Filtro di Kalman

Antonio Lanciotti, Lorenzo D'Agostino, Arment Pelivani

2019-2020

Rudolf E. Kalman

Indice

1 Introduzione

Il *filtro di Kalman* è un osservatore ottimo dello stato per sistemi lineari in presenza di rumori gaussiani.

La sua versatilità ed utilità lo ha portato ad innumerevoli applicazioni quali il controllo di veicoli di ogni genere (aerospaziali, navali ...), robotica e controllo delle traiettorie, ricostruzione di segnali affetti da disturbi e molto altro.

In questa relazione vengono presentati i procedimenti matematici che permettono il raggiungimento delle equazioni che lo descrivono.

Verrà poi discussa un' applicazione del filtro realizzata in ambiente *MATLAB*.

2 Cenni di teoria della probabilità

Il filtro di Kalman è un algoritmo che mira alla ricostruzione dello stato interno di un sistema basandosi unicamente su una serie di misurazioni che, a causa di limiti costruttivi, sono soggette a rumore.

A causa della natura del problema, risulta necessario affrontare alcuni aspetti della teoria della probabilità, in particolare ci soffermeremo sul concetto di variabile aleatoria normale, o Gaussiana, con l'intento di fornire un modello matematico per gli errori di misura che siamo costretti ad affrontare.

2.1 Variabili aleatorie o casuali.

Una variabile casuale/aleatoria è una variabile che può assumere valori diversi in dipendenza da qualche fenomeno aleatorio. In particolare diremo che una variabile casuale X si dice continua se esiste una funzione $f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$: $P(X \in B) = \int_B f(x)dx$ dove la funzione f si dice *densità di probabilità* della variabile casuale X.

L'integrale di tale funzione nel dominio di integrazione B rappresenta pertanto la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori appartenenti a B.

Le variabili casuali risultano essere un valido strumento matematico per la modellazione dei rumori.

Alle variabili casuali sono associati i concetti di media/valore atteso, di varianza e di covarianza.

2.1.1 Valore atteso

Nella teoria della probabilità il valore atteso di una variabile casuale X, è un numero indicato con $E[X]$ che formalizza l'idea di valore medio di un fenomeno aleatorio.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{2.1}$$

Si noti che l'operatore valore atteso è lineare:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \tag{2.2}$$

2.1.2 Varianza

La varianza di una variabile aleatoria è una funzione che fornisce una misura della variabilità dei valori assunti dalla variabile stessa; nello specifico, la misura di quanto essi si discostino dal valore atteso.

La varianza della variabile aleatoria X è definita come il valore atteso del quadrato della variabile aleatoria centrata sulla propria media: $X - E[X]$:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] \tag{2.3}$$

2.1.3 Covarianza

In statistica e in teoria della probabilità, la covarianza di due variabili aleatorie è un numero che fornisce una misura di quanto le due varino dipendentemente l'una dall'altra.

La covarianza di due variabili aleatorie X e Y è il valore atteso dei prodotti delle loro distanze dalla media:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \tag{2.4}$$

Due variabili casuali si dicono *incorrelate* se la loro covarianza è nulla.

La covarianza può essere considerata una generalizzazione della varianza

$$Var(X) = Cov(X,X) \tag{2.5}$$

2.2 Variabili gaussiane e modellazione dei rumori.

Le variabili gaussiane sono particolari variabili aleatorie caratterizzate da due parametri, μ e σ^2, e sono indicate tradizionalmente con:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{2.6}$$

Sono caratterizzate dalla funzione densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.7}$$

Si può dimostrare che per le variabili gaussiane vale che:

$$E[X] = \mu \qquad Var[X] = \sigma^2 \tag{2.8}$$

Come anticipato possiamo modellizzare i vettori di disturbo del sistema che consideriamo, attraverso l'utilizzo di variabili aleatorie gaussiane a media nulla e varianza σ^2, di dimensioni conformi a quelle del sistema considerato.

2.3 Vettori casuali

Un vettore casuale è un vettore i cui elementi sono variabili casuali.

Risulta necessario estendere le definizioni date in precedenza per caratterizzare rumori che agiscono su sistemi non scalari.

2.3.1 Valore atteso

Si dice valore atteso del vettore casuale $x \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei valori attesi delle variabili casuali che lo compongono:

$$E[x] = \begin{pmatrix} E[x_1] & E[x_2] & \dots & E[x_n] \end{pmatrix}^T \tag{2.9}$$

Si definisce *valore quadratico medio* di x come $E[x^T x]$.

2.3.2 Matrice di covarianza

Si definisce *matrice di covarianza* del vettore casuale $x \in \mathbb{R}^n$ la matrice $n \times n$:

$$Cov(x, x) = E[(x - E[x])(x - E[x])^T] \tag{2.10}$$

Per come è definita, la matrice di covarianza è una matrice simmetrica semidefinita positiva i cui elementi σ_{ij}^2 sono le covarianze tra gli elementi x_i e x_j del vettore x.

A sua volta si definisce la matrice di *cross-covarianza* tra due vettori casuali x e y, la matrice

$$Cov(x, y) = E[(x - E[x])(y - E[y])^T] \tag{2.11}$$

Due vettori x e y si dicono *incorrelati* se $Cov(x, y) = 0$.

3 Automatica

3.1 Sistemi dinamici a tempo discreto

Un sistema dinamico a tempo discreto è il modello matematico di un oggetto che interagisce con l'ambiente circostante attraverso canali di ingresso e di uscita rappresentati attraverso vettori u e y di variabili dipendenti dal tempo. Si differenziano dalla classe dei sistemi a tempo continuo dal fatto che in questo caso il tempo è rappresentato come una variabile intera $k \in \mathbb{Z}$.

Si avrà pertanto che in ogni istante di tempo k il sistema modificherà le proprie uscite sulla base dei segnali in ingresso.

Il vettore $u \in \mathbb{R}^m$ rappresenta i segnali che l'oggetto riceve in ingresso dall'esterno mentre il vettore $y \in \mathbb{R}^p$ rappresenta i segnali che l'oggetto fornisce in uscita.

In generale il comportamento del sistema non dipende esclusivamente da questi due vettori, ovvero non vi è un legame diretto tra ingresso e uscita: infatti il sistema può avere uno stato interno che evolve in funzione degli ingressi e degli stati precedenti. Lo stato di un sistema è rappresentato da un vettore $x \in \mathbb{R}^n$.

Il modello del sistema è pertanto costituito da equazioni che descrivono l'evoluzione dello stato del sistema in funzione dell'ingresso, dello stato e del tempo ed esprimono la relazione d'uscita:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) \tag{3.1a}$$
$$y_k = g(x_k, u_k, k) \tag{3.1b}$$

dove f e g sono opportune funzioni vettoriali.

Consideriamo una particolare classe di sistemi, quelli lineari strettamente propri, in cui f e g sono funzioni lineari e l'uscita non dipende direttamente dall'ingresso ma solo dallo stato. In questo caso le equazioni generali del sistema sono:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \tag{3.2a}$$
$$y_k = C_k x_k \tag{3.2b}$$

dove A, B, C sono matrici di coefficienti in generale variabili nel tempo. Se tali matrici sono costanti al variare di k il sistema si dice *tempo invariante*.

3.2 Sistemi stocastici

Il modello matematico di un sistema è un'astrazione che necessariamente deve trascurare alcuni fenomeni che sarebbero troppo complessi da descrivere. Nel caso in cui gli effetti di tali fenomeni non siano trascurabili, è possibile considerarli nel modello rappresentandoli come fenomeni stocastici, ovvero come variabili aleatorie.

Tali variabili possono anche modellizzare le incertezze nella misura delle uscite del processo, ad esempio nel caso in cui esse siano affette da rumore.

Il modello del sistema tenendo conto di tali fenomeni può essere riscritto come:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + W_k w_k \tag{3.3a}$$
$$y_k = C_k x_k + v_k \tag{3.3b}$$

Le ipotesi che facciamo per caratterizzare i termini w e v sono:

- w e v sono vettori casuali gaussiani a media nulla:

$$w_k \sim \mathcal{N}(0,\, Q_k), \qquad Q_k = Q_k^T > 0 \tag{3.4a}$$
$$v_k \sim \mathcal{N}(0,\, R_k), \qquad R_k = R_k^T > 0 \tag{3.4b}$$

- w e v sono incorrelati:

$$E[w_{k_1} v_{k_2}^T] = 0 \qquad \forall\, k_1, k_2 \geq 0 \tag{3.5}$$

- w e v sono bianchi:

$$E[w_{k_1} w_{k_2}^T] = 0 \qquad \forall\, k_1 \neq k_2 \tag{3.6a}$$
$$E[v_{k_1} v_{k_2}^T] = 0 \qquad \forall\, k_1 \neq k_2 \tag{3.6b}$$

- x_0 è un vettore casuale gaussiano con media e covarianza note:

$$x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0,\, P_0), \qquad P_0 = P_0^T > 0 \tag{3.7}$$

- w e v sono incorrelati con x_0:

$$E[x_0 w_k^T] = 0 \qquad \forall\, k \geq 0 \tag{3.8a}$$
$$E[x_0 v_k^T] = 0 \qquad \forall\, k \geq 0 \tag{3.8b}$$

Con le ipotesi fatte è possibile passare al problema della progettazione di un osservatore che restituisca una stima dello stato interno del sistema filtrando i rumori e le incertezze sull'evoluzione dello stato e sulla misura dell'uscita.

4 Osservatore ottimo

Nella teoria del controllo, l'osservatore è un sistema dinamico che ha lo scopo di stimare lo stato di un altro sistema. L'osservatore è utile in quanto la conoscenza dell'evoluzione dello stato di un processo permette di risolvere problemi come la stabilizzazione e il controllo.

Nel caso di sistema lineare, l'osservatore può essere progettato come una copia del processo (del quale deve essere pertanto noto il modello) con l'aggiunta di un termine correttivo proporzionale alla differenza tra le uscite del processo e dell'osservatore.

Tale osservatore prende il nome di *Osservatore di Luenberger* [Inserire un riferimento bibliografico] ed ha la seguente espressione:

$$\hat{x}_{k+1} = A_k\hat{x}_k + B_k u_k + K_k(y_k - C\hat{x}_k). \tag{4.1}$$

[La C non dovrebbe essere C_k ? Inoltre, chiarire cosa rappresenta K_k. Secondo me qui varrebbe la pena di spiegare cosa c'e' scritto in (4.1), ovvero che la stima dello stato futuro ($\hat{x}_{k+1}$) viene fatta sulla base della stima (precedentemente effettuata) corrente dello stato corrente ($\hat{x}_k$) e sulla base di due quantita' conosciute, ovvero u_k e y_k. Cioe' utilizzando i valori dell'ingresso e dell'uscita, alle quali si ha accesso, si tenta di stimare il valore dello stato, al quale non si ha direttamente accesso. In tutto questo discorso, la stima $\hat{x}_0$ come si sceglie ? Perche' e' chiaro che $\hat{x}_0$ non puo' essere stimata con la regola (4.1).]

Si considera il sistema lineare con disturbi di processo e misura (3.3), con stato iniziale $x(k_0) = x_0$ [Forse lo stato iniziale dovrebbe essere indicato semolicemente con x_0 anziche' con $x(k_0)$, anche perche' k_0 non e' stato definito.] e con ingresso u_k misurabile per ogni $k \geq k_0$. [Qui $\hat{x}_k$ indica la stima dello stato x_k ?]

Per valutare la precisione dell'osservatore si definisce l'errore di stima, $e_k \triangleq x_k - \hat{x}_k$, il quale è regolato da un'equazione dinamica che si può ottenere valutando tale espressione per $k = k+1$ [$k = k+1$ non si puo' scrivere perche' matematicamente non e' corretto] e ~~sostituendo~~ sfruttando le equazioni (3.3a) e (4.1):

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + W_k w_k - [A_k\hat{x}_k + B_k u_k + K_k(y_k - C\hat{x}_k)] = \\ &= (A_k - K_k C_k)e_k + W_k w_k - K_k v_k. \end{aligned} \tag{4.2}$$

[Qui andrebbe chiarito un aspetto importante: L'errore e' definito come la differenza tra il valore effettivo dello stato e il valore stimato dello stato. Ma il valore effettivo dello stato non e' noto, in pratica (se fosse noto, non occorrerebbe utilizzare uno stimatore). Qual'e', quindi, il significato dell'errore introdotto ? Si tratta di un errore virtuale che puo' essere caratterizzato a livello statistico, ma certamente non saremo mai in grado di calcolare i valori di e_k, in pratica.] Osserviamo che l'errore è a sua volta un sistema stocastico, dato che la sua espressione dipende dai termini v_k e w_k, pertanto ne definiamo la matrice di covarianza all'istante $k+1$:

$$P_{k+1} = E[e_{k+1}e_{k+1}^T] \tag{4.3}$$

Tale matrice rappresenta l'*errore quadratico medio* di stima all'istante $k+1$. [In realta' l'EQM di solito e' uno scalare (come nella sezione 2.3.1) mentre questa e' una matrice. Penso che $\mathrm{tr}(P_k)$ sia equivalente alla definizione in 2.3.1 e si possa quindi definire EQM. Ricontrollare.]

Per procedere con l'analisi ricordiamo le ipotesi (3.4)-(3.8) fatte sui termini stocastici presenti nelle equazioni del sistema.

[OK. Ma guardando l'espressione (4.1) mi domando da dove derivi, ovvero perche' l'espressione dell'osservatore e' stata scritta proprio in questo modo ? In particolare, il termine $K_k(y_k - C_k\hat{x}_k)$ da dove viene ? Io credo che il ragionamento sia stato fatto all'opposto di come e' rappresentato qui. Ovvero: Si vuole cercare una espressione dell'osservatore che garantisca che l'errore di stima e_k abbia una dinamica stabile (tendente possibilmente a zero) del tipo $e_{k+1} = M_k e_k + n_k$. Questo porta ad una espressione tipo (4.1) a cui poi corrispondono certe espressioni per M_k e n_k.]

4.1 Ottimizzazione

L'obiettivo che ci si prefigge è quello di determinare la matrice K_k tale che la stima fornita dall'osservatore sia il più attendibile possibile, ovvero ad ogni istante $k = 0, 1, ...$ si vuole determinare ricorsivamente il guadagno K_k dell' osservatore in modo da minimizzare l'errore quadratico medio di stima dello stato.

Sostituendo nella (4.3) la (4.2) e sfruttando le ipotesi (3.4)-(3.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E\left\{[(A_k - K_kC_k)e_k + W_kw_k - K_kv_k][(A_k - K_kC_k)e_k + W_kw_k - K_kv_k]^T\right\} = \\ &= (A_k - K_kC_k)E[e_ke_k^T](A_k - K_kC_k)^T + W_kE[w_kw_k^T]W_k^T + K_kE[v_kv_k^T]K_k^T = \\ &= (A_k - K_kC_k)P_k(A_k - K_kC_k)^T + W_kQ_kW_k^T + K_kR_kW_k^T \end{aligned} \tag{4.4}$$

[Non e' immediatamente chiaro perche' i termini "misti" si annullano. Ad esempio $E\left\{e_kw_k^T\right\}$. Spiegare.]

Il problema si riduce quindi alla seguente ottimizzazione quadratica:

$$\begin{aligned} K_k &= \operatorname*{argmin}_K \left\{ \underbrace{(A_k - KC_k)P_k(A_k - KC_k)^T + W_kQ_kW_k^T + KR_kW_k^T}_{P_{k+1}} \right\} \\ &= \operatorname*{argmin}_K \left\{ K\underbrace{(R_k + C_kP_kC_k^T)}_{S_k}K^T - K\underbrace{C_kP_kA_k^T}_{V_k^T} - \underbrace{A_kP_kC_k^T}_{V_k}K^T + W_kQ_kW_k^T + A_kP_kA_k^T \right\} \\ &= \operatorname*{argmin}_K \left\{KS_kK^T - KV_k^T - V_kK^T + A_kP_kA_k^T + W_kQ_kW_k^T\right\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

[Nella espressione precedente c'e' un errore logico (o manca una norma o una traccia) perche' l'argomento di 'argmin' e' una matrice e non ha senso parlare del "minimo di una matrice". Rivedere.]

Essendo $S_k \triangleq R_k + C_kP_kC_k^T > R_k > 0$ la matrice S_k risulta invertibile, pertanto si può scrivere:

$$\begin{aligned} K_k &= \operatorname*{argmin}_K \left\{(K - V_kS_k^{-1})S_k(K - V_kS_k^{-1})^T - V_kS_k^{-1}V_k^T + A_kP_kA_k^T + W_kQ_kW_k^T\right\} \\ &= V_kS_k^{-1} \\ &= A_kP_kC_k^T(R_k + C_kP_kC_k)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

[Nella espressione precedente c'e' ancora lo stesso errore logico (o manca una norma o una traccia) perche' l'argomento di 'argmin' e' una matrice e non ha senso parlare del "minimo di una matrice". Rivedere. Inoltre, l'ultima uguaglianza da dove deriva ? Ovvero $V_k = A_kP_kC_k^T$.]

L'ultima espressione fornisce quindi il guadagno ottimo K_k, all'istante k, a cui corrisponde il minimo errore quadratico medio all'istante $k+1$ dato da:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= A_k P_k A_k^T - V_k S_k^{-1} V_k^T + W_k Q_k W_k^T \\ &= A_k P_k A_k^T - A_k P_k C_k^T (R_k + C_k P_k C_k^T)^{-1} C_k P_k A_k^T + W_k Q_k W_k^T \end{aligned} \tag{4.7}$$

In definitiva si ha il seguente risultato:
dato il sistema LTV (3.3) che soddisfa le ipotesi (3.4)-(3.8), l'osservatore di Luenberger che minimizza ad ogni istante $k \geq 0$ l'errore quadratico medio [Rivedere se si possa definire EQM] di stima dello stato $P_k \triangleq E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)T]$ [Qui manca una trasposizione] è fornito dal seguente algoritmo ricorsivo (che procede per $k = 0, 1, ...$):

$$K_k = A_k P_k C_k^T (R_k + C_k P_k C_k)^{-1} \tag{4.8}$$

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k + K_k (y_k - C \hat{x}_k) \tag{4.9}$$

$$P_{k+1} = A_k P_k A_k^T - A_k P_k C_k^T (R_k + C_k P_k C_k^T)^{-1} C_k P_k A_k^T + W_k Q_k W_k^T \tag{4.10}$$

5 Equazioni del filtro

Come osservato nel precedente paragrafo, l'algoritmo (4.8)-(4.10) propaga una stima $\hat{x}_k$ e la relativa covarianza P_k dello stato x_k basata sulle osservazioni *passate* $y_{0:k-1}$, ovvero effettua la predizione ad un passo dello stato. Per questo motivo, nel seguito le quantità $\hat{x}_k$ e P_k in (4.8)-(4.10) verranno indicate in modo più appropriato come $\hat{x}_{k|k-1} = \hat{x}_k$, e rispettivamente, $P_{k|k-1} = P_k$. [Ogni stima dello stato, $\hat{x}_{k|k-1}$, va 'pesata' sulla base della relativa covarianza $P_{k|k-1}$, che 'misura' quanto siano grandi gli errori sulle diverse componenti dello stato. Se, per ipotesi, si avesse $P_{k|k-1} = 0$, la stima sarebbe perfettamente coincidente con il valore vero dello stato.]

In molte applicazioni pratiche, l'obiettivo è quello di ottenere, ad ogni istante k, una stima dello stato x_k, e la relativa covarianza dell'errore di stima, basata su tutte le osservazioni $y_{0:k} = y_{0:k-1} \cup y_k$, inclusa quella presente, acquisite fino all'istante k.

Il problema in oggetto, noto come filtraggio, è finalizzato alla determinazione della cosiddetta stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$ dello stato x_k basata sulle osservazioni $y_{0:k}$ e della relativa covarianza $P_{k|k} = E[\tilde{x}_{k|k}\tilde{x}_{k|k}^T]$, con $\tilde{x}_{k|k} \triangleq \tilde{x}_k - \hat{x}_{k|k}$. [Qui c'e' probabilmente una inesattezza nella definizione dell'errore, in quanto $\tilde{x}_k$ non e' definita e probabilmente dovrebbe essere x_k. Inoltre, questa notazione per l'errore di stima mi sembra inutilmente confusionaria: Perche' indicare un errore di stima $x_k - \hat{x}_{k|k}$ con la setssa lettera usata per lo stato $\tilde{x}_{k|k}$? Non sarebbe piu' chiaro definire $e^x_{k|k} \triangleq x_k - \hat{x}_{k|k}]$?

A tale scopo, si possono considerare $\hat{x}_{k|k}$ e $P_{k|k}$ come stima e covarianza a posteriori della variabile aleatoria x_k, a partire da stima e covarianza a priori $\hat{x}_{k|k-1}$ e $P_{k|k-1}$, sulla base dell'osservazione y_k in (3.3b), utilizzando il metodo di stima BLUE[1].

In altri termini, date le statistiche a priori $(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$ e l'osservazione lineare $y_k = C_k x_k + v_k$ di x_k si vogliono determinare le statistiche a posteriori $(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$ di x_k mediante stima BLUE. Si ricorda che stima e covarianza a posteriori BLUE sono fornite da:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \underbrace{E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T]E[\tilde{y}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T]^{-1}}_{L_k}(y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \tag{5.1}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T]E[\tilde{y}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T]^{-1}E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T]^T \tag{5.2}$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k|k-1} &= E[y_k] = C_k\hat{x}_{k|k-1} \\ \tilde{y}_{k|k-1} &= y_k - \hat{y}_{k|k-1} = C_k\tilde{x}_{k|k-1} + v_k \\ E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T] &= P_{k|k-1}C_k^T \\ E[\tilde{y}_{k|k-1}\tilde{y}_{k|k-1}^T] &= R_k + C_kP_{k|k-1}C_k^T \end{aligned} \tag{5.3}$$

Riscriverei utilizzando $e^x_{k|k}$ e $e^y_{k|k}$ per maggiore chiarezza. Inoltre, questa parte va espansa, anche dimostrando le formule BLUE, perche' di fatto costituisce il "cuore" del filtraggio di Kalman, quindi va spiegato il significato dei vari termini. Per esempio, come mai troviamo una stima dell'uscita $\hat{y}_{k|k-1}$ quando sappiamo che l'uscita del sistema e' accessibile ? In realta' questa stima si riferisce all'uscita del sistema se lo stato fosse pari non al valore vero ma al valore stimato a priori $\hat{x}_{k|k-1}$. In questa espressione, non mi e' chiaro perche' $E[y_k] = C_k\hat{x}_{k|k-1}$. So che

[1] *Best Linear Unbiased Estimator*, per approfondimenti [2]

$E[y_k] = E[C_k x_k + v_k] = C_k E[x_k]$ perche' il rumore v ha valore medio nullo, ma non capisco perche' $E[x_k] = \hat{x}_{k|k-1}$. In queste relazioni ci sono varie cose da chiarire meglio.

Sostituendo le (5.3) in (5.1)-(5.2) si ottengono le seguenti equazioni di aggiornamento da $\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}$ a $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + L_k(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1}) \tag{5.4}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1}C_k^T(R_k + C_k P_{k|k-1}C_k^T)^{-1}C_k P_{k|k-1} \tag{5.5}$$

con

$$L_k = P_{k|k-1}C_k^T(R_k + C_k P_{k|k-1}C_k^T)^{-1} \tag{5.6}$$

Le equazioni (5.4)-(5.5) consentono di correggere la stima predittiva $\hat{x}_{k|k-1}$e la relativa covarianza $P_{k|k-1}$ con l'ultima osservazione y_k che e' una quantita' conosciuta, per ottenere la stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$ e relativa covarianza $P_{k|k}$. Per questo motivo (5.4)-(5.5) vengono dette *equazioni di correzione* della stima e della covarianza, e la matrice L_k in (5.6) prende il nome di *guadagno di correzione*.

[Fino a qui la sezione 5 e' abbastanza chiara, pero' non e' chiaro il collegamento con la sezione 4. Sembrano due problemi differenti, invece ora si utilizza l'espressione L_k nella (4.9). Occorre una spiegazione per legare le due teorie.]

Si noti che, posto $K_k = A_k L_k$, l'equazione di aggiornamento della stima (4.9) può essere espressa come segue:

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \underbrace{[\hat{x}_{k|k-1} + L_k(y_k - C_k\hat{x}_{k|k-1})]}_{\hat{x}_{k|k}} + B_k u_k. \tag{5.7}$$

La precedente relazione esprime la stima predittiva ad un passo $\hat{x}_{k+1|k}$ come il risultato dell'applicazione del modello di stato (3.3a), per $w_k = 0$, alla stima filtrata $\hat{x}_{k|k}$. Analogamente, l'equazione di aggiornamento della covarianza (4.10) può essere riscritta come:

$$P_{k+1|k} = A_k \underbrace{[P_{k|k-1} - P_{k|k-1}C_k^T(R_k + C_k P_{k|k-1}C_k^T)^{-1}C_k P_{k|k-1}]}_{P_{k|k}} A_k^T + W_k Q_k W_k^T \tag{5.8}$$

Pertanto, si ottengono le seguenti equazioni di predizione da $(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$ a $(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$:

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k\hat{x}_{k|k} + B_k u_k \tag{5.9}$$

$$P_{k+1|k} = A_{k|k}P_{k|k}A_k^T + W_k Q_k W_k^T \tag{5.10}$$

Riassumendo i precedenti sviluppi, la ricorsione (4.9)-(4.10) del filtro di Kalman può essere suddivisa in due fasi diverse: la correzione (5.4)-(5.5) seguita dalla predizione (5.9)-(5.10). La forma correzione-predizione del filtro di Kalman viene riportata nella pagina seguente.

5.1 Filtro di Kalman nella forma correzione-predizione

Dati:

- matrici : $A_k, B_k, C_k, W_k, Q_k, R_k$;
- stima iniziale : $\hat{x}_{1|0}$;
- covarianza iniziale : $P_{1|0}$;
- $k = 1, 2...$

Correzione:

$$\begin{aligned}
S_k &= R_k + C_k P_{k|k-1} C_k^T && \textit{covarianza dell'innovazione} \\
L_k &= P_{k|k-1} C_k^T S_k^{-1} && \textit{guadagno di correzione} \\
e_k &= y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} && \textit{innovazione} \\
\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_k e_k && \textit{correzione della stima} \\
P_{k|k} &= P_{k|k-1} - L_k S_k L_k^T && \textit{correzione della covarianza} \\
&= (I - L_k C_k) P_{k|k-1} (I - L_k C_k)^T + L_k R_k L_k^T &&
\end{aligned}$$

Predizione:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1|k} &= A_k \hat{x}_{k|k} + b_k && \textit{predizione della stima} \\
P_{k+1|k} &= A_k P_{k|k} A_k^T + W_k Q_k W_k^T && \textit{predizione della covarianza}
\end{aligned}$$

6 Documentazione software MATLAB

In questo paragrafo viene descritta l'implementazione del *filtro di Kalman* come sistema dinamico ed il task implementato dal nostro gruppo in ambiente di programmazione *MATLAB*, usando l'approccio della programmazione orientata agli oggetti.

6.1 `sistema.m`

MATLAB presenta già un'implementazione dei modelli di sistemi dinamici lineari ma si è preferito realizzarne una nuova implementazione che considerasse anche gli errori di processo e di misura in modo da rispettare le ipotesi del problema.

In particolare nel file `sistema.m` viene implementata la *classe* dei sistemi dinamici stocastici che utilizzeremo.

Per semplicità abbiamo implementato soltanto sistemi tempo invarianti, per cui tutte le matrici che definiscono il sistema sono costanti.

6.1.1 Proprietà

Le proprietà di cui dispongono gli oggetti di questa classe sono :

```
classdef sistema < handle
%SISTEMA
%Classe che descrive un sistema dinamico lineare tempo invariante

  properties (Access = protected)
    A,B,C,D,W,Q,R,x;     %A,B,C,D matrici del sistema
    % W matrice di guadagno del rumore di processo
    % Q matrice di covarianza del rumore di processo
    % R matrice di covarianza del rumore di misura
    n,m,p,q;       %n dim stato, m dim ingresso, p dim uscita, q dim rumore di
        processo
    u;       %ultimo ingresso ricevuto
  end
```

I metodi implementati sono il costruttore dell'oggetto che va ad inizializzarlo e le due equazioni di evoluzione dello stato interno e di uscita.

6.1.2 Costruttore

La creazione dell'oggetto `sistema` avviene tramite l'inizializzazione dei suoi parametri:

```
function obj = sistema(A,B,C,D,W,Q,R,x0)
```

Al costruttore vanno passate tutte le matrici relative al caso preso in analisi (comprese le covarianze) ed il suo stato iniziale.
Al suo interno vengono effettuati tutti i controlli necessari a verificare che i parametri rispettino le seguenti proprietà:

- A deve essere quadrata (dimensione $n \times n$);
- B deve avere n righe (dimensione $n \times m$);
- C deve avere n colonne (dimensione $p \times n$);
- D deve essere di dimensione $p \times m$;
- W deve avere n righe (dimensione $n \times q$);
- Q deve essere quadrata (dimensione $q \times q$) e definita positiva;
- R deve essere quadrata (dimensione $p \times p$) e definita positiva;
- $x0$ vettore di lunghezza n.

6.1.3 Evoluzione dello stato

In *MATLAB* nei metodi delle classi che utilizzano le proprietà delle stesse, risulta necessario passare come argomento l'oggetto corrente. Questo è possibile attraverso la parola chiave `obj`.

```
function update(obj, u)
  % aggiorna lo stato del sistema
  if (nargin<2)
    u = zeros(obj.m,1);  % se u viene omesso si considera nullo
  end
  obj.u = u;  % salva l'ultimo ingresso ricevuto
  xn = obj.A*obj.x+obj.B*obj.u+obj.W*mvnrnd(zeros(obj.q,1),obj.Q)';
  % calcola il nuovo stato x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ww(k) : w = rumore di
      processo
  obj.x = xn;              % aggiorna lo stato con quello nuovo
end
```

La funzione accetta come parametro esterno l'ingresso dato al sistema; esso può essere omesso, in tal caso viene considerato nullo.
Implementa l'equazione di stato $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ww_k$ andando ad aggiornare la variabile di stato x dell'oggetto.

6.1.4 Lettura dell'uscita

Il metodo *leggiUscita* implementa l'equazione $y(t) = Cx(t) + Du(t) + w$ restituendo in output il valore di y.
Il metodo non necessita di ulteriori argomenti in ingresso:

```
function y = leggiUscita(obj) % restituisce in output l'uscita del sistema
```

In più è stata implementato il metodo per la lettura dello stato interno in quanto l'accesso diretto alle proprietà del sistema è, per ragioni di integrità, consentito unicamente all'oggetto stesso. La lettura dello stato del sistema non sarebbe possibile nella realtà, infatti tale metodo viene utilizzato solo per monitorare il comportamento del sistema, tali dati non verranno utilizzati direttamente.

```
function x = leggiStato(obj) % get dello stato per plot.
```

6.2 `filtrokalman.m`

La classe `filtrokalman` è stata implementata come un estensione della precedente classe `sistema`, infatti il *filtro di Kalman* essendo un osservatore dello stato è a sua volta un sistema dinamico. Tale estensione si realizza attraverso il concetto di ereditarietà delle classi, infatti `kalmanfilter` eredita proprietà e metodi di `sistema` e ciò si indica attraverso il simbolo `<` :

```
classdef kalmanfilter < sistema
```

6.2.1 Proprietà

Oltre alle proprietà della classe `sistema` da essa ereditate, vengono introdotte la matrice di guadagno, la matrice di covarianza dello stato corretto e la predizione del prossimo stato e della relativa covarianza:

```
properties %(Access = protected)
  L;          % matrice guadagno di Kalman
  P;          % matrice di covarianza dello stato corretto
  xPr, PPr;   % predizione dello stato e relativa covarianza
end
```

6.2.2 Costruttore

Come in `sistema.m` la classe `filtrokalman` accetta come argomenti in ingresso le matrici relative al modello del sistema da osservare e la stima iniziale dello stato (`x0`) con la relativa covarianza (`P0`); se quest'ultima è omessa viene considerata come valore di default la matrice identità di ordine n:

```
function obj = kalmanfilter(A, B, C, D, Q, R, x0, P0)
```

All'interno del costruttore viene richiamato il costruttore della superclasse `sistema` al fine di inizializzare le variabili relative al modello nell'oggetto `filtrokalman`:

```
  obj@sistema(A, B, C, D, Q, R, x0);
```

Inoltre, viene verificato che stima iniziale e covarianza siano valide.

6.2.3 Evoluzione

Come per la superclasse corrispondente, la classe *filtrokalman* ha un metodo per il calcolo dell'evoluzione del sistema. Il metodo ereditato dalla classe `sistema` viene sovrascritto (*override*) in modo da implementare l'algoritmo ricorsivo di stima descritto nel capitolo precedente:

```
function update(obj, u, y) % stima lo stato
  obj.u=u;

  %calcolo guadagno di Kalman
  obj.L = obj.PPr*obj.C'/(obj.C*obj.PPr*obj.C'+obj.R);

  %correzione
  obj.x = obj.xPr+obj.L*(y-obj.C*obj.xPr);
  I_LC = (eye(obj.n)-obj.L*obj.C);
  obj.P = I_LC*obj.PPr*I_LC'+obj.L*obj.R*obj.L';

  %predizione
  obj.xPr = obj.A*obj.x + obj.B*u;
  obj.PPr = obj.A*obj.P*obj.A'+obj.W*obj.Q*obj.W';
end
```

I parametri d'ingresso, oltre al riferimento all'oggetto, sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema da osservare al tempo k.

6.2.4 Lettura stima

Una volta effettuato l'aggiornamento del filtro, per ottenere il valore della stima dello stato calcolata si utilizza il metodo `leggiStima` che restituisce il vettore dello stato stimato.

```
function x = leggiStima(obj)
    x = obj.x;
end
```

Se si è interessati al filtraggio dell'uscita del sistema, si può utilizzare il metodo `leggiUscitaStimata` che restituisce l'uscita del sistema calcolata sulla base dello stato stimato.
Entrambi i metodi non necessitano di alcun parametro esterno.

```
function y = leggiUscitaStimata(obj)
  y = obj.C*obj.x + obj.D*obj.u;
end
```

Sono stati implementati anche i metodi `leggiL` e `leggiP` che permettono di ottenere le matrici L e P del filtro all'istante corrente. Ciò sarà utile per osservarne l'evoluzione attraverso le funzioni grafiche di *MATLAB*.

```
function L = leggiL(obj)
  L = obj.L;
end
function P = leggiP(obj)
  P = obj.P;
end
```

6.3 Main task : `filtraggio.m`

Il task che ci siamo prefissati di raggiungere è quello di ricostruire un segnale disturbato da rumore bianco gaussiano. Questa applicazione risulta molto utile in ambito ingegneristico in quanto anche i migliori trasduttori, per limiti costruttivi, presentano delle variazioni nelle misure seppur piccole. Oltre a questo i trasduttori migliori sono reperibili soltanto ad un costo elevato, per cui si può pensare in certe condizioni di risparmiare sulla sensoristica applicando alle misure più rumorose di un eventuale trasduttore economico il *filtro di Kalman* così da ottenere dei valori affidabili a prezzi più accessibili.

All'inizio dello script vengono definiti il tempo di campionamento e la durata della simulazione in secondi.
Viene poi visualizzato un menu che permette di scegliere la natura del segnale da filtrare; i segnali possibili sono tutti e soli quelli ottenibili come uscite da sistemi lineari.
I modelli dei generatori di segnale utilizzati vengono riportati nella sezione successiva. Cliccando uno dei segnali il programma provvederà alla creazione del modello del generatore ed alla sua successiva discretizzazione attraverso le funzioni *built-in* di *MATLAB*.

```
sys = ss(A,B,C,D);
sysd = c2d(sys,dt);
[Ad,Bd,Cd,Dd] = ssdata(sysd);
```

Successivamente vengono definite le matrici di covarianza dei rumori di processo e misura. I valori di tali matrici possono essere variati per aumentare o diminuire la rumorosità del segnale da filtrare.

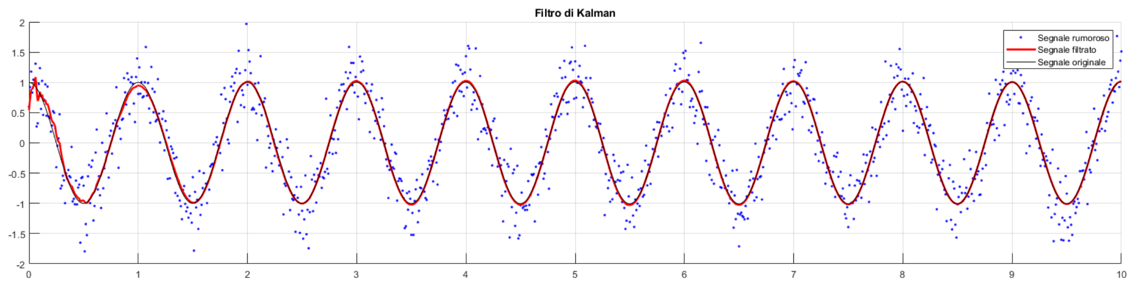
```
Q=1e-3;
R=1e-1*eye(p);
```

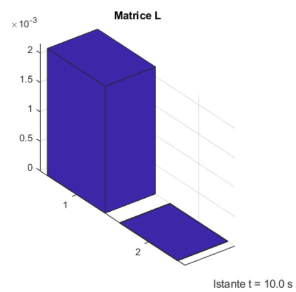
Vengono a questo punto inizializzati gli oggetti relativi al generatore di segnale e al filtro di Kalman e si definisce il ciclo che esegue la simulazione.

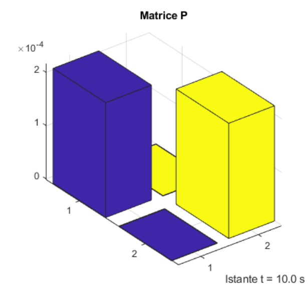
```
% inizializzazione sistema generatore di segnale rumoroso
sys=sistema(Ad,Bd,Cd,Dd,W,Q,R,x0);

% inizializzazione filtro di kalman
P0=eye(n);
k=filtrokalman(Ad,Bd,Cd,Dd,W,Q,R,zeros(n,1),P0);
```

```
%% simulazione
for i=1:length(t)
  x(:,i)=sys.leggiStato();      % lettura stato sistema (segnale da ricostruire,
      per plot)
  y(:,i)=sys.leggiUscita();     % lettura uscita sistema (segnale rumoroso)
  sys.update();                 % calcolo del nuovo stato del sistema
  k.update(0,y(:,i));           % aggiornamento filtro --> parametri u=0 e y(
      segnale rumoroso)
  xs(:,i)=k.leggiStima();       % lettura stima kalman
  Lplot(:,:,i)=k.leggiL();      % lettura matrice L per animazione
  Pplot(:,:,i)=k.leggiP();      % lettura matrice P per animazione
end
```

Una volta completata la simulazione, viene visualizzato il plot con il confronto tra segnale da ricostruire, campioni rumorosi e segnale ricostruito dal filtro. Nella stessa finestra viene visualizzata l'animazione delle matrici di covarianza dello stato e del guadagno.
Di seguito viene riportato un esempio di filtraggio di un segnale sinusoidale:







6.4 Modelli dei generatori di segnale

I generatori di segnale sono sistemi lineari autonomi ($B = 0$) ad uscita scalare ($p = 1$). La loro evoluzione a partire dallo stato iniziale $x(0)$ genera segnali diversi in base alla natura della matrice dinamica A.
In particolare il segnale viene prodotto nell'ultima componente dello stato $x(t)$, quindi la matrice di uscita sarà del tipo: $C = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Di seguito sono riportati i modelli utilizzati nell'applicazione, che per semplicità sono scritti a tempo continuo e poi discretizzati da MATLAB.

- Segnali polinomiali di grado n:

$$x(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

  - Scalino ($n = 0$): $A = 0$
  - Rampa ($n = 1$): $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Parabola ($n = 2$): $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Segnale esponenziale:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$$

$$A = \alpha \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = x_0$$

- Segnale sinusoidale ad ampiezza costante:

$$x(t) = a \cos(\omega t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Segnale sinusoidale smorzato:

$$x(t) = a e^{\alpha t} \cos(\omega t)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Luigi Chisci. Stima dello stato di un sistema dinamico. 2019. https://e-l.unifi.it/pluginfile.php/980259/mod_resource/content/1/Cap7-Stima-Stato.pdf.

[2] Luigi Chisci. Stima parametrica. 2019. https://e-l.unifi.it/pluginfile.php/980250/mod_resource/content/1/Cap5-Stima-Parametrica.pdf.