# Pappus' Theorem and the Modular Group

.

August 10, 2023

## Introduction

먼저, 이 논문에서 다루는 모든 기하는 Projective Plane에서 다룹니다. 정확하진 않지만, 대략적으로 어떤 '구면'위에서 다루는 기하라고 생각하면 됩니다. Projective Plane을 다루는 이유는 두 직선이 평행할 때에도 한 점에서 만나게끔 하기 위해서입니다.(이 성질이 왜 필요한지는 밑에 나옵니다.)

## Marked Boxes

모든 논의는 Projective Plane $\mathbb{P}$ 위에서 진행된다는 것을 명심합니다. Marked box를 정의하기에 앞서 Overmarked box를 정의합니다. 논문을 가지고 있으면 Fig 2.2를 참고하는 것이 좋습니다. Overmarked box란, 순서쌍 $((p,q,r,s;t,b),(P,Q,R,S;T,B))$ 입니다. 이중에서 equivalence relation $\sim$을 다음과 같이 줍니다: $((p,q,r,s;t,b),(P,Q,R,S;T,B)) \sim (((q,p,s,r;t,b),(Q,P,S,R;T,B))$. 이렇게 해서, 모든 Overmarked box들의 집합을 $\sim$의 동치 관계를 줘서 얻은 원소들을 Marked box로 정의합니다. 소문자는 점을 나타내고, 대문자는 선을 나타냅니다.

## Operations on Marked Boxes

Marked Box위에 연산을 줍니다. $\Theta = ((p,q,r,s;t,b),(P,Q,R,S;T,B))$ 라 할 때,

$$i(\Theta) = ((s,r,p,q;b,t),(R,S,Q,P;B,T))$$

로 정의합니다. 이렇게 해서 생긴 $i(\Theta)$ 라는 Marked Box는 상상하기 어렵겠지만, 원래의 Marked Box의 '바깥쪽' 으로 감싸는 것이라고 생각하면 됩니다. 그러니까, 원래의 박스의 꼭짓점이었던 $p,q,r,s$ 를 평면에 그려놓고, $s$ 에서 $r$ 로 멀리 돌아가는 직선을 생각해봅니다. (앞서 말했듯이 $\mathbb{P}$ 를 일종의 구면이라고 생각하면 편합니다.) $i$ 를 두번 적용하면 자기 자신이 된다는 것은 문자를 배열하기만 해도 알 수 있습니다.

이제 $\tau_1$ 및 $\tau_2$를 정의합니다. 앞서 정의한 $i$보다는 훨씬 머릿속에 잘 그려집니다. 논문의 Fig 2.3을 참고하시기 바랍니다. $\tau_1$은 위쪽 박스에, $\tau_2$는 아래쪽 박스에 해당됩니다. 논문의 $QR$나 $PS$는 서로다른 두 직선의 교점을 의미합니다. Projective Plane을 생각하는 이유는 평행한 두 직선에 대해서도 저런 점이 존재한다는 것을 보장하고 싶어서 가정합니다.

## Modular Group과의 연관성

앞서 정의한 3가지 operation $i, \tau_1, \tau_2$를 통해 생성되는 군이 결국에는 Modular Group라는 잘 알려진 군이라는 것을 논문에서 증명합니다. 이 논의는 Lemma 2.3에 나와있습니다. 이는 꽤 신기한 사실인데, Modular Group이 수학의 여러 분야, 예를 들어 정수론 및 복소해석학에서 튀어나오기 때문입니다.