Лабораторна №1. Розкриття невизначеності цілей на підставі принципу Парето. Крицький А.О. Варіант №13

Анотація

Невизначеність - типова властивість для задач системного аналізу. На практиці є найпоширенішими є невизначеності цілей, ситуацій, конфліктів. В даній лабораторній роботі буде розглядатись метод розкриття однієї з них, а саме - невизначеності цілей.

1. Теоретичні відомості [1]

У загальному випадку - цілі потрібно узгоджувати, тому що для одних цілей оптимальні розв'язки відповідають мінімуму, а для інших - максимуму. Такі задачі легко можна звести до єдиного типу критеріїв, тому будемо розглядати багатокритеріальну задачу оптимізації:

$$f_1(\bar{x}) \to max_{x \in D} \; , f_2(\bar{x}) \to max_{x \in D} \; , \ldots , f_m(\bar{x}) \to max_{x \in D},$$

Оскільки ці задачі різні за своєю природою, то кожна функція досягає максимального значення для свого х (крім випадку, коли глобальні максимуми збігаються). Звідси і випливає задача знаходження такого значення x^0 , за якого забазпечуватиметься раціональний компроміс заданих цілей.

Для знаходження раціонального компромісу існує два основні підходи:

1. Виключити з аналізу заздалегідь неприйнятні варіанти
2. Знайти способи зведення багатоцільової задачі до типової задачі з одним критерієм

1.1 Ефективність за Парето

В основі першого методу лежить ідея[2] ефективності за Парето.

Покращення за Парето: розподіл ресурсів покращуваний за Парето, якщо існує інший розподіл, у якому один об'єкт перебуває в кращому стані, а жоден інший об'єкт не перебуває в гіршому стані.

Ефективність за Парето: розподіл ресурсів є ефективним за Парето, якщо покращення за Парето неможливе.

Цю ідею можна реалізувати так. Припустимо вибрано вектор $\bar{x}$, позначимо $\overline{x}^* \in D$. Робимо інший вибір так, щоб для всіх цільових функцій

$$f_j(\tilde{\overline{x}}) \geq f_j(\overline{x}^*), j = \overline{1, m} \tag{1.1}$$

при чому хоча б одна з нерівностей є строгою. Очевидно, що (в сенсі величини функцій) вибір $\tilde{\overline{x}}$ є кращим за $\overline{x}^*$. Тому всі вектори зі значенням $\overline{x}^*$, для яких виконується 1.2, слід вилучити. Вектори $\overline{x}^*$ для яких нерівність 1.2 не виконується хоча б за однією цільовою функцією (тобто не існує такого значення $\tilde{\overline{x}}$) треба піддавати неформальному аналізу, зіставляти між собою.

Множину всіх таких значень, для яких неможливо підібрати $\tilde{\overline{x}}$ з умови 1.2 називають **множиною Парето**, а вектор $\overline{x}^*$ - неполіпшуваним вектором результатів (вектором Парето).

Цей принцип не дає змогу виділити один єдиний розв'язок, а всьо-навсього звузити множину можливих альтернативних розв'язків. Побудова множини Парето дає змогу отримати додаткову інформацію, що сприяє якісній оцінці під час зіставлення різних варіантів. Проте вибір оптимального варіанту залишається за особою, яка приймає рішення (ОПР).

1.2 Метод технічних обмежень

Деякі методи розкриття невизначеностей цілей грунтуються на використанні апріорної інформації про задані цілі: напр. обмеження зверху (загальна вартість, допустимі габарити, вага тощо) або обмеження знизу (показники надійності, міцності, довговічності тощо). Обива ці обмеження можна звести до однієї з форм.

Припустимо, що апріорно введені обмеження на цільові функції

$$f_i(x) \leq f_i^*, i = \overline{1, m} \tag{1.2}$$

або

$$f_i(x) \geq f_i^*, i = \overline{1, m} \tag{1.3}$$

За цих обмежень необхідно забезпечити

$$f_i(x) \to max, i = \overline{1, m} \tag{1.4}$$

Для такої постановки задачі можливі різні варіанти розкриття невизначеності цілей завдяки зведенню багатоцільової задачі до стандартної одноцільової.

1.2.1 Максимінна задача оптимізації:

$$F_1(x) = min_{i \in [1,m]} \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{1.5}$$

для кожного значення x. Потрібно шукати такі значення x^0, що задовільняють умову $F_1(x^0) = max_{x \in D} F_1(x)$. D - допустима багатовимірна область зміни вектора x, яка задана, наприклад, за допомогою конструктивних або технологічних обмежень. Гарантовано, що у найгіршому випадку (який відповідає $min_{x \in [1,m]} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$) буде забезпечено максимальне значення $F_1(x)$.

1.2.2 Мінімаксна задача оптимізації

$$F_2(x) = max_{i \in [1,m]} \frac{f_i(x)}{f_i^*} \tag{1.6}$$

задача аналогічно протилежна попередній

Різниця між цими двома варіантами полягає в тому, що вони стосуються різних умов оптимальності. Перший варіант забезпечує максимально можливе відхилення серед усіх $f_i(x)$ від їх заданих значень f_i^*. Такого відхилення досягають для найгіршого випадку за умови

$$F_1(x^0) = max_{x \in D} min_{i \in [1,m]} \frac{f_i(x)}{f_i^*}$$

Другий ж варіант - є оберненою задачею: забезпечення мінімально можливого відхилення всіх $f_i(x)$ від заданих значень f_i^*.

2. Постановка задачі

Цільова функція першого об'єкта - $f_1(x) = 0,8\exp(-2(x-3)^2)$, другого - $f_2(x) = 10 - 6x + x^2$
Обмеження: $f_1(x) \leq f_1^*$, $f_2(x) \geq f_2^*$, $f_1^* = 0.2, f_2^* = 1, x \in [1,5]$

Отже задача буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} 0,8\exp(-2(x-3)^2) \leq 0.2 \\ 10 - 6x + x^2 \geq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

при $x \in [1,5]$

3. Розв'язання

Загальний алгоритм[1] виглядає так:

1. Знайти множину Парето у заданій допустимій множині і визначити умови раціонального компромісу для заданих цільових функцій, враховуючи порогові обмеження
2. Звузити множину Парето, використовуючи прийом технічних обмежень (мінімаксна та максимінна оптимізація на множині Парето)

3.1 Визначення множини Парето

Множина Парето визначається вручну, аналітичним методом, тому що написання загальної програми для розв'язування систем нерівностей не дає ніякої переваги, окрім точності. А оскільки визначення множини виконується вручну, то зведення заданих обмежень до однієї форми не має сенсу.

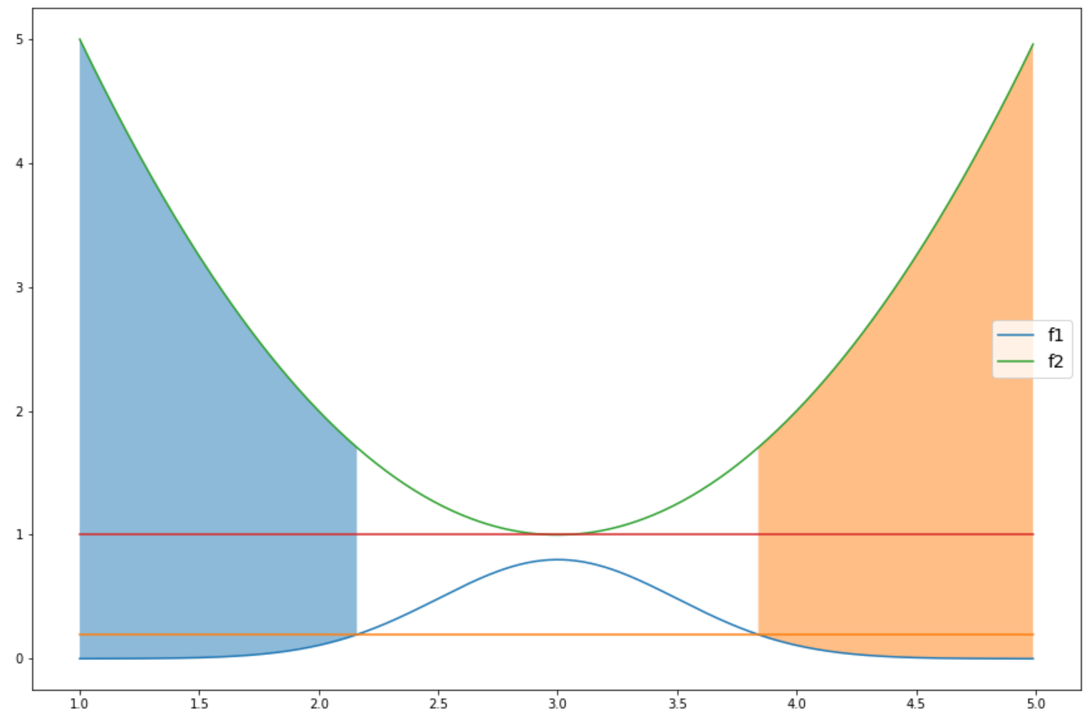
Розв'язання системи нерівностей (2.1) виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} 0.8e^{-2(x-3)^2} &\leq 0.2 \\ \frac{4}{5}e^{-2(x-3)^2} &\leq \frac{1}{5} \\ e^{-2(x-3)^2} &\leq \frac{1}{4} = 2^{-2} \\ -(x-3)^2 &\leq -\ln(2) \\ |x-3| &\geq \sqrt{\ln(2)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 - 6x + x^2 &\geq 1 \\ x^2 - 6x + 9 &\geq 0 \\ (x-3)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$x_1 \in (-\infty; -\sqrt{\ln(2)} + 3] \cup [\sqrt{\ln(2)} + 3; \infty)$
$x_2 \in R$
$D \in [1, 5]$
Отже шукана множина Парето лежить в інтервалі:

$$x \in [1; 3 - \sqrt{\ln(2)}] \cup [\sqrt{\ln(2)} + 3; 5] \approx [1; 2.167] \cup [3.833; 5]$$

На графіку функції це має наступний вигляд:



Логічно, що розв'язком будуть внутрішні границі, тобто $x^0 = \sqrt{\ln(2)} + 3$ і $x^0 = 3 - \sqrt{\ln(2)}$, оскільки чим правіше(лівіше) x^0 від цих точок по осі абсцис, тим менше значення функції f_1, тобто більш "невигідні" для неї умови. Проте, однієї логіки не достатньо.

3.2 Метод технічних обмежень

Наведені результати обчислювались та візуалізувались програмно[3], використовуючи мову програмування Python та допоміжні біблотеки NumPy, Pandas, Matplotlib.

Загальні процедури для мінімаксної та максимінної оптимізації виглядають наступним чином:

```
def maxmin(*f_result):
  stacked = np.column_stack(f_result)
  min_ = np.amin(stacked, axis=1)
  return np.amax(min_), np.argwhere(min_ == np.amax(min_)).flatten(), stacked, min_


def minmax(*f_result):
  stacked = np.column_stack(f_result)
  max_ = np.amax(stacked, axis=1)
  return np.amin(max_), np.argwhere(max_ == np.amin(max_)).flatten(), stacked, max_
```

Функція maxmin на вхід отримує результати операції $\frac{f_i(x)}{f_i^*}, i = \overline{1, n}$, знаходить для кожного рядка мінімум та повертає 4 об'єкта (відповідно): maxmin елемент, індекс таких елементів, об'єднані колонки з результатами операцій, колонку з мінімальними значеннями для кожного x. Аналогічно працює процедура minmax.

3.3 Висновки

В результаті роботи програми (при точності $\epsilon = 10^{-4}$ та з кроком сітки 0.001) була получена наступна таблиця (наведені лише 10 рядків навколо розв'язку):

	x	f1/f1*	f2/f2*	max(f/f*)	min max(f/f*)	min(f/f*)	max min(f/f*)
1162	2.162000	0.982000	1.702200	1.702200	-	0.982000	-
1163	2.163000	0.985300	1.700600	1.700600	-	0.985300	-
1164	2.164000	0.988600	1.698900	1.698900	-	0.988600	-
1165	2.165000	0.991900	1.697200	1.697200	-	0.991900	-
1166	2.166000	0.995200	1.695600	1.695600	-	0.995200	-
1167	2.167000	0.998500	1.693900	1.693900	1.693900	0.998500	0.998500
1168	3.833000	0.998500	1.693900	1.693900	1.693900	0.998500	0.998500
1169	3.834000	0.995200	1.695600	1.695600	-	0.995200	-
1170	3.835000	0.991900	1.697200	1.697200	-	0.991900	-
1171	3.836000	0.988600	1.698900	1.698900	-	0.988600	-

Як і було зображено на графіку, на правій ділянці функція f_2 (а отже і максимум) має тенденцію зростати, а f_1 (а отже і мінімум) - спадати. Тому раціональним компромісом для двох досліджуваних функцій слід обрати нижню границю $x = \sqrt{\ln(2)} + 3 \approx 3.833$.
За аналогічним принципом слід вибрати точку $x = 3 - \sqrt{\ln(2)} \approx 2.167$

Джерела інформації

1. Панкратова Н. Д. Системний аналіз. Теорія та застосування. Київ : Наук. Думка, 2018. 5-13с.
2. "Pareto Efficiency". Corporate Finance Institute. Retrieved December 10, 2022.
3. Code on github