

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix} \quad T_2 \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_1 = IT_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (Apply to column) \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$T_3 \left( \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = IT_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad S_3 S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = IT_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_3 S_2 S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{-1} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 16 \\ -15 & 0 & -25 \\ 6 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Wrong

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_2 \rightarrow R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \end{array}$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ R_3 \rightarrow R_3 \end{array} = A^{-1}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

