

# Filtro di Kalman

Antonio Lanciotti, Lorenzo D'Agostino, Arment Pelivani

2019



Rudolf E. Kalman

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cenni di probabilità</b>	<b>4</b>
2.1	Variabili aleatorie o casuali. . . . .	4
2.1.1	Valore atteso . . . . .	4
2.1.2	Varianza . . . . .	4
2.1.3	Covarianza . . . . .	5
2.2	Variabili gaussiane e modellazione dei rumori. . . . .	5
2.3	Vettori casuali . . . . .	6
2.3.1	Valore atteso . . . . .	6
2.3.2	Matrice di covarianza . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Automatica</b>	<b>7</b>
3.1	Sistemi dinamici a tempo discreto . . . . .	7
3.2	Sistemi lineari stocastici . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Osservatore</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Ottimizzazione</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Equazioni del filtro</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Conclusione</b>	<b>12</b>

## **1 Introduzione**

Il filtro di Kalman è un osservatore ottimo dello stato per sistemi lineari in presenza di rumori gaussiani.

## 2 Cenni di probabilità

Il filtro di Kalman è un algoritmo che mira alla ricostruzione dello stato interno di un sistema basandosi unicamente su una serie di misurazioni che, a causa di limiti costruttivi, sono soggette a rumore.

A causa della natura deterministica del problema, risulta necessario affrontare alcuni aspetti della teoria della probabilità, in particolare ci soffermeremo sul concetto di variabile aleatoria normale, o Gaussiana, con l'intento di fornire un modello matematico per gli errori di misura che siamo costretti ad affrontare.

### 2.1 Variabili aleatorie o casuali.

Una variabile casuale/aleatoria è una variabile che può assumere valori diversi in dipendenza da qualche fenomeno aleatorio. In particolare diremo che una variabile casuale  $X$  si dice continua se esiste una funzione  $f(x)$  definita su tutto  $\mathbb{R}$  :  $P(X \in B) = \int_B f(x)dx$  dove la funzione  $f$  si dice *densità di probabilità* della variabile casuale  $X$ .

Una variabile aleatoria è quindi una variabile che può assumere valori appunto casuali la cui probabilità dipende dalla funzione di densità di probabilità ad essa associata.

Le variabili casuali quindi risultano essere un valido strumento matematico per la modellazione dei rumori.

In particolare utilizzeremo le variabili casuali cosiddette Gaussiane o normali che sono caratterizzate dalla funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Per poterle descrivere a pieno dobbiamo però introdurre il concetto di media/valore atteso, di varianza e di covarianza.

#### 2.1.1 Valore atteso

Nella teoria della probabilità il valore atteso di una variabile casuale  $X$ , è un numero indicato con  $E[X]$  che formalizza l'idea di valore medio di un fenomeno aleatorio.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Si noti che l'operatore valore atteso è lineare:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

#### 2.1.2 Varianza

La varianza di una variabile aleatoria è una funzione, che fornisce una misura della variabilità dei valori assunti dalla variabile stessa; nello specifico, la misura di quanto essi si discostino quadraticamente rispettivamente dal valore atteso.

La varianza della variabile aleatoria  $X$  è definita come il valore atteso del quadrato della variabile aleatoria centrata  $X - E[X]$  :

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

### 2.1.3 Covarianza

In statistica e in teoria della probabilità, la covarianza di due variabili aleatorie è un numero che fornisce una misura di quanto le due varino assieme, ovvero della loro dipendenza.

La covarianza di due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  è il valore atteso dei prodotti delle loro distanze dalla media:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Due variabili casuali si dicono *incorrelate* se la loro covarianza è nulla.

La covarianza può essere considerata una generalizzazione della varianza

$$Var(X) = Cov(X, X)$$

## 2.2 Variabili gaussiane e modellazione dei rumori.

Le variabili gaussiane sono particolari variabili aleatorie caratterizzate da due parametri,  $\mu$  e  $\sigma^2$ , e sono indicate tradizionalmente con:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Si può dimostrare che per le variabili gaussiane vale che:

$$E[X] = \mu \quad Var[X] = \sigma^2$$

Come anticipato possiamo modellizzare i vettori di disturbo del sistema che consideriamo, attraverso l'utilizzo di variabili aleatorie gaussiane a media nulla e varianza  $\sigma^2$ , di dimensioni conformi a quelle del sistema considerato.

## 2.3 Vettori casuali

Un vettore casuale è un vettore i cui elementi sono essi stessi variabili casuali.

Risulta necessario estendere le definizioni date in precedenza per caratterizzare rumori che agiscono su sistemi non scalari.

### 2.3.1 Valore atteso

Si dice valore atteso del vettore casuale  $x \in \mathbb{R}^n$  il vettore dei valori attesi delle variabili casuali che lo compongono:

$$E[\mathbf{x}] = (E[x_1] \quad E[x_2] \quad \dots \quad E[x_n])^T$$

Si definisce inoltre il valore quadratico medio di  $\mathbf{x}$  come  $E[\mathbf{x}^T \mathbf{x}]$ .

### 2.3.2 Matrice di covarianza

Si definisce matrice di covarianza del vettore casuale  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  la matrice  $n \times n$ :

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^T]$$

Per come è definita, la matrice di covarianza è una matrice simmetrica semidefinita positiva i cui elementi  $\sigma_{ij}^2$  sono le covarianze tra gli elementi  $x_i$  e  $x_j$  del vettore  $\mathbf{x}$ .

A sua volta si definisce la matrice di *cross-covarianza* tra due vettori casuali  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , la matrice

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])^T]$$

Due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  si dicono *incorrelati* se  $Cov(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

## 3 Automatica

### 3.1 Sistemi dinamici a tempo discreto

Un sistema dinamico a tempo discreto è il modello matematico di un oggetto che interagisce con l'ambiente circostante attraverso canali di ingresso e di uscita che sono rappresentati attraverso vettori,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$ , di variabili dipendenti dal tempo. La differenza principale dai sistemi a tempo continuo è che in questo caso il tempo è rappresentato come una variabile intera  $k$ .

Si avrà pertanto che per ogni istante di tempo  $k$  il sistema riceverà dei segnali in ingresso e risponderà con dei segnali in uscita.

Il vettore  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  rappresenta i segnali che l'oggetto riceve dall'esterno mentre il vettore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  rappresenta i segnali che l'oggetto dà in uscita.

In generale il comportamento del sistema non dipende esclusivamente da questi due vettori, ovvero non vi è un legame diretto tra ingresso e uscita: infatti il sistema ha uno stato interno che evolve in funzione degli ingressi e degli stati precedenti. In particolare lo stato di un sistema può essere a sua volta rappresentato da un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Il modello del sistema è pertanto costituito da equazioni che descrivono l'evoluzione dello stato del sistema in funzione dell'ingresso, dello stato e del tempo e esprimono la relazione d'uscita:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k)\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  sono opportune funzioni vettoriali.

### 3.2 Sistemi lineari stocastici

Consideriamo una particolare tipologia di sistemi, quelli lineari strettamente propri, in cui le funzioni  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  sono appunto funzioni lineari e l'uscita non dipende esplicitamente dall'ingresso. In questo caso le equazioni si possono genericamente scrivere come:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sono matrici di coefficienti variabili nel tempo.

Tuttavia tali modelli sono approssimazioni ideali che possono essere valide in alcuni contesti, mentre in altri è necessario tener conto delle incertezze e delle imprecisioni che si hanno nella misura dei segnali di ingresso e di uscita del sistema.

Il modello del sistema tenendo conto di queste incertezze può essere riscritto come:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k\end{aligned}$$

Le ipotesi che possiamo fare per caratterizzare i termini  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono:

- $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono vettori casuali gaussiani a media nulla:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{w}_k &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)\end{aligned}$$

- $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono incorrelati:

$$E[\mathbf{v}_{k_1} \mathbf{w}_{k_2}^T] = 0 \quad \forall k_1, k_2 \geq 0$$

- $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono bianchi:

$$\begin{aligned}E[\mathbf{v}_{k_1} \mathbf{v}_{k_2}^T] &= 0 & \forall k_1 \neq k_2 \\ E[\mathbf{w}_{k_1} \mathbf{w}_{k_2}^T] &= 0 & \forall k_1 \neq k_2\end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_0$  è un vettore casuale gaussiano con media e varianza note:

$$\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$$

- $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono incorrelati con  $\mathbf{x}_0$ :

$$\begin{aligned}E[\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T] &= 0 & \forall k \geq 0 \\ E[\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T] &= 0 & \forall k \geq 0\end{aligned}$$

Con le ipotesi fatte è possibile passare al problema della progettazione di un osservatore che restituisca una stima dello stato interno del sistema filtrando i rumori e le incertezze sull'evoluzione dello stato e sulla misura dell'uscita.



## 4 Osservatore

Nella teoria del controllo, l'osservatore è un sistema dinamico che ha lo scopo di stimare l'evoluzione dello stato di un sistema. Questo sistema è necessario in quanto, essendo impossibilitati ad accedere allo stato effettivo del processo, ci permette di risolvere numerosi problemi legati principalmente al controllo.

Gli ingressi e le uscite di un processo sono spesso affette da errori di misura, aspetto fondamentale di cui bisogna tener conto nella progettazione dell'osservatore, in quanto la stima dello stato che otterremo, sarà costruita sulla base della valutazione di tale errore, che si può definire come la differenza tra lo stato effettivo e la stima dello stato del processo.

Considerando quindi un sistema lineare con disturbi di processo e di misura:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

con stato iniziale  $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$  e con ingresso  $\mathbf{u}_k$  misurabile esattamente per ogni  $k \geq k_0$ , si ha la seguente formulazione dell'osservatore:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)$$

e a questo punto si può definire un errore di stima come

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$$

Tenendo conto di tale definizione e sostituendo in modo opportuno, si ottiene l'espressione per l'errore all'istante  $k+1$ :

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k - [\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)]$$

dalla quale si ricava in definitiva:

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{A}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{e}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k$$

Osserviamo che il valore atteso dell'errore è un sistema autonomo:

$$\bar{\mathbf{e}}_k = E[\mathbf{e}_k]$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{k+1} = (\mathbf{A}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{e}}_k + E[-\mathbf{L}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k] = (\mathbf{A}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{e}}_k$$

Definiamo la matrice di covarianza dell'errore:

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]$$

## 5 Ottimizzazione

L'obiettivo che ci si prefigge è quello di determinare la matrice  $\mathbf{L}_k$  tale che la stima fornita dall'osservatore sia il più attendibile possibile. In particolare si vuole minimizzare l'errore quadratico medio di stima:

$$E[\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k] = \text{tr}(\mathbf{P}_k)$$

Tale problema prende il nome di *problema dell'osservatore ottimo*. Se la matrice  $\mathbf{R}_k$  è definita positiva  $\forall k \geq 0$  il problema si dice *non singolare*. Si dimostra [1] che la soluzione del problema non singolare dell'osservatore ottimo è costituita da:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

dove  $\mathbf{P}_k$  è la soluzione dell'equazione di Riccati scritta nella forma:

$$\mathbf{P}_{k+1} = -\mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T [\mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k^T]^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k$$

scegliendo come stima iniziale  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$ .

Il dispositivo così ottenuto è detto osservatore ottimo a tempo discreto; esso viene frequentemente indicato anche come *filtro di Kalman*.

La matrice  $\mathbf{L}_k$  è detta matrice di guadagno del filtro.

## 6 Equazioni del filtro

Il filtro di Kalman stima lo stato del processo in certi istanti di tempo e quindi realizza un feedback sulla base delle misure (rumorose).

Le equazioni del filtro di Kalman appartengono a due gruppi: predizione dello stato e aggiornamento basato sulle misure.

Le equazioni di predizione dello stato proiettano in avanti lo stato corrente e la covarianza dell'errore di stima al fine di ottenere una stima a priori per il successivo istante temporale. mentre le equazioni di aggiornamento dello stato realizzano il meccanismo in retroazione, cioè incorporano le nuove misure nella stima a priori per ottenere una stima a posteriori migliorata.

**Predizione:** le equazioni proiettano lo stato e la covarianza dell'errore di stima in avanti dall'istante temporale  $k - 1$  all'istante  $k$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

**Aggiornamento:** prima viene calcolata la matrice dei guadagni di Kalman  $\mathbf{L}_k$ , quindi le misure  $y_k$  sono usate per generare una stima dello stato a posteriori. Alla fine, viene calcolata una stima a posteriori della covarianza dell'errore:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k (y_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-\end{aligned}$$

## 7 Conclusion

"A nonlinear differential equation of the Riccati type is derived for the covariance matrix of the optimal filtering error. The solution of this 'variance equation' completely specifies the optimal filter for either finite or infinite smoothing intervals and stationary or non-stationary statistics. The variance equation is closely related to the Hamiltonian (canonical) differential equations of the calculus of variations. Analytic solutions are available in some cases. The significance of the variance equation is illustrated by examples which duplicate, simplify, or extend earlier results in this field. The duality principle relating stochastic estimation and deterministic control problems plays an important role in the proof of theoretical results. In several examples, the estimation problem and its dual are discussed side-by-side. Properties of the variance equation are of great interest in the theory of adaptive systems. Some aspects of this are considered briefly." [1]

## Riferimenti bibliografici

- [1] Rudolf E. Kalman and Richard S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, pages 95–108, 1961.