Vorlesungsmitschrift

Algorithmische Mathematik 1

Wintersemester 2021/2022 *
Universität Bonn

Fabian

30.01.2022

Online aufrufbar auf https://git-fabus.github.io.
Veränderungsvorschläge und Verbesserungen bitte an git-fabus@uni-bonn.de.

*Letzte Änderung: (None) Commit: (None)

Preface

Das folgende Skript sind meine persönlichen Notizen für die Vorlesung *Algorithmische Mathematik 1*, welche von Dr. Jürgen Dölz an der Universität Bonn gehalten wurden. Diese Mitschriften wurden intial als Klausurvorbereitung verfasst.
Seit dem wurde das Skript ständig überarbeitet und soll nun als Vorlesungkript für den jeweiligen Vortragenden der Alma 1 dienen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Algorithmische Mathematik -Was ist das?

Gegenstand der Alma ist die Konstruktion und ANalyse effizienter Algorithmen zur Lösung mathematischer Problemstellugnen mit Hilfe des Computers.
Damit liegt sie im Bereich der Angewandten Mathematik. Konkrete Problemstellungen ergeben sich oft aus technischen Problemen, Naturwissenschaften, Medizin etc.
Man kann hierbei annehmen, dass verschiedene Problemstellungen aus der Anwendungen oft zu ähnlichen oder gleichen mathematischen Modellen zurückgeführt werden können.

1.1 **Beispiel.** Ein typisches Problem ist das lösen eines linearen Gleichungssystems.

Im Rahmen dieser Vorlesung konzentrieren wird uns auf die Teilbereiche

a) Numerik

b) Diskrete Mathematik

c) Statistik

der Angewandten Mathematik

2 Zahlendarstellung am Computer

2.1 Zahlensystem

Die Darstellung von Zahlen basiert auf sogenannten *Zahlensystemen*. Diese Zahlensysteme unterscheiden sich in der Wahl des zugrundeliegendes Alphabets. Unsere Zahl entspricht dann einem Wort, bestehend aus Elementen des Alphabets.

2.1 **Definition** (Alphabet). Es sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ und $b \in \mathbb{N}$.
Wir bezeichnen mit $\sum_b$ das Alphabet des *b-adischen Zahlensystems*

2.2 **Beispiel.** Verschiedene Zahlensysteme

a) Dezimalsystem: $\sum_{10} = \{0, 1, \ldots, 9\}$
wie $(384)_1 0$

b) Dual bzw. Binärsystem $\sum_2 = \{0, 1\}$
wie $(42)_1 0 = (101010)_2$

c) ...

Um die Zahlendarstellung sinnvoll zu nutzen Ergibt sich folgendes:

2.3 **Satz.** Seien $b, n \in \mathbb{N}, b > 1$.
Dann ist jede ganze, nicht-negative Zahl z mit $0 \leq z \leq b^n - 1$ *eindeutig* als Wort der Länge n über $\sum_b$ darstellbar durch:

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i$$

mit $z_i \in \sum_b$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
Wir schreiben vereinfachend:

$$z = (z_{n-1}, \ldots, z_0)_b$$

Beweis. • Induktion

◊ *Induktionsanfang*: $\underline{z < b}$ hat die eindeutige Darstellung $z_0 = z$ und $z_i = 0$ sonst.

◊ *Induktionsschritt*: $\underline{z - 1 \to z \geq b}$

Betrachte

$$z = \left\lfloor \frac{z}{b} \right\rfloor \cdot b + (z \mod b)$$

Da $\hat{z} < z$ besitzt die eindeutige Darstellung

$$\hat{z} = (\hat{z_{n-1}}, \ldots, \hat{z_0})_b$$

Bemerke $\hat{z_{n-1}} = 0$, da

$$\left(\hat{z_{n-1}} b^{n-1}\right) b \leq z \leq b^n - 1$$

Also ist z_b eine n-stellige Darstellung von z in b-adischen Zahlensystem

- Eindeutigkeit wird durch Widerspruch gezeigt.
  Angenommen: Es gibt zwei verschiedene Darstellungen

$$z = \left(z_{n-1}^{(2)}, \ldots, z_0^{(2)}\right)_b = \left(z_{n-1}^{(1)}, \ldots, z_0^{(1)}\right)_b$$

  Sei $m \in \mathbb{N}$ der größte Index mit $z_m^{(1)} \neq z_m^{(2)}$,
  Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann gesagt werden $z_m^{(1) > z_m^{(2)}}$.
  Dann müssten die Stellen $0, 1, \ldots, m-1$ den niedrigeren Wert von $z_m^{(2)}$ kompensieren.
  Die größte mit diesen Stellen darstellbare Zahl ist aber:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (b-1)b^i = (b-1) \sum_{i=0}^{m-1} b^i = b^m - 1.$$

  Da b^m der kleinstmögliche Wert der fehlende Stelle m ist, kann diese aber nicht kompensiert werden. Dies ist ein Widerspruch.

□

Durch den Beweis ergibt sich sofort ein Algorithmus zur Umwandlung einer Zahl in ein anderes Zahlensystem:

2.4 Beispiel. Umwandlung von $(1364)_{10}$ in das Oktalsystem.

- $1364 = 170 \cdot 8 + 4$
- $170 = 21 \cdot 8 + 2$
- ...
- $0 \cdot 8 + 2$

$\implies (2524)_8$

Daten: Dezimalzahl $z \in \mathbb{N}_0$, Basis $b \in \mathbb{N}$
Ergebnis: b-adische Darstellung $(z_{n-1}, \ldots, z_0)_b$
Initialisiere $i = 0$
solange $z > 0$ **tue**
  $z_i = z \mod b$
  $z = \left\lfloor \frac{z}{b} \right\rfloor$
  $i = i + 1$
Ende

Algorithmus 1: Bestimmung der b-adischen Darstellung

Beobachtung Wir sehen, dass das Honor-Schmea nur eine Schleife, Additionen und Multiplikationen benötigt. Diese Operationen können wir am Computer durchführen. Im Gegensatz dazu steht die Potenz b^i in modernen Programmiersprachen zwar zur Verfügung, wird aber im Hintergrund oft auf Multiplikationen zurückgeführt. Man überprüft leicht, dass das Honor-Schema weniger Multiplikationen benötigt und somit schnellt ist.

2.2 Vorzeichen-Betrag-Darstellung

Um auch Zahlen mit Vorzeichen am Computer darstellen zu können, betrachten wir im Folgenden die Vorzeichen-Betrag-Darstellung für Binärzahlen. Das Binäralphabet besteht nur aus 0 und 1, welche wir auch als *Bits* bezeichnen. Bei einer Wortlänge von n Bits wir das erste Bit als Vorzeichen verwendet, die restlichen $n-1$-Bits für den Betrag der Zahl. Da die 0 die Darstellung $+0$ und $-O$ besitzt, können wir insgesamt $2^n - 1$ Zahlen darstellen.

2.5 **Beispiel.** Für $n = 3$

Bitmuster	Dezimaldarstellung
000	$+0$
001	$+1$
...	...
100	-0
...	...
111	-3

Aber: Diese Darstellung am Computer ist unpraktisch, da die vier Grundrechenarten auf Hardwareebene typischerweise mit Hilfe von Addition und Zusatz-Logik umgesetzt werden.

Lösung: Komplementdarstellung

2.3 Komplementdarstellung

2.6 **Definition** ((b-1)-Komplement). Sei $z = (z_{n-1} \dots z_1 z_0)_b$ eine n-stellige b-adische Zahl. Das *(b-1)-Komplement* $K_{b-1}(z)$ ist definiert als:

$$K_{b-1} = (b - 1 - z_{n-q}, \dots, b - 1 - z_0)_b$$

Geben wir hierzu direkt ein paar Beispiele an

2.7 **Beispiel.** Komplemente

- $K_9((325)_{10}) = (674)_{10}$ (9er-Komplement im 10-er System)
- $K_1((10110)_2) = (01001)_2$ (1er-Komplement im 2er System)

2.8 **Definition** (b-Komplement). Das b-Komplement einer b-adischen Zahl $z \neq 0$ ist definiert als

$$K_b(z) = K_{b-1}(z) + (1)_b$$

2.9 **Beispiel.** • $K_{10}((325)_{10}) = (674)_{10} + (1)_{10} = (675)_{10}$

2.10 Lemma. Für jede n-stellige b-adische Zahl z gilt:

- i) $z + K_{b-1}(z) = (b-1, \dots, b-1)_b = b^n - 1$
- ii) $K_{b-1}\left(K_{b-1}(z)\right) = z$

Ist außerdem $z \neq 0$ so gilt:

- iii) $z + K_b(z) = b^n$
- iv) $K_b(K_b(z)) = z$

Beweis. Hilfssatz

(i) Durch nachrechnen:

$$\begin{aligned} z + K_{b-1}(z) &= (z_{n-1} \dots z_0)_b + (b-1-z_{n-1}, \dots, b-1-z_0)_b \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^i + \sum_{i=0}^{n-1} (b-1-z_i) b^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (b-1) b^i = (b-1, \dots, b-1)_b \\ &= (b-1) \sum_{i=0}^{n-1} b^i \\ &= (b-1) \left(\frac{b^n - 1}{b-1} \right) \\ &= b^n - 1 \end{aligned}$$

- (ii) per Definition
- (iii) Nachrechnen:

$$z + K_b(z) = z + K_{b-1} + 1 = b^n - 1 + 1 = b^n$$

- Definiere $\hat{z} = K_b\,(z) = K_{b-1}(z) + (1)_b > 0$ und rechne

$$z + K_b(z) = b^n = \hat{z} + K_b \hat{z} + K_b\left(K_b(z)\right) \implies \text{Behauptung.}$$

□

2.11 Bemerkung. Modifikation

- Die 3. Aussage gilt auch für $z = 0$, falls man dann bei der Addition von 1 die Anzahl der Stellen erweitert.
- die 4. Aussage gilt für $z = 0$, falls überall im Beweis modulo b^n gerechnet wird.

Außerdem impliziert die 3. Aussage des Lemmas, dass

$$K_b(z) = b^n - z. \tag{2.1}$$

Dies können wir geschickt zum Darstellen der b^n verschiedenen ganzen Zahlen z mit

$$-\left\lfloor \frac{b^n}{2} \right\rfloor \leq z \leq \left\lceil \frac{b^n}{2} \right\rceil - 1$$

nutzen. Diesen Bereich nennt man darstellbaren Bereich.

2.12 Definition (b-Komplement-Darstellung). Die b-Komplement-Darstellung $(z)_{K_b} = (z_{n-1} \dots z_0)_b$ einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ im darstellbaren Bereich ist definiert als:

$$(z)_{K_b} = \begin{cases} (z)_b & \text{falls } z \geq 0 \\ (K_b(|z|))_b & \text{falls } z < 0 \end{cases}$$

2.13 Beispiel. Der darstellbare Bereich.

- Sei $b = 10$, $n = 2$.
  Dann impliziert (2.1), dass

  $$K_{10}(50) = 10^2 - 50 = 50$$

  $$K_{10}(49) = 100 - 49 = 51.$$

  Der darstellbare Bereich ist nun

  $$-50 \leq z \leq 49$$

  und hat konkrete Darstellungen:

Darstellung	Zahl
0	+0
1	+1
...	...
49	+49
50	−50
...	...
99	−1

- Sei $b = 2$, $n = 3$ Der darstellbare Bereich ist $-4 \leq z \leq 3$.

Bitmuster	Dezimaldarstellung
000	0
001	1
...	...
100	−4
...	...
111	−1

Wir betrachten nun Addition und Subtraktion zweier Zahlen in b-Komplement-Darstellung. Hierzu bezeichne $(x)_{K_b} \oplus (y)_{K_b}$ die ziffernweise Addition der Darstellungen von x und y mit Übertrag ("schriftlich rechnen"), wobei ein eventueller Überlauf auf die $(n+1)$-te Stelle vernachlässigt wird (wir rechen also immer mit modulo b^n.

2.14 **Satz** (Addition in b-Komplement-Darstelllung). Seien x und y zwei n-stellige, b-adische Zahlen und x,y und $x+y$ im darstellbaren Bereich. Dann gilt:

$$(x+y)_{K_b} = (x)_{K_b} \oplus (y)_{K_b}$$

Beweis. Wir betrachten dazu mehrere Fälle.

- Fall $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} (x)_{K_b} \oplus (y)_{K_b} &\overset{\text{Def.}}{=} ((x)_b + (y)_b) \mod b^n \\ &\overset{\text{Def.}}{=} (x+y) \mod b^n \\ &\overset{\text{Def.}}{=} (x+y)_{K_b} \end{aligned}$$

  Der letzte Schritt ist möglich, da $(x+y)_{K_b}$ im darstellbaren Bereich sind.

- Fall $x, y < 0$

$$\begin{aligned} (x)_{K_b} \oplus (y)_{K_b} &\overset{Def.}{=} ((K_b(|x|))_b + (K_b(|y|))_b) \mod b^n \\ &= ((K_b(|x|)) + (K_b(|x|))) \mod b^n \\ &= (b^n - |x| + b^n - |y|) \mod b^n \\ &= (x+y) \mod b^n \\ &= (x+y)_{K_b} \end{aligned}$$

- Fall $x \geq 0, y < 0$:

$$\begin{aligned} (x)_{K_b} \oplus (y)_{K_b} &\overset{Def.}{=} ((x)_b + (K_b(|y|))_b) \mod b^n \\ &= (x + K_b(|y|)) \mod b^n \\ &= (x + b^n - |y|) \mod b^n \\ &= (x+y) \mod b^n \\ &= (x+y)_{K_b} \end{aligned}$$

- Fall $x < 0, y \geq 0$: Analog

□