Filtro di Kalman

Antonio Lanciotti, Lorenzo D'Agostino, Arment Pelivani

2019

Rudolf E. Kalman

Indice

1 Introduzione

Il filtro di Kalman è un osservatore ottimo dello stato per sistemi lineari in presenza di rumori gaussiani.

2 Cenni di probabilità

Il filtro di Kalman è un algoritmo che mira alla ricostruzione dello stato interno di un sistema basandosi unicamente su una serie di misurazioni che, a causa di limiti costruttivi, sono soggette a rumore.

A causa della natura deterministica del problema, risulta necessario affrontare alcuni aspetti della teoria della probabilità, in particolare ci soffermeremo sul concetto di variabile aleatoria normale, o Gaussiana, con l'intento di fornire un modello matematico per gli errori di misura che siamo costretti ad affrontare.

2.1 Variabili aleatorie o casuali.

Una variabile casuale/aleatoria è una variabile che può assumere valori diversi in dipendenza da qualche fenomeno aleatorio. In particolare diremo che una variabile casuale X si dice continua se esiste una funzione $f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R} : P(X \in B) = \int_B f(x)dx$ dove la funzione f si dice *densità di probabilità* della variabile casuale X.

Una variabile aleatoria è quindi una variabile che può assumere valori appunto casuali la cui probabilità dipende dalla funzione di densità di probabilità ad essa associata.

Le variabili casuali quindi risultano essere un valido strumento matematico per la modellazione dei rumori.

In particolare utilizzeremo le variabili casuali cosiddette Gaussiane o normali che sono caratterizzate dalla funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Per poterle descrivere a pieno dobbiamo però introdurre il concetto di media/-valore atteso, di varianza e di covarianza.

2.1.1 Valore atteso

Nella teoria della probabilità il valore atteso di una variabile casuale X, è un numero indicato con $E[X]$ che formalizza l'idea di valore medio di un fenomeno aleatorio.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Si noti che l'operatore valore atteso è lineare:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

2.1.2 Varianza

La varianza di una variabile aleatoria è una funzione, che fornisce una misura della variabilità dei valori assunti dalla variabile stessa; nello specifico, la misura di quanto essi si discostino quadraticamente rispettivamente dal valore atteso.

La varianza della variabile aleatoria X è definita come il valore atteso del quadrato della variabile aleatoria centrata $X - E[X]$:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

2.1.3 Covarianza

In statistica e in teoria della probabilità, la covarianza di due variabili aleatorie è un numero che fornisce una misura di quanto le due varino assieme, ovvero della loro dipendenza.

La covarianza di due variabili aleatorie X e Y è il valore atteso dei prodotti delle loro distanze dalla media:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Due variabili casuali si dicono *incorrelate* se la loro covarianza è nulla.

La covarianza può essere considerata una generalizzazione della varianza

$$Var(X) = Cov(X, X)$$

2.2 Variabili gaussiane e modellazione dei rumori.

Le variabili gaussiane sono particolari variabili aleatorie caratterizzate da due parametri, μ e σ^2, e sono indicate tradizionalmente con:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Si può dimostrare che per le variabili gaussiane vale che:

$$E[X] = \mu \qquad Var[X] = \sigma^2$$

Come anticipato possiamo modellizzare i vettori di disturbo del sistema che consideriamo, attraverso l'utilizzo di variabili aleatorie gaussiane a media nulla e varianza σ^2, di dimensioni conformi a quelle del sistema considerato.

2.3 Vettori casuali

Un vettore casuale è un vettore i cui elementi sono essi stessi variabili casuali.

Risulta necessario estendere le definizioni date in precedenza per caratterizzare rumori che agiscono su sistemi non scalari.

2.3.1 Valore atteso

Si dice valore atteso del vettore casuale $x \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei valori attesi delle variabili casuali che lo compongono:

$$E[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} E[x_1] & E[x_2] & \dots & E[x_n] \end{pmatrix}^T$$

Si definisce inoltre il valore quadratico medio di $\mathbf{x}$ come $E[\mathbf{x}^T\mathbf{x}]$.

2.3.2 Matrice di covarianza

Si definisce matrice di covarianza del vettore casuale $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la matrice $n \times n$:

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^T]$$

Per come è definita, la matrice di covarianza è una matrice simmetrica semidefinita positiva i cui elementi σ_{ij}^2 sono le covarianze tra gli elementi x_i e x_j del vettore $\mathbf{x}$.

A sua volta si definisce la matrice di *cross-covarianza* tra due vettori casuali $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, la matrice

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E[(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])(\mathbf{y} - E[\mathbf{y}])^T]$$

Due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si dicono *incorrelati* se $Cov(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

3 Automatica

3.1 Sistemi dinamici a tempo discreto

Un sistema dinamico a tempo discreto è il modello matematico di un oggetto che interagisce con l'ambiente circostante attraverso canali di ingresso e di uscita che sono rappresentati attraverso vettori, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$, di variabili dipendenti dal tempo. La differenza principale dai sistemi a tempo continuo è che in questo caso il tempo è rappresentato come una variabile intera k.

Si avrà pertanto che per ogni istante di tempo k il sistema riceverà dei segnali in ingresso e risponderà con dei segnali in uscita.

Il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ rappresenta i segnali che l'oggetto riceve dall'esterno mentre il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ rappresenta i segnali che l'oggetto dà in uscita.

In generale il comportamento del sistema non dipende esclusivamente da questi due vettori, ovvero non vi è un legame diretto tra ingresso e uscita: infatti il sistema ha uno stato interno che evolve in funzione degli ingressi e degli stati precedenti. In particolare lo stato di un sistema può essere a sua volta rappresentato da un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Il modello del sistema è pertanto costituito da equazioni che descrivono l'evoluzione dello stato del sistema in funzione dell'ingresso, dello stato e del tempo e esprimono la relazione d'uscita:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono opportune funzioni vettoriali.

3.2 Sistemi lineari stocastici

Consideriamo una particolare tipologia di sistemi, quelli lineari strettamente propri, in cui le funzioni $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono appunto funzioni lineari e l'uscita non dipende esplicitamente dall'ingresso. In questo caso le equazioni si possono genericamente scrivere come:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

dove $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sono matrici di coefficienti variabili nel tempo.

Tuttavia tali modelli sono approssimazioni ideali che possono essere valide in alcuni contesti, mentre in altri è necessario tener conto delle incertezze e delle imprecisioni che si hanno nella misura dei segnali di ingresso e di uscita del sistema.

Il modello del sistema tenendo conto di queste incertezze può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_k^w \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Le ipotesi che possiamo fare per caratterizzare i termini $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ sono:

- $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori casuali gaussiani a media nulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &\sim \mathcal{N}(0,\, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k &\sim \mathcal{N}(0,\, \mathbf{R}_k) \end{aligned}$$

- $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ sono incorrelati:

$$E[\mathbf{w}_{k_1}\mathbf{v}_{k_2}^T] = 0 \qquad \forall\, k_1, k_2 \geq 0$$

- $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ sono bianchi:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_{k_1}\mathbf{w}_{k_2}^T] &= 0 \qquad \forall\, k_1 \neq k_2 \\ E[\mathbf{v}_{k_1}\mathbf{v}_{k_2}^T] &= 0 \qquad \forall\, k_1 \neq k_2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{x_0}$ è un vettore casuale gaussiano con media e varianza note:

$$\mathbf{x_0} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{0},\, \mathbf{P_0})$$

- $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ sono incorrelati con $\mathbf{x_0}$:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x_0}\mathbf{w}_k^T] &= 0 \qquad \forall\, k \geq 0 \\ E[\mathbf{x_0}\mathbf{v}_k^T] &= 0 \qquad \forall\, k \geq 0 \end{aligned}$$

Con le ipotesi fatte è possibile passare al problema della progettazione di un osservatore che restituisca una stima dello stato interno del sistema filtrando i rumori e le incertezze sull'evoluzione dello stato e sulla misura dell'uscita.

4 Osservatore

Nella teoria del controllo, l'osservatore è un sistema dinamico che ha lo scopo di stimare l'evoluzione dello stato di un sistema. Questo sistema è necessario in quanto, essendo impossibilitati ad accedere allo stato effettivo del processo, ci permette di risolvere numerosi problemi legati principalmente al controllo.

Gli ingressi e le uscite di un processo sono spesso affette da errori di misura, aspetto fondamentale di cui bisogna tener conto nella progettazione dell'osservatore, in quanto la stima dello stato che otterremo, sarà costruita sulla base della valutazione di tale errore, che si può definire come la differenza tra lo stato effettivo e la stima dello stato del processo.
Considerando quindi un sistema lineare con disturbi di processo e di misura:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}$$

con stato iniziale $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x_0}$ e con ingresso $\mathbf{u}_k$ misurabile esattamente per ogni $k \geq k_0$, si ha la seguente formulazione dell'osservatore:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k$$

e a questo punto si può definire un errore di stima come

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$$

Tenendo conto di tale definizione e sostituendo in modo opportuno, si ottiene l'espressione della dinamica dell'errore:

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k - [\mathbf{A}_k\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k]$$

dalla quale si ricava in definitiva:

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{e}_k + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k$$

Osserviamo che il valore atteso dell'errore è un sistema autonomo:

$$\bar{\mathbf{e}}_k = E[\mathbf{e}_k]$$

$$\bar{\mathbf{e}}_{k+1} = \mathbf{A}_k\bar{\mathbf{e}}_k + E[\mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k] = \mathbf{A}_k\bar{\mathbf{e}}_k$$

Definiamo la matrice di covarianza dell'errore:

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T]$$

Proiettando in avanti tale matrice se ne ottiene l'equazione dinamica:

$$\mathbf{P}_{k+1} = E[\mathbf{e}_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}^T] = E[(\mathbf{A}_k\mathbf{e}_k + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k)(\mathbf{A}_k\mathbf{e}_k + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k)^T] =$$

$$\begin{aligned}&= E[\mathbf{A}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{A}_k^T + \mathbf{A}_k\mathbf{e}_k\mathbf{w}_k^T(\mathbf{B}_k^w)^T + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k\mathbf{e}_k^T\mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k^w\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T(\mathbf{B}_k^w)^T] = \\ &= \mathbf{A}_k\mathbf{P}_k\mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k^w\mathbf{Q}_k(\mathbf{B}_k^w)^T\end{aligned}$$

5 Ottimizzazione

L'obiettivo che ci si prefigge è quello di determinare la matrice $\mathbf{K}_k$ tale che la stima fornita dall'osservatore sia il più attendibile possibile. In particolare si vuole minimizzare l'errore quadratico medio di stima:

$$E[\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k] = tr(\mathbf{P}_k)$$

Tale problema prende il nome di *problema dell'osservatore ottimo*.
A tal proposito consideriamo l' osservatore :

$$\hat{x}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})\hat{x}_k + b_k + \mathbf{K}_k y_k$$

La dinamica dell'errore di stima risulta quindi essere :

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})\mathbf{e}_k + \mathbf{W}\mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k$$

Per definire correttamente il problema di ottimizzazione bisogna fare alcune ipotesi statistiche descritte nei paragrafi precedenti:

- il disturbo di processo $\mathbf{w}_k$ ed il rumore di misura $\mathbf{v}_k$ sono rumori bianchi a media nulla e varianza rispettivamente $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$;
- lo stato iniziale x_0 è una variabile aleatoria di media $\hat{x}_0$ e varianza $\mathbf{P}_0$;
- il disturbo di processo ed il rumore di misura sono mutuamente incorrelati : $E[\mathbf{w}_i \mathbf{v}_j^T] = 0 \; \forall \; i, j$;
- il disturbo di processo ed il rumore di misura sono incorelati con lo stato iniziale.

A questo punto si pone il problema di *sintesi dell;osservatore a minimo errore quadratico medio* : ad ogni istante $k = 0, 1, ...$ si vuole determinare ricorsivamente il guadagno $\mathbf{K}_k$ dell' osservatore in modo da minimizzare l' errore quadratico medio di stima dello stato all' istante $k+1$: $\mathbf{P}_{k+1} \triangleq E[\mathbf{e}_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}^T]$. Sostituendo all' interno dell' espressione di cui sopra l'espressione dell' errore di stima si ottiene :

$$\mathbf{P}_{k+1} = E\left\{[(\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})\mathbf{e}_k + \mathbf{W}\mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k][(\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})\mathbf{e}_k + \mathbf{W}\mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]^T\right\}$$

Grazie alle ipotesi statistiche di cui sopra, si evince come l' errore di stima dello stato risulti essere incorrelato con il disturbo di processo ed il rumore di misura :

$$E[\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T] = 0, \; E[\mathbf{e}_k \mathbf{v}_k^T] = 0$$

Sfruttando quindi le relazioni ottenute nella precedente espressione di $\mathbf{P}_{k+1}$ si ottiene quindi :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{k+1} &= (\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T](\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^T + \mathbf{W}_k E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T]\mathbf{W}_k^T + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]\mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})\mathbf{P}_k(\mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{W}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{W}_k^T\end{aligned}$$

Il problema si riduce quindi alla seguente ottimizzazione quadratica :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \underset{\mathbf{K}}{\text{argmin}} \left\{ \underbrace{(\mathbf{A}-\mathbf{KC})\mathbf{P}_k(\mathbf{A}-\mathbf{KC})^T + \mathbf{WQ}_k\mathbf{W}^T + \mathbf{KR}_k\mathbf{W}^T}_{\mathbf{P}_{k+1}} \right\} \\
&= \underset{\mathbf{K}}{\text{argmin}} \left\{ \mathbf{K}\underbrace{(\mathbf{R}_k + \mathbf{CP}_k\mathbf{C}^T)}_{\mathbf{S}_k}\mathbf{K}^T - \mathbf{K}\underbrace{\mathbf{CP}_k\mathbf{A}^T}_{\mathbf{V}_k^T} - \underbrace{\mathbf{AP}_k\mathbf{C}^T}_{\mathbf{V}_k}\mathbf{K}^T + \mathbf{WQ}_k\mathbf{W}^T + \mathbf{AP}_k\mathbf{A}^T \right\} \\
&= \underset{\mathbf{K}}{\text{argmin}} \left\{ \mathbf{KS}_k\mathbf{K}^T - \mathbf{KV}_k^T - \mathbf{V}_k\mathbf{K}^T + \mathbf{AP}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{WQ}_k\mathbf{W}^T \right\}
\end{aligned}$$

Essendo $\mathbf{S}_k \triangleq \mathbf{R}_k + \mathbf{CP}_k\mathbf{C}^T > \mathbf{R}_k > 0$, per l' invertibilità di $\mathbf{R}_k$ ipotizzata, completando il quadrato sopra si ottiene :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \underset{\mathbf{K}}{\text{argmin}} \left\{ (\mathbf{K}-\mathbf{V}_k\mathbf{S}_k^{-1})\mathbf{S}_k(\mathbf{K}-\mathbf{V}_k\mathbf{S}_k^{-1})^T + \mathbf{AP}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{WQ}_k\mathbf{W}^T - \mathbf{V}_k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{V}_k^T \right\} \\
&= \mathbf{V}_k\mathbf{S}_k^{-1} \\
&= \mathbf{AP}_k\mathbf{C}^T(\mathbf{R}_k + \mathbf{CP}_k\mathbf{C})^{-1}
\end{aligned}$$

L'ultima espressione fornisce quindi il guadagno ottimo $\mathbf{K}_k$, all' istante k, a cui corrisponde il minimo errore quadratico medio all' istante $k+1$ dove :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{AP}_k\mathbf{A}^T - \mathbf{V}_k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{V}_k^T + \mathbf{WQ}_k\mathbf{W}^T \\
&= \mathbf{AP}_k\mathbf{A}^T - \mathbf{AP}_k\mathbf{C}^T(\mathbf{R}_k + \mathbf{CP}_k\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{CP}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{WQ}_k\mathbf{W}^T
\end{aligned}$$

6 Equazioni del filtro

Il filtro di Kalman è un'implementazione ricorsiva degli algoritmi di stima che risolve il problema della ricostruzione dello stato di un sistema lineare.

Sia $\hat{\mathbf{x}}_k$ la stima k-esima dello stato $\mathbf{x}_k$, e sia questa stima gaussiana a error medio nullo ($E[\mathbf{e}_k] = 0$) con covarianza $\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]$.

Desiderando costruire una stima $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$, dovremo tenere conto di due sorgenti di informazione, la conoscenza del modello (mediante l'utilizzo della legge di propagazione dello stato) e la conoscenza delle misure. Distinguiamo quindi due diverse stime di $\mathbf{x}_k$, una prima $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ costruita conoscendo le misure sino $\mathbf{y}_{k-1}$, ed una seconda $\hat{\mathbf{x}}_k$, che utilizza anche la misura $\mathbf{y}_k$.

Basandoci sui risultati della sezione precedente, costruiamo quindi le stime:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \tag{1}$$
$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k^w \mathbf{Q}_k (\mathbf{B}_k^w)^T \tag{2}$$
$$\mathbf{L}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \tag{3}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \tag{4}$$
$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- \tag{5}$$

L'algoritmo così descritto prende il nome di filtro di Kalman discreto.
Il guadagno della innovazione nel filtro, $\mathbf{L}_k$ è fondamentalmente un rapporto tra la incertezza nella stima dello stato P e la incertezza nella misura R: conseguentemente, se le misure sono molto accurate (R piccola), la nuova stima $\hat{\mathbf{x}}_k$ sarà poco legata alla precedente. Se viceversa sono disponibili misure poco affidabili ma vecchie stime relativamente buone, si propagheranno queste nel futuro appoggiandosi sostanzialmente al modello del sistema.

7 Documentazione software matlab

In questo paragrafo viene descritta l'implimentazione del filtro di Kalman come sistema dinamico ed il task implementato dal nostro gruppo in ambiente di programmazione matlab.

7.1 sistema.m

Matlab presenta già una sua implementazione dei modelli dinamici ma in questo frangente si è preferita una sua nuova implementazione che includesse anche le matrici di covarianza degli errori di processo e di misura in modo da adattare più facilmente il problema alle nostre esigenze.
In particolare nel file *sistema.m* viene implementata la **classe** dei sistemi dinamici che necessitiamo.

7.1.1 Proprietà

Le proprietà di cui dispone un oggetto di questo tipo sono :

```
properties (Access = protected) % private, non modificabili.
        A,B,C,D,Q,R,x;  % A,B,C,D matrici del sistema
                % Q matrice di covarianza del rumore di processo
                % R matrice di covarianza del rumore di misura
        n,m,p;  % dimensioni rispettivamente di stato, ingresso
            e uscita
        xold;   % vettore degli stati vecchi (per plot)
        u;      % ULTIMO ingresso ricevuto
end
```

I metodi che implementa riguardano il costruttore dell'oggetto, l'evoluzione del suo stato interno e la lettura dell'uscita del sistema.

7.1.2 Costruttore

La creazione dell'oggetto *sistema* avviene tramite l'inizializzazione delle proprietà dell'oggetto in questione :

```
function obj = sistema(A,B,C,D,Q,R,x0)
```

Al costruttore vanno passate tutte le matrici relative al caso preso in analisi (comprese le covarianze) ed il suo stato iniziale.
Al suo interno vengono effettuati svariati controlli sulle dimensioni delli matrici (e non solo) per far si che queste ultime rispettino le seguenti proprietà :

- A deve essere quadrata (dimensione nxn);
- B deve avere n righe (dimensione nxm);
- C deve avere n colonne (dimensione pxn);
- D deve essere di dimensione pxm;
- Q deve essere quadrata, di ordine m e definita positiva;
- R deve essere quadrata, di ordine p e semidefinita positiva;
- x0 vettore riga/colonna di dimensione n.

7.1.3 Evoluzione dello stato

In matlab nei metodi delle classi che utilizzano le proprietà delle stesse, risulta necessario passare come argomento l'oggetto corrente. Questo è possibile attraverso la parola chiave *obj*.

```
function update(obj, u) % aggiorna lo stato del sistema
    if (nargin<2)
        u = zeros(obj.m,1);  % se u viene omesso si considera
            nullo
    end
    obj.u=u;
    obj.xold(:,end+1)=obj.x;  % salva il vecchio stato
    xn=obj.A*obj.x + obj.B*obj.u + obj.B*mvnrnd(zeros(obj.m1),
        obj.Q)'; % calcola il nuovo stato x(t) = Ax(t-1) + Bu +
        v : v = rumore di processo
    obj.x = xn; % aggiorna lo stato con quello nuovo
end
```

La funzione accetta come parametro esterno l'ingresso dato al sistema.
Esso può essere omesso, in tal caso viene considerato nullo.
All'interno del metodo vengono inoltre aggiornate le variabili di stato del sistema.
Implementa l'equazione di stato $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v$

7.1.4 Letture

Aggiornato lo stato interno del sistema è ovviamente possibile leggerne la risposta. Questo avviene tramite il metodo *leggiUscita* che implementa l'equazione $y(t) = Cx(t) + Du(t) + w$.
Il metodo non necessita di ulteriori argomenti in ingresso:

```
function y = leggiUscita(obj) % restituisce in output l'uscita
    del sistema
```

In più è stata implementata il metodo per la lettura dello stato interno in quanto l'accesso diretto alle proprietà del sistema è, per ragioni di sicurezza, privato all'oggetto stesso (consentito unicamente ad esso).

```
function esc = leggiStato(obj) % get dello stato per plot.
```

7.2 kalmanfilter.m

La classe klamanfilter è stata pensata come un estensione di un sistema dinamico (in particolare del sistema dinamico da osservare) con in più le matrici di guadagno caratteristiche.
Questo è implementabile attraverso il concetto di ereditarietà delle classi, infatti kalmanfilter eredita proprietà e metodi di sistema:

```
classdef kalmanfilter < sistema
```

7.2.1 Proprietà

Oltre alle proprietà caratteristiche dei sistemi dinamici, vengono introdotte le matrici di guadagno e di covarianza dello stato :

```
properties (Access = protected)
        P,K; %rispettivamente covarianza stato e guadagno
        vecchieK;
end
```

7.2.2 Costruttore

Come in *sistema.m* la classe *kalmanfilter* accetta come argomenti in ingresso le matrici relative al sistema dinamico da osservare (così da non dover costruire prima un oggetto di tipo sistema) ed il suo stato iniziale ed in più, opzionalmente, una stima iniziale della covarianza dello stato (P0). Se non fornita come stima iniziale viene considerata la matrice identità di ordine n:

```
function obj = kalmanfilter(A, B, C, D, Q, R, x0, P0)
```

All'interno del costruttore viene chiamato il costruttore della superclasse (sistema) al fine di inizializzare le variabili relative ad esse nell'oggetto *kalmanfilter* :

```
        objsistema(A, B, C, D, Q, R, x0);
```

7.2.3 Evoluzione

Come per la superclasse corrispondente, la classe *kalmanfilter* non avrà il metodo ereditato che calcolerà l'evoluzione del sistema da osservare ma un overload di essa in quanto necessita di un metodo che implementi le equazioni di predizione, guadagno e correzione descritte nei paragrafi precedenti.
Questo avviene attraverso il metodo :

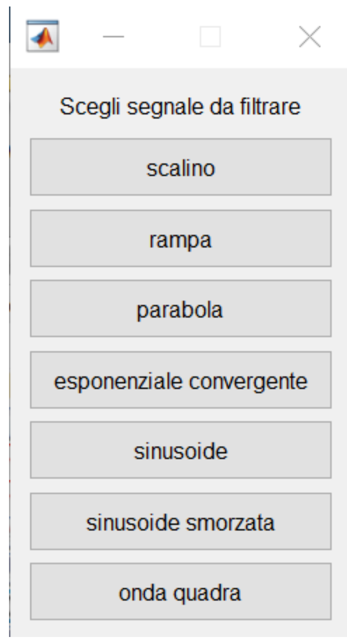
```
function update(obj, u, y) % stima lo stato
```

i cui parametri d'ingresso sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema da osservare al tempo t.
Anche quì si necessitano dei metodi di GET delle variabili interne all'oggetto.

7.3 Main task : filtraggio.m

Il task che ci siamo prefissati di raggiungere è quello di ricostruire un segnale disturbato da rumore bianco. Questa applicazione risulta molto frequente in ambito ingegneristico in quanto anche i migliori trasduttori, per limiti costruttivi, presentano delle variazioni nelle misure seppur piccole.
Oltre a questo i trasduttori migliori presentano un costo elevato, per cui si può pensare di risparmiare sulla sensoristica applicando, alle misure più rumorose di un eventuale trasduttore economico, il filtro di Kalan così da ottenere dei valori affidabili a prezzi più accessibili.

Una volta cliccato il pulsante *Run* di matlab la prima schermata permette la scelta del segnale da filtrare. A destra il layout di tale schermata con tutte le possibili scelte cliccabili. Cliccando uno dei segnali il programma provvederà alla creazione del sistema relativo alla generazione di tale segnale.




```
sys = ss(A,B,C,D);
sysd = c2d(sys,dt);
[Ad,Bd,Cd,Dd] = ssdata(sysd);
```

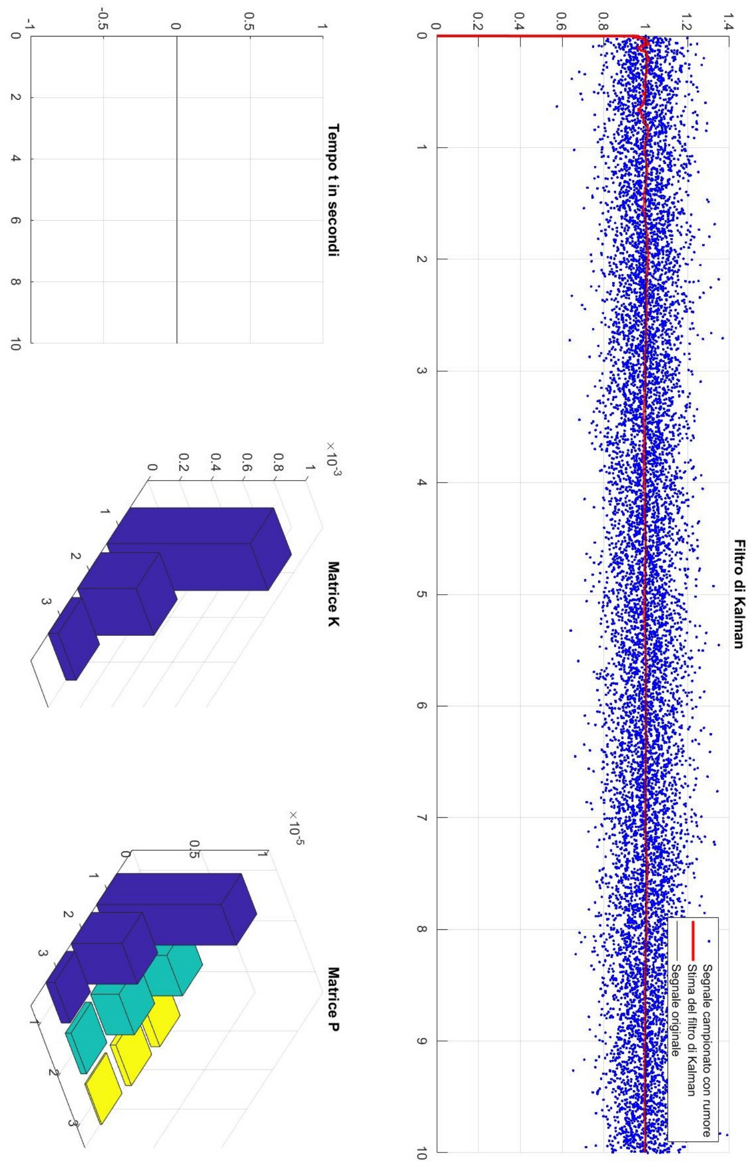
Successivamente viene assegnata la matrice di covarianza del rumore di processo :

```
Q = 1e-5;
```

A questo punto si procede alla generazione dell'oggetto della classe kalmanfilter, che verrà utilizzato per la stima e il filtraggio del segnale, utilizzando le matrici relative alla discretizzazione del modello precedente e lo stato 0 come stato iniziale.

```
k=kalmanfilter(Ad,Bd,Cd,Dd,Q,R,x0,P0);
```

A questo punto il programma procede con il calcolo dell'evoluzione dello stato e con il plottaggio e l'animazione della stima effettuata dal filtro, il tempo dell'animazione, e la variazione delle matrici di covarianza dello stato e del guadagno.
Di seguito viene riportato un esempio del filtraggio di uno scalino affetto da rumore :



Filtro di Kalman
Segnale campionato con rumore
Stima del filtro di Kalman
Segnale originale
Tempo t in secondi
Matrice K
Matrice P

8 Conclusione

"A nonlinear differential equation of the Riccati type is derived for the covariance matrix of the optimal filtering error. The solution of this 'variance equation' completely specifies the optimal filter for either finite or infinite smoothing intervals and stationary or non-stationary statistics. The variance equation is closely related to the Hamiltonian (canonical) differential equations of the calculus of variations. Analytic solutions are available in some cases. The significance of the variance equation is illustrated by examples which duplicate, simplify, or extend earlier results in this field. The duality principle relating stochastic estimation and deterministic control problems plays an important role in the proof of theoretical results. In several examples, the estimation problem and its dual are discussed side-by-side. Properties of the variance equation are of great interest in the theory of adaptive systems. Some aspects of this are considered briefly."(**?**)