SEMINARIO CALCOLO NUMERICO

NURBS

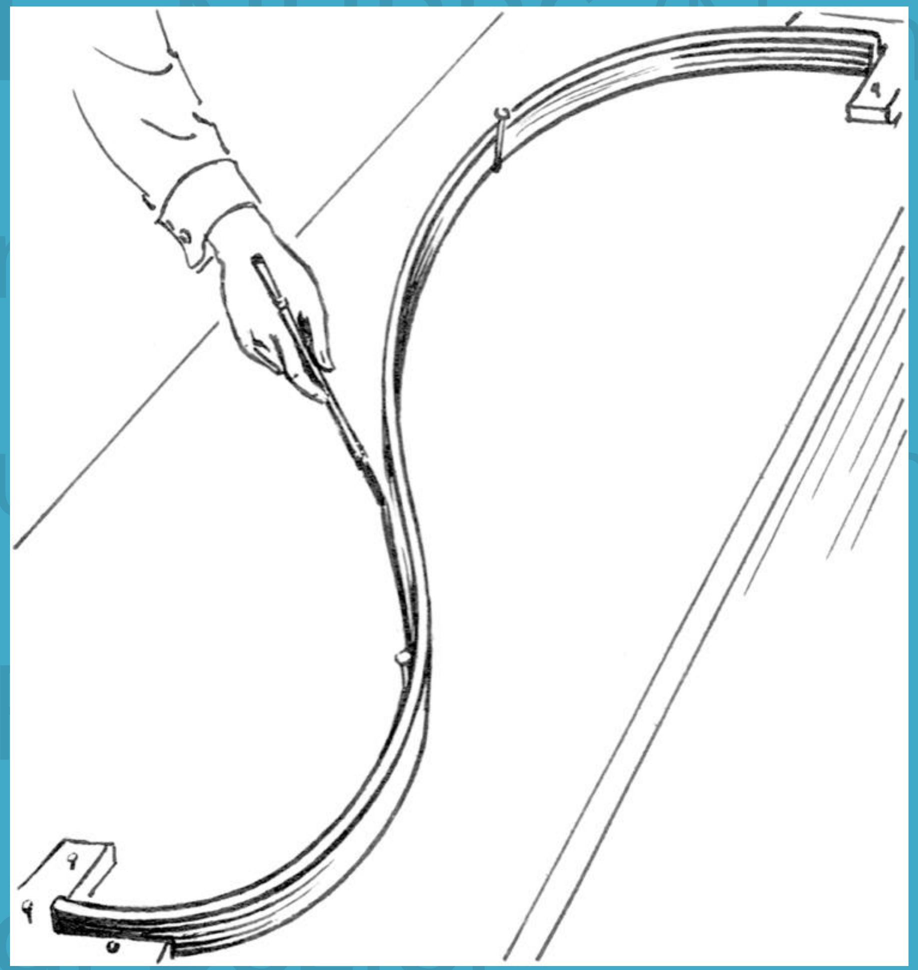
NURBS

Le NURBS (Non - Uniform Rational Basis Spline, traducibile in “Spline razionali non uniformi definite da una base”) sono un modello matematico utilizzato in computer grafica per generare e rappresentare curve e superfici.

Possono essere viste come una generalizzazione delle B-Spline e delle curve di Bézier

NURBS

- Uniform Rational Basis Spline, traducibile in “Spline

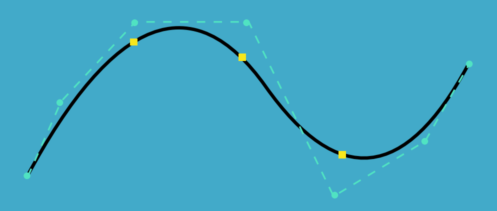


Le funzioni spline riproducono in forma matematica quello che nella pratica è il disegno effettuato con lo “spline”, un listello flessibile vincolato a passare per certi punti assegnati.

NURBS

Una curva Nurbs è costituita da un’equazione parametrica di grado **“n”** in funzione di un parametro U che varia nell’intervallo [0,1] ed è definita da alcune caratteristiche:

- Il grado: **numero intero positivo naturale**

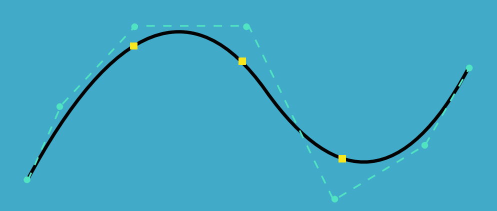


N U R B S

Una curva Nurbs è costituita da un'equazione parametrica di grado **"n"** in funzione di un parametro U che varia nell'intervallo [0,1] ed è definita da alcune caratteristiche:

- Il grado: **numero intero positivo naturale**

$$n = \begin{cases} \text{1 - crea una linea, senza piegature fra gli estremi} \\ \text{2 - ha una piega fra gli estremi} \\ \text{3 - ha due pieghe fra gli estremi (\underline{default})} \end{cases}$$

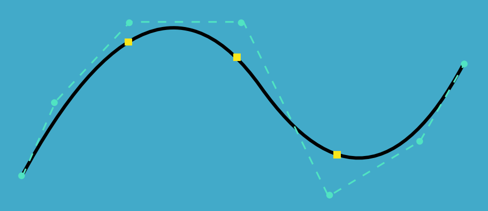


N U R B S

Una curva Nurbs è costituita da un’equazione parametrica di grado **“n”** in funzione di un parametro U che varia nell’intervallo [0,1] ed è definita da alcune caratteristiche:

- il grado: numero intero positivo naturale

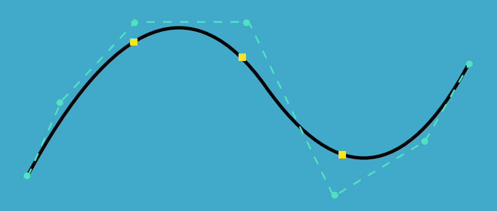
- I punti di controllo: direttamente connessi alla curva, **sono in numero pari al grado della curva stessa e vengono utilizzati per modificarne la forma**



NURBS

Una curva Nurbs è costituita da un'equazione parametrica di grado **"n"** in funzione di un parametro U che varia nell'intervallo [0,1] ed è definita da alcune caratteristiche:

- Il grado: numero intero positivo naturale
- I punti di controllo: direttamente connessi alla curva, sono in numero pari al grado della curva stessa e vengono utilizzati per modificarne la forma
- Il peso associato a ogni punto di controllo:
  - la curva è razionale se sono tutti uguali
  - non razionale altrimenti

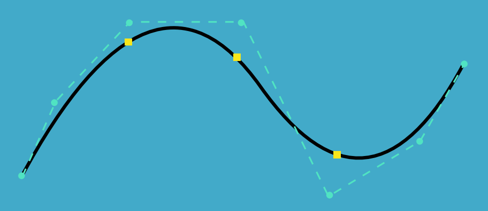


N U R B S

Una curva Nurbs è costituita da un'equazione parametrica di grado **"n"** in funzione di un parametro U che varia nell'intervallo [0,1] ed è definita da alcune caratteristiche:

- Il grado: numero intero positivo naturale
- I punti di controllo: direttamente connessi alla curva, sono in numero pari al grado della curva stessa e vengono utilizzati per modificarne la forma
- Il peso associato a ogni punto di controllo:
  - la curva è razionale se sono tutti uguali
  - non razionale altrimenti
- I nodi:
  - l'aggiunta di nodi non modifica la curva
  - la loro rimozione ne cambia la forma.

  Sono una fila di numeri pari a (grado+N-1), dove N rappresenta il numero dei punti di controllo.

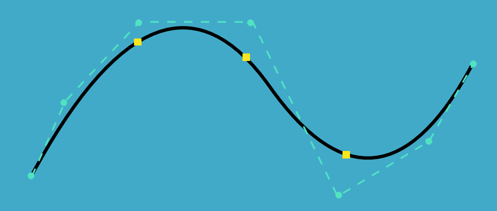


NURBS' PARENTS

•BÉZIER•

Ideata nel 1962 da Pierre Bézier per disegnare le vetture della Renault.
Una curva di Bézier è caratterizzata da un polinomio di grado n.

È una curva molto smussata. Più punti intermedi si scelgono,
più aumentano il grado polinomiale e la loro complessità numerica.
Passa sempre per il primo e l'ultimo punto, ma non nei nodi intermedi.
Più **alto** è il grado della curva più diventa **flessibile**
(ma è più difficile da gestire).

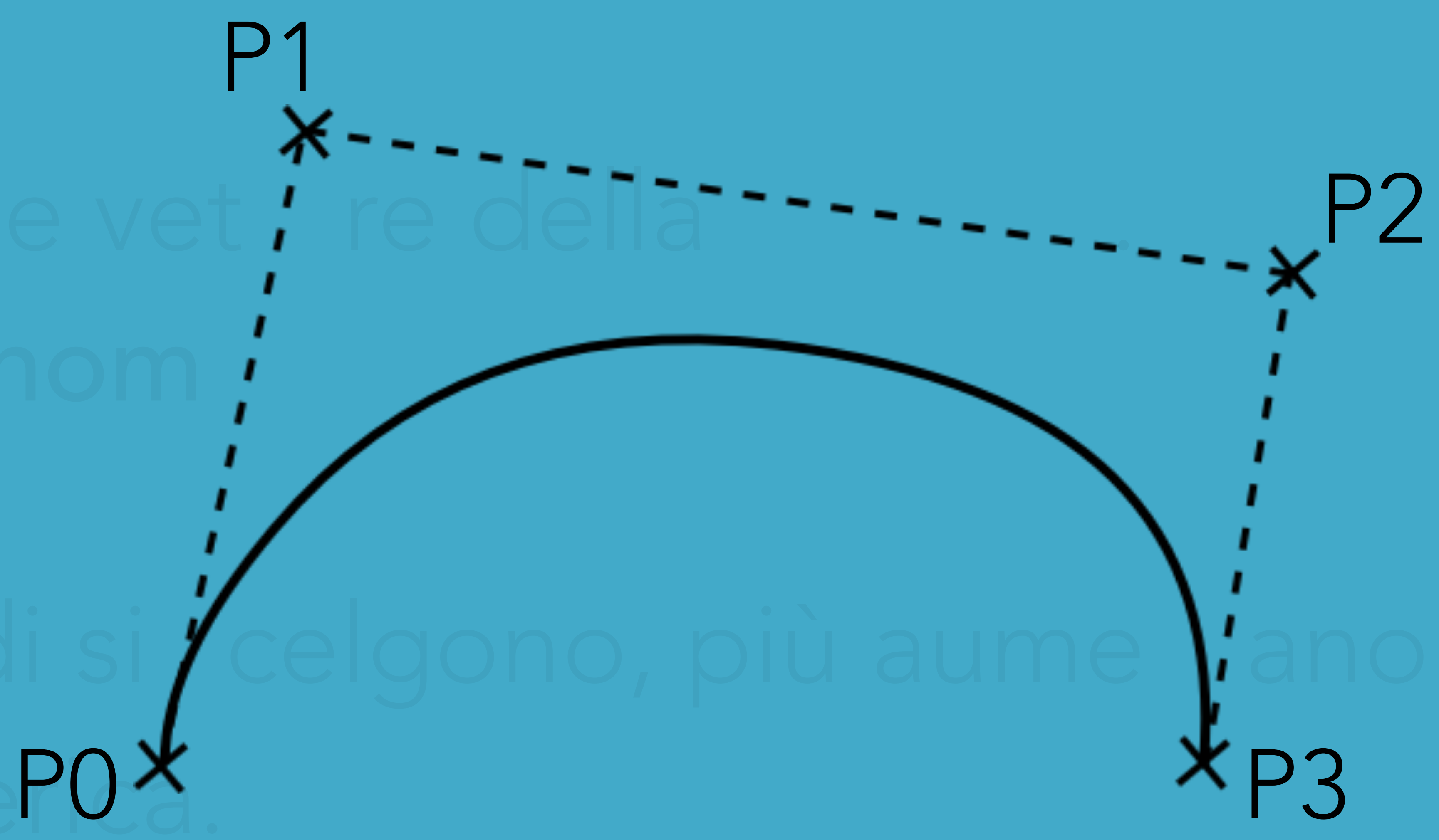


NURBS' PARENTS

•BÉZIER•

Ideata nel 1962 da Pierre Bézier per disegnare le vetture della

Una curva di Bézier è caratterizzata da un polinom



È una curva molto smussata. Più punti intermedi si scelgono, più aumentano il grado polinomiale e la loro complessità numerica.

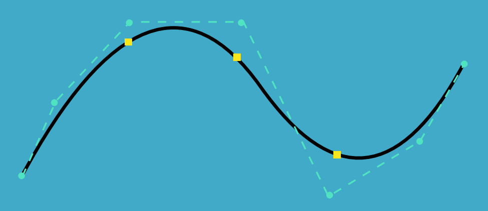
Passa sempre per il primo e l'ultimo punto, ma non nei nodi intermedi.

Più **alto** è il grado della curva più diventa **flessibile** (ma è più difficile da gestire).

NURBS' PARENTS

•BÉZIER - MATH FORMULA•

$$P(t) = \sum_{i=0}^{h} B_i^h(t) \bullet P_i$$



NURBS' PARENTS

•BÉZIER - MATH FORMULA•

Grado della curva

$$P(t) = \sum_{i=0}^{h} B_i^h(t) \bullet P_i$$

NURBS' PARENTS

•BÉZIER - MATH FORMULA•

$$P(t) = \sum_{i=0}^{h} B_i^h(t) \cdot P_i$$

Punti di controllo,
definiscono la forma della curva

NURBS' PARENTS

•BÉZIER - THEIR USES•

Si usano solitamente in **forma quadratica o cubica** perché facilmente gestibili, quando si vuole definire la curva con dei punti di controllo e ottenere nel contempo una curva flessibile.

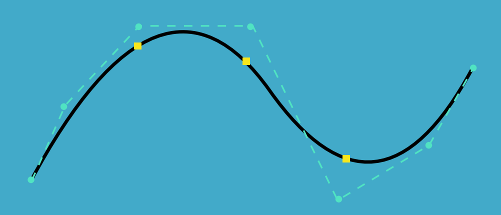
La curva è **stabile** con un basso grado di controllo.

NURBS' PARENTS

•B-SPLINE•

Sono curve composite che collegano più curve di Bézier garantendo **continuità della tangente** (derivata prima) **e della curvatura** (derivata seconda) sui punti di passaggio.

L'unione di più curve di Bézier **permette il passaggio per i punti intermedi della curva.**



NURBS' PARENTS

•B-SPLINE - MATH FORMULA•

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,p}(u) \bullet P_i \qquad a \leq u \leq b$$

NURBS' PARENTS

•B-SPLINE - MATH FORMULA•

Span i-esima curva di Bézier

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,p}(u) \bullet P_i \qquad a \leq u \leq b$$

NURBS' PARENTS

•B-SPLINE - MATH FORMULA•

Curve di Bézier

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,p}(u) \bullet P_i$$

NURBS' PARENTS

•B-SPLINE - TYPOLOGIES•

1. **B-spline uniformi**: parametrizzate su intervalli [0,1]

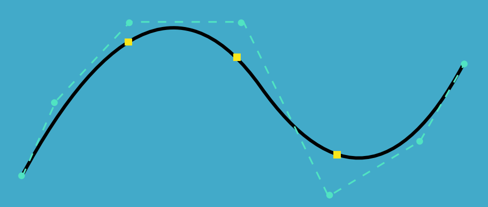
2. **B-spline non uniformi**: parametrizzate su intervalli differenti

3. **B-spline non uniformi razionali**, dette Nurbs

NURBS

•MATH FORMULA•

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot P_i \cdot W_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot W_i}, \quad a \le u \le b$$



NURBS

•MATH FORMULA•

Peso: indica la capacità di P di attrarre la curva

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot P_i \cdot W_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot W_i} \qquad a \leq u \leq b$$

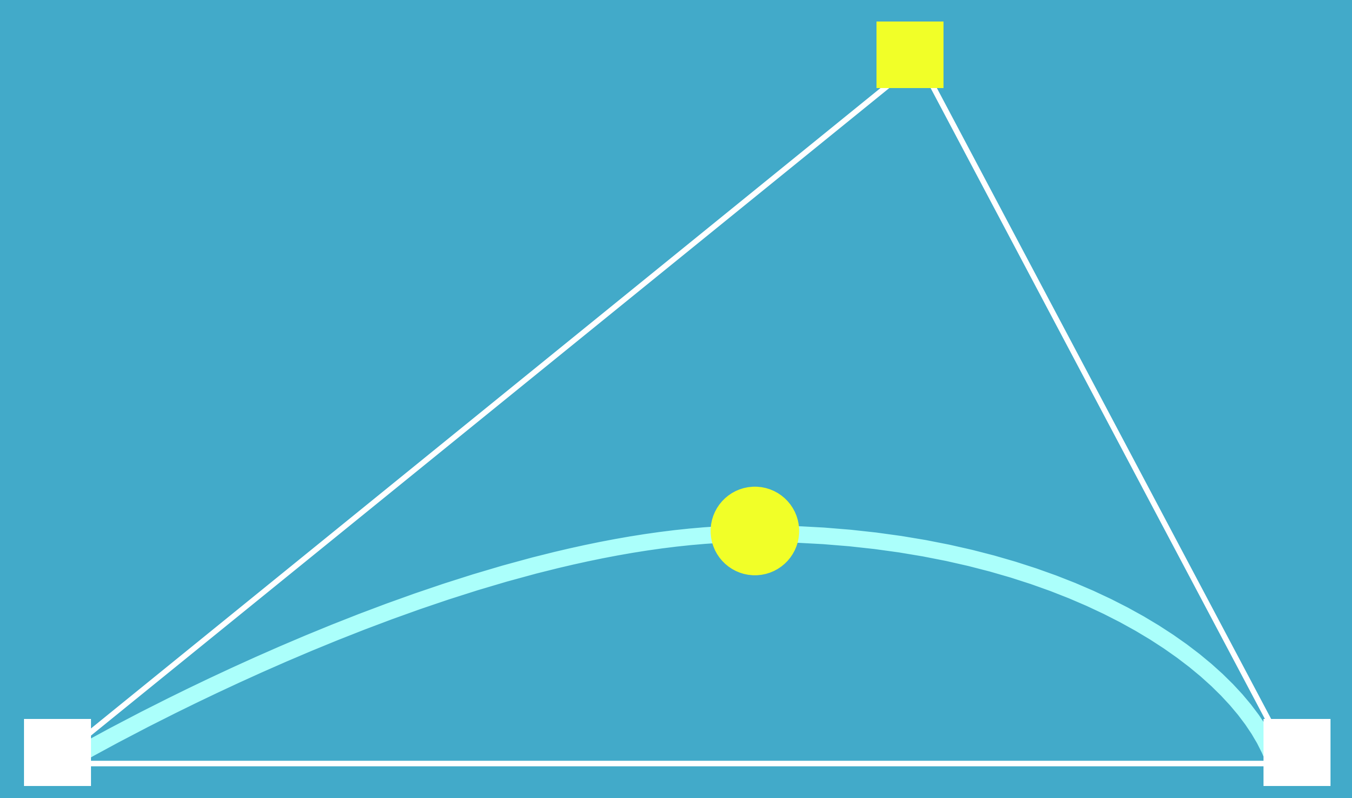
NURBS

•MATH FORMULA•

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot P_i \cdot W_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot W_i}$$

Peso: indica la capacità di P di attrarre la curva

1. W >> 0, la **curva** tenderà ad avvicinarsi al punto di controllo ad esso associato



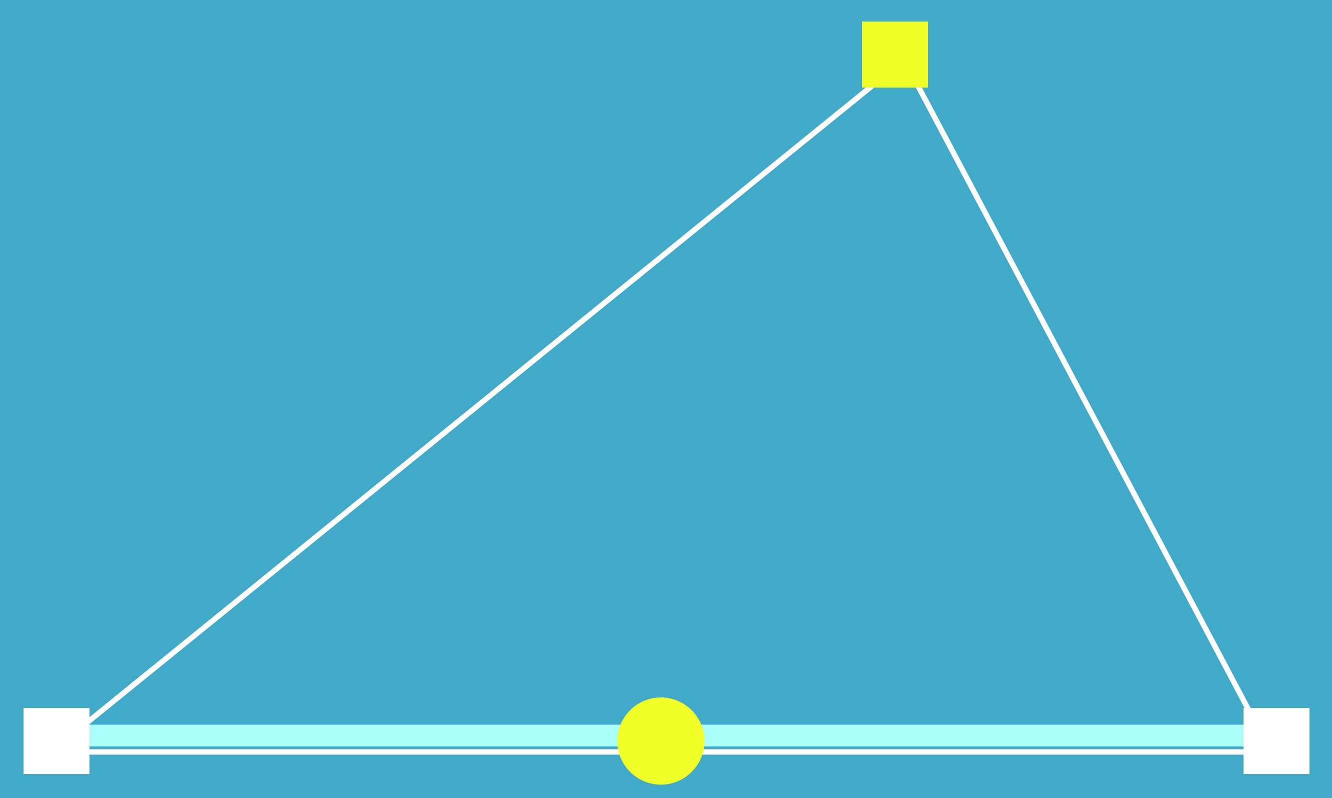
NURBS

•MATH FORMULA•

Peso: indica la capacità di P di attrarre la curva

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot P_i \cdot W_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot W_i}$$

2. W = 0, la **curva** non sarà influenzata dal punto di controllo indicato



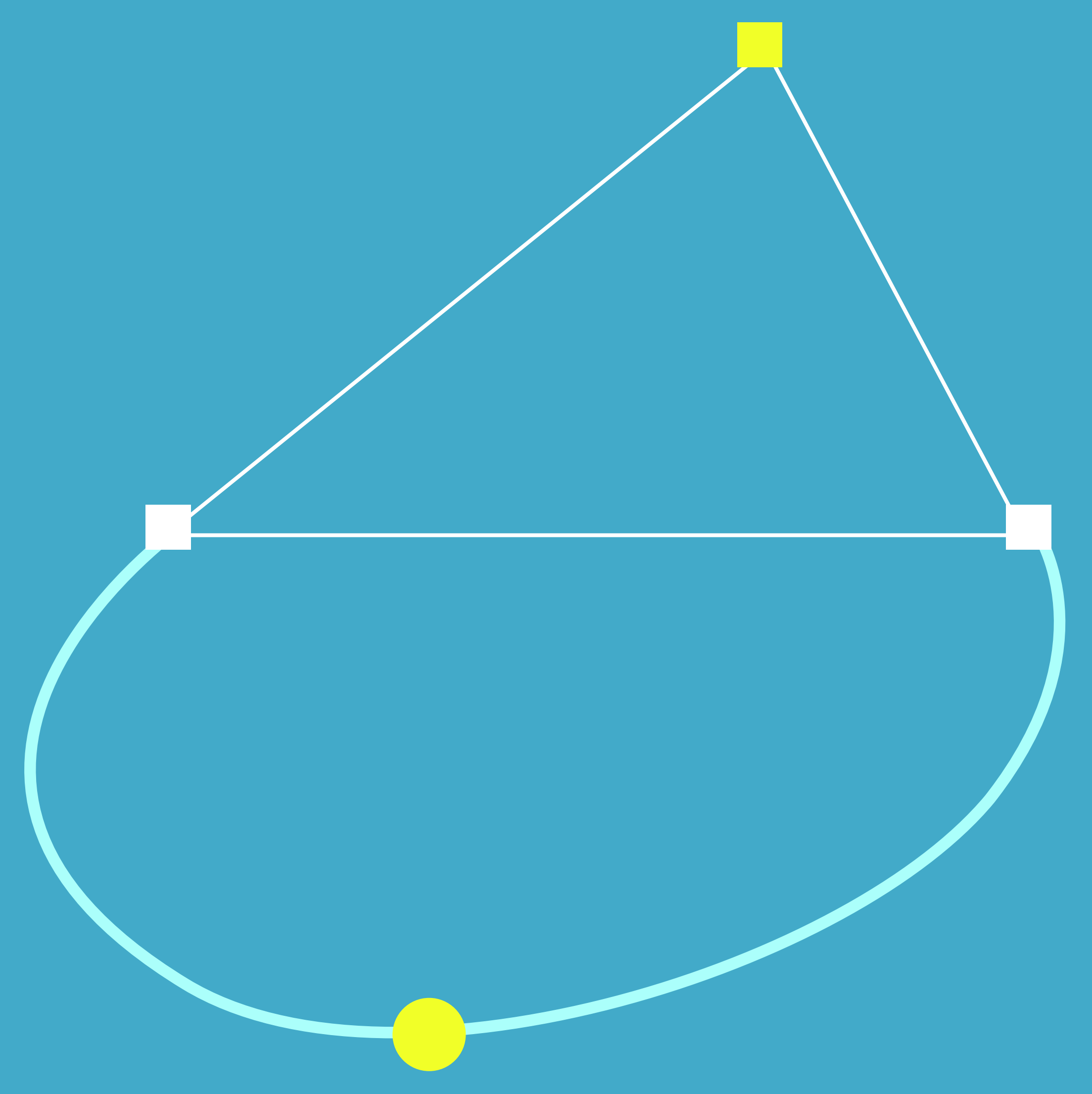
NURBS

•MATH FORMULA•

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot P_i \cdot W_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \cdot W_i}$$

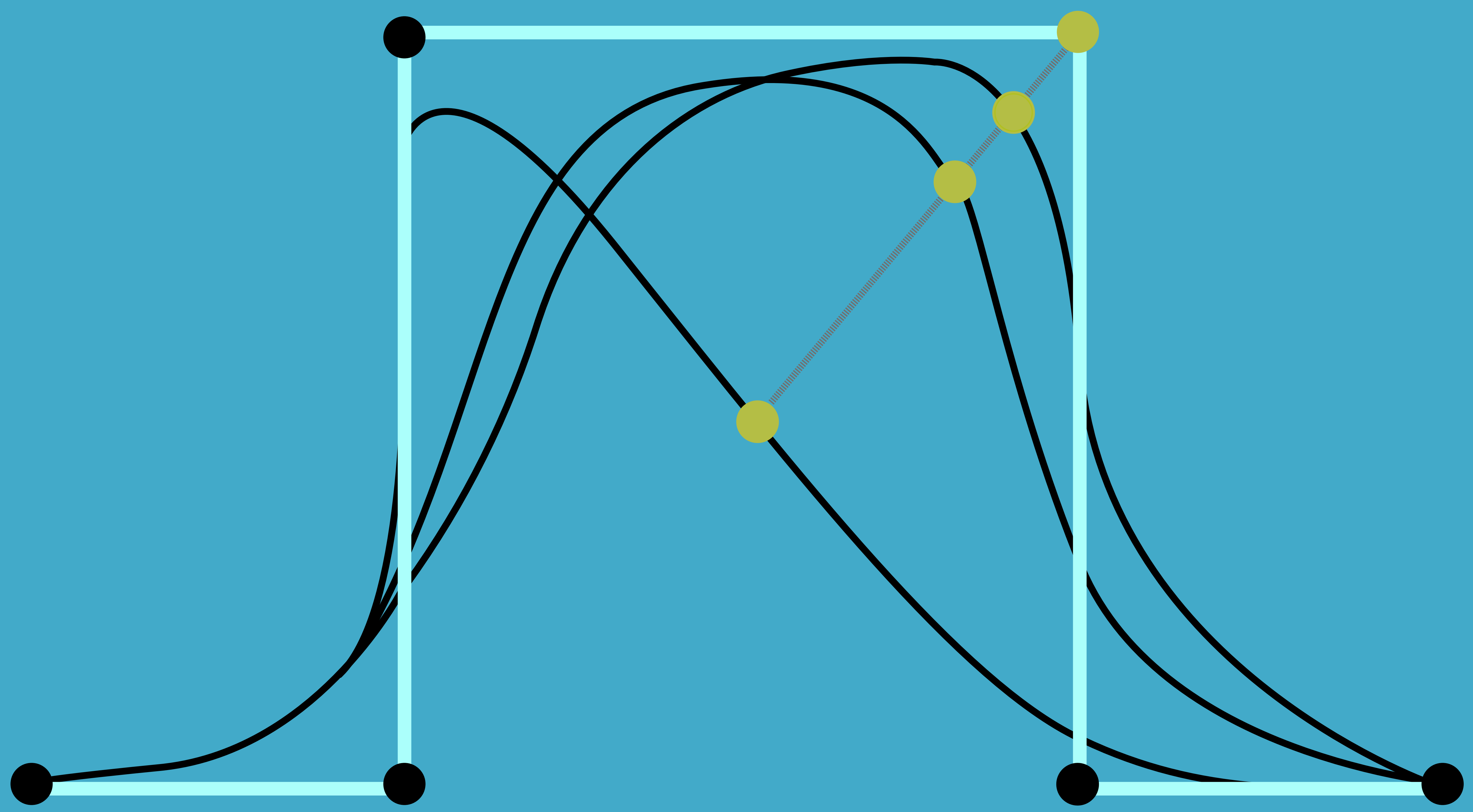
Peso: indica la capacità di P di attrarre la curva

3. **W < 0**, è una forma poco utilizzata, l'effetto è quello in figura



NURBS

•WEIGHTS MODIFICATION•

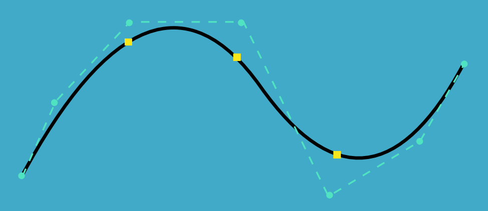


NURBS

•MATH FORMULA - ANOTHER POV•

Dato un insieme di n+1 punti di controllo $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ in cui a ciascuno di essi è associato un peso non negativo w_i e un vettore di m+1 nodi U=$[u_0, u_1, \ldots, u_m]$, la curva nurbs di grado p è definita come:

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u) \bullet P_i$$



NURBS

•MATH FORMULA - ANOTHER POV•

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u) \bullet P_i$$

$$= \frac{N_{i,p}(u) \bullet W_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(u) \bullet W_j}$$

Questa notazione rende la definizione di Nurbs più vicina a quella di una curva B-spline

NURBS

•BASIS FUNCTIONS' PROPERTIES•

- $R_{i,p}(u)$ è una **funzione razionale di grado p in u**
- **Non negatività:** $R_{i,p}(u)$ è non negativa $\forall i, p$
- **Supporto locale:** $R_{i,p}(u)$ è non nulla nell'intervallo $[u_i, u_{i+p+1})$
- Nel generico **knot span** (intervallo di valori dei parametri tra due nodi successivi in una spline)$[u_i, u_{i+1})$, **al più p+1 funzioni base di grado p sono non nulle**
- **Partizione dell'unità:** la somma di tutte le funzioni base non nulle nel generico span $[u_i, u_{i+1})$ è 1

NURBS

• BASIS FUNCTIONS' PROPERTIES •

- Se il numero di nodi è m+1, il grado delle funzioni base è p e sono in numero pari a n+1, allora **m=n+p+1**
- La funzione base $R_{i,p}(u)$ è una curva composta da funzioni razionali di grado p con punti di funzione ai nodi nell'intervallo $[u_i, u_{i+p+1})$.
- In un nodo di molteplicità k, **la funzione base $R_{i,p}(u)$ è continua C^{p-k}**.
  Aumentando la molteplicità, decresce il livello di continuità
  Aumentando il grado aumenta la continuità.
- Se i pesi sono tutti uguali a c, dove c è una costante non nulla, allora $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$

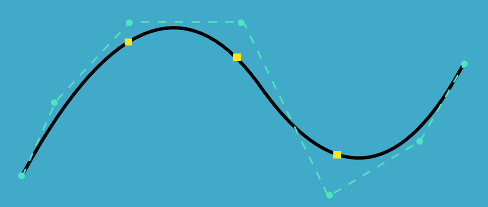
NURBS

•NURBS' PROPERTIES•

- C(u) è una curva a tratti in cui ogni componente è una curva di Bézier

- Una curva fissa C(u) passa attraverso i due punti di controllo estremi P_0 e P_n

- **Strong Convex Hull Property:** la curva nurbs è contenuta nell'inviluppo complesso dei suoi punti di controllo. Se u è il generico knot span $[u_i, u_{i+1})$, allora C(u) è contenuta nell'inviluppo complesso dei punti di controllo $P_{i-p}, P_{i-p+1}, \ldots, P_i$



NURBS

•NURBS' PROPERTIES•

- **Local modification scheme:** il cambio della posizione del punto di controllo P_i influisce sulla curva C(u) solo nell'intervallo $[u_i, u_{i+1})$,

- **Variation Diminishing Property:** se la curva è contenuta in un piano, allora nessuna linea interseca la Nurbs più volte di quante essa interseca il poligono di controllo (curva definita dai punti di controllo)

- **Projective Invariance:** se una proiezione è applicata alla curva Nurbs, il risultato può essere costruito dall'immagine proiettata dai suoi punti di controllo
  La trasformazione viene applicata solo ai punti di controllo che definiscono la Nurbs

NURBS

•USEFUL DEFINITIONS•

SPAZIO PROIETTIVO

In geometria, lo spazio proiettivo è lo spazio **ottenuto da uno spazio euclideo** (ad esempio, la retta o il piano) **aggiungendo i "punti all'infinito"**. A seconda della dimensione, si parla quindi di retta proiettiva o piano proiettivo

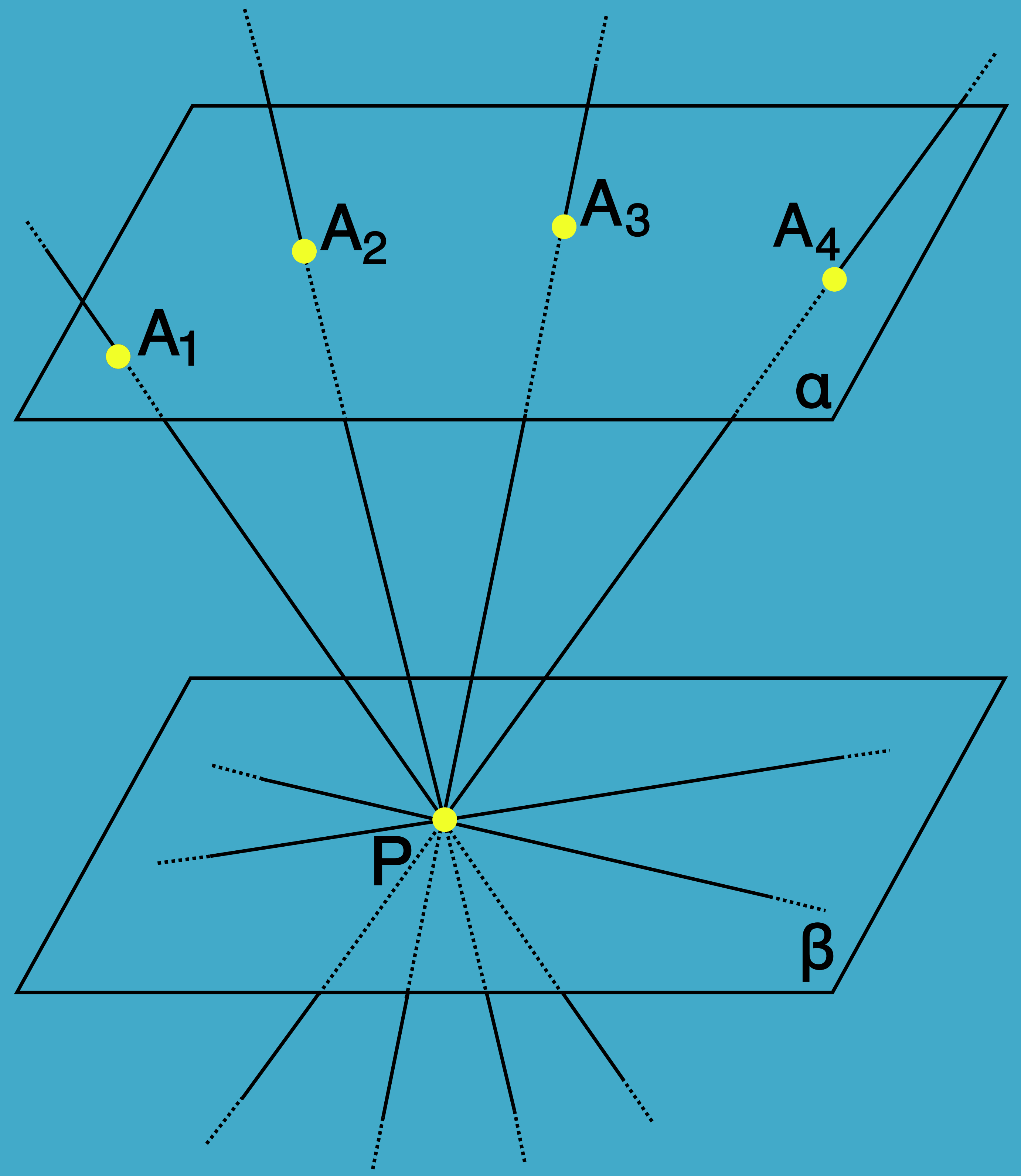
NURBS

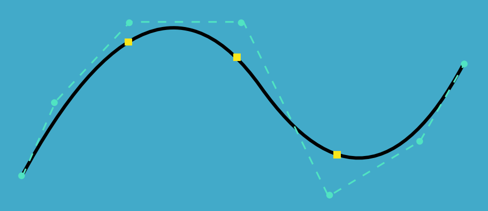
•USEFUL DEFINITIONS•

PIANO PROIETTIVO

Estensione del piano euclideo a cui viene aggiunta una "retta impropria" posizionata all'infinito circoscrivendolo.

Il piano diventa uno spazio compatto in cui anche le rette tra loro parallele si incontrano in un unico punto di intersezione idealmente collocato sulla "retta impropria".





NURBS

•USEFUL DEFINITIONS•

PIANO PROIETTIVO

Estensione del piano euclideo a cui viene aggiunta

una "**retta impropria**" posizionata all'infinito

È una circonferenza infinitamente lontana che circonda tutto il piano euclideo e i cui punti antipodali sono identificati in maniera tale che le rette parallele ad una stessa direzione abbiano tutte un unico punto di intersezione su di essa.

"retta impropria".

NURBS

•USEFUL DEFINITIONS•

COORDINATE OMOGENEE

Usate per descrivere i punti nella geometria proiettiva.

Analogo delle coordinate cartesiane nella geometria analitica

Rappresentano coordinate di punti, anche punti all'infinito, utilizzando coordinate finite.

NURBS

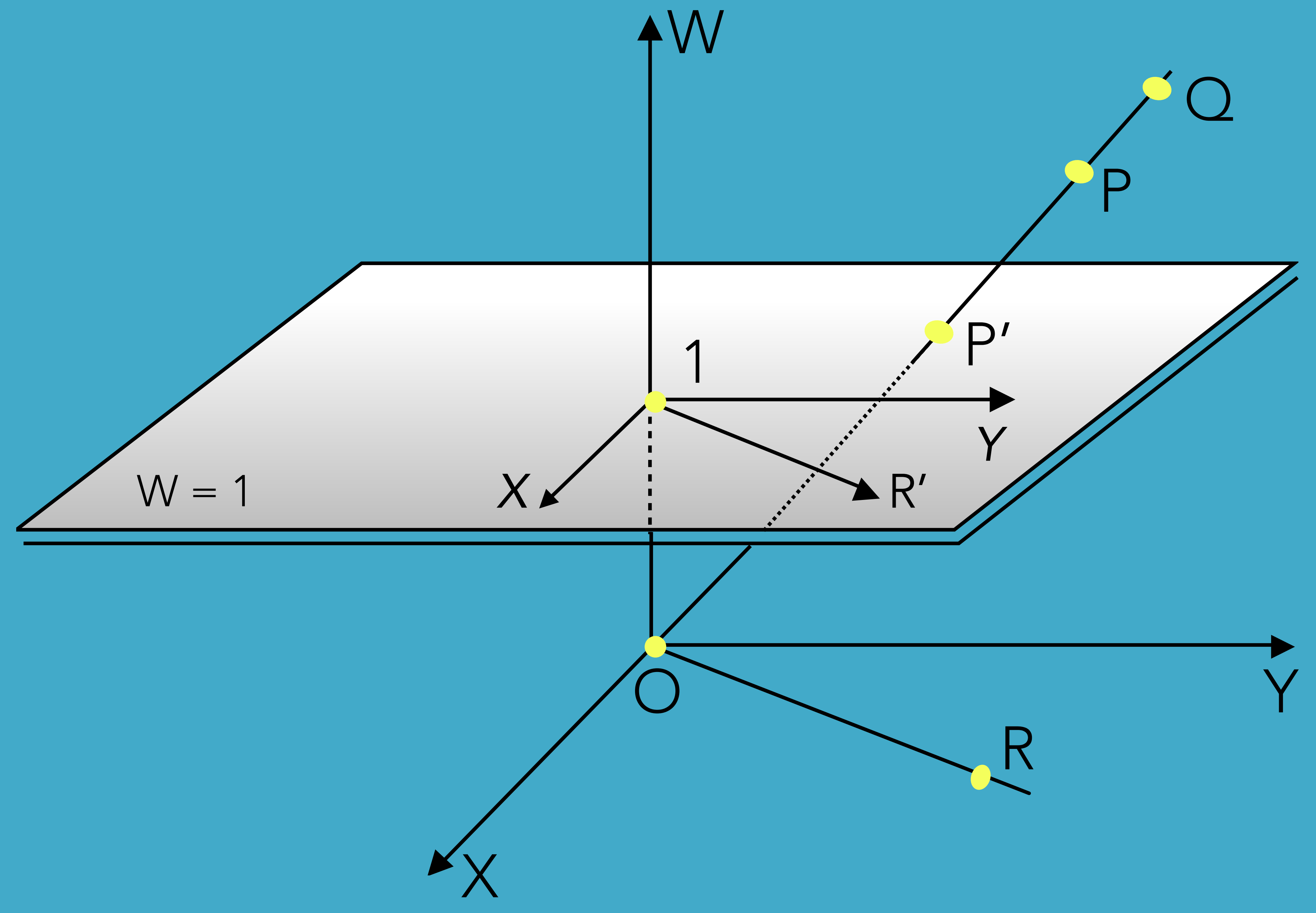
•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

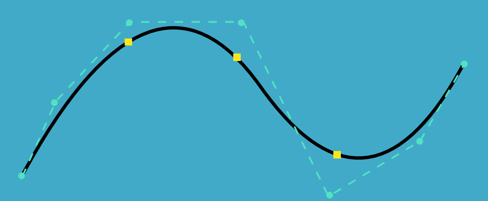
Si può dare una definizione geometrica delle Nurbs usando un modello che incorpora lo spazio proiettivo di dimensione n nello spazio euclideo di dimensione (n+1).

NURBS

•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

Spazio euclideo a tre dimensioni (X, Y ,W)



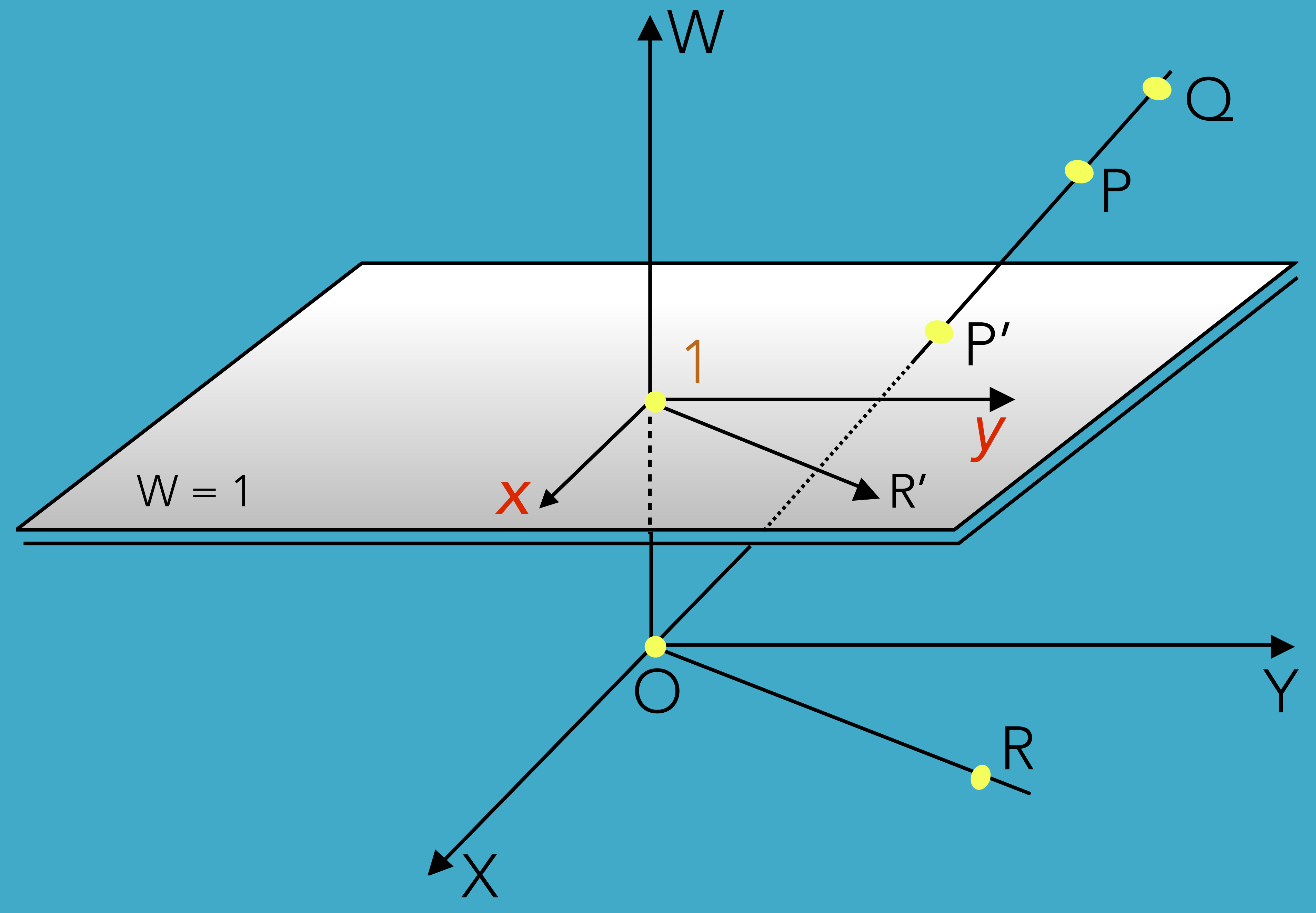


NURBS

•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

Spazio euclideo a tre dimensioni (X, Y ,W)

x e y le coordinate di un altro sistema
con x parallelo a X e y a Y e
origine in (X,Y,W)=(0,0,1)



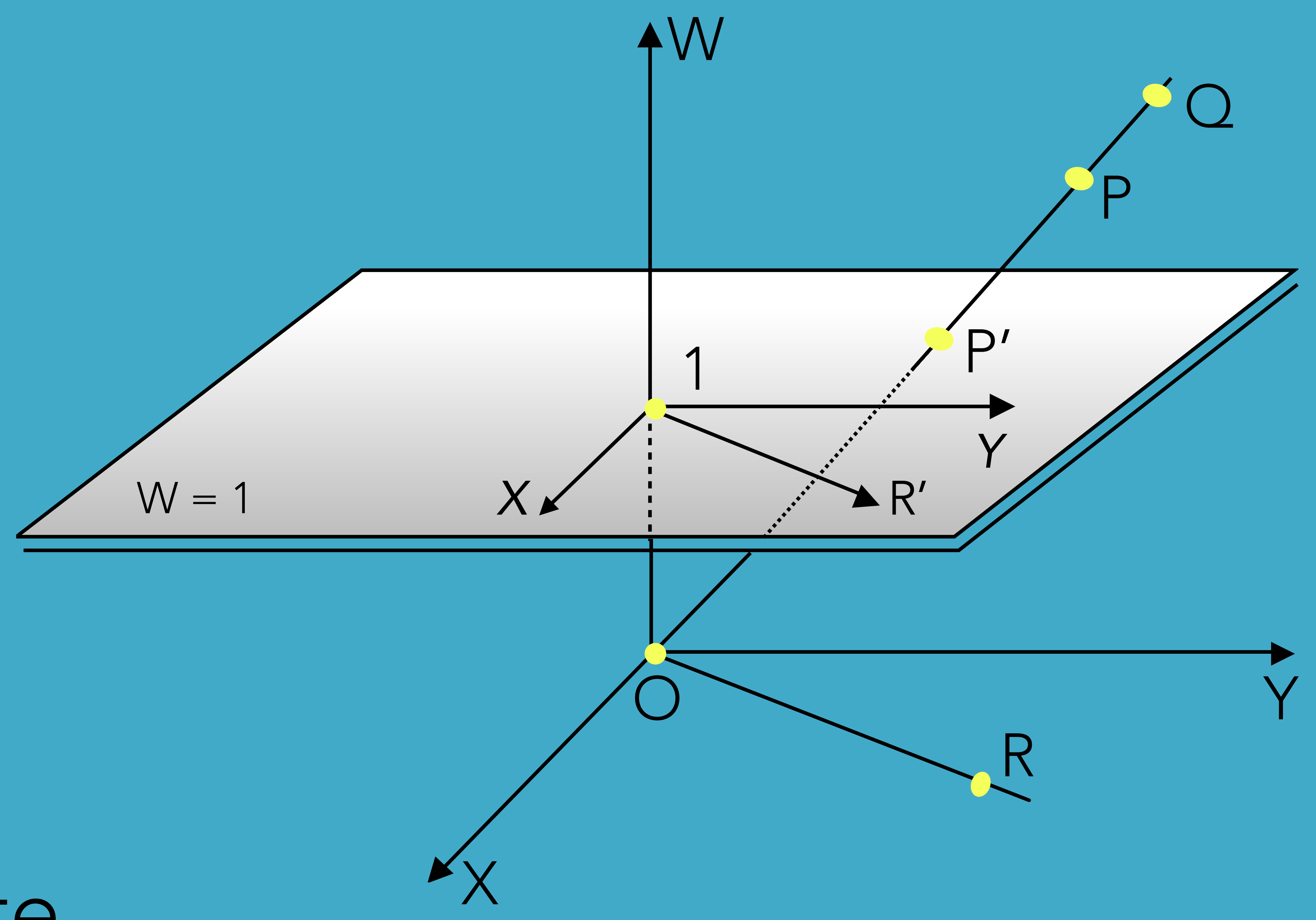
NURBS

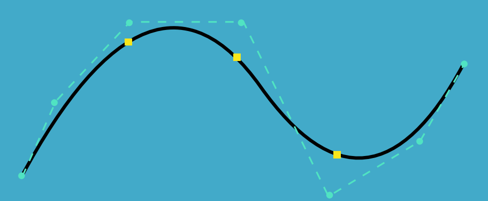
•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

Spazio euclideo a tre dimensioni (X, Y ,W)

x e y le coordinate di un altro sistema
con x parallelo a X e y a Y e
origine in (X,Y,W)=(0,0,1)

Le coordinate (XP, YP, WP) di P sono dette coordinate omogenee di P'.
La posizione di P lungo OP' è completamente arbitraria fintantoché O differisce da P





NURBS

•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

A partire dalle definizioni date, **si può costruire un modello geometrico delle Nurbs**.

Per semplicità si considerano solo **curve planari.**
Ciascun punto nel sistema (X,Y,W) può essere scritto come (xw, yw, w) se w è diverso da 0 e può essere mappato nel piano (x,y) con i punti:

$$\Psi(x,y,w)=\begin{cases} \left(\frac{X}{W},\frac{Y}{W}\right) se\ W \neq 0 \\ direzione\ (X,Y) se\ W = 0 \end{cases}$$

NURBS

•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

Se si definisce un insieme di punti di controllo con determinati pesi, allora si possono seguire i seguenti passi:

1. **Costruire i vertici pesati:**
   $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)$, i=0,…,n

NURBS

•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

Se si definisce un insieme di punti di controllo con determinati pesi, allora si possono seguire i seguenti passi:

1. Costruire i vertici pesati:
   $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)$, i=0,…,n

2. **Ottenere una curva B-spline non razionale nel sistema di coordinate X,Y,W:**
   $$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i^w N_{i,p}(u)$$

NURBS

•NURBS' GEOMETRIC SENSE•

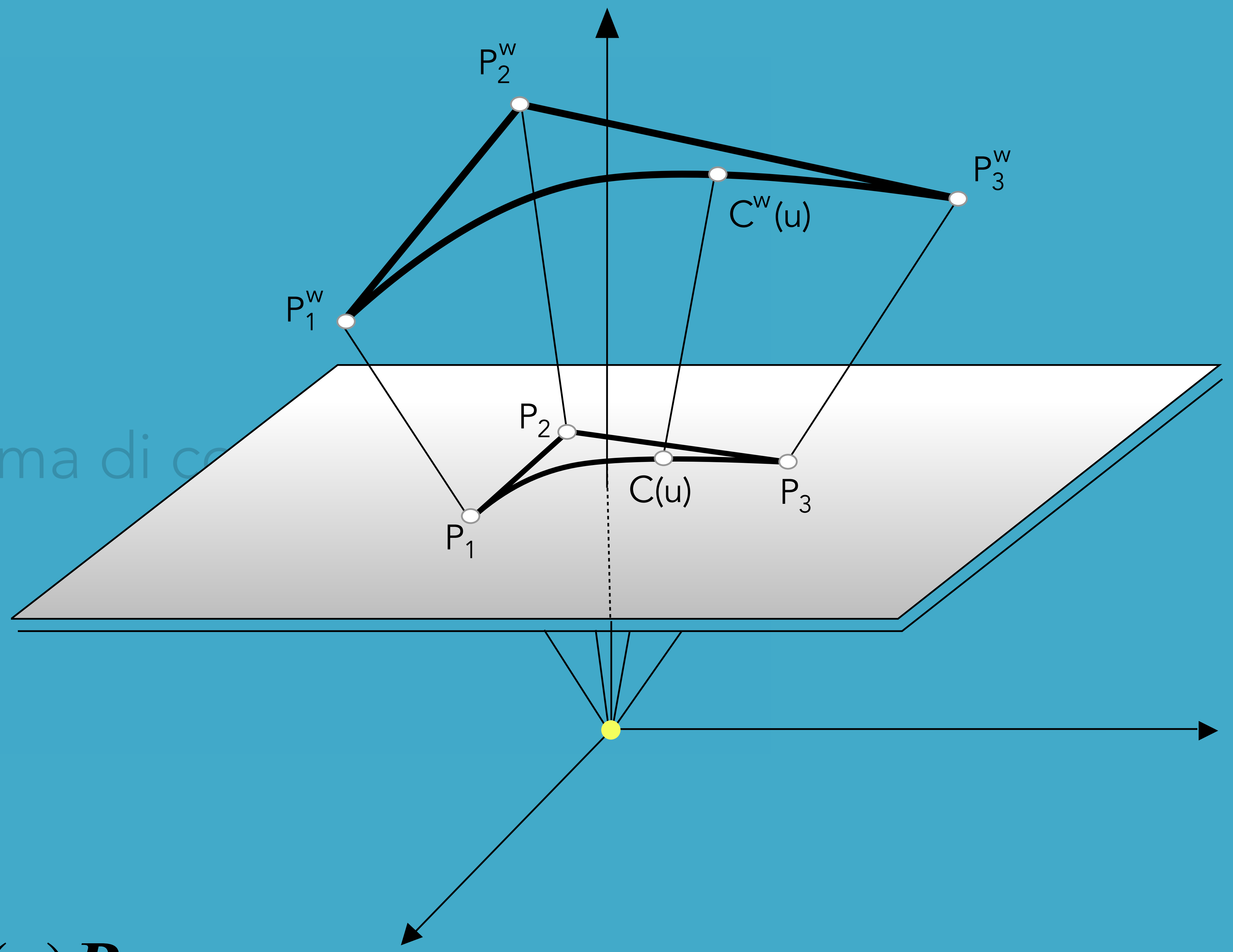
Se si definisce un insieme di punti di controllo con determinati pesi, allora si possono seguire i seguenti passi:

1. Costruire i vertici pesati:

   $P_i^w = (w_i x_i,\ w_i\ y_i,\ w_i)$, i=0,…,n

2. Ottenere una curva B-spline non razionale nel sistema di co

   $$C^w(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i^w N_{i,p}(u)$$



3. **Mappare la curva in un piano x, y:**

$$\boldsymbol{C(u) = \varphi\left(C^w(\mathbf{u})\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i\ N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^{n}\ w_i N_{i,p}(u)} = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u) P_i}$$

NURBS

•SHAPE MANIPULATION•

Ci sono vari modi per alterare una figura con la definizione di Nurbs:

1. Riposizionare i punti di controllo

$$P_i^* = P_i + \alpha W$$

NURBS

•SHAPE MANIPULATION•

Ci sono vari modi per alterare una figura con la definizione di Nurbs:

1. Riposizionare i punti di controllo

$$P_i^* = P_i + \alpha W$$

$$\alpha = \frac{d}{|W|} R_{i,p}(u), \quad u \in [u_i, u_{i+p+1}) \text{ e d distanza tra } P_i^* \text{ e } P_i$$

NURBS

•SHAPE MANIPULATION•

Ci sono vari modi per alterare una figura con la definizione di Nurbs:

1. Riposizionare i punti di controllo

$$P_i^* = P_i + \alpha W$$

vettore di direzione

NURBS

•SHAPE MANIPULATION•

Ci sono vari modi per alterare una figura con la definizione di Nurbs:

1. Riposizionare i punti di controllo

2. Cambiare i pesi

I pesi modificano la pienezza di una Nurbs. Si assuma che la Nurbs, per un certo parametro u, deve essere tirato verso (spinto lontano da) P_i di una distanza d. Si può ottenere ricalcolando il peso corrispondente in questo modo:

$$w_i^* = w_i\left[1 \pm \frac{d}{R_{i,p}(u)(D-d)}\right] \text{ dove } D = |P_i - S_i|, \; con \; S_i = C(u)$$

NURBS

•SHAPE MANIPULATION•

Ci sono vari modi per alterare una figura con la definizione di Nurbs:

1. Riposizionare i punti di controllo

2. Cambiare i pesi

3. **Modificare il vettore dei nodi**

NURBS

•SHAPE MANIPULATION•

Ci sono vari modi per alterare una figura con la definizione di Nurbs:

1. Riposizionare i punti di controllo

2. Cambiare i pesi

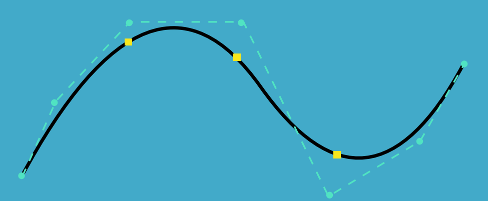
3. Modificare il vettore dei nodi

4. Muovere i punti relativi ai dati e reinterpolare

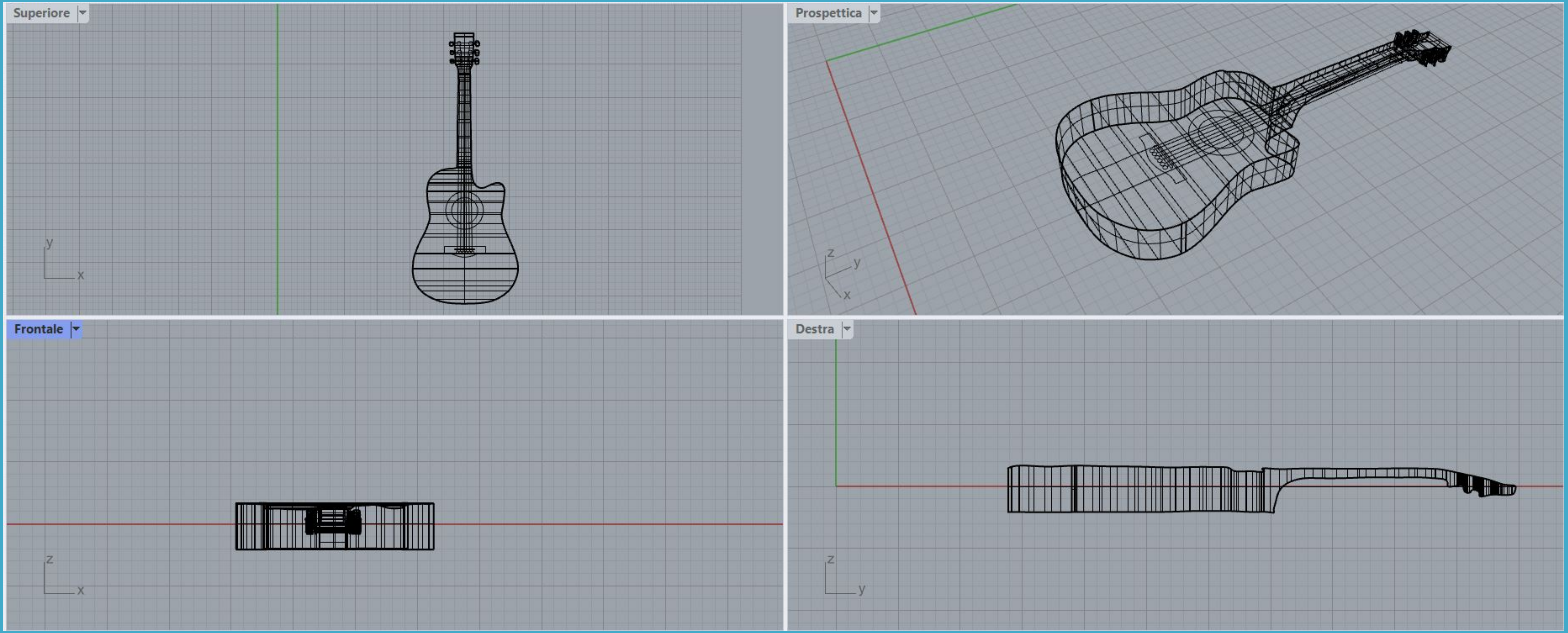
RHINO 7

Rhinoceros, comunemente chiamato **Rhino**, è un software applicativo commerciale per la modellazione 3D di superfici sculturate realizzato da Robert McNeel & Associates. Strumento grafico ampiamente utilizzato per il CAD/CAM e per svariati altri scopi.

In Rhino, tutte le entità geometriche sono rappresentate mediante NURBS



ELABORATO IN RHINO



Antimo **Barbato**
M631079

Francesco Erminio **Di Fruscio**
M631004