1 Automatica

1.1 Sistemi dinamici a tempo discreto

Un sistema dinamico a tempo discreto è il modello matematico di un oggetto che interagisce con l'ambiente circostante attraverso canali di ingresso e di uscita che sono rappresentati attraverso vettori, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$, di variabili dipendenti dal tempo. La differenza principale dai sistemi a tempo continuo è che in questo caso il tempo è rappresentato come una variabile intera k.

Si avrà pertanto che per ogni istante di tempo k il sistema riceverà dei segnali in ingresso e risponderà con dei segnali in uscita.

Il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ rappresenta i segnali che l'oggetto riceve dall'esterno mentre il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ rappresenta i segnali che l'oggetto dà in uscita.

In generale il comportamento del sistema non dipende esclusivamente da questi due vettori, ovvero non vi è un legame diretto tra ingresso e uscita: infatti il sistema ha uno stato interno che evolve in funzione degli ingressi e degli stati precedenti. In particolare lo stato di un sistema può essere a sua volta rappresentato da un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Il modello del sistema è pertanto costituito da equazioni che descrivono l'evoluzione dello stato del sistema in funzione dell'ingresso, dello stato e del tempo e esprimono la relazione d'uscita:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono opportune funzioni vettoriali.

1.2 Sistemi lineari stocastici

Consideriamo una particolare tipologia di sistemi, quelli lineari strettamente propri, in cui le funzioni $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono appunto funzioni lineari e l'uscita non dipende esplicitamente dall'ingresso. In questo caso le equazioni si possono genericamente scrivere come:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sono matrici di coefficienti variabili nel tempo.

Tuttavia tali modelli sono approssimazioni ideali che possono essere valide in alcuni contesti, mentre in altri è necessario tener conto delle incertezze e delle imprecisioni che si hanno nella misura dei segnali di ingresso e di uscita del sistema.

Tali incertezze possono essere modellizzate come vettori casuali:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \end{aligned}$$

In particolare si possono fare alcune ipotesi su tali processi stocastici:

- i vettori casuali $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono gaussiani a media nulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k) &\sim \mathcal{N}(0,\, \mathbf{Q}(k)) \\ \mathbf{w}(k) &\sim \mathcal{N}(0,\, \mathbf{R}(k)) \end{aligned}$$

- $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono incorrelati:

$$E[\mathbf{v}(k_1)\mathbf{w}^T(k_2)] = 0 \qquad \forall\, k_1, k_2 \geq k_0$$

- $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono bianchi:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}(k_1)\mathbf{v}^T(k_2)] &= 0 \qquad \forall\, k_1 \neq k_2 \\ E[\mathbf{w}(k_1)\mathbf{w}^T(k_2)] &= 0 \qquad \forall\, k_1 \neq k_2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{x_0}$ è un vettore casuale gaussiano con media e varianza note:

$$\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x_0} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{0},\, \mathbf{P_0})$$

- $E[\mathbf{x_0}\mathbf{v}^T(k)] = 0 \qquad \forall\, k \geq k_0$
- $E[\mathbf{x_0}\mathbf{w}^T(k)] = 0 \qquad \forall\, k \geq k_0$