Estimativa do número π utilizando Monte Carlo - MAP2212

Antonio Gabriel Freitas da Silva - 13687290

Abril 2023

1 Introdução

Este trabalho possui como intuito princpial apresentar o exercício-programa da disciplina de Laboratório de Computação e Simulação (MAP2212), baseado na distribuição de pontos em um quadrado no intervalo [-1,1] para os eixos x e y, em que há um círculo de raio 1, para obter uma estimativa de π por meio dos Métodos Monte Carlo.

2 Funções utilizadas

O exercício-programa proposto dispôs de 4 funções principais, com o uso das bibliotecas NumPy e MatPlotLib, a primeira para utilizar das propriedades da Álgebra Linear para definir as propriedades automatic's e as proporções que são desejadas, descritas abaixo:

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i), x_i \in [-1,1]^2, \text{ em que}$$

$$T(x) = \mathbb{I}(\|x\|_2 \leq 1)$$

A primeira função que definimos é $T(x)$, em que a variável x está recebendo a norma vetorial usual dentro da variável "norma", utilizamos do comando $np.linalg.norm(x)$ para tal. Nesta função será construído o círculo de raio 1.

Após isso, há a função $EstimativaInicial(n)$, que receberá o número desejado de pontos para serem colocados ao redor do círculo de raio 1 que dentro desta função terão os eixos definidos pelo comando $np.linspace(-2, 2, 100)$ e $np.meshgrid(x, y)$ e os pontos serão aleatoriamente gerados pelo comando $np.random.uniform(-1, 1, (n, 2))$, que para fins demonstrativos, terá uma $np.random.seed(25)$.

Por último, utilizamos a função $NovaEstimativa(n)$, que utiliza principalmente da seguinte propriedade obtida pela amplitude de um intervalo de confiança qualquer abaixo:

$$n = (\frac{z\sigma}{\varepsilon})^2$$

Em que utilizaremos $z = 1.96$ para termos o erro relativo avaliado em 0.05% dentro do intervalo com confiança de 95%, que geram o número aproximado de pontos que são necessários para obter o valor que será estimado para π nestas condições. A função $Main()$ apenas irá pedir um n inicial de amostras e chamar a função $NovaEstimativa(n)$.

3 Observações e discussão

Podemos perceber que a proporção, ao ser quadriplicada, pode-se obter o valor aproximado de π, pela razão entre a área da circunferência de raio r e do quadrado $2r$ se tornar $\frac{\pi}{4}$, ou seja:

$$\pi \approx 4p = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$$

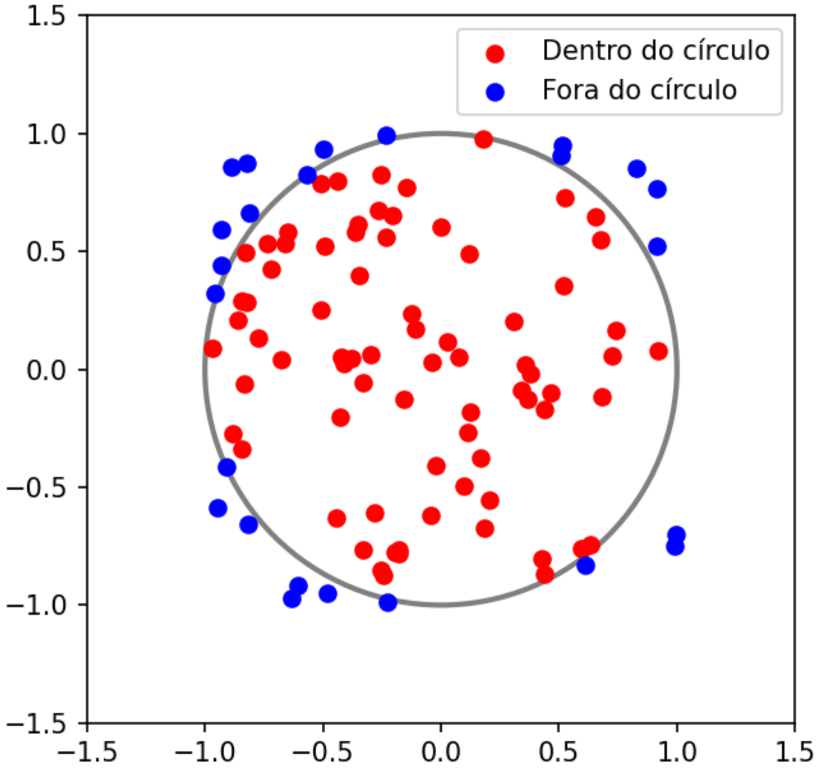

Figura 1: Estimativa de π com 100 pontos

Logo, se realizarmos a amostragem com, a princípio, 100 pontos, com o uso de $EstimativaInicial(n)$, podemos obter o estimador de π avaliado por $\pi_{estimado} \approx 3.04$.

Ao usarmos a função $NovaEstimativa(n)$ (com duração de 1min aproximadamente), ela irá utilizar os valores definidos para o número de amostragens, que utilizamos principalmente a variância $\sigma^2 = p(1-p)$ baseada em uma Bernoulli, de $p = \frac{\pi_{estimado}}{4}$. Com os dados mencionados, obtemos que:

$$\sigma^2_{estimado} = (\tfrac{3.04}{4} \cdot (1 - \tfrac{3.04}{4})) = 0.1824$$

Assim, obtemos o resultado de ε ao avaliarmos que:

$$\frac{4\varepsilon}{\pi_{estimado}} = 0.0005 \implies \varepsilon = 0.000125\pi_{estimado}$$

Que torna:

$$\varepsilon = 0.000125 \cdot 3.04 = 0.00038$$

Agora, para calcularmos n:

$$n = (\tfrac{z\sigma}{\varepsilon})^2 = (\tfrac{1.96}{0.00038})^2 \cdot 0.1824 \approx 4852548$$

Assim, precisamos de 4852548 pontos para termos um π com erro relativo em até 0.05% para tal amostragem.