 O(n log n)-O(1)
2 // 理论基础：任意一个点x的k级祖先y所在长链长度一定≥k
3
4 // 全局数组定义
5 vector<int> G[maxn], v[maxn];
6 int d[maxn], mxd[maxn], son[maxn], top[maxn],
7     ↪ len[maxn];
7 int f[19][maxn], log_tbl[maxn];
8
9 // 在主函数中两遍dfs之后加上如下预处理
10 log_tbl[0] = -1;
11 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
12     log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
13 for (int j = 1; (1 << j) < n; j++)
14     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
15         f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
16
17 // 第一遍dfs，用于计算深度和找出重儿子
18 void dfs1(int x) {
19     mxd[x] = d[x];
20
21     for (int y : G[x])
22         if (y != f[0][x]){
23             f[0][y] = x;
24             d[y] = d[x] + 1;
25
26             dfs1(y);
27
28             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
29             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
30                 son[x] = y;
31         }
32
33 // 第二遍dfs，用于进行剖分和预处理梯子剖分(每条链向上延伸
34 // → 一倍)数组
35 void dfs2(int x) {
36     top[x] = (x == son[f[0][x]] ? top[f[0][x]] : x);
37
38     for (int y : G[x])
39         if (y != f[0][x])
40             dfs2(y);
41
42     if (top[x] == x) {
43         int u = x;
44         while (top[son[u]] == x)
45             u = son[u];
46
47         len[x] = d[u] - d[x];
48         for (int i = 0; i < len[x]; i++, u = f[0][u])
49             v[x].push_back(u);
50     }
51     u = x;
```

```

52     for (int i = 0; i < len[x] && u; i++, u = f[0]
53         ↪ [u])
54         v[x].push_back(u);
55     }
56
57 // 在线询问x的k级祖先 O(1)
58 // 不存在时返回0
59 int query(int x, int k) {
60     if (!k)
61         return x;
62     if (k > d[x])
63         return 0;
64
65     x = f[log_tbl[k]][x];
66     k ≈ 1 << log_tbl[k];
67     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] +
68         ↪ k];

```

```

42             ↪
43         }
44     };
45 }

```

## 4.12 堆

### 4.12.1 左偏树

参见3.2.3.k短路(27页).

### 4.12.2 二叉堆

```

1 struct my_binary_heap {
2     static constexpr int maxn = 100005;
3
4     int a[maxn], size;
5
6     my_binary_heap() : size(0) {}
7
8     void push(int val) {
9         a[++size] = val;
10
11        for (int x = size; x > 1; x /= 2) {
12            if (a[x] < a[x / 2])
13                swap(a[x], a[x / 2]);
14            else
15                break;
16        }
17    }
18
19    int &top() {
20        return a[1];
21    }
22
23    int pop() {
24        int res = a[1];
25        a[1] = a[size--];
26
27        for (int x = 1, son; ; x = son) {
28            if (x * 2 == size)
29                son = x * 2;
30            else if (x * 2 > size)
31                break;
32            else if (a[x * 2] < a[x * 2 + 1])
33                son = x * 2;
34            else
35                son = x * 2 + 1;
36
37            if (a[son] < a[x])
38                swap(a[x], a[son]);
39            else
40                break;
41        }

```

## 4.13 莫队

注意如果 $n$ 和 $q$ 不平衡, 块大小应该设为 $\frac{n}{\sqrt{q}}$ .

另外如果裸的莫队要卡常可以按块编号奇偶性分别对右端点正序或者倒序排序, 期望可以减少一半的移动次数.

### 4.13.1 莫队二次离线

适用范围: 询问的是点对相关(或者其它可以枚举每个点和区间算贡献)的信息, 并且可以离线; 更新时可以使用一些牺牲修改复杂度来改善询问复杂度的数据结构(如单点修改询问区间和).

先按照普通的莫队将区间排序. 考虑区间移动的情况, 以 $(l, r)$ 向右移动右端点到 $(l, t)$ 为例.

对于每个 $i \in (r, t]$ 来说, 它都要对区间 $[l, i)$ 算贡献. 可以拆成 $[1, i)$ 和 $[1, l)$ 两部分, 那么前一部分因为都是 $i$ 和 $[1, i)$ 做贡献的形式所以可以直接预处理.

考虑后一部分,  $i$ 和 $(1, l)$ 做贡献, 因为莫队的性质我们可以保证这样的询问次数不超过 $O((n + m)\sqrt{n})$ , 因此我们可以对每个 $l$ 记录下来哪些 $i$ 要和它询问. 并且每次移动时询问的 $i$ 都是连续的, 所以对每个 $l$ 开一个vector记录下对应的区间和编号就行了.

剩余的三种情况(右端点左移或者移动左端点)都是类似的, 具体可以看代码.

例: Yuno loves sqrt technology II (询问区间逆序对数)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 100005, B = 314;
6
7 struct Q {
8     int l, r, d, id;
9
10    Q() = default;
11
12    Q(int l, int r, int d, int id) : l(l), r(r), d(d),
13        ↪ id(id) {}
14
15    friend bool operator < (const Q &a, const Q &b) {
16        if (a.d != b.d)
17            ↪ return a.d < b.d;
18
19        return a.r < b.r;
20    }
21 } q[maxn]; // 结构体可以复用, d既可以作为左端点块编号, 也
22             ↪ 可以作为二次离线处理的倍数
23
24 int global_n, bid[maxn], L[maxn], R[maxn], cntb;
25
26 int sa[maxn], sb[maxn];
27
28 void addp(int x) { // sqrt(n)修改 O(1)查询
29     for (int k = bid[x]; k ≤ cntb; k++)
30         sb[k]++;
31
32     for (int i = x; i ≤ R[bid[x]]; i++)
33         sa[i]++;
34 }
35
36 int queryp(int x) {
37     if (!x)
38         ↪ return 0;
39
40     int res = 0;
41
42     for (int i = 1; i ≤ L[bid[x]]; i++)
43         res += sb[i];
44
45     for (int i = 1; i ≤ R[bid[x]] - L[bid[x]] + 1; i++)
46         res -= sa[i];
47
48     return res;
49 }

```

```

38     return sa[x] + sb[bid[x] - 1];
39 }
40
41 void adds(int x) {
42     for (int k = 1; k <= bid[x]; k++)
43         sb[k]++;
44
45     for (int i = L[bid[x]]; i <= x; i++)
46         sa[i]++;
47 }
48
49 int querys(int x) {
50     if (x > global_n)
51         return 0; // 为了防止越界就判一下
52     return sa[x] + sb[bid[x] + 1];
53 }
54
55 vector<Q> vp[maxn], vs[maxn]; // prefix, suffix
56
57 long long fp[maxn], fs[maxn]; // prefix, suffix
58
59 int a[maxn], b[maxn];
60
61 long long ta[maxn], ans[maxn];
62
63 int main() {
64
65     int n, m;
66     scanf("%d%d", &n, &m);
67
68     global_n = n;
69
70     for (int i = 1; i <= n; i++)
71         scanf("%d", &a[i]);
72
73     memcpy(b, a, sizeof(int) * (n + 1));
74     sort(b + 1, b + n + 1);
75
76     for (int i = 1; i <= n; i++)
77         a[i] = lower_bound(b + 1, b + n + 1, a[i]) - b;
78
79     for (int i = 1; i <= n; i++) {
80         bid[i] = (i - 1) / B + 1;
81
82         if (!L[bid[i]])
83             L[bid[i]] = i;
84
85         R[bid[i]] = i;
86         cntb = bid[i];
87     }
88
89     for (int i = 1; i <= m; i++) {
90         scanf("%d%d", &q[i].l, &q[i].r);
91
92         q[i].d = bid[q[i].l];
93         q[i].id = i;
94     }
95
96     sort(q + 1, q + m + 1);
97
98     int l = 2, r = 1; // l, r是上一个询问的端点
99
100    for (int i = 1; i <= m; i++) {
101        int s = q[i].l, t = q[i].r; // s, t是当前要调整
102                                // 到的端点
103
104        if (s < l)
105            vs[r + 1].push_back(Q(s, l - 1, 1, i));
106        else if (s > l)
107            vs[r + 1].push_back(Q(l, s - 1, -1, i));

```

```

107
108     l = s;
109
110     if (t > r)
111         vp[l - 1].push_back(Q(r + 1, t, 1, i));
112     else if (t < r)
113         vp[l - 1].push_back(Q(t + 1, r, -1, i));
114
115     r = t;
116
117
118     for (int i = 1; i <= n; i++) { // 第一遍正着处理, 解
119                                // 决关于前缀的询问
120         fp[i] = fp[i - 1] + querys(a[i] + 1);
121
122         adds(a[i]);
123
124         for (auto q : vp[i]) {
125             long long tmp = 0;
126             for (int k = q.l; k <= q.r; k++)
127                 tmp += querys(a[k] + 1);
128
129             ta[q.id] -= q.d * tmp;
130         }
131
132         memset(sa, 0, sizeof(sa));
133         memset(sb, 0, sizeof(sb));
134
135     for (int i = n; i; i--) { // 第二遍倒着处理, 解决关
136                                // 于后缀的询问
137         fs[i] = fs[i + 1] + queryp(a[i] - 1);
138
139         addp(a[i]);
140
141         for (auto q : vs[i]) {
142             long long tmp = 0;
143             for (int k = q.l; k <= q.r; k++)
144                 tmp += queryp(a[k] - 1);
145
146             ta[q.id] -= q.d * tmp;
147         }
148
149         l = 2;
150         r = 1;
151
152     for (int i = 1; i <= m; i++) { // 求出fs和fp之后再加
153                                // 上这部分的贡献
154         int s = q[i].l, t = q[i].r;
155
156         ta[i] += fs[s] - fs[l];
157         ta[i] += fp[t] - fp[r];
158
159         l = s;
160         r = t;
161
162         ta[i] += ta[i - 1]; // 因为算出来的是相邻两个询
163                                // 问之间的贡献, 所以要前缀和
164         ans[q[i].id] = ta[i];
165
166     for (int i = 1; i <= m; i++)
167         printf("%lld\n", ans[i]);
168
169 }

```

### 4.13.2 带修莫队在线化 $O(n^{\frac{5}{3}})$

最简单的带修莫队：块大小设成 $n^{\frac{2}{3}}$ ，排序时第一关键字是左端点块编号，第二关键字是右端点块编号，第三关键字是时间。（记得把时间压缩成只有修改的时间。）

现在要求在线的同时支持修改，仍然以 $B = n^{\frac{2}{3}}$ 分一块，预处理出两块之间的贡献，那么预处理复杂度就是 $O(n^{\frac{5}{3}})$ 。

修改时最简单的方法是直接把 $n^{\frac{2}{3}}$ 个区间全更新一遍。嫌慢的话可以给每个区间打一个懒标记，询问的时候如果解了再更新区间的信息。注意如果附加信息是可减的（比如每个数的出现次数），那么就只需要存 $O(n^{\frac{1}{3}})$ 个。

总复杂度仍然是 $O(n^{\frac{5}{3}})$ ，如果打懒标记的话是跑不太满的。如果附加信息可减则空间复杂度是 $O(n^{\frac{4}{3}})$ ，否则和时间复杂度同阶。

### 4.13.3 莫队二次离线 在线化 $O((n+m)\sqrt{n})$

和之前的道理是一样的， $i$ 和 $[1, i]$ 的贡献这部分仍然可以预处理掉，而前后缀对区间的贡献那部分只保存块端点处的信息。

按照莫队二次离线的转移方法操作之后发现只剩两边散块的贡献没有解决。这时可以具体问题具体解决，例如求逆序对的话直接预处理出排序后的数组然后归并即可。

时空复杂度均为 $O(n\sqrt{n})$ 。

以下代码以强制在线求区间逆序对为例（洛谷上被卡常了，正常情况下极限数据应该在1.5s内。）

```

1 constexpr int maxn = 100005, B = 315, maxb = maxn / B +
2   ↪ 5;
3
4 int n, bid[maxn], L[maxb], R[maxb], cntb;
5
6 struct DS { // O(sqrt(n))修改 O(1)查询
7     int total;
8     int sa[maxn], sb[maxb];
9
10    void init(const DS &o) {
11        total = o.total;
12        memcpy(sa, o.sa, sizeof(int) * (n + 1));
13        memcpy(sb, o.sb, sizeof(int) * (cntb + 1));
14    }
15
16    void add(int x) {
17        total++;
18        for (int k = 1; k ≤ bid[x]; k++)
19            sb[k]++;
20        for (int i = L[bid[x]]; i ≤ x; i++)
21            sa[i]++;
22    }
23
24    int querys(int x) {
25        if (x > n)
26            return 0;
27
28        return sb[bid[x] + 1] + sa[x];
29    }
30
31    int queryp(int x) {
32        return total - querys(x + 1);
33    }
34 } pr[maxb];
35
36 int c[maxn]; // 树状数组
37
38 void addc(int x, int d) {
39     while (x) {
40         c[x] += d;
41         x -= x & -x;
42     }
43 }
```

```

43
44 int queryc(int x) {
45     int ans = 0;
46     while (x ≤ n) {
47         ans += c[x];
48         x += x & -x;
49     }
50     return ans;
51 }
52
53 long long fp[maxn], fs[maxn];
54
55 int rnk[maxn], val[maxn][B + 5];
56
57 long long dat[maxb][maxb];
58
59 int a[maxn];
60
61 int main() {
62
63     int m;
64     cin >> n >> m;
65
66     for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
67         cin >> a[i];
68
69         bid[i] = (i - 1) / B + 1;
70         if (!L[bid[i]])
71             L[bid[i]] = i;
72         R[bid[i]] = i;
73         cntb = bid[i];
74
75         rnk[i] = i;
76     }
77
78     for (int k = 1; k ≤ cntb; k++)
79         sort(rnk + L[k], rnk + R[k] + 1, [](int x, int
80           ↪ y) {return a[x] < a[y];}); // 每个块排序
81
82     for (int i = n; i; i--) {
83         for (int j = 2; i + j - 1 ≤ R[bid[i]]; j++) {
84             val[i][j] = val[i + 1][j - 1] + val[i][j -
85               ↪ 1] - val[i + 1][j - 2];
86             if (a[i] > a[i + j - 1])
87                 val[i][j]++; // 块内用二维前缀和预处理
88     }
89
90     for (int k = 1; k ≤ cntb; k++) {
91         for (int i = L[k]; i ≤ R[k]; i++) {
92             dat[k][k] += queryc(a[i] + 1); // 单块内的逆
93             → 序对直接用树状数组预处理
94             addc(a[i], 1);
95     }
96
97     for (int i = L[k]; i ≤ R[k]; i++)
98         addc(a[i], -1);
99
100    for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
101        if (i > 1 && i == L[bid[i]])
102            pr[bid[i]].init(pr[bid[i] - 1]);
103
104        fp[i] = fp[i - 1] + pr[bid[i]].querys(a[i] +
105          ↪ 1);
106
107        pr[bid[i]].add(a[i]);
108
109        for (int i = n; i; i--) {
110            fs[i] = fs[i + 1] + (n - i - queryc(a[i] + 1));
111        }
112    }
113 }
```

```

109     addc(a[i], 1);
110 }
111
112 for (int s = 1; s <= cntb; s++) {
113     for (int t = s + 1; t <= cntb; t++) {
114         dat[s][t] = dat[s][t - 1] + dat[t][t];
115
116         for (int i = L[t]; i <= R[t]; i++) // 块间的
117             // 逆序对用刚才处理的分块求出
118             dat[s][t] += pr[t - 1].querys(a[i] + 1)
119             // - pr[s - 1].querys(a[i] + 1);
120     }
121
122 long long ans = 0;
123
124 while (m--) {
125     long long s, t;
126     cin >> s >> t;
127
128     int l = s ^ ans, r = t ^ ans;
129
130     if (bid[l] == bid[r])
131         ans = val[l][r - l + 1];
132     else {
133         ans = dat[bid[l] + 1][bid[r] - 1];
134
135         ans += fp[r] - fp[L[bid[r]] - 1];
136         for (int i = L[bid[r]]; i <= r; i++)
137             ans -= pr[bid[l]].querys(a[i] + 1);
138
139         ans += fs[l] - fs[R[bid[l]] + 1];
140         for (int i = l; i <= R[bid[l]]; i++)
141             ans -= (a[i] - 1) - pr[bid[r] - 1].queryp(a[i] - 1);
142
143         int i = L[bid[l]], j = L[bid[r]], w = 0; // 手写归并
144
145         while (true) {
146             while (i <= R[bid[l]] && rnk[i] < l)
147                 i++;
148             while (j <= R[bid[r]] && rnk[j] > r)
149                 j++;
150
151             if (i > R[bid[l]] && j > R[bid[r]])
152                 break;
153
154             int x = (i <= R[bid[l]] ? a[rnk[i]] : (int)1e9), y = (j <= R[bid[r]] ? a[rnk[j]] : (int)1e9);
155
156             if (x < y) {
157                 ans += w;
158                 i++;
159             } else {
160                 j++;
161                 w++;
162             }
163         }
164
165         cout << ans << '\n';
166     }
167
168     return 0;
169 }
```

## 4.14 常见根号思路

### 1. 通用

- 出现次数大于 $\sqrt{n}$ 的数不会超过 $\sqrt{n}$ 个
- 对于带修改问题, 如果不方便分治或者二进制分组, 可以考虑对操作分块, 每次查询时暴力最后的 $\sqrt{n}$ 个修改并更正答案
- **根号分治:** 如果分治时每个子问题需要 $O(N)$ ( $N$ 是全局问题的大小)的时间, 而规模较小的子问题可以 $O(n^2)$ 解决, 则可以使用根号分治
  - 规模大于 $\sqrt{n}$ 的子问题用 $O(N)$ 的方法解决, 规模小于 $\sqrt{n}$ 的子问题用 $O(n^2)$ 暴力
  - 规模大于 $\sqrt{n}$ 的子问题最多只有 $\sqrt{n}$ 个
  - 规模不大于 $\sqrt{n}$ 的子问题大小的平方和也必定不会超过 $n\sqrt{n}$
- 如果输入规模之和不大于 $n$ (例如给定多个小字符串与大字符串进行询问), 那么规模超过 $\sqrt{n}$ 的问题最多只有 $\sqrt{n}$ 个

### 2. 序列

- 某些维护序列的问题可以用分块/块状链表维护
- 对于静态区间询问问题, 如果可以快速将左/右端点移动一位, 可以考虑莫队
  - 如果强制在线可以分块预处理, 但是空间需要 $n\sqrt{n}$ 
    - \* 例题: 询问区间中有几种数出现次数恰好为 $k$ , 强制在线
    - 如果带修改可以试着想一想带修莫队, 但是复杂度高达 $n^{\frac{5}{3}}$
- 线段树可以解决的问题也可以用分块来做到 $O(1)$ 询问或是 $O(1)$ 修改, 具体要看哪种操作更多

### 3. 树

- 与序列类似, 树上也有树分块和树上莫队
  - 树上带修莫队很麻烦, 常数也大, 最好不要先考虑
  - 树分块不要想当然
- 树分治也可以套根号分治, 道理是一样的

### 4. 字符串

- 循环节长度大于 $\sqrt{n}$ 的子串最多只有 $O(n)$ 个, 如果是极长子串则只有 $O(\sqrt{n})$ 个

# 5 字符串

## 5.1 KMP

```

1 char s[maxn], t[maxn];
2 int fail[maxn];
3 int n, m;
4
5 void init() { // 注意字符串是0-based, 但是fail是1-based
6     memset(fail, 0, sizeof(fail));
7
8     for (int i = 1; i < m; i++) {
9         int j = fail[i];
10        while (j && t[i] != t[j])
11            j = fail[j];
12
13        if (t[i] == t[j])
14            fail[i + 1] = j + 1;
15        else
16            fail[i + 1] = 0;
17    }
18}
19
20 int KMP() {
21     int cnt = 0, j = 0;
22
23     for (int i = 0; i < n; i++) {
24         while (j && s[i] != t[j])
25             j = fail[j];
26
27         if (s[i] == t[j])
28             j++;
29         if (j == m)
30             cnt++;
31     }
32
33     return cnt;
34}

```

### 5.1.1 ex-KMP

```

1 //全局变量与数组定义
2 char s[maxn], t[maxn];
3 int n, m, a[maxn];
4
5 // 主过程 O(n + m)
6 // 把t的每个后缀与s的LCP输出到a中, s的后缀和自己的LCP存
7 // →在nx中
8 // 0-based, s的长度是m, t的长度是n
9 void exKMP(const char *s, const char *t, int *a) {
10    static int nx[maxn];
11
12    memset(nx, 0, sizeof(nx));
13
14    int j = 0;
15    while (j + 1 < m && s[j] == t[j + 1])
16        j++;
17    nx[1] = j;
18
19    for (int i = 2, k = 1; i < m; i++) {
20        int pos = k + nx[k], len = nx[i - k];
21
22        if (i + len < pos)
23            nx[i] = len;
24        else {
25            j = max(pos - i, 0);
26            while (i + j < m && s[j] == s[i + j])
27                j++;
28            nx[i] = j;
29        }
30    }
31
32    for (int i = 0; i < m; i++)
33        a[i] = nx[i];
34}

```

```

27
28         nx[i] = j;
29         k = i;
30     }
31 }
32
33 j = 0;
34 while (j < n && j < m && s[j] == t[j])
35     j++;
36 a[0] = j;
37
38 for (int i = 1, k = 0; i < n; i++) {
39     int pos = k + a[k], len = nx[i - k];
40     if (i + len < pos)
41         a[i] = len;
42     else {
43         j = max(pos - i, 0);
44         while (j < m && i + j < n && s[j] == t[i + j])
45             j++;
46         a[i] = j;
47         k = i;
48     }
49 }
50

```

## 5.2 AC自动机

```

1 int ch[maxm][26], f[maxm][26], q[maxm], sum[maxm], cnt
2     = 0;
3
4 // 在字典树中插入一个字符串 O(n)
5 int insert(const char *c) {
6     int x = 0;
7     while (*c) {
8         if (!ch[x][*c - 'a'])
9             ch[x][*c - 'a'] = ++cnt;
10        x = ch[x][*c++ - 'a'];
11    }
12    return x;
13}
14
15 // 建AC自动机 O(n * sigma)
16 void getfail() {
17     int x, head = 0, tail = 0;
18
19     for (int c = 0; c < 26; c++)
20         if (ch[0][c])
21             q[tail++] = ch[0][c]; // 把根节点的儿子加入
22                             // 队列
23
24     while (head != tail) {
25         x = q[head++];
26
27         G[f[x][0]].push_back(x);
28         fill(f[x] + 1, f[x] + 26, cnt + 1);
29
30         for (int c = 0; c < 26; c++) {
31             if (ch[x][c]) {
32                 int y = f[x][0];
33
34                 f[ch[x][c]][0] = ch[y][c];
35                 q[tail++] = ch[x][c];
36             }
37         }
38     }
39     fill(f[0], f[0] + 26, cnt + 1);

```

40

```

} }
```

### 5.3 后缀数组

#### 5.3.1 倍增

```

1 constexpr int maxn = 100005;
2
3 void get_sa(char *s, int n, int *sa, int *rank, int
4   ↪ *height) { // 1-base
5   static int buc[maxn], id[maxn], p[maxn], t[maxn *
6     ↪ 2];
7
8   int m = 300;
9
10  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
11    |  buc[rank[i]] = s[i]++;
12  for (int i = 1; i ≤ m; i++)
13    |  buc[i] += buc[i - 1];
14  for (int i = n; i; i--)
15    |  sa[buc[rank[i]]--] = i;
16
17  memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
18
19  for (int k = 1, cnt = 0; cnt != n; k *= 2, m = cnt)
20    ↪ {
21    |  cnt = 0;
22    |  for (int i = n; i > n - k; i--)
23      |    id[++cnt] = i;
24
25    |  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
26      |    if (sa[i] > k)
27        |      id[++cnt] = sa[i] - k;
28
29    |  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
30      |    buc[p[i]] = rank[id[i]]++;
31  for (int i = 1; i ≤ m; i++)
32    |    buc[i] += buc[i - 1];
33  for (int i = n; i; i--)
34    |    sa[buc[p[i]]--] = id[i];
35
36  memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
37
38  memcpy(t, rank, sizeof(int) * (max(n, m) + 1));
39
40  cnt = 0;
41  for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
42    |    if (t[sa[i]] != t[sa[i - 1]] || t[sa[i] +
43      |      ↪ k] != t[sa[i - 1] + k])
44      |      cnt++;
45
46    |    rank[sa[i]] = cnt;
47  }
48
49  for (int i = 1; i ≤ n; i++)
50    |    sa[rank[i]] = i;
51
52  for (int i = 1, k = 0; i ≤ n; i++) { // 顺便
53    |    ↪ 求height
54    |    if (k)
55      |      k--;
56
57    |    while (s[i + k] == s[sa[rank[i] - 1] + k])
58      |      k++;
59
60    height[rank[i]] = k; // height[i] = lcp(sa[i],
61      |    ↪ sa[i - 1])
62
63 }
```

```

58 }
59
60 char s[maxn];
61 int sa[maxn], rank[maxn], height[maxn];
62
63 int main() {
64   cin >> (s + 1);
65
66   int n = strlen(s + 1);
67
68   get_sa(s, n, sa, rank, height);
69
70   for (int i = 1; i ≤ n; i++)
71     cout << sa[i] << (i < n ? ' ' : '\n');
72
73   for (int i = 2; i ≤ n; i++)
74     cout << height[i] << (i < n ? ' ' : '\n');
75
76   return 0;
77 }
```

#### 5.3.2 SA-IS

```

1 // SA-IS求完的SA有效位只有1~n, 但它是0-based, 如果其他部
2   ↪ 分是1-based就抄一下封装
3
4 constexpr int maxn = 100005, l_type = 0, s_type = 1;
5
6 // 判断一个字符是否为LMS字符
7 bool is_lms(int *tp, int x) {
8   return x > 0 && tp[x] == s_type && tp[x - 1] ==
9     ↪ l_type;
10
11 // 判断两个LMS子串是否相同
12 bool equal_substr(int *s, int x, int y, int *tp) {
13   do {
14     if (s[x] != s[y])
15       |  return false;
16     x++;
17   } while (!is_lms(tp, x) && !is_lms(tp, y));
18
19   return s[x] == s[y];
20 }
21
22 // 诱导排序(从*型诱导到L型, 从L型诱导到S型)
23 // 调用之前应将*型按要求放入SA中
24 void induced_sort(int *s, int *sa, int *tp, int *buc,
25   ↪ int *lbuc, int *sbuc, int n, int m) {
26   for (int i = 0; i ≤ n; i++)
27     if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == l_type)
28       |  sa[lbuc[s[sa[i] - 1]]++] = sa[i] - 1;
29
30   for (int i = 1; i ≤ m; i++)
31     sbuc[i] = buc[i] - 1;
32
33   for (int i = n; ~i; i--)
34     if (sa[i] > 0 && tp[sa[i] - 1] == s_type)
35       |  sa[sbuc[s[sa[i] - 1]]--] = sa[i] - 1;
36
37 // s是输入字符串, n是字符串的长度, m是字符集的大小
38 int *sa_is(int *s, int len, int m) {
39   int n = len - 1;
40
41   int *tp = new int[n + 1];
42   int *pos = new int[n + 1];
43   int *name = new int[n + 1];
44 }
```

```

44 int *sa = new int[n + 1];
45 int *buc = new int[m + 1];
46 int *lbuc = new int[m + 1];
47 int *sbuc = new int[m + 1];
48
49 memset(buc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
50 memset(lbuc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
51 memset(sbuc, 0, sizeof(int) * (m + 1));
52
53 for (int i = 0; i ≤ n; i++)
| buc[s[i]]++;
54
55 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
| buc[i] += buc[i - 1];
56
| lbuc[i] = buc[i - 1];
57 | sbuc[i] = buc[i] - 1;
58 }
59
60 tp[n] = s_type;
61 for (int i = n - 1; ~i; i--) {
| if (s[i] < s[i + 1])
| | tp[i] = s_type;
62 | else if (s[i] > s[i + 1])
| | tp[i] = l_type;
63 | else
| | tp[i] = tp[i + 1];
64 }
65
66 int cnt = 0;
67 for (int i = 1; i ≤ n; i++)
| if (tp[i] == s_type && tp[i - 1] == l_type)
| | pos[cnt++] = i;
68
69 memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
70 for (int i = 0; i < cnt; i++)
| sa[sbuc[s[pos[i]]--]] = pos[i];
71 induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
72
73 memset(name, -1, sizeof(int) * (n + 1));
74 int lastx = -1, namecnt = 1;
75 bool flag = false;
76
77 for (int i = 1; i ≤ n; i++) {
| int x = sa[i];
78
| if (is_lms(tp, x)) {
| | if (lastx ≥ 0 && !equal_substr(s, x,
| | | → lastx, tp))
| | | namecnt++;
79
| | if (lastx ≥ 0 && namecnt == name[lastx])
| | | flag = true;
80
| | name[x] = namecnt;
| | lastx = x;
81 }
82 name[n] = 0;
83
84 int *t = new int[cnt];
85 int p = 0;
86 for (int i = 0; i ≤ n; i++)
| if (name[i] ≥ 0)
| | t[p++] = name[i];
87
88 int *tsa;
89 if (!flag) {
| tsa = new int[cnt];
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111

```

```

112
113     for (int i = 0; i < cnt; i++)
| | tsa[t[i]] = i;
114 }
115 else
| | tsa = sais(t, cnt, namecnt);
116
117 lbuc[0] = sbuc[0] = 0;
118 for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
| | lbuc[i] = buc[i - 1];
| | sbuc[i] = buc[i] - 1;
119 }
120
121 memset(sa, -1, sizeof(int) * (n + 1));
122 for (int i = cnt - 1; ~i; i--)
| | sa[sbuc[s[pos[tsa[i]]]]--] = pos[tsa[i]];
123 induced_sort(s, sa, tp, buc, lbuc, sbuc, n, m);
124
125 // 多组数据的时候最好delete掉
126 delete[] tp;
127 delete[] pos;
128 delete[] name;
129 delete[] buc;
130 delete[] lbuc;
131 delete[] sbuc;
132 delete[] t;
133 delete[] tsa;
134
135 return sa;
136 }
137
138
139
140
141
142 // 封装好的函数, 1-based
143 void get_sa(char *s, int n, int *sa, int *rnk, int
144 → *height) {
145     static int a[maxn];
146
147     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
| | a[i - 1] = s[i];
148
149     a[n] = '$';
150
151     int *t = sais(a, n + 1, 256);
152     memcpy(sa, t, sizeof(int) * (n + 1));
153     delete[] t;
154
155     sa[0] = 0;
156     for (int i = 1; i ≤ n; i++)
| | rnk[++sa[i]] = i;
157
158     for (int i = 1, k = 0; i ≤ n; i++) { // 求height
159         if (k)
| | k--;
160
| | while (s[i + k] == s[sa[rnk[i] - 1] + k])
| | | k++;
161
162         height[rnk[i]] = k; // height[i] = lcp(sa[i],
| | | → sa[i - 1])
163     }
164 }
165
166
167
168
169

```

### 5.3.3 SAMSA

```

1 bool vis[maxn * 2];
2 char s[maxn];
3 int n, id[maxn * 2], ch[maxn * 2][26], height[maxn],
→ tim = 0;
4
5 void dfs(int x) {

```

```

6   if (id[x]) {
7     height[tim++] = val[last];
8     sa[tim] = id[x];
9
10    last = x;
11  }
12
13  for (int c = 0; c < 26; c++)
14    if (ch[x][c])
15      dfs(ch[x][c]);
16
17  last = par[x];
18}
19
20 int main() {
21  last = ++cnt;
22
23  scanf("%s", s + 1);
24  n = strlen(s + 1);
25
26  for (int i = n; i-- >= 0) {
27    expand(s[i] - 'a');
28    id[last] = i;
29  }
30
31  vis[1] = true;
32  for (int i = 1; i <= cnt; i++)
33    if (id[i])
34      for (int x = i, pos = n; x && !vis[x]; x =
35        → par[x]) {
36        vis[x] = true;
37        pos -= val[x] - val[par[x]];
38        ch[par[x]][s[pos + 1] - 'a'] = x;
39      }
40
41  dfs(1);
42
43  for (int i = 1; i <= n; i++) {
44    if (i > 1)
45      printf(" ");
46    printf("%d", sa[i]); // 1-based
47  }
48  printf("\n");
49
50  for (int i = 1; i < n; i++) {
51    if (i > 1)
52      printf(" ");
53    printf("%d", height[i]);
54  }
55  printf("\n");
56
57  return 0;
}

```

## 5.5 后缀自动机

```

1 // 在字符集比较小的时候可以直接开go数组，否则需要用map或
2 // → 哈希表替换
3
4 // 全局变量与数组定义
5 int last, val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], sam_cnt;
6 int c[maxn], q[maxn]; // 用来桶排序
7
8 // 在主函数开头加上这句初始化
9 last = sam_cnt = 1;
10
11 // 以下是按val进行桶排序的代码
12 for (int i = 1; i <= sam_cnt; i++)
13   c[val[i] + 1]++;
14 for (int i = 1; i <= n; i++)
15   c[i] += c[i - 1]; // 这里n是串长
16 for (int i = 1; i <= sam_cnt; i++)
17   q[+c[val[i]]] = i;
18
19 // 加入一个字符 均摊O(1)
20 void extend(int c) {
21   int p = last, np = ++sam_cnt;
22   val[np] = val[p] + 1;
23
24   while (p && !go[p][c]) {
25     go[p][c] = np;
26     p = par[p];
27   }
28
29   if (!p)
30     par[np] = 1;
31   else {
32     int q = go[p][c];
33
34     if (val[q] == val[p] + 1)
35       par[np] = q;
36     else {
37       int nq = ++sam_cnt;
38       val[nq] = val[p] + 1;
39       memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
40
41       par[nq] = par[q];
42       par[np] = par[q] = nq;
43
44       while (p && go[p][c] == q) {
45         go[p][c] = nq;
46         p = par[p];
47       }
48     }
49   }
50
51   last = np;
52 }

```

## 5.4 后缀平衡树

如果不需要查询排名，只需要维护前驱后继关系的题目，可以直接用二分哈希+set去做。

一般的题目需要查询排名，这时候就需要写替罪羊树或者Treap维护tag。插入后缀时如果首字母相同只需比较各自删除首字母后的tag大小即可。

(Treap也具有重量平衡树的性质，每次插入后影响到的子树大小期望是 $O(\log n)$ 的，所以每次做完插入操作之后直接暴力重构子树内tag就行了。)

### 5.5.1 广义后缀自动机

下面的写法复杂度是 $\Sigma$ 串长的，但是胜在简单。

如果建字典树然后BFS建自动机可以做到 $O(n|\Sigma|)$ ( $n$ 是字典树结点数)，但是后者写起来比较麻烦。

```

1 int extend(int p, int c) {
2   int np = 0;
3
4   if (!go[p][c]) {
5     np = ++sam_cnt;
6     val[np] = val[p] + 1;
7     while (p && !go[p][c]) {
8       go[p][c] = np;

```

```

9      p = par[p];
10     }
11   }
12
13   if (!p)
14     par[np] = 1;
15   else {
16     int q = go[p][c];
17
18     if (val[q] == val[p] + 1) {
19       if (np)
20         par[np] = q;
21       else
22         return q;
23     }
24   else {
25     int nq = ++sam_cnt;
26     val[nq] = val[p] + 1;
27     memcpy(go[nq], go[q], sizeof(go[q]));
28
29     par[nq] = par[q];
30     par[q] = nq;
31     if (np)
32       par[np] = nq;
33
34     while (p && go[p][c] == q){
35       go[p][c] = nq;
36       p = par[p];
37     }
38
39     if (!np)
40       return nq;
41   }
42 }
43
44 return np;
45 }
46 // 调用的时候直接last = 1然后一路调用last = extend(last,
47 // → c)就行了

```

```
x → ch[1] = null;
x → refresh();

if (x → val) // val记录的是上次访问时间，也就
    ↳是right集合最大值
    update(x → val - val[x → r] + 1, x → val
        ↳ - val[par[x → l]], -1);

x → val = tim;
x → lazy = true;

update(x → val - val[x → r] + 1, x → val -
    ↳ val[par[x → l]], 1);

x → ch[1] = y;
(y = x) → refresh();

x = x → p;
.

return y;

.下面是main函数中的用法
int i = 1; i ≤ n; i++) {
    im++;
    access(null + id[i]);

if (i ≥ m) // 例题询问长度是固定的，如果不固定的话就
    ↳按照右端点离线即可
    ans[i - m + 1] = query(i - m + 1, i);
```

## 5.6 回文树

```

1 // 定理：一个字符串本质不同的回文子串个数是O(n)的
2 // 注意回文树只需要开一倍结点，另外结点编号也是一个可用
3 // → 的bfs序
4
5 // 全局数组定义
6 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], last, cnt;
7 char s[maxn];
8
9 // 重要！在主函数最前面一定要加上以下初始化
10 par[0] = cnt = 1;
11 val[1] = -1;
12 // 这个初始化和广义回文树不一样，写普通题可以用，广义回文
13 // → 树就不要乱搞了
14
15 // extend函数 均摊O(1)
16 // 向后扩展一个字符
17 // 传入对应下标
18 void extend(int n) {
19     int p = last, c = s[n] - 'a';
20     while (s[n - val[p] - 1] != s[n])
21         p = par[p];
22
23     if (!go[p][c]) {
24         int q = ++cnt, now = p;
25         val[q] = val[p] + 2;
26
27         do
28             p = par[p];
29         while (s[n - val[p] - 1] != s[n]);
30
31         par[q] = go[p][c];
32         last = go[now][c] = q;
33     }
34 }

```

```
1 int tim; // tim实际上就是当前的右端点
2
3 node *access(node *x) {
4     node *y = null;
5
6     while (x != null) {
7         splay(x);
8     }
9 }
```

```

32     else
33         last = go[p][c];
34
35     // a[last]++;
36 }

```

### 5.6.1 广义回文树

(代码是梯子剖分的版本, 压力不大的题目换成直接倍增就好了, 常数只差不到一倍)

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 10000005, mod = 1000000007;
6
7 int val[maxn], par[maxn], go[maxn][26], fail[maxn][26],
8     → pam_last[maxn], pam_cnt;
9 int weight[maxn], pow_26[maxn];
10
11 int trie[maxn][26], trie_cnt, d[maxn], mxd[maxn],
12     → son[maxn], top[maxn], len[maxn], sum[maxn];
13 char chr[maxn];
14 int f[25][maxn], log_tbl[maxn];
15 vector<int> v[maxn];
16
17 vector<int> queries[maxn];
18
19 char str[maxn];
20 int n, m, ans[maxn];
21
22 int add(int x, int c) {
23     if (!trie[x][c]) {
24         trie[x][c] = ++trie_cnt;
25         f[0][trie[x][c]] = x;
26         chr[trie[x][c]] = c + 'a';
27     }
28
29     return trie[x][c];
30 }
31
32 int del(int x) {
33     return f[0][x];
34 }
35
36 void dfs1(int x) {
37     mxd[x] = d[x] = d[f[0][x]] + 1;
38
39     for (int i = 0; i < 26; i++)
40         if (trie[x][i])
41             int y = trie[x][i];
42
43             dfs1(y);
44
45             mxd[x] = max(mxd[x], mxd[y]);
46             if (mxd[y] > mxd[son[x]])
47                 son[x] = y;
48 }
49
50 void dfs2(int x) {
51     if (x == son[f[0][x]])
52         top[x] = top[f[0][x]];
53     else
54         top[x] = x;
55
56     for (int i = 0; i < 26; i++)
57         if (trie[x][i])
58             int y = trie[x][i];
59             dfs2(y);
}

```

```

60     if (top[x] == x) {
61         int u = x;
62         while (top[son[u]] == x)
63             u = son[u];
64
65         len[x] = d[u] - d[x];
66
67         for (int i = 0; i < len[x]; i++)
68             v[x].push_back(u);
69             u = f[0][u];
70     }
71
72     u = x;
73     for (int i = 0; i < len[x]; i++) { // 梯子剖
74         → 分, 要延长一倍
75         v[x].push_back(u);
76         u = f[0][u];
77     }
78 }
79
80 int get_anc(int x, int k) {
81     if (!k)
82         return x;
83     if (k > d[x])
84         return 0;
85
86     x = f[log_tbl[k]][x];
87     k -= 1 << log_tbl[k];
88
89     return v[top[x]][d[top[x]] + len[top[x]] - d[x] +
90         → k];
91 }
92
93 char get_char(int x, int k) { // 查询x前面k个的字符是哪
94     → 个
95     return chr[get_anc(x, k)];
96 }
97
98 int getfail(int x, int p) {
99     if (get_char(x, val[p] + 1) == chr[x])
100         return p;
101     return fail[p][chr[x] - 'a'];
102 }
103
104 int extend(int x) {
105     int p = pam_last[f[0][x]], c = chr[x] - 'a';
106
107     p = getfail(x, p);
108
109     int new_last;
110
111     if (!go[p][c]) {
112         int q = ++pam_cnt, now = p;
113         val[q] = val[p] + 2;
114
115         p = getfail(x, par[p]);
116
117         par[q] = go[p][c];
118         new_last = go[now][c] = q;
119
120         for (int i = 0; i < 26; i++)
121             fail[q][i] = fail[par[q]][i];
122
123         if (get_char(x, val[par[q]]) ≥ 'a')
124             fail[q][get_char(x, val[par[q]]) - 'a'] =
125                 → par[q];
126
127         if (val[q] ≤ n)
128             if (val[q] < n)
129                 val[q] += 1;
130             else
131                 val[q] = 0;
132
133         if (val[q] > n)
134             val[q] = n;
135
136         if (val[q] < n)
137             val[q] += 1;
138
139         if (val[q] > n)
140             val[q] = n;
141
142         if (val[q] < n)
143             val[q] += 1;
144
145         if (val[q] > n)
146             val[q] = n;
147
148         if (val[q] < n)
149             val[q] += 1;
150
151         if (val[q] > n)
152             val[q] = n;
153
154         if (val[q] < n)
155             val[q] += 1;
156
157         if (val[q] > n)
158             val[q] = n;
159
160         if (val[q] < n)
161             val[q] += 1;
162
163         if (val[q] > n)
164             val[q] = n;
165
166         if (val[q] < n)
167             val[q] += 1;
168
169         if (val[q] > n)
170             val[q] = n;
171
172         if (val[q] < n)
173             val[q] += 1;
174
175         if (val[q] > n)
176             val[q] = n;
177
178         if (val[q] < n)
179             val[q] += 1;
180
181         if (val[q] > n)
182             val[q] = n;
183
184         if (val[q] < n)
185             val[q] += 1;
186
187         if (val[q] > n)
188             val[q] = n;
189
190         if (val[q] < n)
191             val[q] += 1;
192
193         if (val[q] > n)
194             val[q] = n;
195
196         if (val[q] < n)
197             val[q] += 1;
198
199         if (val[q] > n)
200             val[q] = n;
201
202         if (val[q] < n)
203             val[q] += 1;
204
205         if (val[q] > n)
206             val[q] = n;
207
208         if (val[q] < n)
209             val[q] += 1;
210
211         if (val[q] > n)
212             val[q] = n;
213
214         if (val[q] < n)
215             val[q] += 1;
216
217         if (val[q] > n)
218             val[q] = n;
219
220         if (val[q] < n)
221             val[q] += 1;
222
223         if (val[q] > n)
224             val[q] = n;
225
226         if (val[q] < n)
227             val[q] += 1;
228
229         if (val[q] > n)
230             val[q] = n;
231
232         if (val[q] < n)
233             val[q] += 1;
234
235         if (val[q] > n)
236             val[q] = n;
237
238         if (val[q] < n)
239             val[q] += 1;
240
241         if (val[q] > n)
242             val[q] = n;
243
244         if (val[q] < n)
245             val[q] += 1;
246
247         if (val[q] > n)
248             val[q] = n;
249
250         if (val[q] < n)
251             val[q] += 1;
252
253         if (val[q] > n)
254             val[q] = n;
255
256         if (val[q] < n)
257             val[q] += 1;
258
259         if (val[q] > n)
260             val[q] = n;
261
262         if (val[q] < n)
263             val[q] += 1;
264
265         if (val[q] > n)
266             val[q] = n;
267
268         if (val[q] < n)
269             val[q] += 1;
270
271         if (val[q] > n)
272             val[q] = n;
273
274         if (val[q] < n)
275             val[q] += 1;
276
277         if (val[q] > n)
278             val[q] = n;
279
280         if (val[q] < n)
281             val[q] += 1;
282
283         if (val[q] > n)
284             val[q] = n;
285
286         if (val[q] < n)
287             val[q] += 1;
288
289         if (val[q] > n)
290             val[q] = n;
291
292         if (val[q] < n)
293             val[q] += 1;
294
295         if (val[q] > n)
296             val[q] = n;
297
298         if (val[q] < n)
299             val[q] += 1;
300
301         if (val[q] > n)
302             val[q] = n;
303
304         if (val[q] < n)
305             val[q] += 1;
306
307         if (val[q] > n)
308             val[q] = n;
309
310         if (val[q] < n)
311             val[q] += 1;
312
313         if (val[q] > n)
314             val[q] = n;
315
316         if (val[q] < n)
317             val[q] += 1;
318
319         if (val[q] > n)
320             val[q] = n;
321
322         if (val[q] < n)
323             val[q] += 1;
324
325         if (val[q] > n)
326             val[q] = n;
327
328         if (val[q] < n)
329             val[q] += 1;
330
331         if (val[q] > n)
332             val[q] = n;
333
334         if (val[q] < n)
335             val[q] += 1;
336
337         if (val[q] > n)
338             val[q] = n;
339
340         if (val[q] < n)
341             val[q] += 1;
342
343         if (val[q] > n)
344             val[q] = n;
345
346         if (val[q] < n)
347             val[q] += 1;
348
349         if (val[q] > n)
350             val[q] = n;
351
352         if (val[q] < n)
353             val[q] += 1;
354
355         if (val[q] > n)
356             val[q] = n;
357
358         if (val[q] < n)
359             val[q] += 1;
360
361         if (val[q] > n)
362             val[q] = n;
363
364         if (val[q] < n)
365             val[q] += 1;
366
367         if (val[q] > n)
368             val[q] = n;
369
370         if (val[q] < n)
371             val[q] += 1;
372
373         if (val[q] > n)
374             val[q] = n;
375
376         if (val[q] < n)
377             val[q] += 1;
378
379         if (val[q] > n)
380             val[q] = n;
381
382         if (val[q] < n)
383             val[q] += 1;
384
385         if (val[q] > n)
386             val[q] = n;
387
388         if (val[q] < n)
389             val[q] += 1;
390
391         if (val[q] > n)
392             val[q] = n;
393
394         if (val[q] < n)
395             val[q] += 1;
396
397         if (val[q] > n)
398             val[q] = n;
399
400         if (val[q] < n)
401             val[q] += 1;
402
403         if (val[q] > n)
404             val[q] = n;
405
406         if (val[q] < n)
407             val[q] += 1;
408
409         if (val[q] > n)
410             val[q] = n;
411
412         if (val[q] < n)
413             val[q] += 1;
414
415         if (val[q] > n)
416             val[q] = n;
417
418         if (val[q] < n)
419             val[q] += 1;
420
421         if (val[q] > n)
422             val[q] = n;
423
424         if (val[q] < n)
425             val[q] += 1;
426
427         if (val[q] > n)
428             val[q] = n;
429
430         if (val[q] < n)
431             val[q] += 1;
432
433         if (val[q] > n)
434             val[q] = n;
435
436         if (val[q] < n)
437             val[q] += 1;
438
439         if (val[q] > n)
440             val[q] = n;
441
442         if (val[q] < n)
443             val[q] += 1;
444
445         if (val[q] > n)
446             val[q] = n;
447
448         if (val[q] < n)
449             val[q] += 1;
450
451         if (val[q] > n)
452             val[q] = n;
453
454         if (val[q] < n)
455             val[q] += 1;
456
457         if (val[q] > n)
458             val[q] = n;
459
460         if (val[q] < n)
461             val[q] += 1;
462
463         if (val[q] > n)
464             val[q] = n;
465
466         if (val[q] < n)
467             val[q] += 1;
468
469         if (val[q] > n)
470             val[q] = n;
471
472         if (val[q] < n)
473             val[q] += 1;
474
475         if (val[q] > n)
476             val[q] = n;
477
478         if (val[q] < n)
479             val[q] += 1;
480
481         if (val[q] > n)
482             val[q] = n;
483
484         if (val[q] < n)
485             val[q] += 1;
486
487         if (val[q] > n)
488             val[q] = n;
489
490         if (val[q] < n)
491             val[q] += 1;
492
493         if (val[q] > n)
494             val[q] = n;
495
496         if (val[q] < n)
497             val[q] += 1;
498
499         if (val[q] > n)
500             val[q] = n;
501
502         if (val[q] < n)
503             val[q] += 1;
504
505         if (val[q] > n)
506             val[q] = n;
507
508         if (val[q] < n)
509             val[q] += 1;
510
511         if (val[q] > n)
512             val[q] = n;
513
514         if (val[q] < n)
515             val[q] += 1;
516
517         if (val[q] > n)
518             val[q] = n;
519
520         if (val[q] < n)
521             val[q] += 1;
522
523         if (val[q] > n)
524             val[q] = n;
525
526         if (val[q] < n)
527             val[q] += 1;
528
529         if (val[q] > n)
530             val[q] = n;
531
532         if (val[q] < n)
533             val[q] += 1;
534
535         if (val[q] > n)
536             val[q] = n;
537
538         if (val[q] < n)
539             val[q] += 1;
540
541         if (val[q] > n)
542             val[q] = n;
543
544         if (val[q] < n)
545             val[q] += 1;
546
547         if (val[q] > n)
548             val[q] = n;
549
550         if (val[q] < n)
551             val[q] += 1;
552
553         if (val[q] > n)
554             val[q] = n;
555
556         if (val[q] < n)
557             val[q] += 1;
558
559         if (val[q] > n)
560             val[q] = n;
561
562         if (val[q] < n)
563             val[q] += 1;
564
565         if (val[q] > n)
566             val[q] = n;
567
568         if (val[q] < n)
569             val[q] += 1;
570
571         if (val[q] > n)
572             val[q] = n;
573
574         if (val[q] < n)
575             val[q] += 1;
576
577         if (val[q] > n)
578             val[q] = n;
579
580         if (val[q] < n)
581             val[q] += 1;
582
583         if (val[q] > n)
584             val[q] = n;
585
586         if (val[q] < n)
587             val[q] += 1;
588
589         if (val[q] > n)
590             val[q] = n;
591
592         if (val[q] < n)
593             val[q] += 1;
594
595         if (val[q] > n)
596             val[q] = n;
597
598         if (val[q] < n)
599             val[q] += 1;
600
601         if (val[q] > n)
602             val[q] = n;
603
604         if (val[q] < n)
605             val[q] += 1;
606
607         if (val[q] > n)
608             val[q] = n;
609
610         if (val[q] < n)
611             val[q] += 1;
612
613         if (val[q] > n)
614             val[q] = n;
615
616         if (val[q] < n)
617             val[q] += 1;
618
619         if (val[q] > n)
620             val[q] = n;
621
622         if (val[q] < n)
623             val[q] += 1;
624
625         if (val[q] > n)
626             val[q] = n;
627
628         if (val[q] < n)
629             val[q] += 1;
630
631         if (val[q] > n)
632             val[q] = n;
633
634         if (val[q] < n)
635             val[q] += 1;
636
637         if (val[q] > n)
638             val[q] = n;
639
640         if (val[q] < n)
641             val[q] += 1;
642
643         if (val[q] > n)
644             val[q] = n;
645
646         if (val[q] < n)
647             val[q] += 1;
648
649         if (val[q] > n)
650             val[q] = n;
651
652         if (val[q] < n)
653             val[q] += 1;
654
655         if (val[q] > n)
656             val[q] = n;
657
658         if (val[q] < n)
659             val[q] += 1;
660
661         if (val[q] > n)
662             val[q] = n;
663
664         if (val[q] < n)
665             val[q] += 1;
666
667         if (val[q] > n)
668             val[q] = n;
669
670         if (val[q] < n)
671             val[q] += 1;
672
673         if (val[q] > n)
674             val[q] = n;
675
676         if (val[q] < n)
677             val[q] += 1;
678
679         if (val[q] > n)
680             val[q] = n;
681
682         if (val[q] < n)
683             val[q] += 1;
684
685         if (val[q] > n)
686             val[q] = n;
687
688         if (val[q] < n)
689             val[q] += 1;
690
691         if (val[q] > n)
692             val[q] = n;
693
694         if (val[q] < n)
695             val[q] += 1;
696
697         if (val[q] > n)
698             val[q] = n;
699
700         if (val[q] < n)
701             val[q] += 1;
702
703         if (val[q] > n)
704             val[q] = n;
705
706         if (val[q] < n)
707             val[q] += 1;
708
709         if (val[q] > n)
710             val[q] = n;
711
712         if (val[q] < n)
713             val[q] += 1;
714
715         if (val[q] > n)
716             val[q] = n;
717
718         if (val[q] < n)
719             val[q] += 1;
720
721         if (val[q] > n)
722             val[q] = n;
723
724         if (val[q] < n)
725             val[q] += 1;
726
727         if (val[q] > n)
728             val[q] = n;
729
730         if (val[q] < n)
731             val[q] += 1;
732
733         if (val[q] > n)
734             val[q] = n;
735
736         if (val[q] < n)
737             val[q] += 1;
738
739         if (val[q] > n)
740             val[q] = n;
741
742         if (val[q] < n)
743             val[q] += 1;
744
745         if (val[q] > n)
746             val[q] = n;
747
748         if (val[q] < n)
749             val[q] += 1;
750
751         if (val[q] > n)
752             val[q] = n;
753
754         if (val[q] < n)
755             val[q] += 1;
756
757         if (val[q] > n)
758             val[q] = n;
759
760         if (val[q] < n)
761             val[q] += 1;
762
763         if (val[q] > n)
764             val[q] = n;
765
766         if (val[q] < n)
767             val[q] += 1;
768
769         if (val[q] > n)
770             val[q] = n;
771
772         if (val[q] < n)
773             val[q] += 1;
774
775         if (val[q] > n)
776             val[q] = n;
777
778         if (val[q] < n)
779             val[q] += 1;
780
781         if (val[q] > n)
782             val[q] = n;
783
784         if (val[q] < n)
785             val[q] += 1;
786
787         if (val[q] > n)
788             val[q] = n;
789
790         if (val[q] < n)
791             val[q] += 1;
792
793         if (val[q] > n)
794             val[q] = n;
795
796         if (val[q] < n)
797             val[q] += 1;
798
799         if (val[q] > n)
800             val[q] = n;
801
802         if (val[q] < n)
803             val[q] += 1;
804
805         if (val[q] > n)
806             val[q] = n;
807
808         if (val[q] < n)
809             val[q] += 1;
810
811         if (val[q] > n)
812             val[q] = n;
813
814         if (val[q] < n)
815             val[q] += 1;
816
817         if (val[q] > n)
818             val[q] = n;
819
820         if (val[q] < n)
821             val[q] += 1;
822
823         if (val[q] > n)
824             val[q] = n;
825
826         if (val[q] < n)
827             val[q] += 1;
828
829         if (val[q] > n)
830             val[q] = n;
831
832         if (val[q] < n)
833             val[q] += 1;
834
835         if (val[q] > n)
836             val[q] = n;
837
838         if (val[q] < n)
839             val[q] += 1;
840
841         if (val[q] > n)
842             val[q] = n;
843
844         if (val[q] < n)
845             val[q] += 1;
846
847         if (val[q] > n)
848             val[q] = n;
849
850         if (val[q] < n)
851             val[q] += 1;
852
853         if (val[q] > n)
854             val[q] = n;
855
856         if (val[q] < n)
857             val[q] += 1;
858
859         if (val[q] > n)
860             val[q] = n;
861
862         if (val[q] < n)
863             val[q] += 1;
864
865         if (val[q] > n)
866             val[q] = n;
867
868         if (val[q] < n)
869             val[q] += 1;
870
871         if (val[q] > n)
872             val[q] = n;
873
874         if (val[q] < n)
875             val[q] += 1;
876
877         if (val[q] > n)
878             val[q] = n;
879
880         if (val[q] < n)
881             val[q] += 1;
882
883         if (val[q] > n)
884             val[q] = n;
885
886         if (val[q] < n)
887             val[q] += 1;
888
889         if (val[q] > n)
890             val[q] = n;
891
892         if (val[q] < n)
893             val[q] += 1;
894
895         if (val[q] > n)
896             val[q] = n;
897
898         if (val[q] < n)
899             val[q] += 1;
900
901         if (val[q] > n)
902             val[q] = n;
903
904         if (val[q] < n)
905             val[q] += 1;
906
907         if (val[q] > n)
908             val[q] = n;
909
910         if (val[q] < n)
911             val[q] += 1;
912
913         if (val[q] > n)
914             val[q] = n;
915
916         if (val[q] < n)
917             val[q] += 1;
918
919         if (val[q] > n)
920             val[q] = n;
921
922         if (val[q] < n)
923             val[q] += 1;
924
925         if (val[q] > n)
926             val[q] = n;
927
928         if (val[q] < n)
929             val[q] += 1;
930
931         if (val[q] > n)
932             val[q] = n;
933
934         if (val[q] < n)
935             val[q] += 1;
936
937         if (val[q] > n)
938             val[q] = n;
939
940         if (val[q] < n)
941             val[q] += 1;
942
943         if (val[q] > n)
944             val[q] = n;
945
946         if (val[q] < n)
947             val[q] += 1;
948
949         if (val[q] > n)
950             val[q] = n;
951
952         if (val[q] < n)
953             val[q] += 1;
954
955         if (val[q] > n)
956             val[q] = n;
957
958         if (val[q] < n)
959             val[q] += 1;
960
961         if (val[q] > n)
962             val[q] = n;
963
964         if (val[q] < n)
965             val[q] += 1;
966
967         if (val[q] > n)
968             val[q] = n;
969
970         if (val[q] < n)
971             val[q] += 1;
972
973         if (val[q] > n)
974             val[q] = n;
975
976         if (val[q] < n)
977             val[q] += 1;
978
979         if (val[q] > n)
980             val[q] = n;
981
982         if (val[q] < n)
983             val[q] += 1;
984
985         if (val[q] > n)
986             val[q] = n;
987
988         if (val[q] < n)
989             val[q] += 1;
990
991         if (val[q] > n)
992             val[q] = n;
993
994         if (val[q] < n)
995             val[q] += 1;
996
997         if (val[q] > n)
998             val[q] = n;
999
1000         if (val[q] < n)
1001             val[q] += 1;
1002
1003         if (val[q] > n)
1004             val[q] = n;
1005
1006         if (val[q] < n)
1007             val[q] += 1;
1008
1009         if (val[q] > n)
1010             val[q] = n;
1011
1012         if (val[q] < n)
1013             val[q] += 1;
1014
1015         if (val[q] > n)
1016             val[q] = n;
1017
1018         if (val[q] < n)
1019             val[q] += 1;
1020
1021         if (val[q] > n)
1022             val[q] = n;
1023
1024         if (val[q] < n)
1025             val[q] += 1;
1026
1027         if (val[q] > n)
1028             val[q] = n;
1029
1030         if (val[q] < n)
1031             val[q] += 1;
1032
1033         if (val[q] > n)
1034             val[q] = n;
1035
1036         if (val[q] < n)
1037             val[q] += 1;
1038
1039         if (val[q] > n)
1040             val[q] = n;
1041
1042         if (val[q] < n)
1043             val[q] += 1;
1044
1045         if (val[q] > n)
1046             val[q] = n;
1047
1048         if (val[q] < n)
1049             val[q] += 1;
1050
1051         if (val[q] > n)
1052             val[q] = n;
1053
1054         if (val[q] < n)
1055             val[q] += 1;
1056
1057         if (val[q] > n)
1058             val[q] = n;
1059
1060         if (val[q] < n)
1061             val[q] += 1;
1062
1063         if (val[q] > n)
1064             val[q] = n;
1065
1066         if (val[q] < n)
1067             val[q] += 1;
1068
1069         if (val[q] > n)
1070             val[q] = n;
1071
1072         if (val[q] < n)
1073             val[q] += 1;
1074
1075         if (val[q] > n)
1076             val[q] = n;
1077
1078         if (val[q] < n)
1079             val[q] += 1;
1080
1081         if (val[q] > n)
1082             val[q] = n;
1083
1084         if (val[q] < n)
1085             val[q] += 1;
1086
1087         if (val[q] > n)
1088             val[q] = n;
1089
1090         if (val[q] < n)
1091             val[q] += 1;
1092
1093         if (val[q] > n)
1094             val[q] = n;
1095
1096         if (val[q] < n)
1097             val[q] += 1;
1098
1099         if (val[q] > n)
1100             val[q] = n;
1101
1102         if (val[q] < n)
1103             val[q] += 1;
1104
1105         if (val[q] > n)
1106             val[q] = n;
1107
1108         if (val[q] < n)
1109             val[q] += 1;
1110
1111         if (val[q] > n)
1112             val[q] = n;
1113
1114         if (val[q] < n)
1115             val[q] += 1;
1116
1117         if (val[q] > n)
1118             val[q] = n;
1119
1120         if (val[q] < n)
1121             val[q] += 1;
1122
1123         if (val[q] > n)
1124             val[q] = n;
1125
1126         if (val
```

```

127         weight[q] = (weight[par[q]] + (long long)(n
128             ↪ - val[q] + 1) * pow_26[n - val[q]]) %
129             ↪ mod;
130     else
131         weight[q] = weight[par[q]];
132     }
133     else
134         new_last = go[p][c];
135
136     pam_last[x] = new_last;
137 }
138
139 void bfs() {
140
141     queue<int> q;
142
143     q.push(1);
144
145     while (!q.empty()) {
146         int x = q.front();
147         q.pop();
148
149         sum[x] = sum[f[0][x]];
150         if (x > 1)
151             sum[x] = (sum[x] + extend(x)) % mod;
152
153         for (int i : queries[x])
154             ans[i] = sum[x];
155
156         for (int i = 0; i < 26; i++)
157             if (trie[x][i])
158                 q.push(trie[x][i]);
159     }
160 }
161
162 int main() {
163
164     pow_26[0] = 1;
165     log_tbl[0] = -1;
166
167     for (int i = 1; i ≤ 1000000; i++) {
168         pow_26[i] = 26ll * pow_26[i - 1] % mod;
169         log_tbl[i] = log_tbl[i / 2] + 1;
170     }
171
172     int T;
173     scanf("%d", &T);
174
175     while (T--) {
176         scanf("%d%d%s", &n, &m, str);
177
178         trie_cnt = 1;
179         chr[1] = '#';
180
181         int last = 1;
182         for (char *c = str; *c; c++)
183             last = add(last, *c - 'a');
184
185         queries[last].push_back(0);
186
187         for (int i = 1; i ≤ m; i++) {
188             int op;
189             scanf("%d", &op);
190
191             if (op == 1) {
192                 char c;
193                 scanf(" %c", &c);
194
195                 last = add(last, c - 'a');
196             }
197         }
198
199         if (last != 1)
200             last = del(last);
201
202         queries[last].push_back(i);
203
204         dfs1(1);
205         dfs2(1);
206
207         for (int j = 1; j ≤ log_tbl[trie_cnt]; j++)
208             for (int i = 1; i ≤ trie_cnt; i++)
209                 f[j][i] = f[j - 1][f[j - 1][i]];
210
211         par[0] = pam_cnt = 1;
212
213         for (int i = 0; i < 26; i++)
214             fail[0][i] = fail[1][i] = 1;
215
216         val[1] = -1;
217         pam_last[1] = 1;
218
219         bfs();
220
221         for (int i = 0; i ≤ m; i++)
222             printf("%d\n", ans[i]);
223
224         for (int j = 0; j ≤ log_tbl[trie_cnt]; j++)
225             memset(f[j], 0, sizeof(f[j]));
226
227         for (int i = 1; i ≤ trie_cnt; i++) {
228             chr[i] = 0;
229             d[i] = mxd[i] = son[i] = top[i] = len[i] =
230                 ↪ pam_last[i] = sum[i] = 0;
231             v[i].clear();
232             queries[i].clear();
233
234             memset(trie[i], 0, sizeof(trie[i]));
235         }
236         trie_cnt = 0;
237
238         for (int i = 0; i ≤ pam_cnt; i++) {
239             val[i] = par[i] = weight[i];
240
241             memset(go[i], 0, sizeof(go[i]));
242             memset(fail[i], 0, sizeof(fail[i]));
243         }
244         pam_cnt = 0;
245
246     }
247
248     return 0;
249 }
```

## 5.7 Manacher马拉车

```

1 // n为串长，回文半径输出到p数组中
2 // 数组要开串长的两倍
3 void manacher(const char *t, int n) {
4     static char s[maxn * 2];
5
6     for (int i = n; i; i--)
7         s[i * 2] = t[i];
8     for (int i = 0; i ≤ n; i++)
9         s[i * 2 + 1] = '#';
10
11    s[0] = '$';
12    s[(n + 1) * 2] = '\0';
13    n = n * 2 + 1;
14 }
```

```

15 int mx = 0, j = 0;
16
17 for (int i = 1; i <= n; i++) {
18     p[i] = (mx > i ? min(p[j * 2 - i], mx - i) :
19             i);
20     while (s[i - p[i]] == s[i + p[i]])
21         p[i]++;
22
23     if (i + p[i] > mx) {
24         mx = i + p[i];
25         j = i;
26     }
27 }
```

## 5.8 字符串原理

KMP和AC自动机的fail指针存储的都是它在串或者字典树上的最长后缀，因此要判断两个前缀是否互为后缀时可以直接用fail指针判断。当然它不能做子串问题，也不能做最长公共后缀。

后缀数组利用的主要是LCP长度可以按照字典序做RMQ的性质，与某个串的LCP长度 $\geq$ 某个值的后缀形成一个区间。另外一个比较好用的性质是本质不同的子串个数 = 所有子串数 - 字典序相邻的串的height。

后缀自动机实际上可以接受的是所有后缀，如果把中间状态也算上的话就是所有子串。它的fail指针代表的也是当前串的后缀，不过注意每个状态可以代表很多状态，只要右端点在right集合中且长度处在 $(val_{par_p}, val_p]$ 中的串都被它代表。

后缀自动机的fail树也就是反串的后缀树。每个结点代表的串和后缀自动机同理，两个串的LCP长度也就是他们在后缀树上的LCA。

# 6 动态规划

## 6.1 决策单调性 $O(n \log n)$

```

1 int a[maxn], q[maxn], p[maxn], g[maxn]; // 存左端点, 右端
2   点就是下一个左端点 - 1
3
4 long long f[maxn], s[maxn];
5
6 int n, m;
7
8 long long calc(int l, int r) {
9     if (r < l)
10        return 0;
11
12    int mid = (l + r) / 2;
13    if ((r - l + 1) % 2 == 0)
14        return (s[r] - s[mid]) - (s[mid] - s[l - 1]);
15    else
16        return (s[r] - s[mid]) - (s[mid - 1] - s[l -
17          - 1]);
18
19 int solve(long long tmp) {
20     memset(f, 63, sizeof(f));
21     f[0] = 0;
22
23     int head = 1, tail = 0;
24
25     for (int i = 1; i <= n; i++) {
26         f[i] = calc(1, i);
27         g[i] = 1;
28
29         while (head < tail && p[head + 1] <= i)
30             head++;
31         if (head <= tail) {
32             if (f[q[head]] + calc(q[head] + 1, i) <
33                 f[i]) {
34                 f[i] = f[q[head]] + calc(q[head] + 1,
35                   i);
36                 g[i] = g[q[head]] + 1;
37             }
38             while (head < tail && p[head + 1] <= i + 1)
39                 head++;
40             if (head <= tail)
41                 p[head] = i + 1;
42         }
43         f[i] += tmp;
44
45         int r = n;
46
47         while (head <= tail) {
48             if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, p[tail]) <
49                 f[i] + calc(i + 1, p[tail])) {
50                 r = p[tail] - 1;
51                 tail--;
52             }
53             else if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, r) <
54                 f[i] + calc(i + 1, r)) {
55                 if (r < n) {
56                     q[++tail] = i;
57                     p[tail] = r + 1;
58                 }
59                 break;
60             }
61             else {
62                 int L = p[tail], R = r;
63                 while (L < R) {
64                     int M = (L + R) / 2;
65
66                     if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, M) <
67                         f[i] + calc(i + 1, M))
68                         L = M + 1;
69                     else
70                         R = M;
71                 }
72             }
73             if (head > tail) {
74                 q[++tail] = i;
75                 p[tail] = i + 1;
76             }
77         }
78
79         return g[n];
80     }
81 }
```

```

if (f[q[tail]] + calc(q[tail] + 1, M) <= f[i] + calc(i + 1, M))
    L = M + 1;
else
    R = M;

q[++tail] = i;
p[tail] = L;

break;

}
if (head > tail) {
    q[++tail] = i;
    p[tail] = i + 1;
}

return g[n];
}
```

# 7 计算几何

## 7.1 Delaunay三角剖分

只要两个点同在某个三角形上，它们就互为一对最近点。注意返回的三角形似乎不保证顺序，所以要加边的话还是要加双向边。

如果要建V图的话求出每个三角形的外心就行了，每个点控制的区域就是所在三角形的外心连起来。

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2
3 using namespace std;
4
5 constexpr int maxn = 500005;
6
7 using ll = long long;
8
9 constexpr int INF = 0x3f3f3f3f;
10 constexpr ll LINF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3fll;
11 constexpr double eps = 1e-8;
12
13 template <class T>
14 int sgn(T x) {
15     return x > 0 ? 1 : x < 0 ? -1 : 0;
16 }
17
18 struct point {
19     ll x, y;
20
21     point() = default;
22
23     point(ll x, ll y) : x(x), y(y) {}
24
25     point operator - (const point &p) const {
26         return point(x - p.x, y - p.y);
27     }
28
29     ll cross(const point &p) const {
30         return x * p.y - y * p.x;
31     }
32
33     ll cross(const point &a, const point &b) const {
34         return (a - *this).cross(b - *this);
35     }
36
37     ll dot(const point &p) const {
38         return x * p.x + y * p.y;
39     }
40
41     ll dot(const point &a, const point &b) const {
42         return (a - *this).dot(b - *this);
43     }
44
45     ll abs2() const {
46         return this -> dot(*this);
47     }
48
49     bool operator == (const point &p) const {
50         return x == p.x && y == p.y;
51     }
52
53     bool operator < (const point &p) const {
54         if (x != p.x) return x < p.x;
55         return y < p.y;
56     }
57 };
58
59
60 const point inf_point = point(1e18, 1e18);
61

```

```

62
63     struct quad_edge {
64         point origin;
65         quad_edge *rot = nullptr;
66         quad_edge *onext = nullptr;
67         bool used = false;
68
69         quad_edge *rev() const {
70             return rot -> rot;
71         }
72         quad_edge *lnext() const {
73             return rot -> rev() -> onext -> rot;
74         }
75         quad_edge *oprev() const {
76             return rot -> onext -> rot;
77         }
78         point dest() const {
79             return rev() -> origin;
80         }
81     };
82
83     quad_edge *make_edge(point from, point to) {
84         quad_edge *e1 = new quad_edge;
85         quad_edge *e2 = new quad_edge;
86         quad_edge *e3 = new quad_edge;
87         quad_edge *e4 = new quad_edge;
88
89         e1 -> origin = from;
90         e2 -> origin = to;
91         e3 -> origin = e4 -> origin = inf_point;
92
93         e1 -> rot = e3;
94         e2 -> rot = e4;
95         e3 -> rot = e2;
96         e4 -> rot = e1;
97
98         e1 -> onext = e1;
99         e2 -> onext = e2;
100        e3 -> onext = e4;
101        e4 -> onext = e3;
102
103        return e1;
104    }
105
106    void splice(quad_edge *a, quad_edge *b) { // 拼接
107        swap(a -> onext -> rot -> onext, b -> onext -> rot
108            -> onext);
109        swap(a -> onext, b -> onext);
110    }
111
112    void delete_edge(quad_edge *e) {
113        splice(e, e -> oprev());
114        splice(e -> rev(), e -> rev() -> oprev());
115
116        delete e -> rev() -> rot;
117        delete e -> rev();
118        delete e -> rot;
119        delete e;
120    }
121
122    quad_edge *connect(quad_edge *a, quad_edge *b) {
123        quad_edge *e = make_edge(a -> dest(), b -> origin);
124
125        splice(e, a -> lnext());
126        splice(e -> rev(), b);
127
128        return e;
129    }
130
131    bool left_of(point p, quad_edge *e) {

```

```

131     return p.cross(e → origin, e → dest()) > 0;
132 }
133
134 bool right_of(point p, quad_edge *e) {
135     return p.cross(e → origin, e → dest()) < 0;
136 }
137
138 template <class T>
139 T det3(T a1, T a2, T a3, T b1, T b2, T b3, T c1, T c2,
140        → T c3) {
141     return a1 * (b2 * c3 - c2 * b3) - a2 * (b1 * c3 -
142           → c1 * b3) +
143           a3 * (b1 * c2 - c1 * b2);
144 }
145
146 bool in_circle(point a, point b, point c, point d) { // → 如果有__int128就直接计算行列式, 否则算角度
147 #if defined(__LP64__) || defined(__WIN64__)
148     __int128 det = -det3<__int128>(b.x, b.y, b.abs2(),
149           → c.x, c.y, c.abs2(), d.x, d.y, d.abs2());
150     det += det3<__int128>(a.x, a.y, a.abs2(), c.x, c.y,
151           → c.abs2(), d.x, d.y, d.abs2());
152     det -= det3<__int128>(a.x, a.y, a.abs2(), b.x, b.y,
153           → b.abs2(), d.x, d.y, d.abs2());
154     det += det3<__int128>(a.x, a.y, a.abs2(), b.x, b.y,
155           → b.abs2(), c.x, c.y, c.abs2());
156
157     return det > 0;
158 #else
159     auto ang = [] (point l, point mid, point r) {
160         ll x = mid.dot(l, r);
161         ll y = mid.cross(l, r);
162         long double res = atan2((long double)x, (long
163             → double)y);
164         return res;
165     };
166
167     long double kek = ang(a, b, c) + ang(c, d, a) -
168           → ang(b, c, d) - ang(d, a, b);
169
170     return kek > 1e-10;
171 #endif
172 }
173
174 pair<quad_edge*, quad_edge*> divide_and_conquer(int l,
175           → int r, vector<point> &p) {
176     if (r - l + 1 == 2) {
177         quad_edge *res = make_edge(p[l], p[r]);
178         return make_pair(res, res → rev());
179     }
180
181     if (r - l + 1 == 3) {
182         quad_edge *a = make_edge(p[l], p[l + 1]), *b =
183           → make_edge(p[l + 1], p[r]);
184         splice(a → rev(), b);
185
186         int sg = sgn(p[l].cross(p[l + 1], p[r]));
187
188         if (sg == 0)
189             return make_pair(a, b → rev());
190
191         quad_edge *c = connect(b, a);
192
193         if (sg == 1)
194             return make_pair(a, b → rev());
195         else
196             return make_pair(c → rev(), c);
197     }
198
199     int mid = (l + r) / 2;
200
201     quad_edge *ldo, *ldi, *rdo, *rdi;
202     tie(ldo, ldi) = divide_and_conquer(l, mid, p);
203     tie(rdi, rdo) = divide_and_conquer(mid + 1, r, p);
204
205     while (true) {
206         if (left_of(rdi → origin, ldi))
207             ldi = ldi → lnext();
208
209         else if (right_of(ldi → origin, rdi))
210             rdi = rdi → rev() → onext();
211
212         else
213             break;
214     }
215
216     quad_edge *basel = connect(rdi → rev(), ldi);
217     auto is_valid = [&basel] (quad_edge *e) {
218         return right_of(e → dest(), basel);
219     };
220
221     if (ldi → origin == ldo → origin)
222         ldo = basel → rev();
223     if (rdi → origin == rdo → origin)
224         rdo = basel;
225
226     while (true) {
227         quad_edge *lcand = basel → rev() → onext();
228         if (is_valid(lcand)) {
229             while (in_circle(basel → dest(), basel →
230                   → origin, lcand → dest(), lcand → onext(
231                   → dest())))
232                 quad_edge *t = lcand → onext();
233                 delete_edge(lcand);
234                 lcand = t;
235         }
236
237         quad_edge *rcand = basel → oprev();
238         if (is_valid(rcand)) {
239             while (in_circle(basel → dest(), basel →
240                   → origin, rcand → dest(), rcand →
241                   → oprev() → dest()))
242                 quad_edge *t = rcand → oprev();
243                 delete_edge(rcand);
244                 rcand = t;
245         }
246
247         if (!is_valid(lcand) && !is_valid(rcand))
248             break;
249
250         if (!is_valid(lcand) || (is_valid(rcand) &&
251             → in_circle(lcand → dest(), lcand → origin,
252             → rcand → origin, rcand → dest())))
253             basel = connect(rcand, basel → rev());
254         else
255             basel = connect(basel → rev(), lcand →
256               → rev());
257
258         return make_pair(ldo, rdo);
259     }
260
261     vector<tuple<point, point, point> >
262       → delaunay(vector<point> p) { // Delaunay 三角剖分
263         sort(p.begin(), p.end(), [] (const point &a, const
264             → point &b) {

```

```

249     return a.x < b.x || (a.x == b.x && a.y < b.y);
250     // 实际上已经重载小于了，只是为了清晰
251 }
252
253 auto res = divide_and_conquer(0, (int)p.size() - 1,
254     ↪ p);
255
256 quad_edge *e = res.first;
257 vector<quad_edge*> edges = {e};
258
259 while (e → onext → dest().cross(e → dest(), e →
260     ↪ origin) < 0)
261     e = e → onext;
262
263 auto add = [&p, &e, &edges] () { // 修改 p, e, edges
264     quad_edge *cur = e;
265     do {
266         cur → used = true;
267         p.push_back(cur → origin);
268         edges.push_back(cur → rev());
269
270         cur = cur → lnext();
271     } while (cur != e);
272 };
273
274 add();
275 p.clear();
276
277 int kek = 0;
278 while (kek < (int)edges.size())
279     if (!(*e = edges[kek++]) → used)
280         add();
281
282 vector<tuple<point, point, point>> ans;
283 for (int i = 0; i < (int)p.size(); i += 3)
284     ans.push_back(make_tuple(p[i], p[i + 1], p[i +
285     ↪ 2]));
286
287 return ans; // 返回每个三角形
288
289 #define sq(x) ((x) * (ll)(x)) // 平方
290
291 ll dist(point p, point q) { // 两点间距离的平方
292     return (p - q).abs2();
293 }
294
295 ll sarea2(point p, point q, point r) { // 三角形面积的两
296     ↪ 倍(叉积)
297     return (q - p).cross(r - q);
298 }
299
300 point v[maxn];
301
302 int main() {
303     int n;
304     cin >> n;
305
306     // read the points, v[1 ~ n]
307
308     bool col_linear = true; // 如果给出的所有点都共线则
309     ↪ 需要特判
310     for (int i = 3; i ≤ n; i++)
311         if (sarea2(v[1], v[2], v[i]))
312             col_linear = false;
313
314     if (col_linear) {
315         // do something
316
317         auto triangles = delaunay(vector<point>(v + 1, v +
318             ↪ n + 1));
319
320         // do something
321
322         return 0;
323     }
324 }

```

8 杂项

## 8.1 $O(1)$ 快速乘

如果对速度要求很高并且不能用指令集，可以去看fstqwq的模板。

```
// long double 快速乘
// 在两数直接相乘会爆long long时才有必要使用
// 常数比直接long long乘法 + 取模大很多，非必要时不建议使用
    → 用
long long mul(long long a, long long b, long long p) {
    a %= p;
    b %= p;
    return ((a * b - p * (long long)((long double)a / p
        → * b + 0.5)) % p + p) % p;
}

// 指令集快速乘
// 试机记得测试能不能过编译
inline long long mul(const long long a, const long long
    → b, const long long p) {
    long long ans;
    __asm__ __volatile__ ("\\tmulq %%rbx\\n\\tdivq %
        → %%rcx\\n" : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
    return ans;
}

// int乘法取模，大概比直接做快一倍
inline int mul_mod(int a, int b, int p) {
    int ans;
    __asm__ __volatile__ ("\\tmull %%ebx\\n\\tdivl %
        → %%ecx\\n" : "=d"(ans) : "a"(a), "b"(b), "c"(p));
    return ans;
}
```

## 8.2 Kahan求和算法(减少浮点数累加的误差)

当然一般来说是用不到的，累加被卡精度了才有必要考虑。

```
1 double kahanSum(vector<double> vec) {
2     double sum = 0, c = 0;
3     for (auto x : vec) {
4         double y = x - c;
5         double t = sum + y;
6         c = (t - sum) - y;
7         sum = t;
8     }
9     return sum;
10 }
```

## 8.3 Python Decimal

```
1 import decimal
2
3 decimal.getcontext().prec = 1234 # 有效数字位数
4
5 x = decimal.Decimal(2)
6 x = decimal.Decimal('50.5679') # 不要用float, 因
    ↪ 为float本身就不准确
7
8 x = decimal.Decimal('50.5679'). \
    quantize(decimal.Decimal('0.00')) # 保留两位小数,
    ↪ 50.57
9
10 x = decimal.Decimal('50.5679'). \
    quantize(decimal.Decimal('0.00'),
    ↪ decimal.ROUND_HALF_UP) # 四舍五入
11
12 # 第二个参数可选如下:
13 # ROUND_HALF_UP 四舍五入
```

```
14 # ROUND_HALF_DOWN 五舍六入
15 # ROUND_HALF_EVEN 银行家舍入法, 舍入到最近的偶数
16 # ROUND_UP 向绝对值大的取整
17 # ROUND_DOWN 向绝对值小的取整
18 # ROUND_CEILING 向正无穷取整
19 # ROUND_FLOOR 向负无穷取整
20 # ROUND_05UP (away from zero if last digit after
   ↪ rounding towards zero would have been 0 or 5;
   ↪ otherwise towards zero)
21
22 print('%f' % x) # 这样做只有float的精度
23 s = str(x)
24
25 decimal.is_finite(x) # x是否有穷(NaN也算)
26 decimal.is_infinite(x)
27 decimal.is_nan(x)
28 decimal.is_normal(x) # x是否正常
29 decimal.is_signed(x) # 是否为负数
30
31 decimal.fma(a, b, c) # a * b + c, 精度更高
32
33 x.exp(), x.ln(), x.sqrt(), x.log10()
34
35 # 可以转复数, 前提是要import complex
```

## 8.4 $O(n^2)$ 高精度

```
// 注意如果只需要正数运算的话
// 可以只抄英文名的运算函数
// 按需自取
// 乘法O(n ^ 2), 除法O(10 * n ^ 2)
5
6 constexpr int maxn = 1005;
7
8 struct big_decimal {
9     int a[maxn];
10    bool negative;
11
12    big_decimal() {
13        memset(a, 0, sizeof(a));
14        negative = false;
15    }
16
17    big_decimal(long long x) {
18        memset(a, 0, sizeof(a));
19        negative = false;
20
21        if (x < 0) {
22            negative = true;
23            x = -x;
24        }
25
26        while (x) {
27            a[++a[0]] = x % 10;
28            x /= 10;
29        }
30    }
31
32    big_decimal(string s) {
33        memset(a, 0, sizeof(a));
34        negative = false;
35
36        if (s == "")
37            return;
38
39        if (s[0] == '-') {
40            negative = true;
41            s = s.substr(1);
42        }
43        a[0] = s.size();
```

```

44     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
45         a[i] = s[a[0] - i] - '0';
46
47     while (a[0] && !a[a[0]])
48         a[0]--;
49 }
50
51 void input() {
52     string s;
53     cin >> s;
54     *this = s;
55 }
56
57 string str() const {
58     if (!a[0])
59         return "0";
60
61     string s;
62     if (negative)
63         s = "-";
64
65     for (int i = a[0]; i; i--)
66         s.push_back('0' + a[i]);
67
68     return s;
69 }
70
71 operator string() const {
72     return str();
73 }
74
75 big_decimal operator -() const {
76     big_decimal o = *this;
77     if (a[0])
78         o.negative = true;
79
80     return o;
81 }
82
83 friend big_decimal abs(const big_decimal &u) {
84     big_decimal o = u;
85     o.negative = false;
86     return o;
87 }
88
89 big_decimal &operator <= (int k) {
90     a[0] += k;
91
92     for (int i = a[0]; i > k; i--)
93         a[i] = a[i - k];
94
95     for (int i = k; i; i--)
96         a[i] = 0;
97
98     return *this;
99 }
100
101 friend big_decimal operator << (const big_decimal
102     &u, int k) {
103     big_decimal o = u;
104     return o <<= k;
105 }
106
107 big_decimal &operator >= (int k) {
108     if (a[0] < k)
109         return *this = big_decimal(0);
110
111     a[0] -= k;
112     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
113         a[i] = a[i + k];
114
115     for (int i = a[0] + 1; i <= a[0] + k; i++)
116         a[i] = 0;
117
118     return *this;
119 }
120
121 friend big_decimal operator >> (const big_decimal
122     &u, int k) {
123     big_decimal o = u;
124     return o >>= k;
125 }
126
127 friend int cmp(const big_decimal &u, const
128     &big_decimal &v) {
129     if (u.negative || v.negative) {
130         if (u.negative && v.negative)
131             return -cmp(-u, -v);
132
133         if (u.negative)
134             return -1;
135
136         if (v.negative)
137             return 1;
138
139     if (u.a[0] != v.a[0])
140         return u.a[0] < v.a[0] ? -1 : 1;
141
142     for (int i = u.a[0]; i; i--)
143         if (u.a[i] != v.a[i])
144             return u.a[i] < v.a[i] ? -1 : 1;
145
146     return 0;
147 }
148
149 friend bool operator < (const big_decimal &u, const
150     &big_decimal &v) {
151     return cmp(u, v) == -1;
152 }
153
154 friend bool operator > (const big_decimal &u, const
155     &big_decimal &v) {
156     return cmp(u, v) == 1;
157 }
158
159 friend bool operator == (const big_decimal &u,
160     &const big_decimal &v) {
161     return cmp(u, v) == 0;
162 }
163
164 friend bool operator <= (const big_decimal &u,
165     &const big_decimal &v) {
166     return cmp(u, v) <= 0;
167 }
168
169 friend big_decimal decimal_plus(const big_decimal
170     &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数
171     big_decimal o;
172
173     o.a[0] = max(u.a[0], v.a[0]);

```

```

172     for (int i = 1; i <= u.a[0] || i <= v.a[0]; i++)
173         o.a[i] += u.a[i] + v.a[i];
174
175         if (o.a[i] >= 10) {
176             o.a[i + 1]++;
177             o.a[i] -= 10;
178         }
179     }
180
181     if (o.a[o.a[0] + 1])
182         o.a[0]++;
183
184     return o;
185 }
186
187 friend big_decimal decimal_minus(const big_decimal
188     &u, const big_decimal &v) { // 保证u, v均为正数
189     // 的话可以直接调用
190     int k = cmp(u, v);
191
192     if (k == -1)
193         return -decimal_minus(v, u);
194     else if (k == 0)
195         return big_decimal(0);
196
197     big_decimal o;
198
199     o.a[0] = u.a[0];
200
201     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++) {
202         o.a[i] += u.a[i] - v.a[i];
203
204         if (o.a[i] < 0) {
205             o.a[i] += 10;
206             o.a[i + 1]--;
207         }
208     }
209
210     while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
211         o.a[0]--;
212
213     return o;
214 }
215
216 friend big_decimal decimal_multi(const big_decimal
217     &u, const big_decimal &v) {
218     big_decimal o;
219
220     o.a[0] = u.a[0] + v.a[0] - 1;
221
222     for (int i = 1; i <= u.a[0]; i++)
223         for (int j = 1; j <= v.a[0]; j++)
224             o.a[i + j - 1] += u.a[i] * v.a[j];
225
226     for (int i = 1; i <= o.a[0]; i++)
227         if (o.a[i] >= 10) {
228             o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
229             o.a[i] %= 10;
230         }
231
232     if (o.a[o.a[0] + 1])
233         o.a[0]++;
234
235     return o;
236 }
237
238 friend pair<big_decimal, big_decimal>
239     decimal_divide(big_decimal u, big_decimal v) {
240     // 整除
241
242     big_decimal o;
243     o.a[0] = u.a[0] - v.a[0] + 1;
244
245     for (int i = u.a[0]; i >= m; i--) {
246         while (u >= v) {
247             u = u - v;
248             o.a[i - m + 1]++;
249         }
250
251         v >>= 1;
252     }
253
254     while (o.a[0] && !o.a[o.a[0]])
255         o.a[0]--;
256
257     return make_pair(o, u);
258 }
259
260 friend big_decimal operator + (const big_decimal
261     &u, const big_decimal &v) {
262     if (u.negative || v.negative) {
263         if (u.negative && v.negative)
264             return -decimal_plus(-u, -v);
265
266         if (u.negative)
267             return v - (-u);
268
269         if (v.negative)
270             return u - (-v);
271
272     return decimal_plus(u, v);
273 }
274
275 friend big_decimal operator - (const big_decimal
276     &u, const big_decimal &v) {
277     if (u.negative || v.negative) {
278         if (u.negative && v.negative)
279             return -decimal_minus(-u, -v);
280
281         if (u.negative)
282             return -decimal_plus(-u, v);
283
284         if (v.negative)
285             return decimal_plus(u, -v);
286
287     return decimal_minus(u, v);
288 }
289
290 friend big_decimal operator * (const big_decimal
291     &u, const big_decimal &v) {
292     if (u.negative || v.negative) {
293         big_decimal o = decimal_multi(abs(u),
294             abs(v));
295
296         if (u.negative ^ v.negative)
297             return -o;
298
299     return decimal_multi(u, v);
299 }
```

```

300 }
301
302 big_decimal operator * (long long x) const {
303     if (x >= 10)
304         return *this * big_decimal(x);
305
306     if (negative)
307         return -(*this * x);
308
309     big_decimal o;
310
311     o.a[0] = a[0];
312
313     for (int i = 1; i <= a[0]; i++)
314         o.a[i] += a[i] * x;
315
316     if (o.a[i] >= 10) {
317         o.a[i + 1] += o.a[i] / 10;
318         o.a[i] %= 10;
319     }
320 }
321
322 if (o.a[a[0] + 1])
323     o.a[0]++;
324
325     return o;
326 }
327
328 friend pair<big_decimal, big_decimal>
329     decimal_div(const big_decimal &u, const
330     big_decimal &v) {
331     if (u.negative || v.negative) {
332         pair<big_decimal, big_decimal> o =
333             decimal_div(abs(u), abs(v));
334
335         if (u.negative ^ v.negative)
336             return make_pair(-o.first, -o.second);
337         return o;
338     }
339
340     return decimal_divide(u, v);
341 }
342
343 friend big_decimal operator / (const big_decimal
344     &u, const big_decimal &v) { // v不能是0
345     if (u.negative || v.negative) {
346         big_decimal o = abs(u) / abs(v);
347
348         if (u.negative ^ v.negative)
349             return -o;
350         return o;
351     }
352
353     return decimal_divide(u, v).first;
354 }
355
356 friend big_decimal operator % (const big_decimal
357     &u, const big_decimal &v) {
358     if (u.negative || v.negative) {
359         big_decimal o = abs(u) % abs(v);
360
361         if (u.negative ^ v.negative)
362             return -o;
363         return o;
364     }
365
366     return decimal_divide(u, v).second;
367 }
368

```

## 8.5 笛卡尔树

```

1 int s[maxn], root, lc[maxn], rc[maxn];
2
3 int top = 0;
4 s[++top] = root = 1;
5 for (int i = 2; i <= n; i++) {
6     s[top + 1] = 0;
7     while (top && a[i] < a[s[top]]) // 小根笛卡尔树
8         top--;
9
10    if (top)
11        rc[s[top]] = i;
12    else
13        root = i;
14
15    lc[i] = s[top + 1];
16    s[++top] = i;
17 }

```

## 8.6 GarsiaWachs算法( $O(n \log n)$ 合并石子)

设序列是 $\{a_i\}$ , 从左往右, 找到一个最小的且满足 $a_{k-1} \leq a_{k+1}$ 的 $k$ , 找到后合并 $a_k$ 和 $a_{k-1}$ , 再从当前位置开始向左找最大的 $j$ 满足 $a_j \geq a_k + a_{k-1}$ (当然是指合并前的), 然后把 $a_k + a_{k-1}$ 插到 $j$ 的后面就行. 一直重复, 直到只剩下一堆石子就可以了.

另外在这个过程中, 可以假设 $a_1$ 和 $a_n$ 是正无穷的, 可省略边界的判别. 把 $a_0$ 设为INF,  $a_{n+1}$ 设为INF-1, 可实现剩余一堆石子时自动结束.

## 8.7 常用NTT素数及原根

$p = r \times 2^k + 1$	$r$	$k$	最小原根
104857601	25	22	3
167772161	5	25	3
469762049	7	26	3
985661441	235	22	3
<b>998244353</b>	119	23	3
<b>1004535809</b>	479	21	3
1005060097*	1917	19	5
2013265921	15	27	31
2281701377	17	27	3
31525197391593473	7	52	3
180143985094819841	5	55	6
1945555039024054273	27	56	5
4179340454199820289	29	57	3

\*注: 1005060097有点危险, 在变化长度大于 $524288 = 2^{19}$ 时不可用.

## 8.8 xorshift

```

1 ull k1, k2;
2 const int mod = 100000000;
3 ull xorShift128Plus() {
4     ull k3 = k1, k4 = k2;
5     k1 = k4;
6     k3 ^= (k3 << 23);
7     k2 = k3 ^ k4 ^ (k3 >> 17) ^ (k4 >> 26);
8     return k2 + k4;
9 }
10 void gen(ull _k1, ull _k2) {
11     k1 = _k1, k2 = _k2;
12     int x = xorShift128Plus() % threshold + 1;
13     // do sth
14 }

```

```

15
16
17 uint32_t xor128(void) {
18     static uint32_t x = 123456789;
19     static uint32_t y = 362436069;
20     static uint32_t z = 521288629;
21     static uint32_t w = 88675123;
22     uint32_t t;
23
24     t = x ^ (x << 11);
25     x = y; y = z; z = w;
26     return w = w ^ (w >> 19) ^ (t ^ (t >> 8));
27 }
```

## 8.9 枚举子集

(注意这是 $t \neq 0$ 的写法, 如果可以等于0需要在循环里手动break)

```

1 for (int t = s; t; (--t) &= s) {
2     // do something
3 }
```

## 8.10 STL

### 8.10.1 vector

- `vector(int nSize)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize
- `vector(int nSize, const T &value)`: 创建一个vector, 元素个数为nSize, 且值均为value
- `vector(begin, end)`: 复制[begin, end)区间内另一个数组的元素到vector中
- `void assign(int n, const T &x)`: 设置向量中前n个元素的值为x
- `void assign(const_iterator first, const_iterator last)`: 向量中[first, last)中元素设置成当前向量元素
- `void emplace_back(Args&& ... args)`: 自动构造并push\_back一个元素, 例如对一个存储pair的vector可以`v.emplace_back(x, y)`

### 8.10.2 list

- `assign()` 给list赋值
- `back()` 返回最后一个元素
- `begin()` 返回指向第一个元素的迭代器
- `clear()` 删除所有元素
- `empty()` 如果list是空的则返回true
- `end()` 返回末尾的迭代器
- `erase()` 删除一个元素
- `front()` 返回第一个元素
- `insert()` 插入一个元素到list中
- `max_size()` 返回list能容纳的最大元素数量
- `merge()` 合并两个list
- `pop_back()` 删除最后一个元素
- `pop_front()` 删除第一个元素
- `push_back()` 在list的末尾添加一个元素
- `push_front()` 在list的头部添加一个元素
- `rbegin()` 返回指向第一个元素的逆向迭代器
- `remove()` 从list删除元素
- `remove_if()` 按指定条件删除元素
- `rend()` 指向list末尾的逆向迭代器
- `resize()` 改变list的大小
- `reverse()` 把list的元素倒转
- `size()` 返回list中的元素个数
- `sort()` 给list排序
- `splice()` 合并两个list
- `swap()` 交换两个list
- `unique()` 删除list中重复的元

### 8.10.3 unordered\_set/map

- `unordered_map<int, int, hash>`: 自定义哈希函数, 其中hash是一个带重载括号的类.

## 8.11 Public Based DataStructure(PB\_DS)

### 8.11.1 哈希表

```

1 #include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include<ext/pb_ds/hash_policy.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 cc_hash_table<string, int> mp1; // 拉链法
6 gp_hash_table<string, int> mp2; // 查探法(快一些)
```

### 8.11.2 堆

默认也是大根堆, 和`std::priority_queue`保持一致.

```

1 #include<ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
2 using namespace __gnu_pbds;
3
4 __gnu_pbds::priority_queue<int> q;
5 __gnu_pbds::priority_queue<int, greater<int>,
   → pairing_heap_tag> pq;
```

效率参考:

- \* 共有五种操作: push、pop、modify、erase、join
- \* pairing\_heap\_tag: push和join为 $O(1)$ , 其余为均摊 $\Theta(\log n)$
- \* binary\_heap\_tag: 只支持push和pop, 均为均摊 $\Theta(\log n)$
- \* binomial\_heap\_tag: push为均摊 $O(1)$ , 其余为 $\Theta(\log n)$
- \* rc\_binomial\_heap\_tag: push为 $O(1)$ , 其余为 $\Theta(\log n)$
- \* thin\_heap\_tag: push为 $O(1)$ , 不支持join, 其余为 $\Theta(\log n)$ ; 果只有increase\_key, 那么modify为均摊 $O(1)$
- \* “不支持”不是不能用, 而是用起来很慢 [csdn.net/TRiddle](http://csdn.net/TRiddle)

常用操作:

- `push()`: 向堆中压入一个元素, 返回迭代器
- `pop()`: 将堆顶元素弹出
- `top()`: 返回堆顶元素
- `size()`: 返回元素个数
- `empty()`: 返回是否非空
- `modify(point_iterator, const key)`: 把迭代器位置的key修改为传入的key
- `erase(point_iterator)`: 把迭代器位置的键值从堆中删除
- `join(__gnu_pbds::priority_queue &other)`: 把other合并到\*`this`, 并把other清空

### 8.11.3 平衡树

```

1 #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
3 using namespace __gnu_pbds;
4
5 tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
   → tree_order_statistics_node_update> t;
6
7 // rb_tree_tag 红黑树(还有splay_tree_tag和ov_tree_tag,
   → 后者不知道是什么)
```

注意第五个参数要填`tree_order_statistics_node_update`才能使用排名操作.

- `insert(x)`: 向树中插入一个元素x, 返回`pair<point_iterator, bool>`
- `erase(x)`: 从树中删除一个元素/迭代器x, 返回一个`bool`表明是否删除成功
- `order_of_key(x)`: 返回x的排名, 0-based
- `find_by_order(x)`: 返回排名(0-based)所对应元素的迭代器
- `lower_bound(x) / upper_bound(x)`: 返回第一个 $\geq$ 或者 $>$ x的元素的迭代器
- `join(x)`: 将x并入当前树, 前提是两棵树的类型一样, 并且二者值域不能重叠, x树会被删除
- `split(x, b)`: 分裂成两部分, 小于等于x的属于当前树, 其余的属于b树
- `empty()`: 返回是否为空
- `size()`: 返回大小

(注意平衡树不支持多重值, 如果需要多重值, 可以再开一个`unordered_map`来记录值出现的次数, 将x`<<32`后加上出现的次数后插入. 注意此时应该为long long类型.)

## 8.12 rope

```

1 #include <ext/rope>
2 using namespace __gnu_cxx;
3
4 push_back(x); // 在末尾添加x
5 insert(pos, x); // 在pos插入x, 自然支持整个char数组的一
   ↪ 次插入
6 erase(pos, x); // 从pos开始删除x个, 不要只传一个参数, 有
   ↪ 毒
7 copy(pos, len, x); // 从pos开始到pos + len为止的部分, 赋
   ↪ 值给x
8 replace(pos, x); // 从pos开始换成x
9 substr(pos, x); // 提取pos开始x个
10 at(x) / [x]; // 访问第x个元素

```

## 8.13 其他C++相关

### 8.13.1 <cmath>

- `std::log1p(x)`: (注意是数字1)返回 $\ln(1 + x)$ 的值, x非常接近0时比直接`exp`精确得多.
- `std::hypot(x, y[, z])`: 返回平方和的平方根, 或者说到原点的欧几里得距离.

### 8.13.2 <algorithm>

- `std::all_of(begin, end, f)`: 检查范围内元素调用函数f后是否全返回真. 类似地还有`std::any_of`和`std::none_of`.
- `std::for_each(begin, end, f)`: 对范围内所有元素调用一次f. 如果传入的是引用, 也可以用f修改. (例如`for_each(a, a + n, [<int &x]{cout << ++x << "\n";})`)
- `std::for_each_n(begin, n, f)`: 同上, 只不过范围改成了从begin开始的n个元素.
- `std::copy()`, `std::copy_n()`: 用法谁都会, 但标准里说如果元素是可平凡复制的(比如int), 那么它会避免批量赋值, 并且调用`std::memmove()`之类的快速复制函数. (一句话总结: 它跑得快)
- `std::rotate(begin, mid, end)`: 循环移动, 移动后mid位置的元素会跑到first位置. C++11起会返回begin位置的元素移动后的位置.
- `std::unique(begin, end)`: 去重, 返回去重后的end.
- `std::partition(begin, end, f)`: 把f为true的放在前面, false的放在后面, 返回值是第二部分的开头, 不保持相对顺序. 如果要保留相对顺序可以用`std::stable_partition()`, 比如写整体二分.

- `std::partition_copy(begin, end, begin_t, begin_f, f)`: 不修改原数组, 把true的扔到begin\_t, false的扔到begin\_f. 返回值是两部分结尾的迭代器的pair.
- `std::equal_range(begin, end, x)`: 在已经排好序的数组里找到等于x的范围.
- `std::minmax(a, b)`: 返回`pair(min(a, b), max(a, b))`. 比如`tie(l, r) = minmax(l, r)`.

### 8.13.3 std::tuple

- `std::make_tuple(...)`: 返回构造好的tuple
- `std::get<i>(tup)`: 返回tuple的第i项
- `std::tuple_cat(...)`: 传入几个tuple, 返回按顺序连起来的tuple
- `std::tie(x, y, z, ...)`: 把传入的变量的左值引用绑起来作为tuple返回, 例如可以`std::tie(x, y, z) = std::make_tuple(a, b, c)`.

### 8.13.4 <complex>

- `complex<double> imaginary = 1i, x = 2 + 3i`: 可以这样直接构造复数.
- `real/imag(x)`: 返回实部/虚部.
- `conj(x)`: 返回共轭复数.
- `arg(x)`: 返回辐角.
- `norm(x)`: 返回模的平方. (直接求模用`abs(x)`.)
- `polar(len, theta)`: 用绝对值和辐角构造复数.

## 8.14 一些游戏

### 8.14.1 炉石传说

两个随从 $(a_i, h_i)$ 和 $(a_j, h_j)$ 皇城PK, 最后只有 $a_i \times h_i$ 较大的一方才有可能活下来, 当然也有可能一起死.

## 8.15 OEIS

如果没有特殊说明, 那么以下数列都从第0项开始, 除非没有定义也没有好的办法解释第0项的意义.

### 8.15.1 计数相关

#### 1. 卡特兰数(A000108)

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, ...  
性质见1.9.7.卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数(16页).

#### 2. (大)施罗德数(A006318)

1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, 206098, 1037718, 5293446, 27297738, 142078746, 745387038, ... (0-based)  
性质同样见1.9.7.卡特兰数, 施罗德数, 默慈金数(16页).

#### 3. 小施罗德数(A001003)

1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, 103049, 518859, 2646723, 13648869, 71039373, 372693519, ... (0-based)  
性质位置同上.  
小施罗德数除了第0项以外都是施罗德数的一半.

#### 4. 默慈金数(Motzkin numbers, A001006)

1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, 2356779, ... (0-based)  
性质位置同上.

#### 5. 将点按顺序排成一圈后不自交的树的个数(A001764)

1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, 43263, 246675, 1430715, 8414640, 50067108, 300830572, 1822766520, ... (0-based)  
 $a_n = \frac{\binom{3n}{n}}{2^{n+1}}$

也就是说, 在圆上按顺序排列的n个点之间连n - 1条不相交(除端点外)的弦, 组成一棵树的方案数.

也等于每次只能向右或向上，并且不能高于 $y = 2x$ 这条直线，从 $(0, 0)$ 走到 $(n, 2n)$ 的方案数.

扩展：如果改成不能高于 $y = kx$ 这条直线，走到 $(n, kn)$ 的方案数，那么答案就是 $\frac{\binom{(k+1)n}{n}}{kn+1}$ .

### 6. $n$ 个点的圆上画不相交的弦的方案数(A054726)

1, 1, 2, 8, 48, 352, 2880, 25216, 231168, 2190848, 21292032, 211044352, 2125246464, 21681954816, ... (0-based)

$a_n = 2^n s_{n-2}$  ( $n > 2$ )， $s_n$ 是上面的小施罗德数.

和上面的区别在于，这里可以不连满 $n - 1$ 条边. 另外默慈金数画的弦不能共享端点，但是这里可以.

### 7. Wedderburn-Etherington numbers(A001190)

0, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 46, 98, 207, 451, 983, 2179, 4850, 10905, 24631, 56011, 127912, 293547, ... (0-based)

每个结点都有0或者2个儿子，且总共有 $n$ 个叶子结点的二叉树方案数. (无标号)

同时也是 $n - 1$ 个结点的无标号二叉树个数.

$$A(x) = x + \frac{A(x)^2 + A(x^2)}{2} = 1 - \sqrt{1 - 2x - A(x^2)}$$

### 8. 划分数(A000041)

1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, 792, 1002, ... (0-based)

### 9. 贝尔数(A000110)

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, ... (0-based)

### 10. 错位排列数(A0000166)

1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, ... (0-based)

### 11. 交替阶乘(A005165)

0, 1, 1, 5, 19, 101, 619, 4421, 35899, 326981, 3301819, 36614981, 442386619, 5784634181, 81393657019, ...

$$n! - (n-1)! + (n-2)! - \dots 1! = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i)!$$

$$a_0 = 0, a_n = n! - a_{n-1}.$$

## 8.15.2 线性递推数列

### 1. Lucas数(A000032)

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, ...

### 2. 斐波那契数(A000045)

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ...

### 3. 泰波那契数(Tribonacci, A000071)

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, ...

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

### 4. Pell数(A0000129)

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, 1136689, ...

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

### 5. 帕多万(Padovan)数(A0000931)

1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833, 31572, ...

$$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0, a_n = a_{n-2} + a_{n-3}.$$

### 6. Jacobsthal numbers(A001045)

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, 87381, 174763, ...

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

同时也是最接近 $\frac{2^n}{3}$ 的整数.

### 7. 佩林数(A001608)

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853, ...

$$a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2, a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$$

## 8.15.3 数论相关

### 1. Carmichael数, 伪质数(A002997)

561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973, 75361, 101101, 115921, 126217, 162401, 172081, 188461, 252601, 278545, 294409, 314821, 334153, 340561, 399001, 410041, 449065, 488881, 512461, ...

满足 $\forall$ 与 $n$ 互质的 $a$ ，都有 $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 的所有合数 $n$ 被称为Carmichael数.

Carmichael数在 $10^8$ 以内只有255个.

### 2. 反质数(A002182)

1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 7560, 10080, 15120, 20160, 25200, 27720, 45360, 50400, 55440, 83160, 110880, 166320, 221760, 277200, 332640, 498960, 554400, 665280, 720720, 1081080, 1441440, 2162160, ...

比所有更小的数的约数数量都更多的数.

### 3. 前 $n$ 个质数的乘积(A002110)

1, 2, 6, 30, 210, 2310, 30030, 510510, 9699690, 223092870, 6469693230, 200560490130, 7420738134810, ...

### 4. 梅森素数(A000668)

3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, 2305843009213693951, 618970019642690137449562111, 162259276829213363391578010288127, 170141183460469231731687303715884105727

$p$ 是质数，同时 $2^p - 1$ 也是质数.

## 8.15.4 其他

### 1. 伯努利数(A027641)

见1.9.2.伯努利数, 自然数幂次和(15页).

### 2. 四个柱子的汉诺塔(A007664)

0, 1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, 41, 49, 65, 81, 97, 113, 129, 161, 193, 225, 257, 289, 321, 385, 449, ...

差分之后可以发现其实就是1次+1, 2次+2, 3次+4, 4次+8...的规律.

### 3. 乌拉姆数(Ulam numbers, A002858)

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, 72, 77, 82, 87, 97, 99, 102, 106, 114, 126, 131, 138, 145, 148, 155, 175, 177, 180, 182, 189, 197, 206, 209, 219, 221, 236, 238, 241, 243, 253, 258, 260, 273, 282, 309, 316, 319, 324, 339 ...

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n$ 表示在所有 $> a_{n-1}$ 的数中，最小的，能被表示成(前面的两个不同的元素的和)的数.

## 8.16 编译选项

- `-O2 -g -std=c++17`: 狗都知道
- `-Wall -Wextra -Wshadow -Wconversion`: 更多警告  
– `-Werror`: 强制将所有Warning变成Error
- `-fsanitize=(address/undefined)`: 检查有符号整数溢出(算ub)/数组越界  
– 注意无符号类型溢出不算ub.
- `-fno-ms-extensions`: 关闭一些和msvc保持一致的特性，例如，不标返回值类型的函数会报CE而不是默认为`int`.  
– 但是不写return的话它还是管不了.

## 8.17 注意事项

### 8.17.1 常见下毒手法

- 0/1base是不是搞混了
- 高精度高低位搞反了吗
- 线性筛抄对了吗
- 快速乘抄对了吗
- $i \leq n, j \leq m$
- sort比较函数是不是比了个寂寞
- 该取模的地方都取模了吗
- 边界情况(+1-1之类的)有没有想清楚
- 特判是否有必要, 确定写对了吗

### 8.17.2 场外相关

- 安顿好之后查一下附近的咖啡店, 打印店, 便利店之类的位置, 以备不时之需
- 热身赛记得检查一下编译注意事项中的代码能否过编译, 还有熟悉比赛场地, 清楚洗手间在哪儿, 测试打印机(如果可以)
- 比赛前至少要翻一遍板子, 尤其要看原理与例题
- 比赛前一两天不要摸鱼, 要早睡, 有条件最好洗个澡; 比赛当天不要起太晚, 维持好的状态
- 赛前记得买咖啡, 最好直接安排三人份, 记得要咖啡因比较足的; 如果主办方允许, 就带些巧克力之类的高热量零食
- 入场之后记得检查机器, 尤其要逐个检查键盘按键有没有坏的; 如果可以的话, 调一下gedit设置
- 开赛之前调整好心态, 比赛而已, 不必心急.

### 8.17.3 做题策略与心态调节

- 拿到题后立刻按照商量好的顺序读题, 前半小时最好跳过题意太复杂的题(除非被过穿了)
- 签到题写完不要激动, 稍微检查一下最可能的下毒点再交, 避免无谓的罚时

一两行的那种傻逼题就算了

- 读完题及时输出题意, 一方面避免重复读题, 一方面也可以让队友有一个初步印象, 方便之后决定开题顺序
- 如果不能确定题意就不要贸然输出甚至上机, 尤其是签到题, 因为样例一般都很弱
- 一个题如果卡了很久又有其他题可以写, 那不妨先放掉写更容易的题, 不要在一棵树上吊死

不要被一两道题搞得心态爆炸, 一方面急也没有意义, 一方面你很可能真的离AC就差一步

- 榜是不会骗人的, 一个题如果被不少人过了就说明这个题很可能并没有那么难; 如果不是有十足的把握就不要轻易开没什么人交的题; 另外不要忘记最后一小时会封榜

想不出题/找不出毒自然容易犯困, 一定不要放任自己昏昏欲睡, 最好去洗手间冷静一下, 没有条件的站起来踱步

- 思考的时候不要挂机, 一定要在草稿纸上画一画, 最好说出声来最容易断掉思路

出完算法一定要check一下样例和一些trivial的情况, 不然容易写了半天发现写了个假算法

- 上机前有时间就提前给需要思考怎么写的地方打草稿, 不要浪费机时

查毒时如果最难的地方反复check也没有问题, 就从头到脚仔仔细查一遍, 不要放过任何细节, 即使是并查集和sort这种东西也不能想当然

- 后半场如果时间不充裕就不要冒险开难题, 除非真的无事可做

如果是没写过的东西也不要轻举妄动, 在有其他好写的题的时候就等一会再说

- 大多数时候都要听队长安排, 虽然不一定最正确但可以保持组织性

任何时候都不要着急, 着急不能解决问题, 不要当皓国王

- 输了游戏, 还有人生; 赢了游戏, 还有人生.

## 8.18 附录: VScode相关

### 8.18.1 插件

- Chinese (Simplified) (简体中文语言包)
- C/C++
- C++ Intellisense (前提是让用)
- Better C++ Syntax
- Python
- Pylance (前提是让用)
- Rainbow Brackets (前提是让用)

### 8.18.2 设置选项

- Editor: Insert Spaces (取消勾选, 改为tab缩进)
- Editor: Line Warp (开启折行)
- 改配色, “深色+: 默认深色”
- 自动保存(F1 → “auto”)
- Terminal → Integrated: Cursor Style (修改终端光标形状)
- Terminal → Integrated: Cursor Blinking (终端光标闪烁)
- 字体改为Cascadia Code/Mono SemiLight (Windows可用)

### 8.18.3 快捷键

- F1 / Ctrl+Shift+P: 万能键, 打开命令面板
- F8: 下一个Error Shift+F8: 上一个Error
- Ctrl+\: 水平分栏, 最多3栏
- Ctrl+1/2/3: 切到对应栏
- Ctrl+[/]: 当前行向左/右缩进
- Alt+F12: 查看定义的缩略图(显示小窗, 不跳过去)
- Ctrl+H: 查找替换
- Ctrl+D: 下一个匹配的也被选中(用于配合Ctrl+F)
- Ctrl+U: 回退上一个光标操作(防止光标飞了找不回去)
- Ctrl+/: 切换行注释
- Ctrl+‘(键盘左上角的倒引号): 显示终端

## 8.19 附录：骂人的艺术—梁实秋

古今中外没有一个不骂人的人。骂人就是有道德观念的意思，因为在骂人的时候，至少在骂人者自己总觉得那人有该骂的地方。何者该骂，何者不该骂，这个抉择的标准，是极道德的。所以根本不骂人，大可不必。骂人是一种发泄感情的方法，尤其是那一种怒怒的感情。想骂人的时候而不骂，时常在身体上弄出毛病，所以想骂人时，骂骂何妨？

但是，骂人是一种高深的学问，不是人人都可以随便试的。有因为骂人挨嘴巴的，有因为骂人吃官司的，有因为骂人反被人骂的，这都是不会骂人的原故。今以研究所得，公诸同好，或可为骂人时之助乎？

### 1. 知己知彼

骂人是和动手打架一样的，你如其敢打人一拳，你先要自己忖度下，你吃得起别人的一拳否。这叫做知己知彼。骂人也是一样。譬如你骂他是“屈死”，你先要反省，自己和“屈死”有无分别。你骂别人荒唐，你自己想想曾否吃喝嫖赌。否则别人回敬你一二句，你就受不了。所以别人有着某种短处，而足下也正有同病，那么你在骂他的时候只得割爱。

### 2. 无骂不如己者

要骂人须要挑比你大一点的人物，比你漂亮一点的或者比你坏得万倍而比你得势的人物，总之，你要骂人，那人无论在好的一方面或坏的一方面都要能胜过你，你才不吃亏。你骂大人物，就怕他不理你，他一回骂，你就算骂着了。因为身份相同的人才肯对骂。在坏的一方面胜过你的，你骂他就如教训一般，他既便回骂，一般人仍不会理会他的。假如你骂一个无关痛痒的人，你越骂他越得意，时常可以把一个无名小卒骂出名了，你看冤与不冤？

### 3. 适可而止

骂大人物骂到他回骂的时候，便不可再骂；再骂则一般人对你必无同情，以为你是无理取闹。骂小人物骂到他不能回骂的时候，便不可再骂；再骂下去则一般人对你也必无同情，以为你是欺负弱者。

### 4. 旁敲侧击

他偷东西，你骂他是贼；他抢东西，你骂他是盗，这是笨伯。骂人必须先明虚实掩映之法，须要烘托旁衬，旁敲侧击，于要紧处只一语便得，所谓杀人于咽喉处着刀。越要骂他你越要原谅他，即便说些恭维话亦不为过，这样的骂法才能显得你所骂的句句是真实确凿，让旁人看起来也可见得你的度量。

### 5. 态度镇定

骂人最忌浮躁。一语不合，面红筋跳，暴躁如雷，此灌夫骂座，泼妇骂街之术，不足以言骂人。善骂者必须态度镇静，行若无事。普通一般骂人，谁的声音高便算谁占理，谁的来势猛便算谁骂赢，惟真善骂人者，乃能避其锋而击其懈。你等他骂得疲倦的时候，你只消轻轻的回敬他一句，让他再狂吼一阵。在他暴躁不堪的时候，你不妨对他冷笑几声，包管你不费力气，把他气得死去活来，骂得他针针见血。

### 6. 出言典雅

骂人要骂得微妙含蓄，你骂他一句要使他不甚觉得是骂，等到想

过一遍才慢慢觉悟这句话不是好话，让他笑着的面孔由白而红，由红而紫，由紫而灰，这才是骂人的上乘。欲达到此种目的，深刻之用意固不可少，而典雅之言词则尤为重要。言词典雅可使听者不致刺耳。如要骂人骂得典雅，则首先要在骂时万万别提起女人身上的某一部分，万万不要涉及生理学范围。骂人一骂到生理学范围以内，底下再有什么话都不好说了。譬如你骂某甲，千万别提起他的令堂令妹。因为那样一来，便无是非可言，并且你自己也不免有令堂令妹，他若回敬起来，岂非势均力敌，半斤八两？再者骂人的时候，最好不要加人以种种难堪的名词，称呼起来总要客气，即使他是极卑鄙的小人，你也不妨称他先生，越客气，越骂得有力量。骂得时节最好引用他自己的词句，这不但可以使他难堪，还可以减轻他对你骂的力量。俗话少用，因为俗话一览无遗，不若典雅古文曲折含蓄。

### 7. 以退为进

两人对骂，而自己亦有理屈之处，则处于开骂伊始，特宜注意，最好是毅然将自己理屈之处完全承认下来，即使道歉认错均不妨事。先把自己理屈之处轻轻遮掩过去，然后你再重整旗鼓，着着逼人，方可无后顾之忧。即使自己没有理屈的地方，也绝不可自行夸张，务必要谦逊不遑，把自己的位置降到一个不可再降的位置，然后骂起人来，自有一种公正光明的态度。否则你骂他一两句，他便以你个人的事反唇相讥，一场对骂，会变成两人私下口角，是非曲直，无从判断。所以骂人者自己要低声下气，此所谓以退为进。

### 8. 预设埋伏

你把这句话骂过去，你便要想看，他将用什么话骂回来。有眼光的骂人者，便处处留神，或是先将他要骂你的话替他说出来，或是预先安设埋伏，令他骂回来的话失去效力。他骂你的话，你替他说出来，这便等于缴了他的械一般。预设埋伏，便是在要攻击你的地方，你先轻轻的安下话根，然后他骂过来就等于枪弹打在沙包上，不能中伤。

### 9. 小题大做

如对方有该骂之处，而题目身小，不值一骂，或你所知不多，不足一骂，那时你便可用小题大做的方法，来扩大题目。先用诚恳而怀疑的态度引申对方的意思，由不紧要之点引到大题目上去，处处用严谨的逻辑逼他说出不逻辑的话来，或是逼他说出合于逻辑但不合乎理的话来，然后你再大举骂他，骂到体无完肤为止，而原来惹动你的小题目，轻轻一提便了。

### 10. 远交近攻

一个时候，只能骂一个人，或一种人，或一派人。决不宜多树敌。所以骂人的时候，万勿连累旁人，即使必须牵涉多人，你也要表示好意，否则回骂之声纷至沓来，使你无从应付。

骂人的艺术，一时所能想起来的有上面十条，信手拈来，并无条理。我做此文的用意，是助人骂人。同时也是想把骂人的技术揭破一点，供爱骂人者参考。挨骂的人看看，骂人的心理原来是这样的，也算是揭破一张黑幕给你瞧瞧！

## 8.20 附录：Cheat Sheet

见最后几页。

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Definitions		Series
$f(n) = O(g(n))$	iff $\exists$ positive $c, n_0$ such that $0 \leq f(n) \leq cg(n) \forall n \geq n_0$ .	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ . In general: $\sum_{i=1}^n i^m = \frac{1}{m+1} \left[ (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{i=1}^n ((i+1)^{m+1} - i^{m+1} - (m+1)i^m) \right]$ $\sum_{i=1}^{n-1} i^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.$
$f(n) = \Omega(g(n))$	iff $\exists$ positive $c, n_0$ such that $f(n) \geq cg(n) \geq 0 \forall n \geq n_0$ .	
$f(n) = \Theta(g(n))$	iff $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \Omega(g(n))$ .	
$f(n) = o(g(n))$	iff $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$ .	
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	iff $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ such that $ a_n - a  < \epsilon, \forall n \geq n_0$ .	
$\sup S$	least $b \in \mathbb{R}$ such that $b \geq s, \forall s \in S$ .	Geometric series: $\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}, \quad c \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1 - c}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1 - c}, \quad  c  < 1,$ $\sum_{i=0}^n i c^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(c-1)^2}, \quad c \neq 1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} i c^i = \frac{c}{(1-c)^2}, \quad  c  < 1.$
$\inf S$	greatest $b \in \mathbb{R}$ such that $b \leq s, \forall s \in S$ .	
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_i \mid i \geq n, i \in \mathbb{N}\}$ .	Harmonic series: $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad \sum_{i=1}^n i H_i = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_i \mid i \geq n, i \in \mathbb{N}\}$ .	$\sum_{i=1}^n H_i = (n+1)H_n - n, \quad \sum_{i=1}^n \binom{i}{m} H_i = \binom{n+1}{m+1} \left( H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right).$
$\binom{n}{k}$	Combinations: Size $k$ subsets of a size $n$ set.	
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	Stirling numbers (1st kind): Arrangements of an $n$ element set into $k$ cycles.	1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad 3. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$	Stirling numbers (2nd kind): Partitions of an $n$ element set into $k$ non-empty sets.	4. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad 5. \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$
$\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$	1st order Eulerian numbers: Permutations $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ on $\{1, 2, \dots, n\}$ with $k$ ascents.	6. $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}, \quad 7. \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n},$
$\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$	2nd order Eulerian numbers.	8. $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad 9. \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n},$
$C_n$	Catalan Numbers: Binary trees with $n+1$ vertices.	10. $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}, \quad 11. \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1,$
14. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$	15. $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!H_{n-1},$	12. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad 13. \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\},$
18. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix},$	19. $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2},$	16. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad 17. \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\},$
22. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1,$	23. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n-1-k \end{smallmatrix} \right\rangle,$	20. $\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!, \quad 21. C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$
25. $\left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } k=0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	26. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = 2^n - n - 1,$	24. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (n-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$
28. $x^n = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{x+k}{n},$	29. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^m \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n (-1)^k,$	27. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\rangle = 3^n - (n+1)2^n + \binom{n+1}{2},$
31. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \binom{n-k}{m} (-1)^{n-k-m} k!,$	32. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\rangle = 1,$	30. $m! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{k}{n-m},$
34. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = (k+1) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle + (2n-1-k) \left\langle \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rangle,$		33. $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{for } n \neq 0,$
36. $\left\{ \begin{smallmatrix} x \\ x-n \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \binom{x+n-1-k}{2n},$	37. $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix} \right\} (m+1)^{n-k},$	35. $\sum_{k=0}^n \left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle = \frac{(2n)^n}{2^n},$

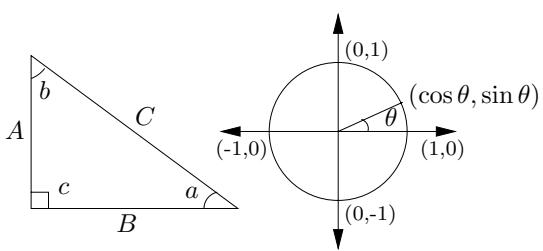
Theoretical Computer Science Cheat Sheet		
Identities Cont.		Trees
38. $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} n^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ ,	39. $\begin{bmatrix} x \\ x-n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \binom{x+k}{2n}$ ,	Every tree with $n$ vertices has $n-1$ edges.
40. $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}$ ,	41. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$ ,	Kraft inequality: If the depths of the leaves of a binary tree are $d_1, \dots, d_n$ : $\sum_{i=1}^n 2^{-d_i} \leq 1,$
42. $\begin{Bmatrix} m+n+1 \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^m k \begin{Bmatrix} n+k \\ k \end{Bmatrix}$ ,	43. $\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^m k(n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}$ ,	and equality holds only if every internal node has 2 sons.
44. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$ ,	45. $(n-m)! \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{m-k}$ , for $n \geq m$ ,	
46. $\begin{Bmatrix} n \\ n-m \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} m-n \\ m+k \end{bmatrix} \binom{m+n}{n+k} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}$ ,	47. $\begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} m-n \\ m+k \end{bmatrix} \binom{m+n}{n+k} \begin{Bmatrix} m+k \\ k \end{Bmatrix}$ ,	
48. $\begin{Bmatrix} n \\ \ell+m \end{Bmatrix} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \begin{Bmatrix} k \\ \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n-k \\ m \end{Bmatrix} \binom{n}{k}$ ,	49. $\begin{bmatrix} n \\ \ell+m \end{bmatrix} \binom{\ell+m}{\ell} = \sum_k \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-k \\ m \end{bmatrix} \binom{n}{k}$ .	
Recurrences		
<p>Master method:  <math>T(n) = aT(n/b) + f(n)</math>, <math>a \geq 1, b &gt; 1</math></p> <p>If <math>\exists \epsilon &gt; 0</math> such that <math>f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})</math> then  <math>T(n) = \Theta(n^{\log_b a})</math>.</p> <p>If <math>f(n) = \Theta(n^{\log_b a})</math> then  <math>T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)</math>.</p> <p>If <math>\exists \epsilon &gt; 0</math> such that <math>f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})</math>, and <math>\exists c &lt; 1</math> such that <math>af(n/b) \leq cf(n)</math> for large <math>n</math>, then  <math>T(n) = \Theta(f(n))</math>.</p> <p>Substitution (example): Consider the following recurrence  <math>T_{i+1} = 2^{2^i} \cdot T_i^2</math>, <math>T_1 = 2</math>.</p> <p>Note that <math>T_i</math> is always a power of two. Let <math>t_i = \log_2 T_i</math>. Then we have  <math>t_{i+1} = 2^i + 2t_i</math>, <math>t_1 = 1</math>.</p> <p>Let <math>u_i = t_i/2^i</math>. Dividing both sides of the previous equation by <math>2^{i+1}</math> we get  <math>\frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} = \frac{2^i}{2^{i+1}} + \frac{t_i}{2^i}</math>.</p> <p>Substituting we find  <math>u_{i+1} = \frac{1}{2} + u_i</math>, <math>u_1 = \frac{1}{2}</math>,</p> <p>which is simply <math>u_i = i/2</math>. So we find that <math>T_i</math> has the closed form <math>T_i = 2^{i2^{i-1}}</math>.</p> <p>Summing factors (example): Consider the following recurrence  <math>T(n) = 3T(n/2) + n</math>, <math>T(1) = 1</math>.</p> <p>Rewrite so that all terms involving <math>T</math> are on the left side  <math>T(n) - 3T(n/2) = n</math>.</p> <p>Now expand the recurrence, and choose a factor which makes the left side “telescope”</p>	$1(T(n) - 3T(n/2) = n)$ $3(T(n/2) - 3T(n/4) = n/2)$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $3^{\log_2 n-1}(T(2) - 3T(1) = 2)$ <p>Let <math>m = \log_2 n</math>. Summing the left side we get <math>T(n) - 3^m T(1) = T(n) - 3^m = T(n) - n^k</math> where <math>k = \log_2 3 \approx 1.58496</math>. Summing the right side we get</p> $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{n}{2^i} 3^i = n \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i.$ <p>Let <math>c = \frac{3}{2}</math>. Then we have</p> $\begin{aligned} n \sum_{i=0}^{m-1} c^i &= n \left( \frac{c^m - 1}{c - 1} \right) \\ &= 2n(c^{\log_2 n} - 1) \\ &= 2n(c^{(k-1)\log_c n} - 1) \\ &= 2n^k - 2n, \end{aligned}$ <p>and so <math>T(n) = 3n^k - 2n</math>. Full history recurrences can often be changed to limited history ones (example): Consider</p> $T_i = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} T_j, \quad T_0 = 1.$ <p>Note that</p> $T_{i+1} = 1 + \sum_{j=0}^i T_j.$ <p>Subtracting we find</p> $\begin{aligned} T_{i+1} - T_i &= 1 + \sum_{j=0}^i T_j - 1 - \sum_{j=0}^{i-1} T_j \\ &= T_i. \end{aligned}$ <p>And so <math>T_{i+1} = 2T_i = 2^{i+1}</math>.</p>	<p>Generating functions:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Multiply both sides of the equation by <math>x^i</math>.</li> <li>Sum both sides over all <math>i</math> for which the equation is valid.</li> <li>Choose a generating function <math>G(x)</math>. Usually <math>G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i g_i</math>.</li> <li>Rewrite the equation in terms of the generating function <math>G(x)</math>.</li> <li>Solve for <math>G(x)</math>.</li> <li>The coefficient of <math>x^i</math> in <math>G(x)</math> is <math>g_i</math>.</li> </ol> <p>Example:  <math>g_{i+1} = 2g_i + 1</math>, <math>g_0 = 0</math>.</p> <p>Multiply and sum:  <math display="block">\sum_{i \geq 0} g_{i+1} x^i = \sum_{i \geq 0} 2g_i x^i + \sum_{i \geq 0} x^i.</math></p> <p>We choose <math>G(x) = \sum_{i \geq 0} x^i g_i</math>. Rewrite in terms of <math>G(x)</math>:</p> $\frac{G(x) - g_0}{x} = 2G(x) + \sum_{i \geq 0} x^i.$ <p>Simplify:  <math display="block">\frac{G(x)}{x} = 2G(x) + \frac{1}{1-x}.</math></p> <p>Solve for <math>G(x)</math>:</p> $G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$ <p>Expand this using partial fractions:</p> $\begin{aligned} G(x) &= x \left( \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right) \\ &= x \left( 2 \sum_{i \geq 0} 2^i x^i - \sum_{i \geq 0} x^i \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} (2^{i+1} - 1)x^{i+1}. \end{aligned}$ <p>So <math>g_i = 2^i - 1</math>.</p>

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

$\pi \approx 3.14159, e \approx 2.71828, \gamma \approx 0.57721, \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803, \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -.61803$				
$i$	$2^i$	$p_i$	General	Probability
1	2	2	Bernoulli Numbers ( $B_i = 0$ , odd $i \neq 1$ ): $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30},$ $B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$	Continuous distributions: If $\Pr[a < X < b] = \int_a^b p(x) dx,$ then $p$ is the probability density function of $X$ . If $\Pr[X < a] = P(a),$
2	4	3		then $P$ is the distribution function of $X$ . If $P$ and $p$ both exist then $P(a) = \int_{-\infty}^a p(x) dx.$
3	8	5	Change of base, quadratic formula: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$	Expectation: If $X$ is discrete $E[g(X)] = \sum_x g(x) \Pr[X = x].$
4	16	7	Euler's number $e$ :	If $X$ continuous then $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP(x).$
5	32	11	$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$	Variance, standard deviation: $\text{VAR}[X] = E[X^2] - E[X]^2,$ $\sigma = \sqrt{\text{VAR}[X]}.$
6	64	13	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$	For events $A$ and $B$ : $\Pr[A \vee B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \wedge B]$
7	128	17	$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$	$\Pr[A \wedge B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B],$ iff $A$ and $B$ are independent.
8	256	19	$(1 + \frac{1}{n})^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} - O\left(\frac{1}{n^3}\right).$	$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \wedge B]}{\Pr[B]}$
9	512	23	Harmonic numbers: $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \dots$	For random variables $X$ and $Y$ : $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y],$ if $X$ and $Y$ are independent.
10	1,024	29		$E[X + Y] = E[X] + E[Y],$ $E[cX] = cE[X].$
11	2,048	31		Bayes' theorem:
12	4,096	37		$\Pr[A_i B] = \frac{\Pr[B A_i] \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[A_j] \Pr[B A_j]}.$
13	8,192	41		Inclusion-exclusion:
14	16,384	43		$\Pr\left[\bigvee_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[X_i] + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \Pr\left[\bigwedge_{j=1}^k X_{i_j}\right].$
15	32,768	47		Moment inequalities:
16	65,536	53	$\ln n < H_n < \ln n + 1,$	$\Pr[ X  \geq \lambda E[X]] \leq \frac{1}{\lambda},$
17	131,072	59	$H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$	$\Pr[ X - E[X]  \geq \lambda \cdot \sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$
18	262,144	61	Factorial, Stirling's approximation: $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, \dots$	Geometric distribution: $\Pr[X = k] = pq^{k-1}, \quad q = 1 - p,$
19	524,288	67		$E[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$
20	1,048,576	71		
21	2,097,152	73		
22	4,194,304	79		
23	8,388,608	83		
24	16,777,216	89	Ackermann's function and inverse: $a(i, j) = \begin{cases} 2^j & i = 1 \\ a(i-1, 2) & j = 1 \\ a(i-1, a(i, j-1)) & i, j \geq 2 \end{cases}$	
25	33,554,432	97		
26	67,108,864	101		
27	134,217,728	103	$\alpha(i) = \min\{j \mid a(j, j) \geq i\}.$	
28	268,435,456	107	Binomial distribution: $\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p,$	
29	536,870,912	109	$E[X] = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$	
30	1,073,741,824	113	Poisson distribution: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad E[X] = \lambda.$	
31	2,147,483,648	127	Normal (Gaussian) distribution: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad E[X] = \mu.$	
32	4,294,967,296	131	The "coupon collector": We are given a random coupon each day, and there are $n$ different types of coupons. The distribution of coupons is uniform. The expected number of days to pass before we collect all $n$ types is $nH_n.$	
Pascal's Triangle				
	1			
	1 1			
	1 2 1			
	1 3 3 1			
	1 4 6 4 1			
	1 5 10 10 5 1			
	1 6 15 20 15 6 1			
	1 7 21 35 35 21 7 1			
	1 8 28 56 70 56 28 8 1			
	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1			
	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1			

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

### Trigonometry



Pythagorean theorem:

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

Definitions:

$$\sin a = A/C, \quad \cos a = B/C,$$

$$\csc a = C/A, \quad \sec a = C/B,$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{A}{B}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{B}{A}.$$

Area, radius of inscribed circle:

$$\frac{1}{2}AB, \quad \frac{AB}{A+B+C}.$$

Identities:

$$\sin x = \frac{1}{\csc x},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x},$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x,$$

$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$\sin x = \sin(\pi - x),$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x),$$

$$\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x),$$

$$\cot x = -\cot(\pi - x),$$

$$\csc x = \cot \frac{x}{2} - \cot x,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y},$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y},$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x},$$

$$\sin(x+y) \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y,$$

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

Euler's equation:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{i\pi} = -1.$$

### Matrices

Multiplication:

$$C = A \cdot B, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Determinants:  $\det A \neq 0$  iff  $A$  is non-singular.

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B,$$

$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n \text{sign}(\pi) a_{i,\pi(i)}.$$

$2 \times 2$  and  $3 \times 3$  determinant:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd.$$

Permanents:

$$\text{perm } A = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}.$$

### Hyperbolic Functions

Definitions:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x}.$$

Identities:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1,$$

$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1, \quad \sinh(-x) = -\sinh x,$$

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x},$$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2 \sinh^2 \frac{x}{2} = \cosh x - 1, \quad 2 \cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1.$$

$$\begin{array}{cccc} \theta & \sin \theta & \cos \theta & \tan \theta \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{array}$$

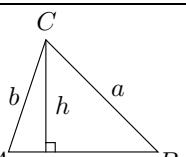
$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{2} & 1 & 0 & \infty \end{array}$$

... in mathematics you don't understand things, you just get used to them.

– J. von Neumann

### More Trig.



Law of cosines:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Area:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}hc, \\ &= \frac{1}{2}ab \sin C, \\ &= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}. \end{aligned}$$

Heron's formula:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s \cdot s_a \cdot s_b \cdot s_c}, \\ s &= \frac{1}{2}(a+b+c), \\ s_a &= s-a, \\ s_b &= s-b, \\ s_c &= s-c. \end{aligned}$$

More identities:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

$$= \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

$$\cot \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}},$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$

$$= \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\tan x = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}},$$

$$= -i \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1},$$

$$\sinh ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i},$$

$$\cos x = \cosh ix,$$

$$\tan x = \frac{\tanh ix}{i}.$$

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Theoretical Computer Science Cheat Sheet								
Number Theory	Graph Theory							
<p>The Chinese remainder theorem: There exists a number <math>C</math> such that:</p> $C \equiv r_1 \pmod{m_1}$ $\vdots \vdots \vdots$ $C \equiv r_n \pmod{m_n}$ <p>if <math>m_i</math> and <math>m_j</math> are relatively prime for <math>i \neq j</math>.</p> <p>Euler's function: <math>\phi(x)</math> is the number of positive integers less than <math>x</math> relatively prime to <math>x</math>. If <math>\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}</math> is the prime factorization of <math>x</math> then</p> $\phi(x) = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i-1} (p_i - 1).$ <p>Euler's theorem: If <math>a</math> and <math>b</math> are relatively prime then</p> $1 \equiv a^{\phi(b)} \pmod{b}.$ <p>Fermat's theorem:</p> $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$ <p>The Euclidean algorithm: if <math>a &gt; b</math> are integers then</p> $\gcd(a, b) = \gcd(a \bmod b, b).$ <p>If <math>\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}</math> is the prime factorization of <math>x</math> then</p> $S(x) = \sum_{d x} d = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^{e_i+1} - 1}{p_i - 1}.$ <p>Perfect Numbers: <math>x</math> is an even perfect number iff <math>x = 2^{n-1}(2^n - 1)</math> and <math>2^n - 1</math> is prime.</p> <p>Wilson's theorem: <math>n</math> is a prime iff</p> $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$ <p>Möbius inversion:</p> $\mu(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1. \\ 0 & \text{if } i \text{ is not square-free.} \\ (-1)^r & \text{if } i \text{ is the product of } r \text{ distinct primes.} \end{cases}$ <p>If</p> $G(a) = \sum_{d a} F(d),$ <p>then</p> $F(a) = \sum_{d a} \mu(d) G\left(\frac{a}{d}\right).$ <p>Prime numbers:</p> $p_n = n \ln n + n \ln \ln n - n + n \frac{\ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right),$ $\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!n}{(\ln n)^3} + O\left(\frac{n}{(\ln n)^4}\right).$	<p>Definitions:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Loop</i>: An edge connecting a vertex to itself.</li> <li><i>Directed</i>: Each edge has a direction.</li> <li><i>Simple</i>: Graph with no loops or multi-edges.</li> <li><i>Walk</i>: A sequence <math>v_0 e_1 v_1 \dots e_\ell v_\ell</math>.</li> <li><i>Trail</i>: A walk with distinct edges.</li> <li><i>Path</i>: A trail with distinct vertices.</li> <li><i>Connected</i>: A graph where there exists a path between any two vertices.</li> <li><i>Component</i>: A maximal connected subgraph.</li> <li><i>Tree</i>: A connected acyclic graph.</li> <li><i>Free tree</i>: A tree with no root.</li> <li><i>DAG</i>: Directed acyclic graph.</li> <li><i>Eulerian</i>: Graph with a trail visiting each edge exactly once.</li> <li><i>Hamiltonian</i>: Graph with a cycle visiting each vertex exactly once.</li> <li><i>Cut</i>: A set of edges whose removal increases the number of components.</li> <li><i>Cut-set</i>: A minimal cut.</li> <li><i>Cut edge</i>: A size 1 cut.</li> <li><i>k-Connected</i>: A graph connected with the removal of any <math>k-1</math> vertices.</li> <li><i>k-Tough</i>: <math>\forall S \subseteq V, S \neq \emptyset</math> we have <math>k \cdot c(G-S) \leq  S </math>.</li> <li><i>k-Regular</i>: A graph where all vertices have degree <math>k</math>.</li> <li><i>k-Factor</i>: A <math>k</math>-regular spanning subgraph.</li> <li><i>Matching</i>: A set of edges, no two of which are adjacent.</li> <li><i>Clique</i>: A set of vertices, all of which are adjacent.</li> <li><i>Ind. set</i>: A set of vertices, none of which are adjacent.</li> <li><i>Vertex cover</i>: A set of vertices which cover all edges.</li> <li><i>Planar graph</i>: A graph which can be embedded in the plane.</li> <li><i>Plane graph</i>: An embedding of a planar graph.</li> </ul>	<p>Notation:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>E(G)</math>: Edge set</li> <li><math>V(G)</math>: Vertex set</li> <li><math>c(G)</math>: Number of components</li> <li><math>G[S]</math>: Induced subgraph</li> <li><math>\deg(v)</math>: Degree of <math>v</math></li> <li><math>\Delta(G)</math>: Maximum degree</li> <li><math>\delta(G)</math>: Minimum degree</li> <li><math>\chi(G)</math>: Chromatic number</li> <li><math>\chi_E(G)</math>: Edge chromatic number</li> <li><math>G^c</math>: Complement graph</li> <li><math>K_n</math>: Complete graph</li> <li><math>K_{n_1, n_2}</math>: Complete bipartite graph</li> <li><math>r(k, \ell)</math>: Ramsey number</li> </ul>						
		Geometry						
<p>Projective coordinates: triples <math>(x, y, z)</math>, not all <math>x, y</math> and <math>z</math> zero.</p> $(x, y, z) = (cx, cy, cz) \quad \forall c \neq 0.$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%;">Cartesian</td><td style="width: 50%;">Projective</td></tr> <tr> <td><math>(x, y)</math></td><td><math>(x, y, 1)</math></td></tr> <tr> <td><math>y = mx + b</math></td><td><math>(m, -1, b)</math></td></tr> <tr> <td><math>x = c</math></td><td><math>(1, 0, -c)</math></td></tr> </table> <p>Distance formula, <math>L_p</math> and <math>L_\infty</math> metric:</p> $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$ $[ x_1 - x_0 ^p +  y_1 - y_0 ^p]^{1/p},$ $\lim_{p \rightarrow \infty} [ x_1 - x_0 ^p +  y_1 - y_0 ^p]^{1/p}.$ <p>Area of triangle <math>(x_0, y_0)</math>, <math>(x_1, y_1)</math> and <math>(x_2, y_2)</math>:</p> $\frac{1}{2} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$ <p>Angle formed by three points:</p> $\cos \theta = \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{\ell_1 \ell_2}.$ <p>Line through two points <math>(x_0, y_0)</math> and <math>(x_1, y_1)</math>:</p> $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ <p>Area of circle, volume of sphere:</p> $A = \pi r^2, \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3.$	Cartesian	Projective	$(x, y)$	$(x, y, 1)$	$y = mx + b$	$(m, -1, b)$	$x = c$	$(1, 0, -c)$
Cartesian	Projective							
$(x, y)$	$(x, y, 1)$							
$y = mx + b$	$(m, -1, b)$							
$x = c$	$(1, 0, -c)$							
<p>If I have seen farther than others, it is because I have stood on the shoulders of giants. – Issac Newton</p>								

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

$\pi$	Calculus
<p>Wallis' identity:</p> $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$ <p>Brouncker's continued fraction expansion:</p> $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{\ddots}}}}$ <p>Gregory's series:</p> $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ <p>Newton's series:</p> $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \cdots$ <p>Sharp's series:</p> $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \right)$ <p>Euler's series:</p> $\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots \\ \frac{\pi^2}{12} &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots\end{aligned}$	<p>Derivatives:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx},</math></li> <li>2. <math>\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},</math></li> <li>3. <math>\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},</math></li> <li>4. <math>\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx},</math></li> <li>5. <math>\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(\frac{du}{dx}) - u(\frac{dv}{dx})}{v^2},</math></li> <li>6. <math>\frac{d(e^{cu})}{dx} = ce^{cu} \frac{du}{dx},</math></li> <li>7. <math>\frac{d(c^u)}{dx} = (\ln c)c^u \frac{du}{dx},</math></li> <li>8. <math>\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx},</math></li> <li>10. <math>\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx},</math></li> <li>12. <math>\frac{d(\cot u)}{dx} = \csc^2 u \frac{du}{dx},</math></li> <li>14. <math>\frac{d(\csc u)}{dx} = -\cot u \csc u \frac{du}{dx},</math></li> <li>16. <math>\frac{d(\arccos u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx},</math></li> <li>18. <math>\frac{d(\operatorname{arccot} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx},</math></li> <li>20. <math>\frac{d(\operatorname{arccsc} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx},</math></li> <li>22. <math>\frac{d(\cosh u)}{dx} = \sinh u \frac{du}{dx},</math></li> <li>24. <math>\frac{d(\coth u)}{dx} = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx},</math></li> <li>26. <math>\frac{d(\operatorname{csch} u)}{dx} = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx},</math></li> <li>28. <math>\frac{d(\operatorname{arccosh} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},</math></li> <li>30. <math>\frac{d(\operatorname{arccoth} u)}{dx} = \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{dx},</math></li> <li>32. <math>\frac{d(\operatorname{arccsch} u)}{dx} = \frac{-1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}.</math></li> </ol> <p>Integrals:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\int cu \, dx = c \int u \, dx,</math></li> <li>2. <math>\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx,</math></li> <li>3. <math>\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1,</math></li> <li>4. <math>\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x,</math></li> <li>5. <math>\int e^x \, dx = e^x,</math></li> <li>6. <math>\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,</math></li> <li>7. <math>\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx,</math></li> <li>8. <math>\int \sin x \, dx = -\cos x,</math></li> <li>9. <math>\int \cos x \, dx = \sin x,</math></li> <li>10. <math>\int \tan x \, dx = -\ln  \cos x ,</math></li> <li>11. <math>\int \cot x \, dx = \ln  \cos x ,</math></li> <li>12. <math>\int \sec x \, dx = \ln  \sec x + \tan x ,</math></li> <li>13. <math>\int \csc x \, dx = \ln  \csc x + \cot x ,</math></li> <li>14. <math>\int \arcsin \frac{x}{a} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a &gt; 0,</math></li> </ol>
<p>The reasonable man adapts himself to the world; the unreasonable persists in trying to adapt the world to himself. Therefore all progress depends on the unreasonable. – George Bernard Shaw</p>	

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Calculus Cont.

15.  $\int \arccos \frac{x}{a} dx = \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0,$
16.  $\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2), \quad a > 0,$
17.  $\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2a} (ax - \sin(ax) \cos(ax)),$
18.  $\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2a} (ax + \sin(ax) \cos(ax)),$
19.  $\int \sec^2 x dx = \tan x,$
20.  $\int \csc^2 x dx = -\cot x,$
21.  $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
22.  $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx,$
23.  $\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
24.  $\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
25.  $\int \sec^n x dx = \frac{\tan x \sec^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
26.  $\int \csc^n x dx = -\frac{\cot x \csc^{n-1} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx, \quad n \neq 1,$
27.  $\int \sinh x dx = \cosh x, \quad 28. \int \cosh x dx = \sinh x,$
29.  $\int \tanh x dx = \ln |\cosh x|, \quad 30. \int \coth x dx = \ln |\sinh x|, \quad 31. \int \operatorname{sech} x dx = \arctan \sinh x, \quad 32. \int \operatorname{csch} x dx = \ln |\tanh \frac{x}{2}|,$
33.  $\int \sinh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) - \frac{1}{2}x, \quad 34. \int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \sinh(2x) + \frac{1}{2}x, \quad 35. \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x,$
36.  $\int \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, \quad a > 0,$
37.  $\int \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctanh} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln |a^2 - x^2|,$
38.  $\int \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{if } \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} > 0 \text{ and } a > 0, \\ x \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 + a^2}, & \text{if } \operatorname{arccosh} \frac{x}{a} < 0 \text{ and } a > 0, \end{cases}$
39.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right), \quad a > 0,$
40.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
41.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
42.  $\int (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
43.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
44.  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, \quad 45. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}},$
46.  $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{a^2 \pm x^2} \right|,$
47.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right|, \quad a > 0,$
48.  $\int \frac{dx}{ax^2 + bx} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a+bx} \right|,$
49.  $\int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2},$
50.  $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx,$
51.  $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0,$
52.  $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$
53.  $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2},$
54.  $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
55.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right|,$
56.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2},$
57.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0,$
58.  $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} \right|,$
59.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|}, \quad a > 0,$
60.  $\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2},$
61.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a + \sqrt{a^2 + x^2}} \right|,$

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

### Calculus Cont.

<p><b>62.</b> <math>\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{ x }, \quad a &gt; 0,</math></p> <p><b>64.</b> <math>\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2},</math></p> <p><b>66.</b> <math>\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left  \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right , &amp; \text{if } b^2 &gt; 4ac, \\ \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, &amp; \text{if } b^2 &lt; 4ac, \end{cases}</math></p> <p><b>67.</b> <math>\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left  2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right , &amp; \text{if } a &gt; 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, &amp; \text{if } a &lt; 0, \end{cases}</math></p> <p><b>68.</b> <math>\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ax - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},</math></p> <p><b>69.</b> <math>\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},</math></p> <p><b>70.</b> <math>\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{c}} \ln \left  \frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right , &amp; \text{if } c &gt; 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{ x \sqrt{b^2 - 4ac}}, &amp; \text{if } c &lt; 0, \end{cases}</math></p> <p><b>71.</b> <math>\int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} dx = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}a^2)(x^2 + a^2)^{3/2},</math></p> <p><b>72.</b> <math>\int x^n \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x^n \cos(ax) + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos(ax) dx,</math></p> <p><b>73.</b> <math>\int x^n \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x^n \sin(ax) - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin(ax) dx,</math></p> <p><b>74.</b> <math>\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx,</math></p> <p><b>75.</b> <math>\int x^n \ln(ax) dx = x^{n+1} \left( \frac{\ln(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right),</math></p> <p><b>76.</b> <math>\int x^n (\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln ax)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln ax)^{m-1} dx.</math></p>	<p><b>63.</b> <math>\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x},</math></p> <p><b>65.</b> <math>\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4} dx = \mp \frac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{3a^2 x^3},</math></p>
---	---

### Finite Calculus

Difference, shift operators:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$\mathrm{E} f(x) = f(x+1).$$

Fundamental Theorem:

$$f(x) = \Delta F(x) \Leftrightarrow \sum f(x) \delta x = F(x) + C.$$

$$\sum_a^b f(x) \delta x = \sum_{i=a}^{b-1} f(i).$$

Differences:

$$\Delta(cu) = c\Delta u, \quad \Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v,$$

$$\Delta(uv) = u\Delta v + \mathrm{E} v \Delta u,$$

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1},$$

$$\Delta(H_x) = x^{-1}, \quad \Delta(2^x) = 2^x,$$

$$\Delta(c^x) = (c-1)c^x, \quad \Delta(\binom{x}{m}) = \binom{x}{m-1}.$$

Sums:

$$\sum cu \delta x = c \sum u \delta x,$$

$$\sum(u+v) \delta x = \sum u \delta x + \sum v \delta x,$$

$$\sum u \Delta v \delta x = uv - \sum \mathrm{E} v \Delta u \delta x,$$

$$\sum x^n \delta x = \frac{x^{n+1}}{m+1}, \quad \sum x^{-1} \delta x = H_x,$$

$$\sum c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1}, \quad \sum \binom{x}{m} \delta x = \binom{x}{m+1}.$$

Falling Factorial Powers:

$$x^n = x(x-1) \cdots (x-n+1), \quad n > 0,$$

$$x^0 = 1,$$

$$x^n = \frac{1}{(x+1) \cdots (x+|n|)}, \quad n < 0,$$

$$x^{n+m} = x^m (x-m)^n.$$

Rising Factorial Powers:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1), \quad n > 0,$$

$$x^{\overline{0}} = 1,$$

$$x^{\overline{n}} = \frac{1}{(x-1) \cdots (x-|n|)}, \quad n < 0,$$

$$x^{\overline{n+m}} = x^{\overline{m}} (x+m)^{\overline{n}}.$$

Conversion:

$$x^n = (-1)^n (-x)^{\overline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}} = 1/(x+1)^{\overline{-n}},$$

$$x^{\overline{n}} = (-1)^n (-x)^n = (x+n-1)^n = 1/(x-1)^{\overline{-n}},$$

$$x^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}},$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k,$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k.$$

$x^1 =$	$x^1$	$=$	$x^{\overline{1}}$
$x^2 =$	$x^2 + x^1$	$=$	$x^{\overline{2}} - x^{\overline{1}}$
$x^3 =$	$x^3 + 3x^2 + x^1$	$=$	$x^{\overline{3}} - 3x^{\overline{2}} + x^{\overline{1}}$
$x^4 =$	$x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x^1$	$=$	$x^{\overline{4}} - 6x^{\overline{3}} + 7x^{\overline{2}} - x^{\overline{1}}$
$x^5 =$	$x^5 + 15x^4 + 25x^3 + 10x^2 + x^1$	$=$	$x^{\overline{5}} - 15x^{\overline{4}} + 25x^{\overline{3}} - 10x^{\overline{2}} + x^{\overline{1}}$
$x^{\overline{1}} =$	$x^1$	$=$	$x^1$
$x^{\overline{2}} =$	$x^2 + x^1$	$=$	$x^2 - x^1$
$x^{\overline{3}} =$	$x^3 + 3x^2 + 2x^1$	$=$	$x^3 - 3x^2 + 2x^1$
$x^{\overline{4}} =$	$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1$	$=$	$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x^1$
$x^{\overline{5}} =$	$x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x^1$	$=$	$x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x^1$

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

### Series

Taylor's series:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

Expansions:

$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} x^i,$
$\frac{1}{1-cx}$	$= 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i,$
$\frac{1}{1-x^n}$	$= 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} x^{ni},$
$\frac{x}{(1-x)^2}$	$= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} ix^i,$
$x^k \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{1-x} \right)$	$= x + 2^nx^2 + 3^nx^3 + 4^nx^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i,$
$e^x$	$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i},$
$\ln \frac{1}{1-x}$	$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i},$
$\sin x$	$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$
$\cos x$	$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!},$
$\tan^{-1} x$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)},$
$(1+x)^n$	$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$
$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$	$= 1 + (n+1)x + \binom{n+2}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+n}{i} x^i,$
$\frac{x}{e^x - 1}$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i x^i}{i!},$
$\frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$	$= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} x^i,$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$	$= 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i}{i} x^i,$
$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \left( \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \right)^n$	$= 1 + (2+n)x + \binom{4+n}{2}x^2 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2i+n}{i} x^i,$
$\frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$	$= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \frac{25}{12}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=1}^{\infty} H_i x^i,$
$\frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{1-x} \right)^2$	$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{24}x^4 + \dots$	$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{H_{i-1} x^i}{i},$
$\frac{x}{1-x-x^2}$	$= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} F_i x^i,$
$\frac{F_n x}{1 - (F_{n-1} + F_{n+1})x - (-1)^n x^2}$	$= F_n x + F_{2n} x^2 + F_{3n} x^3 + \dots$	$= \sum_{i=0}^{\infty} F_{ni} x^i.$

Ordinary power series:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Exponential power series:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}.$$

Dirichlet power series:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i^x}.$$

Binomial theorem:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Difference of like powers:

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

For ordinary power series:

$$\alpha A(x) + \beta B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i,$$

$$x^k A(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a_{i-k} x^i,$$

$$\frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+k} x^i,$$

$$A(cx) = \sum_{i=0}^{\infty} c^i a_i x^i,$$

$$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i,$$

$$xA'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i,$$

$$\int A(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i-1}}{i} x^i,$$

$$\frac{A(x) + A(-x)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} x^{2i},$$

$$\frac{A(x) - A(-x)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i+1}.$$

Summation: If  $b_i = \sum_{j=0}^i a_j$  then

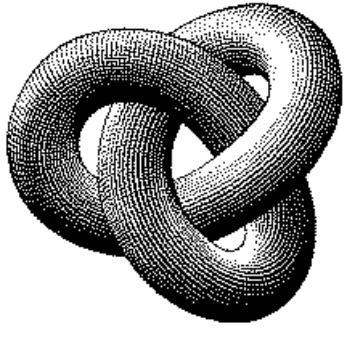
$$B(x) = \frac{1}{1-x} A(x).$$

Convolution:

$$A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i.$$

God made the natural numbers;  
all the rest is the work of man.  
— Leopold Kronecker

## Theoretical Computer Science Cheat Sheet

Series	Escher's Knot																																																																																																				
<p>Expansions:</p> $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} \ln \frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (H_{n+i} - H_n) \binom{n+i}{i} x^i,$ $x^{\frac{n}{k}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i,$ $\left(\ln \frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \frac{n! x^i}{i!},$ $\tan x = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)B_{2i}x^{2i-1}}{(2i)!},$ $\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(i)}{i^x},$ $\zeta(x) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-x}},$ $\zeta^2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(i)}{i^x} \quad \text{where } d(n) = \sum_{d n} 1,$ $\zeta(x)\zeta(x-1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S(i)}{i^x} \quad \text{where } S(n) = \sum_{d n} d,$ $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_{2n} }{(2n)!} \pi^{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$ $\frac{x}{\sin x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(4^i - 2)B_{2i}x^{2i}}{(2i)!},$ $\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(2i+n-1)!}{i!(n+i)!} x^i,$ $e^x \sin x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i/2} \sin \frac{i\pi}{4}}{i!} x^i,$ $\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(4i)!}{16^i \sqrt{2}(2i)!(2i+1)!} x^i,$ $\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{4^i i!^2}{(i+1)(2i+1)!} x^{2i}.$																																																																																																					
	Stieltjes Integration																																																																																																				
	<p>If <math>G</math> is continuous in the interval <math>[a, b]</math> and <math>F</math> is nondecreasing then</p> $\int_a^b G(x) dF(x)$ <p>exists. If <math>a \leq b \leq c</math> then</p> $\int_a^c G(x) dF(x) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_b^c G(x) dF(x).$ <p>If the integrals involved exist</p> $\int_a^b (G(x) + H(x)) dF(x) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_a^b H(x) dF(x),$ $\int_a^b G(x) d(F(x) + H(x)) = \int_a^b G(x) dF(x) + \int_a^b G(x) dH(x),$ $\int_a^b c \cdot G(x) dF(x) = \int_a^b G(x) d(c \cdot F(x)) = c \int_a^b G(x) dF(x),$ $\int_a^b G(x) dF(x) = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b F(x) dG(x).$																																																																																																				
<p>Cramer's Rule</p> <p>If we have equations:</p> $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$ $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n$ <p>Let <math>A = (a_{i,j})</math> and <math>B</math> be the column matrix <math>(b_i)</math>. Then there is a unique solution iff <math>\det A \neq 0</math>. Let <math>A_i</math> be <math>A</math> with column <math>i</math> replaced by <math>B</math>. Then</p> $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$	<p>Fibonacci Numbers</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>00</td><td>47</td><td>18</td><td>76</td><td>29</td><td>93</td><td>85</td><td>34</td><td>61</td><td>52</td></tr> <tr><td>86</td><td>11</td><td>57</td><td>28</td><td>70</td><td>39</td><td>94</td><td>45</td><td>02</td><td>63</td></tr> <tr><td>95</td><td>80</td><td>22</td><td>67</td><td>38</td><td>71</td><td>49</td><td>56</td><td>13</td><td>04</td></tr> <tr><td>59</td><td>96</td><td>81</td><td>33</td><td>07</td><td>48</td><td>72</td><td>60</td><td>24</td><td>15</td></tr> <tr><td>73</td><td>69</td><td>90</td><td>82</td><td>44</td><td>17</td><td>58</td><td>01</td><td>35</td><td>26</td></tr> <tr><td>68</td><td>74</td><td>09</td><td>91</td><td>83</td><td>55</td><td>27</td><td>12</td><td>46</td><td>30</td></tr> <tr><td>37</td><td>08</td><td>75</td><td>19</td><td>92</td><td>84</td><td>66</td><td>23</td><td>50</td><td>41</td></tr> <tr><td>14</td><td>25</td><td>36</td><td>40</td><td>51</td><td>62</td><td>03</td><td>77</td><td>88</td><td>99</td></tr> <tr><td>21</td><td>32</td><td>43</td><td>54</td><td>65</td><td>06</td><td>10</td><td>89</td><td>97</td><td>78</td></tr> <tr><td>42</td><td>53</td><td>64</td><td>05</td><td>16</td><td>20</td><td>31</td><td>98</td><td>79</td><td>87</td></tr> </table> <p>Definitions:</p> $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad F_0 = F_1 = 1,$ $F_{-i} = (-1)^{i-1} F_i,$ $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^i - \hat{\phi}^i),$ <p>Cassini's identity: for <math>i &gt; 0</math>:</p> $F_{i+1}F_{i-1} - F_i^2 = (-1)^i.$ <p>Additive rule:</p> $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n,$ $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n.$ <p>Calculation by matrices:</p> $\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$	00	47	18	76	29	93	85	34	61	52	86	11	57	28	70	39	94	45	02	63	95	80	22	67	38	71	49	56	13	04	59	96	81	33	07	48	72	60	24	15	73	69	90	82	44	17	58	01	35	26	68	74	09	91	83	55	27	12	46	30	37	08	75	19	92	84	66	23	50	41	14	25	36	40	51	62	03	77	88	99	21	32	43	54	65	06	10	89	97	78	42	53	64	05	16	20	31	98	79	87
00	47	18	76	29	93	85	34	61	52																																																																																												
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63																																																																																												
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04																																																																																												
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15																																																																																												
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26																																																																																												
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30																																																																																												
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41																																																																																												
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99																																																																																												
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78																																																																																												
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87																																																																																												
<p>Improvement makes strait roads, but the crooked roads without Improvement, are roads of Genius. – William Blake (The Marriage of Heaven and Hell)</p>	<p>The Fibonacci number system: Every integer <math>n</math> has a unique representation</p> $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m},$ <p>where <math>k_i \geq k_{i+1} + 2</math> for all <math>i</math>, <math>1 \leq i &lt; m</math> and <math>k_m \geq 2</math>.</p>																																																																																																				



@Nmeboshi\_miro

O°

