Последние результаты в Художественные галереи

ТОМАС К. ШЕРМЕР

Приглашенный доклад

Две точки многоугольника называются видимыми, если прямой тонкий отрезок между ними полностью лежит внутри многоугольника. Задача картинной галереи для многоугольника P состоит в том, чтобы найти минимальное точек G в P, такое, что каждая точка P видна из некоторой точки
G. Ли и Лин показали, что эта задача является NP-трудной [71J. Однако Чваталь показал, что для простого многоугольника со сторонами ri число точек Cl никогда не превысит ri /3] *[21J. Этот последний результат теоремой о картинной галерее.*

Было изучено множество вариаций задачи о картинной галерее, и работа в этой области ускорилась после публикации монографии O'Рурка [92J, которая посвящена исключительно этой теме.

В этой статье дается введение в теоремы о галерее искусств и обзор последних результатов в этой области. Акцент делается на результатах, а не на технике. Кроме того, в работе **рассматривается** *несколько новых задач, которые имеют тот же геометрический вкус, что и задачи о галереях.*

I. ВВЕДЕНИЕ

A. *Определения*

Этот раздел содержит необходимые определения, некоторые сведения о художественных галереях и обсуждение сферы данной работы. Начнем с определений, следуя О'Рурку [92].

Многоугольник обычно определяется как упорядоченная последовательность по крайней мере трех точек rt 2 - , rq на плоскости, называемых вершина~~ми, и~~ n ~~отре~~зков ~~прямых~~ r -2, - 2<3 " - -i , и rqrt, называемых ребрами. *Простой* многоугольник - это многоугольник с ограничением, что непоследовательные ребра не пересекаются. Простой многоугольник является кривой Жордана и, таким образом, делит плоскость на три подмножества: сам многоугольник, (ограниченная) внутренняя часть и (неограниченная) внешняя часть. Однако в дальнейшем мы будем использовать термин "многоугольник" для обозначения "простой многоугольник плюс внутренность". Таким образом, многоугольники - это замкнутые, ограниченные множества на плоскости.

Говорят, что многоугольник *P* покрыт коллекцией подмножеств *P*, если объединение этих подмножеств в точности равно *P*. Коллекция подмножеств называется покрытием *P*. Покрытие P

Рукопись получена 30 октября 1990 г.; исправлена 20 марта 1992 г. Эта работа была поддержана Советом по естественным и инженерным наукам Канады и офисом президента Университета Саймона Фрейзера. Аулхор работает в Школе вычислительной , Саймон Фрейзер Университет, Бернаби, Британская Колумбия, Канада
V5A 156. Номер журнала IEEE 9204143.

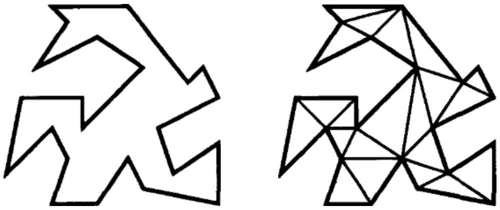


Рис. 1. Многоугольник и одна из его триангуляций.

называется разложением, если пересечение каждой пары подмножеств в покрытии имеет нулевую площадь. *Триангуляция* многоугольника - разложение многоугольника на треугольники без добавления вершин. Для этого многоугольник разрезается *диагоналями* (отрезками прямых между несмежными вершинами). Многоугольник и одна из его триангуляций показаны на рис.
1. *Триангуляционный граф* многоугольника *P* - это граф на вершинах P, в котором две вершины соединяются, если они имеют общее ребро или являются конечными точками диагонали в фиксированной триангуляции. Класс триангуляционных графов многоугольника совпадает с классом *максимальных внеплоскостных графов.*

Многие алгоритмы вычислительной геометрии включают в себя этап триангуляции многоугольника. Недавно Шазель представил алгоритм, позволяющий вычислить триангуляцию многоугольника за время O(n) [15]; результаты сложности алгоритмов, приведенные здесь, были проанализированы с учетом этого результата. Поэтому время работы, приведенное в данной статье, часто не совпадает с временем работы, представленным в статье, к которой приписывается алгоритм. В частности, если член log log n отсутствует в результатах сложности в данной работе, но присутствует первоисточнике, то это связано с тем, что алгоритм Шазелла был заменен на лучший ранее *0(n* log log n) алгоритм Тарьяна и ван Вика [117].

Пусть z и y - две точки многоугольника P. Мы будем говорить, что z и p видимы, если отрезок прямой zp не пересекает внешнюю сторону *P*. На рис. 2 точка o видима для b и c, но не для d. Считается, видимые точки видят друг друга. Множество всех точек *P*, видимых из z, является многоугольником, называемым многоугольником видимости z, и обозначается U(z, *P).*

Мы будем выделять некоторые наборы точек в многоугольнике, называя их защитными наборами. Отдельные элементы **защитного** множества

0018-9219/92 $03.00 O 1992 IEEE

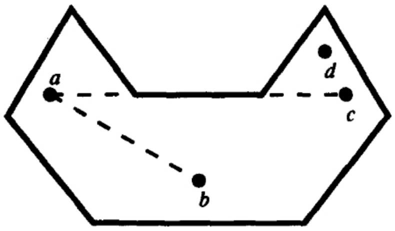


Рис. 2. Точка о может видеть ò и с, но не *d.*

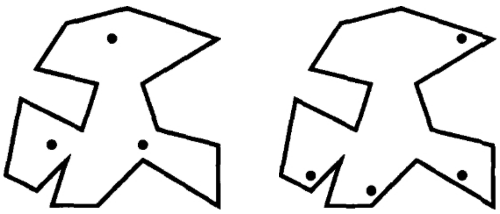


Рис. 3. Накрывающее защитное множество; скрытое множество.

называются сторожевыми. Если все точки в охранном множестве являются вершинами *P,* то G называется вершинным охранным множеством, а элементы G - вершинными охранниками. В противном случае G называется точечным сторожевым множеством, а его элементы - точечными сторожами. Другие типы защит будут рассмотрены позже.

Считается, защитное множество G покрывает многоугольник P, коллекция множеств {V(p, *P)*| p e G} покрывает *P.* Точки в многоугольнике слева на рис. 3 являются покрывающим защитным множеством. Позже мы увидим, что определение покрытия для **защитных** множеств является простым обобщением обычного определения покрытия, приведенного выше. *Задача о картинной галерее* для многоугольника *P* состоит в том, чтобы найти минимально кардинальное покрывающее сторожевое множество G для *P.* Она называется так потому, что многоугольник *P* можно представить план этажа картинной галереи, а точки G - как места для размещения сторожей, так чтобы каждая часть картинной галереи была видна хотя бы одному сторожу. Мы используем *g(P)* для обозначения кардинальности минимального покрывающего множества охранников для многоугольника *P.*

Понятие**, аналогичное** понятию покрывающих защитных множеств, - *скрытые множества.* Скрытое множество - это множество точек *H* в многоугольнике, такое, что ни одна пара точек из *H* не видна. Точки в многоугольнике справа на рис. 3 являются скрытым множеством. Скрытые множества известны в математической литературе как визуально независимые множества и связаны "свойством *P""* [65J.

Ортогональный многоугольник - это многоугольник с ребрами, которые чередуются между горизонтальными (нулевой наклон) и вертикальными (бесконечный наклон). Ортогональные многоугольники также называют изо- тетическими и прямолинейными. Ортогональные многоугольники являются важным подклассом многоугольников, которые встречаются во многих вычислительных приложениях благодаря простоте их представления и манипулирования ими, а также конструкции многих машин (например, сканеров изображений и устройств для черчения), которые используются в этих приложениях. Ограничение многоугольников, рассматриваемых в задаче о картинной галерее, ортогональными многоугольниками создает интересный подкласс задач и привело к многочисленным результатам.

Рис. 4. Многоугольники Comb.

B. История художественной галереи

Оригинальная проблема галереи, поставленная Клее в беседе с Шваталем, состоит в том, чтобы найти наименьшее количество точечных охранников, необходимых для покрытия любого многоугольника из n вершин; это число будет обозначаться *g(n)* (не путать *с g(P)*, как определено выше). В терминах галерей, *g(n)* - это минимальное число охранников, необходимых для наблюдения за галереей с n стенами.

Чваталь быстро доказал, что p(n) = n/3] , результат, который стал известен как теорема о картинной галерее [21]. Сначала он показал, что p(n) > n/3j , продемонстрировав класс многоугольников, известных сейчас как гребенчатые многоугольники; примеры гребенчатых многоугольников показаны на рис. 4 для n = 9 и n = 15. Гребенчатые многоугольники существуют для любого n, кратного 3. Каждый гребенчатый многоугольник требует n/3 охранников, поскольку ни один охранник не может видеть в любые два "зубца" (восходящие треугольные области) гребенки, а таких зубцов n/3.

Далее Чваталь показал, что p(n) < [n/3], с помощью относительно сложного индуктивного аргумента на графах триангуляции многоугольников. Позднее Фиск дал следующее более краткое доказательство этого неравенства [47]: Сначала триангулируем многоугольник. Затем раскрасьте вершины графа триангуляции в три цвета: присвойте каждой вершине один из трех различных цветов так, чтобы никакие две соседние вершины в графе не имели одинакового цвета. Каждый треугольник графа, который соответствует треугольнику триангуляции, будет иметь одной вершине каждого цвета. Кроме того, каждая точка треугольника видна каждой вершине этого треугольника. Поэтому при выборе любого из трех цветовых классов получится набор вершин, из которых видна каждая точка каждого треугольника, а значит, и каждая точка многоугольника (то есть каждый цветовой класс является покрывающим вершину защитным множеством). По принципу голубятни наименьший из этих цветовых классов будет содержать не более n/3] вершин.

Позднее Ли и Лин показали, что задача художественной галереи для многоугольников (задан многоугольник *P,* найдите минимальное количество охранников, необходимых для покрытия *P)* является NP-трудной [70], путем редукции из булевой трехзначной удовлетворимости. Их результат относится к вершинным стражам, и он был распространен на точечные стражи Аггарвалом [2]. Читателя, не знакомого с теорией сложности, мы отсылаем к книге Гарея и Джонсона [50].

Хотя результат Ли и Лина подразумевает, что найти минимальный набор охранников (т.е. найти *g(F)* охранников) для данного многоугольника невозможно, Авис и Туссен показали, что найти набор *g(n)* охранников для многоугольника за полиномиальное время [7]. Алгоритмы поиска таких наборов стражей называются алгоритмами размещения стражей. Большинство алгоритмов размещения охранников работают путем имитации доказательств галереи верхних границ, и алгоритм Ависа и Туссена не является исключением, являясь алгоритмической имитацией доказательства Фиска.

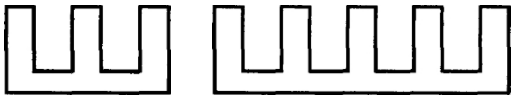


Рис. S. Ортогональные гребенчатые многоугольники.

C. *Ортогональные художественные галереи*

Кан, Клаве и Клейтман исследовали проблему картинной галереи, ограниченную ортогональными многоугольниками [63]. Они рассматривают ортогональные гребенчатые многоугольники рис. 5, устанавливая, что ort/i(ri) > [n/4j *(orth(n)* обозначает максимальное число **охранников**, необходимое для любого ортогонального многоугольника из n вершин). Они доказывают соответствующую верхнюю **границу,** *orth(n)* < [rt/4j, тем же способом, каким Фиск доказал оригинальную теорему о галерее, но при этом они разлагают многоугольник не на треугольники, а на ***четырехугольники***, а затем раскрашивают граф четырехугольника так, что каждый четырехугольник имеет по одной вершине каждого из четырех цветов. Большая часть статьи посвящена доказательству того, что каждый ортогональный многоугольник разложение на выпуклые четырехугольники.

Эдельсбруннер, О'Рурк и Вельцль дали алгоритм размещения с точечной защитой *O(n)* для ортогональных многоугольников**, основанный** на L-образном разбиении [37]. Lubiw, Sack и Toussaint представили другие линейные алгоритмы размещения, основанные на разбиении на четырехугольники [76], [100], [103].

D. *Важность художественных галерей*

Проблемы картинных галерей изучаются учеными-вычислителями**, поскольку** они являются фундаментальными проблемами видимости, а **видимость** - это центральный вопрос во многих вычислительных приложениях. Области применения видимости включают робототехнику [69], [123], планирование движения [75], [80], зрение [113], [124], графику
[79], [17], CAD/CAM [12], [38], автоматизированная архитект...
[34], [99], и распознавания образов [5], [118]. Другие причины, по которым изучаются проблемы галерей, заключаются в том, что они являются непрерывной формой классических задач размещения объектов, имеют простую формулировку и требуют интересного взаимодействия теории графов, геометрии и вычислительной техники при их решении.

Монография О'Рурка [91] посвящена проблемам картинной галереи и содержит хорошо написанные подробные результатов, упомянутых выше, и методов, используемых в их доказательствах. С момента публикации этой книги активность в области проблем картинной галереи быстро возросла, что привело к появлению множества новых теорем и алгоритмов. Данная статья представляет собой попытку собрать эти последние результаты в одном месте. Однако мы не ставим перед собой цель сделать эту статью учебником по используемым техникам доказательства и поэтому приводим лишь некоторые подробности об этих методах.

E. *Организация работы с бумагой*

Остальная данной работы состоит из шести разделов. Раздел II содержит результаты о различных защит. Раздел III содержит результаты о покрытии, а раздел IV - о покрытии внешних сторон многоугольников. Раздел V содержит результаты о графах видимости, а раздел VI содержит

Рис. 6. Многоугольники, требующие [nJ 4] защит по краям.

Проблемы, которые не являются строго галерейными, но имеют тот же геометрический смысл. Выводы сделаны в разделе VII.

II. ОБОБЩЕННЫЕ ОХРАННИКИ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые варианты проблемы картинной галереи, возникающие, когда качестве элементов защитных множеств допускаются не просто точки, а определенные подмножества многоугольника. Точка будет называться видимой для такого подмножества, если она видима для некоторой точки в этом подмножестве. Такое понятие видимости из подмножества известно как слабая видимость, в отличие от *сильной видимости*, когда точка называется видимой для подмножества, если она видима для каждой точки этого подмножества [6].

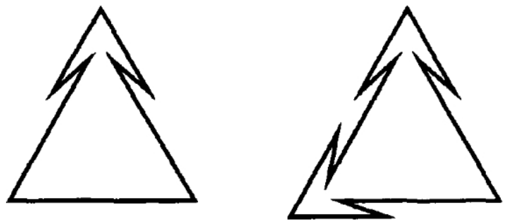
Более формально, если H - подмножество внутри многоугольника *P, то* пусть V(fi, P)= *(p C P 3r C* ft такие, что *p* и r видимы}. Нас по-прежнему интересует поиск минимально кардинальных покрывающих защитных наборов, но теперь отдельные защитные наборы будут представлять собой различные типы подмножеств. Нас интересует только количество защит, а не размеры отдельных защит. Типичными типами подмножеств, используемых в качестве защитных, являются выпуклые множества или ребра многоугольников.

Эта ветвь вариаций проблемы картинной галереи была начата Туссеном в 1981 году, когда он спросил, как изменится теорема о картинной галерее, если охранникам разрешить патрулировать отдельные грани многоугольника, а не стоять постоянно в одной и той же точке. Он хотел узнать функцию охраны p*(n) - минимальное количество *охранников*, необходимое для покрытия любого многоугольника из n вершин.

По предположению Туссена, если исключить небольшое число полигонов, то $g^E(n)$ = [n/4j . Чтобы придать вес этой гипотезе, он продемонстрировал класс многоугольников, показанный на рис. 6, из которого следует, что p*(ri) n/4j . Известны два типа многоугольников, для которых требуется более n/4] защит ребер. Эти многоугольники, предложенные Пейджем и Шермером, требуют [(n+ 1)/4J защит, и показаны на рис. 7. Однако считается, что эти многоугольники являются единичными исключениями, отсюда и оговорка в предположении Туссена.

О'Рурк был первым, кто добился прогресса в решении гипотезы Туссена. Хотя ему не удалось установить верхнюю границу на $g^E(n)$, он смог доказать верхнюю границу на *g* (n) - минимальное количество *мобильных стражей*, необходимое для любого многоугольника из n вершин [90]. Мобильные охранники - это несколько более общая версия краевых охранников; каждый мобильный охранник может патрулировать либо ребро, либо диагональ многоугольника. Таким образом, каждый краевой страж является мобильным стражем, и

s"(-) s s'(-)



''ig. 7. Два потигона, требующие(n -|- }]/4Jedge охранников.

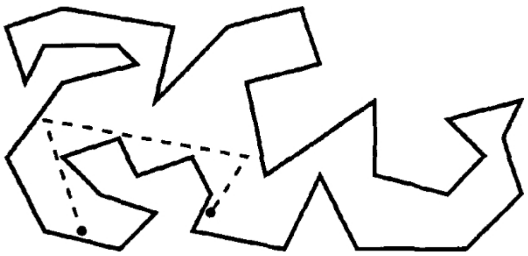


Рис. 8. Пара видимых точек Ла.

Результат О'Рурка состоит в том, что *g'* (n) = tu/4] . Многоугольники рис. 6 устанавливают нижнюю границу, q"(ri) > [ri/4), как для подвижных защит, так и краевых, а многоугольники рис. 7 больше не являются исключениями. Верхняя граница соответствия, *q" {ri)* [ri/4j, доказывается с помощью аргумента индукции на триангуляционных графаханалогичного доказательству теоремы Шваталя об оригинальной картинной галерее.

Сходство методов Чваталя и О'Рурка не случайно. Эти методы и доказываемые ими результаты являются частными случаями более общих методов и результатов, как позже установил Шермер [106], [107}. Чтобы сформулировать этот результат, мы должны сначала обобщить наше понятие видимости.

Мы будем называть две точки многоугольника link-j видимыми (£, visible), если они могут быть соединены путем или меньшего числа отрезков прямых, которые целиком лежат внутри многоугольника. На рисунке 8 показана пара точек многоугольника, которые являются 3 видимыми.

Видимость £t - это обычная видимость: две точки видны, если они могут быть соединены путем одного сегмента, лежащего внутри многоугольника. При использовании метода отсутствия видимости точка только сама себе. Таким образом, проблемы с покрытием можно представить как проблемы с картинной галереей, использующей No visibility.

Один из способов определения выпуклости состоит в том, чтобы назвать множество выпуклым, если каждое пара точек из этого множества видима (отрезок прямой между точками лежит в этом множестве). Это определение можно обобщить, назвав множество *1irik-k* выпуклым *iL* convex), если каждая пара точек в этом множестве *Lç* видима. Таким образом, éр-выпуклые множества - это точки, а £;-выпуклые множества - это ctinvex множества. Видимость и выпуклость связей были введены Хорном и Валентайном [59], [120], а впервые изучены в вычислительных условиях Сури f115].

Шермер рассматривает проблему картинной галереи, где €#-выпуклых подмножеств *P*, допустимых в качестве охранников, используя L; видимость. Пусть *g (n)* - соответствующая функция охраны: p$(n) - минимальное число L -выпуклых охранников необходимо для покрытия любого многоугольника из n вершин, используя £jвидимость. Суть результата Шермера в том, что ç)(n)= *[n J k* 2j + 1)) . Он также показывает, что этот результат справедлив и для более ограниченных классов охранников, и имеет алгоритм размещения *O[n')* для любого из этих классов охранников.

Теорема Чваталя - частный случай этого результата, когда *k* -- 0 (точечная охрана) и j = 1 (нормальная видимость). Результат О'Рурка - это частный случай *k* -- 1, J= 1. Другим побочным продуктом этой работы жесткое ограничение [n/(j+ 1)] на максимальный размер максимальных скрытых множеств в многоугольниках из n вершин, использующих €у видимость.

Использование Lt -выпуклых ограждений и *L j* видимости в ортогональных многоугольниках также должно дать интересную теорему о галерее. Пусть *oríhj* (n) - соответствующая защитная функция. Теорема Кана, Клаве и Клейтмана об ортогональных многоугольниках является частным случаем J= 1, *k* -- 0: ort/i0(n)= [n /4j . Также Аггарвал доказал, что ottfi)(n.) - (.mi + 4)/16J [2]. Больше ничего, кроме тривиального ort/i$(n) < qJ(n), об ortfi$(n) не известно. Гевали и Натафос изучили *ортогональную* видимость *L* (каждое из *j* звеньев должно быть горизонтальным или вертикальным), получив алгоритм O(n^3) для нахождения минимального точечного охранника covei ортогональных многоугольников, сводящихся к *решеткам* [50]. Сетка - это набор пересекающихся горизонтальных и вертикальных , используемых качестве абстракции структуры ортогонального многоугольника.

Шермер исследовал *диагональные* стражи и связанную с ними функцию стража *^{gD}(n)* [109]. Диагональные стражи - это стражи, которым разрешено патрулировать отрезок между *несмежными* вершинами - подвижные стражи, которые не могут патрулировать ребра многоугольника. Он показал, что [(2s+ 2)/7j *$^{g(D)}$(n<* [(rt - 1)/3]; верхняя граница узка для триангуляционных графов. (Заметим, что О'Рурк использует термин *диагональная защита* для того, что мы называем мобильной защитой).

Наконец, мы возвращаемся к первоначальному вопросу Туссена о функции p"(n). О'Рурк установил, что обычная техника сведения задачи о картинной галерее к задаче о триангуляционном графе недостаточно сильна, чтобы доказать гипотезу о достаточности [n/4j краевых защит. Однако недавно Шермер показал, что обычное сведение дает доказательство того, что достаточно [3n/ 10] защит по краям (за исключением n - 3, 6 или 13, где может потребоваться дополнительная защита). Таким образом, из небольшого числа исключений можно сделать вывод,

$$\lfloor n/4 \rfloor \leq g^E(n) \leq \lfloor 3n/10 \rfloor .$$

Сак и Сури дали алгоритм O(n) для определения того, может ли данный многоугольник быть огражден одним ребром [101]; многоугольники, которые могут быть ограждены таким образом, называются слабо видимыми многоугольниками с ребрами. Ке дал алгоритм O(n log n) для родственной задачи обнаружения того, может ли данный многоугольник охраняться одним охранником сегмента линии [66].

Conjc.rturr l (Tous.suint): За исключением нескольких небольших rt,

V'(") ' ^t

C.onjecture 2 *(Toussu int).* Минимальное число защит ребер, достаточное для любого звездообразного многоугольника из n вершин, равно n/5.

Открытая задача 1.' Найти плотные бунды на rant/iy (ri).

Открытая задача 2: Найти жесткие ограничения на *s' --)*

III. ПОКРЫТИЕ ПОЛИГОНОВ

В этом разделе мы рассмотрим сложность покрытия многоугольников различными типами подполигонов. Покрытие тесно связано с охраной: охрана многоугольника охранниками, выбранными из некоторого множества *!S*, - это то же самое, что и покрытие многоугольника многоугольниками видимости членов *S*. Эти многоугольники видимости часто по себе являются интересными типами множеств. Например, если *S* - множество всех точек некоторого многоугольника *P, то* многоугольники видимости *S* - это максимальные звездообразные подмножества *P*.

Пусть Р - некоторое свойство, которым может обладать множество. Тогда мы можем определить проблему принятия решения о покрытии Р следующим образом:

П-образная обложка

ИНСТАНЦИЯ: Простой многоугольник *P* и целое число m.

ЗАДАЧА: Может ли *P* быть покрыт rn или меньшим количеством подполигонов.

гонов, каждый из которых обладает свойством Р?

Например, если Р обладает свойством выпуклости, то задача о покрытии Р - это задача о выпуклом покрытии. Эта задача может быть решена за полиномиальное время, если минимальное покрытие может быть найдено за полиномиальное время. Аналогичным образом мы определяем задачу Р-охраны:

П-образная защита

ИНСТАНЦИЯ: Простой многоугольник *P* и целое число rn.

ВОПРОС: Может ли *P* быть покрыт rn или меньшим количеством подмногоугольников?

многоугольников, каждый из которых является многоугольником видимости подмножества *P* со свойством Р?

Мы увидим, что для большинства интересных свойств Р, проблемы f-покрытия и Р-охраны являются NP-трудными. Однако, вопреки ожиданиям, многие из проблем с Р-крышками и Р-гардингом трудно отнести к NP. Это связано с тем, что минимальные покрытия многоугольника могут содержать части, вершины которых находятся в координатах, требующих большого количества битов для задания. О'Рурк начал исследование этой трудности для выпуклых накрытий [89]. Единственные нетривиальные проблемы P-cover или P-guarding, которые, как известно, находятся в NP, это те проблемы P-guarding, для которых существует только полиномиальное число возможных защит (например, защита вершин или диагональная защита).

Многие результаты NP-трудности для покрытий и ограждений были впервые получены для многоугольников с дырами [93], [73], [76], [50L [78]. Позже Ли и Лин первыми показали, что некоторые задачи P-cover и P-guarding являются NP-трудными для многоугольников без дыр [70]. Они показали NP-трудность для защиты вершин, защиты ребер и защиты точек (звездное покрытие). Позже Калберсон и Рекхоу установили NP-трудность для выпуклого покрытия и аналогичных задач, где нужно покрыть только границу или вершины многоугольника [27], а Хеккер и Хервиг показали, что диагональное покрытие, покрытие треугольника триангуляции и мобильное покрытие NP-трудны *у6]*. Шермер показал, что для любого 2> 1 *L# - выпуклое* покрытие является NP-трудным, а для любого 2 0 и J 1, используя *L j* видимость, Lt-выпуклая защита является NP-трудной [106]. Также Пезант начал исследование сложности k-кратного покрытия и ограждения (где

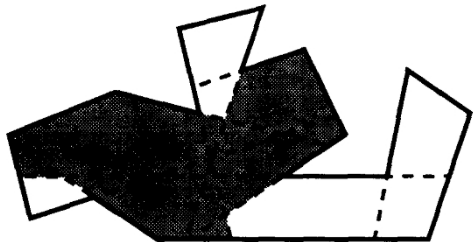


Рис. 9. Ограниченный звездообразный субполигон.

каждая точка в многоугольнике должна быть покрыта *k* или более наборами или защитами) [95].

В отличие от трудности покрытия, Шазель и Добкин смогли показать, что нахождение минимального выпуклого *разбиения* (покрытия непересекающимися выпуклыми частями) многоугольника является полиномиальным, и продемонстрировали *O(n')* алгоритм для этой задачи [16]. Для многоугольников с отверстиями эта задача NP-трудна [73]. Также Kei1 **нашел** алгоритм O(n' log n) для разбиения многоугольника на минимальное количество звездообразных многоугольников, где вершины каждого звездообразного многоугольника ограничены подмножеством вершин базового многоугольника [67J.

Один из подходов к решению проблемы сложности покрытия многоугольников заключается в разработке алгоритмов поиска решений, приближенных к оптимальным. Гхош представил алгоритм с временем *0(n'* log n), который находит набор вершинных защит, имеющий в O(log n) раз больше **минимального** числа вершинных защит [51}. Аггарвал, Гош и Шьямасундар дают 0(n' log n) алгоритм для нахождения покрытия многоугольника *рестриктивными* звездообразными фигурами, который имеет не более O(log n) раз минимальное количество таких покрывающих фигур [3]. *Ограниченное множество* в многоугольнике Р - это подполигон, который имеет в качестве ребер подполигона только части ребер Р или части расширений ребер Р; ограниченное звездообразное множество показано на рис. 9.

Другой подход заключается в рассмотрении проблем Р-покрытия для фиксированных малых rn; даже это представляется сложным. Ли и Препарата дали линейный алгоритм для определения того, является ли многоугольник звездообразным (star cover with rn = 1) [71]. Существует тривиальный алгоритм для определения выпуклости многоугольника (выпуклое покрытие при rn = 1), а также линейный алгоритм Шермера для определения того, является ли многоугольник объединением двух выпуклых многоугольников (выпуклое покрытие при rn = 2) [108]. Недавно Бельвиль дал $0(n^2)$ алгоритм для определения, является ли многоугольник объединением двух *Lk-выпуклых* многоугольников (Lt-выпуклое покрытие с rn = 2), и $0(n^4)$ алгоритм для определения, является ли многоугольник объединением двух звездообразных многоугольников (звездное покрытие с m= 2). Других результатов такого типа не известно. В более общем Брин дал характеристику объединений двух звездообразных множеств [11], а Стейми и Марр - объединений двух выпуклых множеств [112].

Ограничение класса покрываемых многоугольников ортогональными многоугольниками привело к появлению множества интересных проблем. Большинство проблем покрытия ортогональных многоугольников легко укладывается в NP. Существуют общие результаты для покрытия

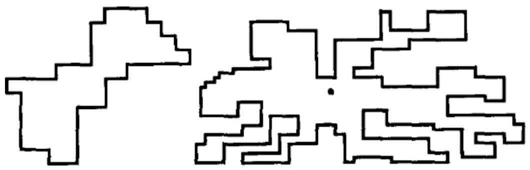


Рис. 10. Ортогонально выпуклый многоугольник и ортогонально выпуклая звезда.

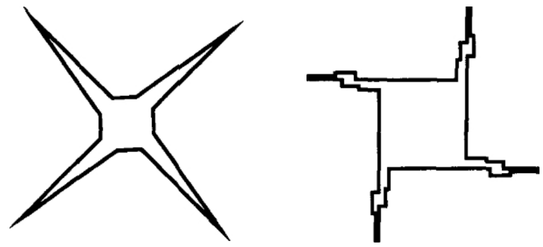


Рис. 11. Многоугольники, не допускающие скрытых защитных наборов вершин.

или разбиение ортогональных многоугольников на два типа подполигонов: прямоугольники и ортогонально выпуклые звезды.

Калберсон и Рекхоу показали, что покрытие прямоугольника (ортогонального) является NP-полным, даже если нужно покрыть только границу [27]. Для многоугольников с отверстиями Конн и О'Рурк показали, что покрытие либо границы, либо рефлексивных вершин является NP-полным. Однако они получили алгоритм с временем 0(n² ⁵) для покрытия выпуклых вершин [22]. Также Имаи и Асано дали алгоритм O(n' log n) для нахождения минимального разбиения ортогонального многоугольника с отверстиями на минимальное количество прямоугольников [61], а Лиу, Тан и Ли получили алгоритм *O(n)* для этой задачи, если многоугольник не имеет отверстий [74}.

Ортогонально выпуклые многоугольники - это многоугольники, для которых любая вертикальная или горизонтальная линия пересекает многоугольник ровно в одном сегменте. Ортогонально выпуклые звезды - это многоугольники, образованные как объединение множества ортогонально выпуклых многоугольников, имеющих общее пересечение. Ортогонально выпуклый многоугольник и ортогонально выпуклая звезда показаны на рис. 10. Мотвани, Рагхунатан и Саран показали, что минимальное покрытие ортогонального многоугольника ортогонально выпуклыми звездами может быть найдено за время *O(n*ⁱ*ᴼ)* [82], и этот результат был позже улучшен до времени O(n) Рагху-натаном [96]. Ролинс показал, что (n + 4)/8j таких покрывающих многоугольников иногда необходимы и всегда достаточны [97].

Было найдено много полиномиальных алгоритмов для задач минимального покрытия на ограниченных классах ортогональных многоугольников или с использованием других типов покрывающих множеств [98], [26], [68], [771. [48], [8}, [14], [4], [82], [81]. Большинство из этих

Алгоритмы делят многоугольники на прямоугольники

удлиняя ребра, вычисляя граф, выражающий отношения видимости между образованными прямоугольниками, и находя покрытия клики на этом графе видимости (или геометрический эквивалент вышеописанного процесса). Motwani er *al.* отметили, что графы видимости, используемые в этих алгоритмах покрытия, являются подклассами *совершенных* графов [81].

С проблемами минимального покрытия и ограждения связаны проблемы поиска максимальных скрытых множеств. Шермер показал, что найти максимальное скрытое множество в многоугольнике NP-трудная задача, даже если скрытое множество ограничено вершинами [105]. Он также доказал, что поиск минимальных *скрытых защитных множеств* (защитных множеств, которые также являются скрытыми множествами) является NP-трудным. Удивительно, но не все многоугольники имеют скрытые *вершинные* защитные множества, как показывают два многоугольника на рис. 11. Определение того, есть ли у многоугольника скрытое вершинное защитное множество, является NP-полным. Шермер также предоставил алгоритм O(n) для определения того, имеет ли многоугольник максимальное скрытое множество

ровно две точки [108], а Гхош *и др.* $0(n^2)$ алгоритм для нахождения максимального скрытого набора вершин в многоугольнике, слабо видимом с ребра между двумя выпуклыми вершинами [53].

Открытая проблема 3.' Какова сложность выпуклого покрытия (или звездного покрытия) с rn= 3? (Можно ли найти алгоритм полиномиального времени для определения того, является ли многоугольник объединением трех выпуклых (или трех звездных) многоугольников?)

Открытая задача 4: Какова сложность нахождения минимального защитного набора вершин в звездообразном многоугольнике?

Открытая проблема S. Какова сложность нахождения минимального *разбиения* многоугольника на звездообразные многоугольники?

Открытая проблема 6. Является ли выпуклое накрытие NP?

IV. ОТВЕРСТИЯ, РАСПОЛОЖЕНИЕ И ВНЕШНИЕ СТОРОНЫ ПОЛИГОНОВ

Под *расположением* мы понимаем набор объектов, каждый из которых имеет свою ориентацию и положение. В двух измерениях хорошо изучены расположения линий и точек [36], а также начинают исследоваться расположения других объектов. В основном мы будем заниматься охраной частей плоскости, оставшихся незакрытыми при расположении различных компактных объектов. Мы называем эту непокрытую область внешней стороной аранжировки и определяем, что она включает ее границу. Мы определяем видимость внешней области аналогично тому, как мы определяли видимость (внутренней): две точки во внешней области аранжировки считаются видимыми, если отрезок прямой между ними содержит только точки внешней области аранжировки.

Многоугольники с отверстиями связаны с расположением многоугольников; внешняя сторона расположения многоугольников может быть рассмотрена как внутренняя сторона многоугольника с отверстиями без окружающего многоугольника или с бесконечно большим окружающим многоугольником (см. рис. 12). Также экстерьер одиночного многоугольника является частным случаем экстерьеров многоугольных компоновок, когда в компоновке присутствует только один многоугольник. Таким образом, в этом разделе мы рассмотрим результаты о многоугольниках с отверстиями, экстерьерах многоугольников и экстерьерах компоновок.

Пусть p(n, fi) - минимальное количество точечных охранников, необходимых для любого многоугольника с it вершинами и li отверстиями. О'Рурк доказал, что p(ri, ft)< (n + 2fi)/3] . Шермер установил, что p(n...h) (n + fi)/3), и доказал, что это жесткая граница. Он смог доказать

это для fi = 1, показывая, что *s !!!)*= (u + 1)/3j. Все эти результаты можно найти в [91]. Все приведенные выше результаты справедливы

для вершинных защит, и считается, границы для вершинных защит такие же, как и для точечных.

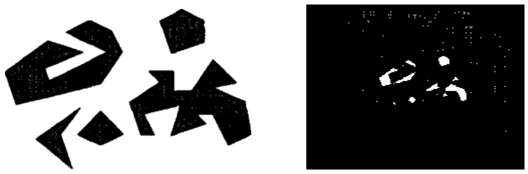


Рис. 12. Расположение полигонов аналогично полигонам с отверстиями.

Рис. 13. (Онгогональные многоугольники, требующие[2ri / 7j вершинных ограждений.

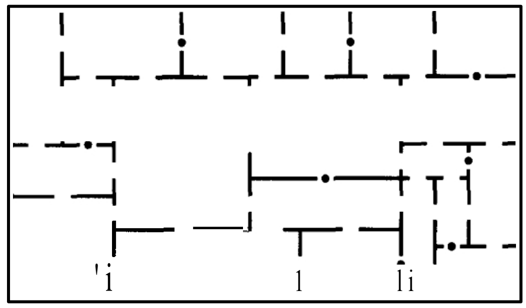


Рис. 14. Прямоугольная картинная галерея с охранниками.

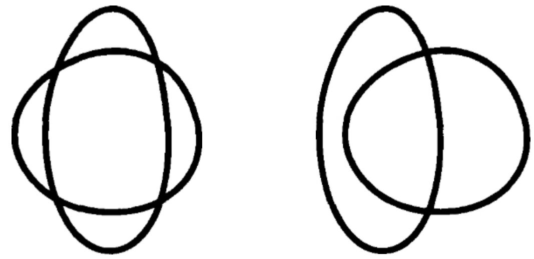


Рис. 15. Пересекающиеся и непересекающиеся выпуклые множества.

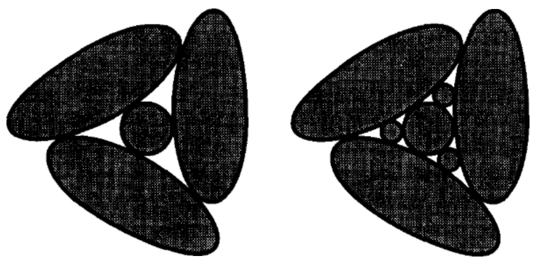


Рис. 16. Установки, требующие 4n - 7 охранников.

Пусть *or!h(n, h)* - минимальное количество точечных защит, необходимых для любого ортогонального многоугольника с n вершинами и fi ортогональными отверстиями. Также пусть ortfi"(n, h) - минимальное число вершинных защит в той же ситуации; *orth(n,* fi)< *orth"(n, h).* Метод О'Рурка позволяет показать, что ortfi*(n, h) < [(n + 2fi)/4) . О'Рурк предположил, что *orth(n, h)* не зависит от fi: *orth pn, h)* -- [n/4j [91], что Аггарвал установил для li = 1 и fi = 2 [2]. Недавно Хоффман доказал полную гипотезу [58]. Он показал, что любой ортогональный многоугольник с отверстиями может быть разбит на [n/4J ортогональных многоугольников в форме звезды, каждый из которых имеет не более 16 вершин. Это единственное известное общее жесткое ограничение для любого типа защиты в многоугольниках с отверстиями. Хоффман также утверждает, что алгоритм расстановки ограждений имеет размерность O(n* ⁵ log° n log log n).

Хоффман также частично решает проблему защиты вершин, рассматривая ort/i^(n,), максимум ort/i*(n, fi) над всеми h. Используя многоугольники, показанные на рис. 13, он устанавливает, что *orth (n, -)* [2n/7J . Это опровергает более раннюю гипотезу Аггарвала о том, что *orth (n,* -) - 3n/ 11a . Czyzowicz et al. рассматривают проблему охраны *прямоугольных художественных галерей* [29]. Прямоугольная художественная галерея образуется путем разбиения прямоугольника на любое меньших выровненных прямоугольников (комнат). Любые две комнатыимеющие общее ребро, имеют дверь между . Прямоугольная картинная галерея показана на рис. 14. Охранникам разрешается стоять либо в комнате, либо у двери между двумя комнатами. Чижович *и др.* доказали, что в прямоугольных картинных галереях с *r* комнатами максимальное количество охранников равно *(r/2* . Столько охранников требуется для прямоугольной галереи из r комнат, построенной путем деления внешнего прямоугольника только вертикальными отрезками. Их результат распространяется на случай, когда внешняя форма является любым ортогональным многоугольником из n вершин: *((r* -I-" - 2)/21 [(2r -I- n - 4)/41 защит. Если внешний ортогональный многоугольник имеет fi отверстий и n вершин, то требуется [(2r + n - 2h - 4)/2] защит.

Фейес Тот рассмотрел проблему защиты массива выпуклых множеств [46]. Он обнаружил, что, за исключением нескольких малых n, 4s - 7 точечных защит достаточно для любого расположения n попарно непересекающихся выпуклых множеств. Считается, что выпуклые множества *A* и *B* пересекаются, если *A* \ *B* или *B* \ *A* несоединимы (см. рис. 15). Примеры расположений На рис. 16 показаны задачи, требующие 4s - 7 охранников; каждая "треугольная" область во внешнем пространстве каждой расстановки имеет такую форму, что требует двух охранников. Недавно Уррутиа и Закс заново открыли этот результат [119] и получили границы для этой задачи в более высоких размерностях.

Фейес Тот также рассмотрел расположение окружностей. Поскольку любая пара окружностей не пересекается, верхнее ограничение на число защит точек равно 4n - 7. Однако ни одно расположение окружностей не требует такого количества охранников. На самом деле, Фейес Тоту показать, что ни одно расположение окружностей не требует более 2n точечных защит, и что единственное расположение, требующее такого количества, это то, в котором окружности расположены в центре на прямой, а последовательные окружности просто касаются друг друга, как на рис. 17. Любые другие расположения (из более чем двух окружностей) требуют не более 2n - 2 остряков. Этот результат был заново открыт (для попарно несовпадающих окружностей) независимо друг от друга Чижовичем *и др.* и Коллардом *и др* [31], [23]. Хотя эти результаты, как и результаты для выпуклых множеств, относятся к охране границы расположения, те же доказательства справедливы и для охраны всей внешней стороны.

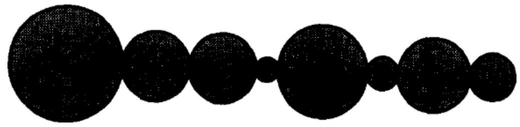


Рис. 17. Схема расположения окружностей, требующая 2ti точечных охранников.

Чижович, Ривера-Кампо и Уррутиа также исследовали расположение треугольников или прямоугольников [30]. Они показывают, что (4n+ 4)/3j точечных охранников достаточно для охраны любого расположения из n несовпадающих треугольников. Однако эта граница не кажется жесткой, и они предполагают, что существует некоторая постоянная с, для которой любая расстановка требует только n + с охранников. В частном случае непересекающихся *гомотетических* треугольников (треугольников, ребра которых образуют три набора параллельных отрезков) они получают такую границу, показывая, что достаточно n + 1 защитников. Они также демонстрируют класс расстановок, похожих на рис. 16, но состоящих из треугольников, для которых требуется n - 1 охрана.

Их работа над расположением прямоугольников также дала специальные и общие результаты. Общий результат состоит в том, что (4n + 4)/3j точечных защитников достаточно для защиты любого расположения n несовпадающих изотетических прямоугольников. Для частного случая, когда прямоугольники ограничены одинаковой шириной, показано, что достаточно n -1- 2 защитников. Они также демонстрируют класс прямоугольников одинаковой ширины, требующих n -1 защит. Эверетт и Туссен улучшили ограничение n+ 2 до n *для* случая квадратов одинакового размера и дали алгоритм размещения *0(n* log n) для такого количества охранников [45].

Многие люди изучали вопросы галереи искусств о расположении непересекающихся отрезков прямых. Для этой задачи О'Рурк доказал жесткое ограничение [2n/3j для охраны точек, а Боенке и Шермер жесткое ограничение n для охраны вершин [91]. В последнее время внимание уделяется тому, чтобы видеть "границу" расположения (все точки на отрезках), а не всю плоскость. Это приводит к интересным вариациям, поскольку сегменты, в отличие от строго выпуклых множеств, нужно видеть только с одной стороны (как на рис. 18). Для такого типа ограждений Чижович *и др.* показывают верхнюю границу 2n/31 - 3 для точечных ограждений, которую они улучшается до (n+ 1)/21, когда все сегменты либо вертикальные или горизонтальные [31], [33]. Также Ленхарт и Дженнингс получили жесткое ограничение n/2J, когда охранникам разрешено патрулировать целые сегменты расположения [72], [62].

Czyzowicz *и др.* также изучили другое понятие охраны для аранжировок, предложенное Санторо. Мы будем называть аранжировку защищенной набором охранников, если каждый набор аранжировки содержит точку, которую видит какой-то охранник (Czyzowicz *и др.* используют для этого термин *guarded*, а для нашего понятия guarding - *illumination*). Таким образом, если какой-либо набор будет удален, то какой-то охранник заметит это. Чижович *и др.* доказали, что любое расположение n отрезков прямых может быть защищено n/2] точками, и что существуют такие расположения, для защиты которых требуется (2n - 3)/5j точечных охранников [33]. Они также показали следующие верхние границы для защиты с помощью точечных защит:

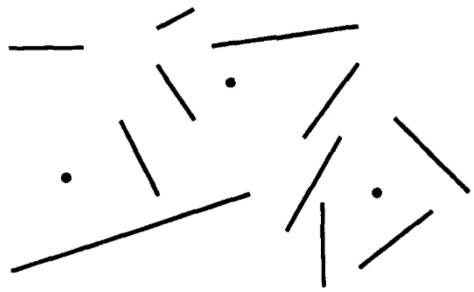


Рис. 18. Набор точек охраняющих границу отрезка.

[2n/3] для непересекающихся выпуклых множеств, [n/2] для непересекающихся изотетических прямоугольников, [4n/71 для непересекающихся треугольников и [n/21 для гомотетических треугольников [32]. Прямоугольник и гомотетический Границы треугольника почти узкие; для обоих есть примеры, требующие n/2) защит.

Теперь мы обратимся к видимости за пределами одного многоугольника, а также к варианту, когда мы рассматриваем видимость как внутри, так и снаружи многоугольника. Проблема картинной галереи для внешней стороны одного многоугольника была названа проблемой крепости: многоугольник представляет собой крепость, и мы хотим видеть любого врага, который приближается. Аналогично, если нужно одновременно видеть и внутреннюю, и внешнюю стороны многоугольника, то проблема называется проблемой тюремного двора: нужно следить и за теми, кто снаружи проникнуть внутрь, и за теми, кто внутри вырваться наружу. Эти проблемы были предложены Малкелвичем и Вудом.

Внешние стороны многоугольников такие же, как и Внутренние стороны многоугольников, и, таким образом, проблема крепости похожа на проблему картинной галереи. Аггарвал и О'Рурк показали, что максимальное число точечных охранников, необходимых для решения задачи о крепости, равно [n/3j, а Шермер показал, что все эти охранники, кроме двух, могут быть расположены в вершинах многоугольника [91]. Если все охранники должны быть расположены в вершинах, то О'Рурк Илфлд Вуд показал, что n/21 является максимально необходимым (выпуклые многоугольники требуют такого количества) [91].

Все вышеперечисленные результаты получаются путем "выворачивания многоугольника наизнанку". Для этого нужно поместить точки и г под и (соответственно) слева и справа от многоугольника, а затем соединить эти точки между собой и с а, самой высокой точкой многоугольника. Затем вершина о делится на две части, чтобы получить новый многоугольник, внутренняя часть которого приблизительно равна внешней части исходного многоугольника (см. рис. 19; ср. рис. 12). Если исходный многоугольник имел n вершин, то новый многоугольник имеет n+ 3 вершин. Эта конструкция может быть использована для преобразования многих внутренних (галерейных) границ во внешние (крепостные) границы. Внутренние границы из /(n) становятся внешними границами из /(n + 3). Эта процедура не работает для границ, ограниченных геометрическими особенностями исходного многоугольника, так как новый многоугольник имеет вершины и ребра, которые не являются вершинами или ребрами исходного многоугольника. Известно, что ни одна из границ, полученных с помощью этой процедуры, не является узкой.

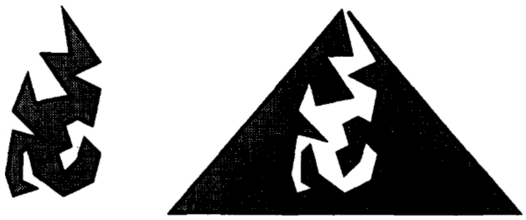


Рис. 19. многоугольника наизнанку.

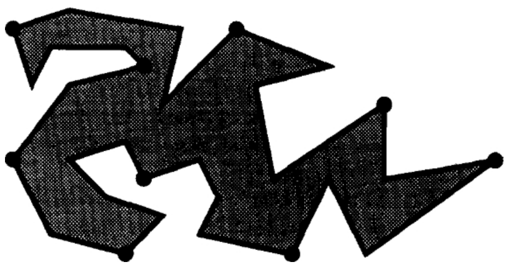


Рис. 20. Тюремный двор: охранники видят как снаружи, так и внутри.

Мы заканчиваем этот раздел одним из самых интересных новых достижений в области галерей. Недавно Клейтман и Фюреди доказали знаменитую гипотезу О'Рурка о том, что максимальное число вершинных охранников, необходимых для тюремного двора, равно [n/2] [49]. Они также показали ограничение [n/2] для невыпуклых многоугольников. Граница n/2] интересна тем, что она совпадает с границей вершинного стража для крепости
проблема; в некотором смысле вы получаете охрану внутри бесплатно. Многоугольник с набором тюремных охранников показан на рис. 20.

Следствие 3: g(n, h)= g*(n, /r)= (n h)/3j .

Следствие 4: orth (n, h) -- ((n ñ)/4j .

Гипотеза 5 (И-Хоффмана).° orth (n, -) -- /**2n**/**7**/ .

Предположение 6 (Чижович, Ривера-Кампо и ***Уррутиа):*** Существует константа с такая, что n + с точечных защит достаточно для защиты каждого расположения из n несмежных треугольников.

Предположение 7 (Чижович, Ривера-Кампо, Уррутия и Закс): константа с такая, что n/2 + с точечных охранников достаточно, чтобы увидеть всю "границу" любого расположения n несовпадающих отрезков прямых.

Открытая задача 7: Найдите жесткие ограничения на количество охранников, необходимых для защиты любого расположения n несовпадающих отрезков прямых.

V. ГРАФИКИ ВИДИМОСТИ

В 1983 году Авис **и** ЭльГинди ввели **понятие** *графов видимости* [5]. Граф видимости многоугольника - это граф отношения видимости на вершинах *P*. Более формально, граф видимости *VCB(P)* многоугольника

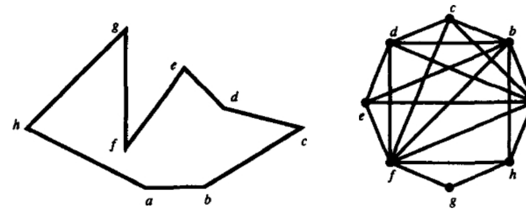


Рис. 21. Многоугольник и его граф видимости.

P определяется как:

VG(P) -- (V, E), где

Y= {r|r - вершина из *P j*

ñ= ((u, v)| вершины ii и r видны в *P].*

Многоугольник и граф его видимости показаны на рис. 21. Существует три фундаментальные **проблемы**, касающиеся видимости
графов видимости: вычисление, определение характеристик или распознавание, а также реконструкция. Единственной из этих задач, которая решена **удовлетворительно**, является задача вычисления графа видимости: задав многоугольник *P,* вычислить *VG(P).* Авис и ЭльГинди первоначально дали *O(n^2)* алгоритм для этой задачи [5], [40], а **недавно** Хершбергер представил *O(E)* алгоритм *(E* - количество ребер в результирующем графе) [57]. Алгоритм **O(|€|)**, хотя и имеет ту же асимптотическую границу времени в худшем случае (|E| может быть столь же большим, как (n° - ri)/2), представляет собой значительное улучшение по сравнению с алгоритмом *O(n^2)* во многих случаях (|ü| может быть столь же малым, как 2n - 2).

Задача характеризации графа видимости состоит в том, чтобы набор свойств теории графов, которые точно определяют графы видимости многоугольников. Такая характеристика почти наверняка приведет к алгоритму решения задачи распознавания графов видимости: если дан граф G, является ли G графом видимости некоторого многоугольника? К сожалению, графы видимости не поддаются описанию. Однако некоторые частичные характеристики **были получены.** Гош **дал** набор необходимых условий для графов видимости [52], а Эверетт позже показал, что их можно проверить для любого графа за время O(n^3) [42]. Однако Эверетт также показал, что условия Гоша недостаточны для характеристики графов видимости. Другие необходимые условия для графов видимости были даны Куллардом и Любивом [24] и Винаем и Вени Мадхаваном [121].

Эверетт и Корнейл попробовали несколько других подходов к проблеме характеризации графов видимости. Один из этих подходов, который в настоящее время является популярным характеризации графов, заключается в поиске полного набора запрещенных миноров графа. Однако этот подход не применим к графам видимости, так как они могут содержать большие клики, а значит, не имеют запрещенных минимумов. Эверетт и Корнейл вместо этого сосредоточились на запрещенных ***индуцированных*** подграфах [44]. (Индуцированный подграф графа G образуется путем взятия одного подмножества вершин G, а затем *всех* ребер G, конечные точки которых находятся в выбранном множестве вершин. Обычные подграфы могут опускать некоторые ребра G между выбранными вершинами). Они показали, что граф Гротша (граф на рис. 22) является запрещенным

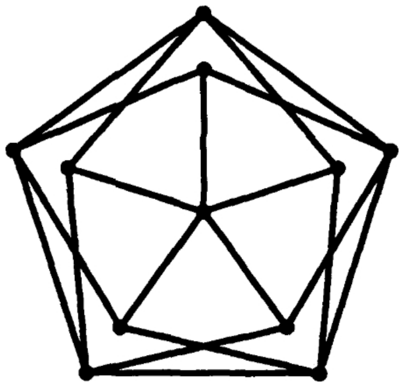


Рис. 22. Запрещенный индуцированный подграф для графов видимости.

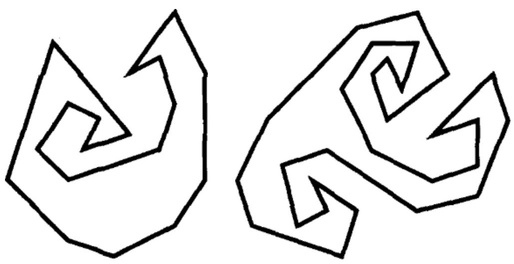


Рис. 23. Спираль и 2-спираль.

Они нашли индуцированный подграф графов видимости и расширили этот граф до бесконечного семейства минимальных запрещенных графов, разрушив надежды на характеристику графов видимости через запрещенные индуцированные подграфы. Тем не менее, они продолжили исследовать различные известные классы графов на предмет запрещенных подграфов графов видимости. Они показали, что ни одно дерево, *или* ивыпуклый двудольный граф, не является запрещенным. Ранее ЭльГинди показал, что ни один максимальный внешний планарный граф (граф триангуляции полигонов) не является запрещенным [39]. Эверетт и Корнейл также нашли хордовый запрещенный граф, а Шермер двудольный запрещенный граф [109].

Другой подход к характеристике графов видимости многоугольников заключается в попытке охарактеризовать графы видимости ограниченных классов многоугольников. Эверетт и Корнейл охарактеризовали графы видимости *спиральных* и частично *2-спиральных* многоугольников [43]. Спиральный многоугольник - это многоугольник, рефлексивные вершины которого образуют единую цепь на границе многоугольника, в то время как у 2-спирального многоугольника рефлексивные вершины могут быть сгруппированы в две цепи (см. рис. 23). Выпуклые многоугольники (0-спирали) имеют графы видимости, которые являются кликами. Эверетт и Корнейл показали, что графы видимости шин спиралей являются *интервальными графами*, а графы видимости 2-спиралей - *совершенными графами*, при условии, что верна сильная гипотеза о совершенных графах. Они также линейный алгоритм распознавания для графов видимости спиралей.

Задача реконструкции графа видимости состоит в том, чтобы найти многоугольник *P* такой, что *VG(P)* - это заданный граф. Эта задача также оказалась непростой, и поэтому несколько

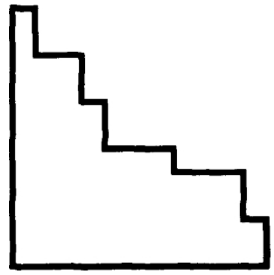


Рис. 24. Лестничный многоугольник.

Исследователи пробовали использовать вариации или специальные случаи. ЭльГинди дал алгоритм реконструкции O(n log n) для многоугольников, граф видимости которых является триангуляционным графом [39], а Эверетт и Корнейл - алгоритм реконструкции графов видимости спиральных многоугольников [43]. Абелло и Эгечиоглу исследовали реконструкцию графов видимости *лестничных многоугольников:* ортогональных многоугольников с одним нижним и одним левым ребром (см. рис. 24) [1]. О'Рурк рассматривал реконструкцию только шинной *выпуклой* оболочки многоугольника, учитывая его внутренний и внешний графы видимости [92]. Совсем недавно первый общий результат реконструкции был получен Коллардом и Любивом, которые представили алгоритм O(|A|) для задачи реконструкции, когда даны расстояния между каждой парой видимых вершин [24].

Графы видимости изучались и для объектов, отличных от многоугольников. Наиболее примечательными являются алгоритмы вычисления графов видимости для расположения отрезков или многоугольников. Совсем недавно Овермарс и Вельцль дали алгоритм нахождения графов видимости для аранжировок сегментов за время O(| '| log n) [94], Гош и Маунт дали оптимальный алгоритм *O(E* -I- n log n) для аранжировок многоугольников или сегментов [55J, а Капур и Махешвари разработали другой алгоритм для сегментов с той же временной сложностью [64]. Графы видимости также изучались *для* расположения вертикальных отрезков, когда видимость разрешена только в горизонтальном направлении. Полная характеристика графов сукии, а также алгоритм линейного восстановления были даны (независимо) Висматом [122J и Тамассией и Толлисом [116].

Графы видимости отражают часть, но не всю структуру видимости в многоугольниках. Два наиболее фундаментальных свойства видимости, которыми может обладать многоугольник, - это выпуклость и форма звезды. Учитывая *V GI(P),* мы можем определить, является ли *P* выпуклым. Однако мы не можем определить, является ли *P* звездообразным; на рис. 25 показаны два многоугольника, один звездообразный, а другой нет, с одним и тем же графом видимости.

Структурой, которая отражает всю структуру видимости многоугольника, но при этом является бесконечной, является *граф видимости точки.* Графы видимости точек были введены Шермером в качестве объединяющей структуры для проблем видимости [106J, (105] Учитывая многоугольник *P,* граф видимости точек шины

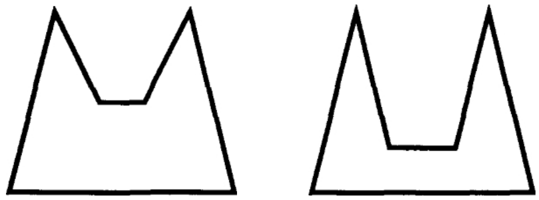


Рис. 25. Два многоугольника с одинаковым графиком видимости.

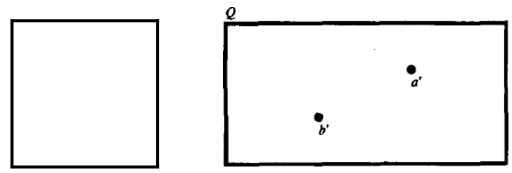


Рис. 26. Негомеоморфный изоморфизм многоугольников.

PVCS(P) для *P* определяется следующим образом:

PVC(P) - (V, E), где

U - (p| p - точка в *P*

E== ((p, q)| точки *p* и *q* видны вP}.

PDF - это непрерывные графы в смысле, определенном Нэшем-Вильямсом [84]. Для любого многоугольника *P, PVC(P)* имеет несчетное число вершин, и каждая вершина имеет несчетную степень; таким образом, PDF не пригодны для прямого использования в вычислениях.

Однако многие проблемы видимости многоугольника *P* могут быть выражены как проблемы теории графов на *PVG(Pg).* Например, задача о картинной галерее для *P* - это задача о доминирующем множестве для *PVCS(P).* Некоторые другие ранее изученные задачи вычислительной геометрии (поиск скрытых множеств, расстояние между звеньями, центр звена, радиус звена, диаметр звена) являются задачами теории графов на PVG (независимые множества, расстояние между графами, центр, радиус, диаметр). Мотивируя это, мы будем использовать термин *"чистая проблема видимости"* для обозначения любой проблемы на многоугольнике *P*, которая может быть решена путем отображения проблемы на *PVG(P),* решения графовой проблемы и отображения решения обратно на *P.* В отличие от этого, *гибридная проблема видимости* - это проблема, в которой требуется другая информация, например, метрическая или временная информация. Несколько гибридных проблем видимости будут рассмотрены в следующем разделе.

Графовые задачи на PDF (задачи видимости на полигонах) и те же задачи на конечных графах, как правилоимеют одинаковую сложность: либо обе NP-трудны, либо обе полиномиальны. Например, нахождение максимального скрытого множества является NP-трудной задачей, как и нахождение максимального независимого множества в конечном графе; нахождение расстояния между связями в многоугольнике и нахождение расстояния между графами конечном графе являются полиномиальными.

Кроме того, PDF-файлы дают возможность превратить многие свойства и проблемы теории графов в геометрические свойства и проблемы. Одним из таких интересных свойств теории графов является *изоморфизм* между двумя графами. геометрическим свойством является *изоморфизм полигонов:* два полигона изоморфны, если они имеют сохраняющее видимость отображение один-к-одному между их точками. Как ни странно, возможно, что это отображение не является непрерывным, в смысле, что точки, которые находятся "рядом" друг с другом в одном полигоне, могут не быть рядом друг с другом после отображения (в топологических терминах, изоморфизм не обязательно должен быть гомеоморфизмом). Такой изоморфизм показан на рис. 26; каждая точка (z, y) из *P* отображается на точку (2z, p) из Q, за исключением того, что точка o= (z, . p,) из *P* отображается на n' - (2zt , pt) в Q и 6= (zt, pt) из *P.* отображается на h' = (2z,, p,) из Q. Это отображение является изоморфизмом, так как оно одно к одному, и видимость сохраняется (каждая пара точек видна в обоих многоугольниках). Однако точки рядом с а в *P* не отображаются на точки рядом с o' в Q, поэтому отображение не является гомеоморфизмом.

Все выпуклые многоугольники изоморфны, так как их *PVGI* - полный граф. Удивительно, но верно и то, что все с одной рефлексивной вершиной изоморфны. Шермер и Мак Дональд нашли алгоритм O(n°) для определения изоморфности двух спиральных многоугольников [111]. Сложность определения изоморфизма двух простых многоугольников не определена; фактически, даже неизвестно, разрешима ли эта проблема.

Никаких характеристик графов с точечной видимостью не известно. Параллельно с исследованием графов **видимости** Шермер нашел запрещенные индуцированные подграфы (включая некоторые двудольные графы) для точечных графов видимости [109]. Заметим, что любой граф, запрещенный для PDF, также запрещен и для графов видимости, поскольку любой граф видимости является **индуцированным** подграфом некоторого *PVC.*

Открытая проблема 8.- Найдите характеристику графов видимости, которую проверить за полиномиальное время.

Открытая задача 9.' Учитывая граф видимости G и гамиль-тонов цикл из G, найдите алгоритм полиномиального времени для построения многоугольника *P* с UG(P)= G и заданным циклом, соответствующим границе *P.*

Открытая задача 10: Охарактеризуйте PDF многоугольников.

Conjecture 8: Изоморфизм многоугольников не является решаемым.

VI. ПРОБЛЕМЫ С ВИДИМОСТЬЮ ГИБРИДОВ

Как было определено в предыдущем разделе, гибридная проблема видимости - это проблема, которая включает в себя не только видимость, но и другие геометрические или концептуальные свойства. В этом разделе мы рассмотрим несколько таких задач, которые по духу напоминают задачи о картинной галерее. Большинство из этих гибридных задач, для которых известны результаты, связаны с видимостью и метрической информацией: нахождение кратчайших путей, которыми покрыты многоугольники.

Чин и Натафос сторожевой маршрут для многоугольника *P* как замкнутый путь в *P*, такой, что каждая точка P видна из некоторой точки этого пути [20]. Задача о маршруте сторожа состоит в том, чтобы найти кратчайший маршрут сторожа для данного многоугольника. Многоугольник с кратчайшим маршрутом сторожа показан на рис. 27.

Чин и Натафос доказали, что задача о маршруте сторожа является NP-трудной, если заданный многоугольник имеет отверстия [20]. Они также показали, что она остается NP-трудной, если многоугольник и отверстия ограничены выпуклыми или ортогональными. В той же

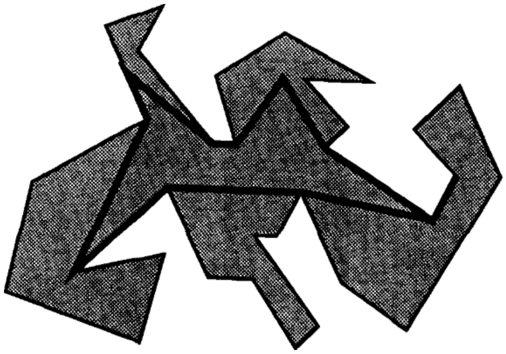


Рис. 27. Многоугольник с кратчайшим маршрутом сторожа.

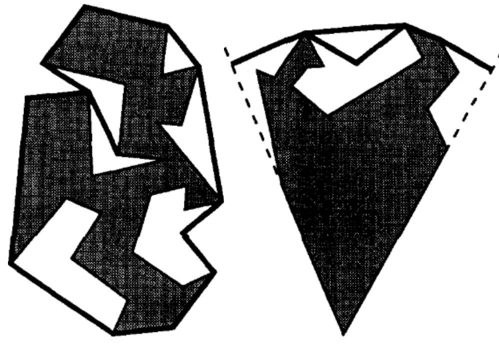


Рис. 28. Два типа внешних сторожевых маршрутов.

В статье приводится алгоритм *O(n)* для нахождения кратчайшего маршрута сторожа в ортогональном многоугольнике (без отверстий). Их алгоритм ввел в вычислительную геометрию технику, которая сейчас часто используется при решении подобных задач: "разворачивание" многоугольника или триангуляции путем отражения от одного или нескольких его ребер. расширение классического метода поиска кратчайшего пути между двумя точками, где путь должен касаться заданной прямой.

Чин и Нтафос также дали алгоритм $O(n^4)$ для решения задачи о маршруте сторожа в простых многоугольниках [18]. Однако алгоритм решает задачу только в том случае, если задана начальная точка *s*, которая должна находиться на маршруте сторожа. Это не является серьезным ограничением: точка на минимальном маршруте сторожа в большинстве многоугольников может быть найдена за время *O(n)*. Более того, любой многоугольник *P* с *g1(P)*> 1 *(P* не может быть покрыт одним выпуклым стражем) имеет минимальный маршрут сторожа, содержащий рефлексивную вершину многоугольника. Таким образом, если q*(P) 1, то с помощью грубой силы мы можем найти минимальный маршрут без заданной начальной точки за 0(n') времени: применим алгоритм 0(n') 0(n) раз (по одному разу с каждой рефлекторной вершиной в качестве *s)*. Для получения полиномиального алгоритма для общей задачи остается решить только случай $(P) = 1$ (достаточно одного выпуклого стража). С этой проблемой связана работа Ке, который дает алгоритм для нахождения кратчайшего отрезка, из которого виден многоугольник [66].

Нтафос и Гевали дали 0(n') алгоритм для задачи о маршруте сторожа (без заданной начальной точки) во внешней части многоугольника [88]. Внешние сторожевые маршруты могут принимать две формы: либо они полностью опоясывают многоугольник, либо нет (см. рис. 28).

Нтафос и Гевали показывают, что случай, когда многоугольник окружен маршрутом, может быть легко решен с помощью алгоритма маршрута внутреннего сторожа. Их решение для других случаев также использует алгоритм внутреннего сторожевого маршрута, но требует гораздо более сложного анализа. Они также показывают, что внешние сторожевые маршруты для слабо видимых извне многоугольников (класс, включающий монотонные и звездообразные) или ортогональных многоугольников могут быть найдены за время P(n).

Нильссон и Вуд исследовали проблему поиска маршрутов для *нескольких* сторожей в спиральных многоугольниках: каждая точка многоугольника должна быть видна хотя бы одному из них.

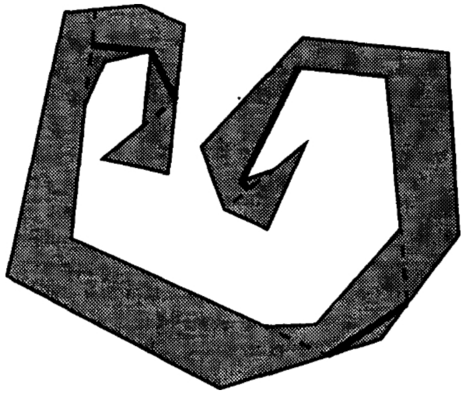


Рис. 29. Маршруты для трех сторожей в спиральном многоугольнике.

сторожа в некоторой точке его маршрута [85]. Многоугольник с маршрутами для трех сторожей показан на рис. 29. Нильссон и Вуд показывают, что можно найти набор маршрутов минимальной длины для m сторожей в спиральных многоугольниках за $0(n^2 m)$ времени и $0(n^2)$ пространства, используя динамическое программирование. Они определяют алгоритм минимизации суммы длин маршрутов, но по сути тот же самый алгоритм работает и для минимизации длины маршрута максимальной длины.

Нтафос также рассмотрел обобщение задачи о маршруте сторожа, названное задачей о маршруте грабителя [86]. Если задан многоугольник *P,* начальная точка s на границе *P,* множество точек (называемых угрозами) *T* с *P* и множество частичных ребер (называемых достопримечательностями) *S* из P, то маршрут грабителя для данной ситуации - это путь, начинающийся и заканчивающийся в точке *s*, который видит все достопримечательности и не виден ни одной из угроз. Он решает эту задачу, сводя ее сначала к задаче о маршруте грабителя без угроз, а затем к задаче о маршруте сторожа. Если предположить, что и |*T*, и *S* - O(n), то каждое из сокращений занимает меньше времени, чем решение задачи
В результате возникает проблема маршрута сторожа, и поэтому алгоритм Натафоса решает эту проблему за время $O(n^4)$ для простых многоугольников и 0(n) для ортогональных многоугольников.

Сторожевой маршрут можно рассматривать как маршрут внутри многоугольника, который посещает многоугольники видимости каждой вершины. Обобщением этого является нахождение маршрута в многоугольнике

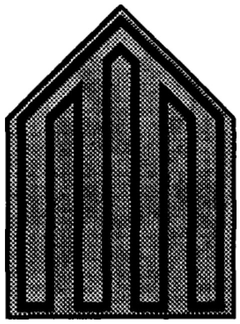


Рис. 30. Маршрут d-подметальной машины в многоугольнике.

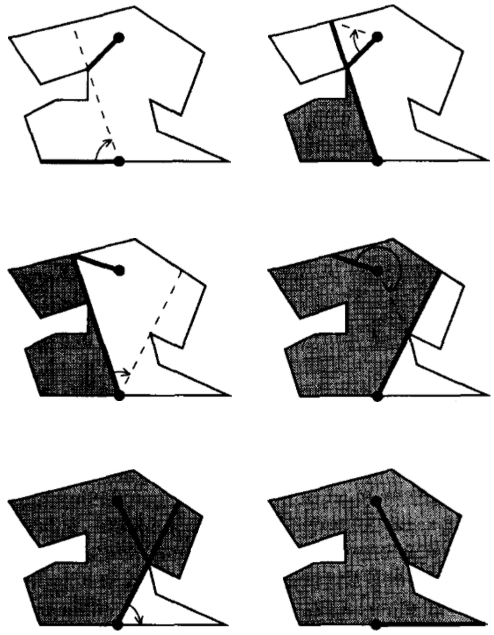


Рис. 31. Расписание работы прожектора.

который посещает каждый из произвольной коллекции подполигонов. Чин и Натафос называют такие маршруты маршрутами-сафари, если им разрешено входить в подполигоны, и маршрутами-зоопарками, если они ограничены касанием только границ подполигонов - наборы представляются как клетки, в которых содержатся животные, которых нужно кормить. Чин и Натафос изучили задачи о минимальной длине маршрутов зоопарка и сафари для выпуклых подполигонов. Они показали, что в общем случае обе задачи являются NP-трудными. Однако если ограничить клетки касанием границы содержащего их многоугольника, то возможны полиномиальные алгоритмы. Пусть n обозначает общее **число** сторон в многоугольнике и подмногоугольниках, а *k* - число подмногоугольников. Чин и Нтафос дали алгоритм O(n log n) для задачи о маршруте зоопарка [19], а Нтафос - алгоритм *O*(n^3) для задачи о маршруте сафари [87]. Czyzowicz *et al.* дали алгоритм *O(n)* для специального случая этих задач, когда набор подполигонов, которые нужно посетить, является набором ребер многоугольника [28]; этот результат также был получен Burkard, Rote, Yao и Yu, которые решили задачу поиска кратчайшего пути, посещающего каждое ребро многоугольного пути в *d* измерениях, для любого *d*> 2 [13].

Ntafos использовал свое сафари маршрут алгоритм чтобы получить

Алгоритмы аппроксимации полиномиального времени для вариаций задачи о маршруте сторожа с использованием d-видимости [87]. Две точки в многоугольнике называются d-видимыми, если они обе видимы (в обычном смысле) и расстояние между ними не больше *d.* В Ntafos рассматриваются как поиск маршрутов, из которых граница многоугольника d-видима (проблема d-дозорного маршрута), так и поиск маршрутов, из которых каждая точка многоугольника d-видима (проблема d-подметальщика). Маршрут d-дозорного похож на маршрут сторожа, он примерно повторяет контур многоугольника. Маршрут d-сторожа, однако, может потребовать виляния в центре многоугольника, как на рис. 30.

Сугихара, Сузуки и Ямашита исследовали другой тип гибридной задачи видимости, названный планированием работы прожекторов [114]. *Прожектор* - это тип охранника, который в любой момент видит только в одном направлении, но может непрерывно менять направление видимости с течением времени. Прожекторы, как и охранники, не могут видеть через внешнюю сторону многоугольника. Рассмотрим многоугольник, содержащий несколько

прожекторов, а в полигоне находится нарушитель, которому двигаться непрерывно с любой скоростью. Задача планирования прожекторов для такого случая состоит в том, чтобы найти такой график (углового) движения прожекторов, чтобы нарушитель, независимо от того, какой путь он , был обнаружен за конечное количество времени. Нарушитель будет обнаружен в определенный момент времени, если любой из лучей видимости прожекторов в этот момент содержит местоположение нарушителя. На рисунке 31 показан многоугольник с двумя прожекторами и график работы прожекторов; на каждой подфигуре темная область представляет собой область, в которой нарушитель не может находиться.

Сугихара, Судзуки и Ямасита получили необходимые и достаточные условия для того, чтобы у многоугольника с одним или двумя прожекторами было расписание. Они также показали метод, позволяющий свести любую задачу планирования прожекторов, имеющую прожектор на границе многоугольника, к нескольким более простым задачам планирования прожекторов.

Другая похожая задача планирования - *поиск* в многоугольнике: запланировать движение набора точечных охранников в многоугольнике, чтобы обнаружить нарушителя за конечное время (нарушитель ведет себя так же, как при планировании прожектора). Красс, Судзуки и Ямашита изучили эту проблему для *k-секторов*, которые представляют собой движущиеся точки, способные видеть вдоль *k* лучей (которые могут вращаться, как прожекторы), и *m-секторов*, которые представляют собой движущиеся точки, имеющие поле зрения 360° [25]. Они дали несколько необходимых и несколько достаточных условий для того, полигон мог быть обыскан одним k- или v-поисковиком. Ликинг и Клейн дали алгоритм для определения того, может ли полигон быть обыскан двумя охранниками, которые движутся вдоль границы полигона, каждый из которых держит в поле зрения другого охранника [60].

Открытая задача II: найдите алгоритм полиномиального времени для поиска кратчайшего маршрута сторожа в простом многоугольнике без заданной начальной точки.

Предположение 9 (Чин и Натафос): Существует O(ii^2)
Алгоритм поиска кратчайшего маршрута сторожа в простом многоугольнике, заданном начальной точкой s.

Открытая задача 12: Найдите алгоритм полиномиального времени для кратчайшего сторожевого *пути* (не маршрута) в многоугольнике.

Открытая проблема 13: Охарактеризуйте три варианта задачи планирования прожекторов, которые имеют расписание.

Открытая проблема 14 (Красс, Судзуки и Ямасита): сложность определения того, может ли простой многоугольник быть найден одним искателем (k-searcher для заданного *k* или xc-searcher)?

Предположение 10 (Красс, Судзуки и Ямасита). Любой полигон, который может найти один n-селектор, также может найти и 2-селектор.

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Видимость играет важную роль во многих вычислительных приложениях. Мы рассмотрели последние результаты в теоремах о картинной галерее - области, которая занимается комбинаторными аспектами видимости. Мы также рассмотрели множество связанных с видимостью вопросов, как алгоритмических, так и комбинаторных, и представили несколько открытых проблем в каждой из рассмотренных основных областей.

Несмотря на многие недавние достижения, такие как теорема о тюремном дворе и теорема о точечных стражах в ортогональных многоугольниках с дырами, остается несколько фундаментальных вопросов

без ответа: Можно ли дать характеристику графам видимости

нашли? В чем заключается теорема о галерее для многоугольников с отверстиями? Что такое теорема о галерее с защитой края? Эти вопросы, а также другие, более многочисленные, но менее центральные, гарантируют, что современный уровень исследований области художественных галерей

и смежных тем будет продолжаться. В идеале должна появиться целостная теория видимости с батареей методов, применимых к любым возникающим практическим проблемам видимости.

Кроме того, постоянно предлагаются и исследуются новые вариации видимости. Среди последних работ с альтернативными определениями видимости и метавидимости - работы Брина [10], Дина, Лингаса и Сэка [35], Эстивилла-Кастро и Рамана [41], Мунро, Овермарса и Вуда [83], Роулинса [97] и Шуйерера, Роулинса и Вуда [104]. Эти новые определения порождают такие интересные "метавопросы", как: При каких определениях наглядности справедлива та или иная теорема? Какие типы отношений можно обоснованно назвать "видимостью"? Как теория видимости связана с теорией сложности, теорией графов и топологией?

ПОДТВЕРЖДЕНИЕ

Автор хотел бы поблагодарить многочисленных специалистов по поиску видимости, которых он засыпал вопросами во время написания этой статьи, за их терпение и общую доброжелательность. Он также хотел бы поблагодарить Дж. О'Рурка за то, что познакомил его с этой темой и поощрял его исследования. Наконец, он благодарен Г. Эверетту, Д. Питерсу, Д. Сэмюэлю и анонимному рецензенту за их комментарии к рукописи.

ССЫЛКИ

[i] J. Abello, and Ömer Egecioglu, "Visibility graphs of staircase многоугольников с равномерной длиной шага", рукопись, 1989.

[2] А. Аггарвал, "Теорема о картинной галерее: ее вариации, и алгоритмические аспекты", докторская диссертация, Университет Джона Хопкинса, Балтимор, 1984.

[3] A. Aggarwal, S. Ghosh, and R. Shyamasundar, "Computa- сложность ограниченных полигональных разложений", в *"Вычислительной морфологии",* G. Toussaint, Ed. New York: North-Holland, 19b8, pp. 1-11.

[4] М. Альбертсон и К. О'Киф, "Покрытие областей квадратами". *SIAM J. Algebraic Discrète Methods,* vol. 2, pp. 24Œ-243, 1981.

[5] D. Авис и Х. ЭльГинди, "Комбинаторный подход к сходству многоугольников", *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 29, pp. 148-150, 1983.

[6] D. Авис и Г. Туссен, "Оптимальный алгоритм для определения... определение видимости многоугольника по ребрам", *IEEE Trans. Comput.,* vol. 30, pp. 91Œ-914, 1981.

[7] D. Авис и Г. Туссен, "Эффективный алгоритм для разделения многоугольника на части в форме звезды", *Распознавание образов,* том 13, стр. 295-298, 1981.

[g] R. Bar-Yehuda and E. Ben-Chanoch, "An O(ri log* rt) time алгоритм для покрытия простых многоугольников квадратами", inProc. *2-я Канадская конф. Вычислительная геометрия* (Оттава), 1990, pp. 186-190.

[9] Р. Бельвиль, "Вычисление двух покрытий простых многоугольников", магистерская диссертация, Университет Макгилла, 1991.

[10] М. Брин, "Четкая видимость и размерность ядер звездообразных множеств", *Proc. Amer. Math. Soc.,* vol. 85, pp. 414-418, 1952.

[11] М. Брин, "Характеристика компактных объединений двух звездообразных множества в /t'", *Ж. Геометрия,* т. 35, с. 14-18, 1989.

[j 2] B. Бронсворт, "Оценка границ и прямое отображение CSG-моделей", *Computer-Aided Dte.sign,* том 20, стр. 416-419, 1988.

(t3j Р. Буркард, Г. Роле, Э. Яо и З. Ю, "Кратчайшие многоугольные пути в пространстве", *Вычислительная техника,* том 45, стр. 51-68, 1990.

[14] S. Chaiken, D. Kleitman, M. Saks, and J. Shearer, "Covering regions by rectangles," *SIAM J. Algebraic Discrete Methods,* vol. 2, pp. 394-410, 1951.

[15] B. Шазель, "Триангуляция простого многоугольника за линейное время". in *Proc. 31th Symp. Foundations of Computer Science,* 1990, pp. 22Œ-230.

[î 6] B. Шазель и Д. Добкин, "Оптимальные выпуклые разложения", в *C'ompuiatioiuil Geometry,* G. Toussaint, Ed. New York: North-Holland, 1985.

[17] B. Chazelle и J. Incerpi, "Triangulation and shape- сложность", AC3f *Ti airs. Graphic's, vol. 3,* pp. 135-152, 1984.

[18] W.-P. Чин и С. Нтафос, "Кратчайшие маршруты сторожей в простых многоугольниках", *и вычислительная геометрия,* готовится к публикации.

[19] W.-P. Чин и С. Нтафос, "Оптимальные маршруты с зоопарком", в *Proc. Суйхейстерн CGTC конф. ,* 1987, pp. 257-266.

[20] W.-P. Чин и С. Нтафос, "Оптимальные маршруты сторожей", *Information Processing Lett.,* vol. 2b, pp. 39-44, 1988.

[21] V. Чватал, "Комбинаторная теорема в геометрии плоскости", *Дж. Комбинаторная теория, серия B,* том 18, стр. 39-41, 1975.

[22] Н. Конн и Дж. О'Рурк, "Некоторые ограниченные прямоугольники, покрывающие пртиблемы", в *Proc. 1987 Allerton* Con/

[23] *С. Кон* Хард, Б. Гэмбл, В. Ленфиарт, В. Пуллибланк и Г. Туссен, "Об освещении набора дисков", рукопись, 1989.

[24] С. Куллард и А. Любив, "Графы видимости расстояний", в *Proc. 7th Annual ACM S ymp. Com¡iuiational Geometry* (North Conway), 1991, pp. 2h9-296.

[25] Д. Брасс, И. Сузуки и М. Ямашита, "Проблема поиска многоугольников", Tech. Rep. 9(I-11 -All, факультет электротехники и вычислительной техники, Университет Висконсин-Милуоки.

[26] J. Калберсон и P. Рекхоу, "Унифицированный подход к решению задач покрытия ортогональных многоугольников с помощью диаграмм зубцов", Tech. Rep. h9-ft, Dept. Computing Science, University of Alberta.

[27] J. Калберсон и P. Рекхтиу, "Покрывать многоугольники трудно", в ***Proc.** 29th Symp. Foundations of Comf'uier Science, I98h,* pp. fi01-61 1; рукопись, 1989.

[28] J. Cxyzow icz *et ul.* , "Проблема хранителя аквариума", презентованная на Симпозиуме по структурам данных и алгоритмам, 1991.

[29] J. Czyzow icz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, and J. Zaks, "Guarding rectangular art galleries," Tech. Rep. 89-27, Dept. Computer Sci., University of Ottawa, l9H9.

[30] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, and J. Urrutia, "Illuminating rectangles and triangles on the plane," Tech. Rep. 89-50, Dept. Computer Sci., University of Ottawa, 1989.
[31] J. Чижович, Э. Ривера-Кампо, Дж. Умитиа и Дж. Закс, "Ил-светящиеся линии и круги на плоскости", Tech. Rep. 89-49, Dept. Computer Sci., University of Ottawa, 1989.
[32] J. Чижович, Э. Ривера-Кампо, Х. Умитиа и Х. Закс, "Охранник... Выпуклые множества", Университет Квебека в Халле, Информатика RR 90/09-12. Расширенная аннотация, *Proc. 2nd Canadian Conf. Computational Geometry* (Ottawa), 1990, pp. 265-268.
[33] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, J. Umitia, and J. Zaks, "IIlu-минирование и охрана сегментов на плоскости", Университет Уэбека в Хухе, Информатика RR 90/09-13.
[34] L. Дэвис и M. Бенедикт, "Вычислительные модели пространства: Изовисты и изовистовые поля", *Компьютерная графика и обработка изображений, том* 11, стр. 49-72, 1979.
[35] J. Дин, А. Лингас и Ж.-Р. Сак, "Распознавание многоугольников, или как шпионить", *The Msual Computer,* vol. 3, pp. 344-355, 1988.
[36] Н. Эдельсбруннер, *Алгоритмы в комбинаторной геометрии.* Берлин: Springer-Verlag, 1987.
[37] Н. Эдельсбруннер, Дж. О'Рурк и Э. Вельцль, "Расстановка охранников в прямолинейных художественных галереях", *Компьютерное зрение, графика и обработка изображений,* том 27, стр. 167-176, 1984.
[38] K. Эо и K. Кьюнг, "Гибридная схема проверки тени для луча трассировка", *Computer-Aided Design,* vol. 21, pp. 38-48, 1989.
[39] Н. ЭльГинди, "Иерархическая декомпозиция многоугольников с приложениями", докторская диссертация, Университет Макгилла, 1985.
[40] Н. ЭльГинди и Д. Авис, "Линейный алгоритм для вычисления многоугольника видимости из точки", *J. Algorithme,* vol 2, pp. 186-197, 1981.
[41] V. Эстивилл-Кастро и В. Раман, "Видимость в конечных ориентациях". многоугольников", *Proc.2nd Canadian Conf. Вычислительная геометрия* (Оттава), 1990, с. 181-185.
[42] Н. Эверетт, "Распознавание графов видимости", докторская диссертация, Департамент.
Мент компьютерных наук, Университет Торонто, 1989.
[43] Н. Эверетт и Д. Корнейл, "Распознавание графов видимости спиральных многоугольников", *J. Algorithme,* том 11, стр. 1-26, 1990.
[44] X. Эверетт и Д. Корнейл, "Запрещенные индуцированные подграфы из Графы видимости", рукопись, 1990.
[45] Н. Эверетт и Г. Туссен, "Об освещении изотетических прямоугольников на плоскости", рукопись, 1990.
[46] L. Фейес Тёт, "Освещение выпуклых дисков", *Acta Mathemat- ica Academiae Scientiarum Hungaricae,* vol. 29, pp. 355-360, 1977.
[47] S. Фиск, "Краткое изложение теоремы сторожа Чваталя", *Дж. Комбинаторная теория, серия B, том* 24, стр. 374, 1978.
[48] D. Францблау и Д. Клейтман, "Алгоритм для покрытия многоугольников с прямоугольниками", *Информация и управление,* том 63, pp. 164-189, 1984.
[49] Z. Фьюреди и Д. Клейтман, "Проблема тюремного двора", ман. uscript, MIT, 1990.
[50) R. Гарей и Д. Джонсон, *Компьютеры и неразрешимость.* New York: W. H. Freeman, 1979.
[51] L. Гевали и С. Нтафос, "Минимальные покрытия для решеток и ор-. тогональных многоугольников с помощью перископных защит", в *Трудах 2-й Конадской конф. Вычислительная геометрия* (Оттава), 1990, с. 358-361.
[52] S. Гхош, "Алгоритмы аппроксимации для задач художественной галереи". in *Proc. Конгресс Канадского общества обработки информации,* 1987.
[53] S. Гош, "О распознавании и характеристике графов видимости простых многоугольников", *Лекции по вычислительной технике*, №. 318, R. Karlsson and A. Lingas, Eds. New York: Springer- Verlag, 1988, pp. 96-104.
[54] S. Гхош, А. Махешвари, С. Пал, С. Салуджа и К. Вени Мадхаван, "Характеристика полигонов слабой видимости и связанные с этим проблемы", Tech. Rep. IISc-CSA-9Œ-1, Индийский институт науки, Бангалор, факультет компьютерных наук и автоматизации; также в *Proc. 2nd Canadian Conf. Computational Geometry* (Ottawa), 1990, pp. 93-97.
[55] S. Ghosh, A. Maheshwari, S. Pal, and C. Veni Madhavan, "Алгоритм распознавания многоугольников ладони", в *Трудах 2-й Канадской конф. Computational Geometry* (Ottawa), 1990, pp. 246-251.
{56] С. Гош и Д. Маунт, "Алгоритм вычисления графов видимости, чувствительный к выходу", в *Proc. IEEE Symp. Foundations of Computer Science,* 1987, pp. 11-19.
[57] H.-D. Хекер и Д. Хервиг, "Некоторые NP-трудные покрытия многоугольников проблемы", *J. Inf. Process. C ybern. EIK,* vol. 25, 101-108, 1989.
[58J Дж. Хершбергер, "Нахождение графа видимости многоугольника за время, пропорциональное его размеру", в *Proc. 3rd Annual ACId Symp. Computational Geometry* (Waterloo), 1987, pp. 11-20.
[59] Ф. Хоффманн, "О проблеме прямолинейной картинной галереи", в *Proc.Int.Colloq. Automata, Languages, and Programming,* 1990.
[60] А. Хорн и Ф. Валентайн, "Некоторые свойства L-множеств на плоскости", *Duke Mathematics J.,* vol. 16, pp. 131-140, 1949.
[61] С. Икинг и Р. Клейн, "Проблема двух охранников", в *Proc. 7th* ***ACM** Symp. Вычислительная геометрия* (Норт-Конвей), 1991, pp. 166-175.
[62] Н. Имаи и Т. Асано, "Эффективные алгоритмы для геометрических задач поиска графов", *SPAM J. Computing,* vol. 15, pp. 47M94, 1986.
[63] Г. Дженнингс, "Видимость сегмента линии: Необходимость, достаточность и сложность", старшая диссертация, Уильямс Колледж, 1990.
[64] J. Кан, M. Клаве и Д. Клейтман, "Традиционным галереям требуется меньше сторожей", ***IAM J. Algebraic** and Discrete Methods,* vol. 4, pp. 194-206, 1983.
[65] S. Капур и С. Махешвари, "Эффективные алгоритмы для евклидова кратчайшего пути и задач **видимости** с многоугольными препятствиями", в *Proc. Fourth ACM Symp. Computational Geom-* etry (Urbana-Champaign), 1988, pp. 172-182.
[66] D. Кей и M. Гуэй, "Выпуклость и некоторое свойство *P*", *," Israel J. Mathematics,* vol. 8, pp. 39-52, 1970.
[67] Y. Ke, "Алгоритмы видимости многоугольников для проблем слабой видимости и расстояния между звеньями", докторская диссертация, Johns Hopkins Univer- sity, Baltimore, 1989.
[68] J. M. Кей1, "Декомпозиция многоугольника на более простые компоненты". *SIAM J. Computing,* vol. 14, pp. 79R-817, 1985.
[69] J. M. Кей1, "Минимальное покрытие горизонтально выпуклого многоугольника", в *Proc. 2nd ACM Symp. Computational Geometry,* 1986, pp. 43-51.
[70] R. Куч и M. Сигел, "Эффективное представление отражающих структур для модели навигации гидролокатора", в *Трудах IEEE 1987 года.*
Ent. Conf. Робототехника и автоматизация, с. 1916-1923.
[71] D. Ли и А. Лин, "Вычислительная сложность задач галереи искусств", *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 32, pp. 276-282, 1986.
[72] D. Ли и Ф. Препарата, "Оптимальный алгоритм для поиска ядро многоугольника", - *J. Ass. Comput. Mach.,* vo1. 26, pp. 415-421, 1979.
[73] W. Ленхарт и Г. Дженнингс, "Теорема о художественной галерее для отрезков прямых на плоскости", рукопись, Уильямс Колледж, 1990.
[74] А. Лингас, "Сила нerектилинейных дыр", в *Трудах 9-го коллоквиума. Automate, Languages, and Programming,* 1982, pp. 369-383.
[75 W. Liou, J. Tan, и R. Lee, "Минимальное разбиение простых прямолинейных многоугольников за O(ri log log n)-время", в *Proc. Fiflh ACM Symp. Computational Geometry* (Saarbruchen), 1989, pp. 344-353.
[76] T. Лозано-Перес и M. Уэсли, "Алгоритм планирования путей без столкновений между многогранными препятствиями", *Коммун. Ass. Comput. Mach.,* vol. 22, pp. 56Œ-570, 1979.
[77] A. Lubiw, "Decomposing polygonal regions into convex quadri- laterals*", '*in *Proc. 1st ACM Computational Geometry Symp.* (Балтимор), 1985, pp. 97-106.
[78] А. Любив, "Упорядочивание и некоторые виды комбинаторной оптимизации
Проблемы с геометрическими приложениями", докторская диссертация, Университет Торонто, 1985.
[79] W. Masek, "Some NP-complete set covering problems," man- uscript, MIT, 1978 (цитируется по [50, p. 232]).
[80] M. Маккенна, "Оптимальное удаление скрытых поверхностей в худшем случае".
ACM Trans. Graphics, vol. 6, pp. 19-28, 1987.
[81] J. Митчелл, "Алгоритмический подход к некоторым проблемам навигации на местности", в *Geometric Reasoning,* D. Kapur and J. Mundy, Eds. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.
[82] R. Мотвани, А. Рагхунатан и Х. Саран, "Идеальные графы и ортогонально выпуклые покрытия", *SIAM J. Disc. Math.,* vol. 2, pp. 371-392, 1989.
[83] R. Мотвани, А. Рагхунатан и X. Саран, "Покрытие ортогональных многоугольников звездчатыми многоугольниками: Подход идеального графа".
J. Computer and System Sciences, vol. 40, pp. 19-48, 1989.
[84] J. Манро, M. Овермарс и Д. Вуд, "Вариации на тему ", в *Proc. Third ACM Symp. Computational Geometry,* 1987, pp. 291-299.
[85] С. Нэш-Уильямс, "Неисследованные и полуисследованные территории в теории графов", в книге *"Новые направления в теории графов",* Ф. Харари, ред. New York: Academic Press, 1973.

[86] Б. Нильссон и Д. Вуд, "Оптимальные маршруты сторожей в спиральных многоугольниках", в *Трудах 2-й Канадской конф. Computational Geometry* (Ottawa), 1990, pp. 269-272.
[87] S. Нтафос, "Проблема маршрута грабителя", *Information Processing Lett.,* vol. 34, pp. **59-63, 1990.**
[88] S. Ntafos, "Маршруты сторожевых кораблей в условиях ограниченной видимости", в *Proc. 2nd Canadian Conf.Computational Geometry* (Ottawa), 1990,
pp. 89-92.
[89] S. Нтафос и Л. Гевали, "Маршруты внешних сторожей", представленные на Первой канадской конференции по вычислительной геометрии, рукопись, 1989.
[90] J. O'Рурк, "Сложность вычисления минимального выпуклого покрытия для многоугольников", в *Трудах 20-й Аллертонской **конф.*** (Монтичелло), 1982, с. 75-84.
[91] J. O'Рурк, "Галереи нуждаются в меньшем количестве мобильных охранников: Вариация теоремы Шваталя", *Geometriae Dedicata,* vol. 14, pp. 273-283, 1983.
[92] J. O'Рурк, *Художественная галерея* Теорезрис *и алгоритмы.* Оксфорд: Oxford University Press, 1987.
[93] J. O'Рурк, "Восстановление выпуклости из графов видимости", Tech. Rep. 90.4.6, Dept. Computer Science, Smith College, 1990.
[94] J. O'Рурк и К. Суповит, "Некоторые NP-трудные проблемы декомпозиции многоугольников", *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 29, pp. 181-190, 1983.
[95] М. Овермарс и Э. Вельцль, "Новые методы вычисления графы видимости", в *Proc. Fourth ACM Symp. Computational Geometry* (Urbana-Champaign), 1988, pp. 164-171.
[96] Г. Пезант, "Факторизации покрытий", магистерская диссертация, Школа
Компьютерные науки, Университет Макгилла, 1989.
[97] А. Рагхунатан, "Декомпозиция полигонов и совершенные графы", докторская диссертация, факультет вычислительной техники, Калифорнийский университет в Беркли, 1988.
[98] Г. Роулинс, "Исследования в геометрии с ограниченной ориентацией", докторская диссертация, TR CS-87-57, факультет вычислительной техники, Университет Ватерлоо, 1987.
[99] R. Рихоу и Дж. Калберсон, "Покрытие простого ортогонального Многоугольник с минимальным числом ортогонально выпуклых многоугольников", в *Proc.3rd ACM Symp. Вычислительная геометрия* (Ватерлоо), 1987, стр. 26&-277.
[100] Г. Рой и Дж. Оуэн, "SR: Система автоматизированного проектирования на базе ПК для изучения теней и отражений в построенной среде", *Компьютер. Aided Design,* vol. 21, pp. 497-504, 1989.

[101] J. Sack, "O(n log n) алгоритм разложения простых прямолинейных многоугольников на выпуклые четырехугольники", в *Proc.20th Allerton Conf. Communication, Control, and Computing* (Mon- ticello), 1982, pp. 64-74.
{102] Дж. Сак и С. Сури, "Оптимальный алгоритм для обнаружения слабых видимости многоугольника", *IEEE Trans. Comput.,* vol. 39, pp. 1213-1219, 1990.
[103] J. Sack и G. Toussaint, "A linear-time algorithm for decom-
Позиционирование прямолинейных звездообразных многоугольников в выпуклые ", в *Proc.19th Allerton Conf.Communication, Control, and Computing* (Monticello), 1981, pp. 21-30.
[104] J. Sack и G. Toussaint, "Размещение охранников в прямолинейных полигонов", в *"Вычислительной морфологии"* Г. Туссен, ред. New York: North-Holland, 1988.
[105] S. Schuierer, G. Rawlins, and D. Wood, "Toward the general theory of visibility," in *Proc.2nd **Canadian** Canf.Computational Geometry* (Ottawa), 1990, pp. 354-357.
(106] Т. Шермер, "Скрывая людей в многоугольниках", *Вычислительная техника,* том 42,

pp. 109-131, 1989.
[107] Т. Шермер, "Свойства видимости многоугольников", докторская диссертация, Университет Макгилла, 1989.
[108] Т. Шермер, "Покрытие и охрана многоугольников с помощью L#-наборов",
Geometriae Dedicate, vol. 37, pp. 183-203, 1991.
109) T. Shermer, "On recognizing unions of two convex polygons and related problems," *Pattern Recognition Lett.,* to be pub- lished.
[110] Т. Шермер, "Несколько коротких результатов в комбинаторике видимости", CMPT TR 91-2, Университет Саймона Фрейзера, июнь 1991.
[111] Т. Шермер, "Жесткое ограничение на комбинаторный краевой страж Проблема", рукопись в процессе подготовки.
[112] Т. Шермер и Г. Мак Дональд, "Изоморфизм спиральных многоугольников", рукопись в процессе подготовки.
[113] W. Стейми и Дж. Марр, "Объединения двух выпуклых множеств", *Канадский университет.*
J. fdathematics, vol. l5, pp. 152-156, 1963.
[114] J. Стенстром и К. Коннолли, "Построение проволочных каркасов для множественных **видов** диапазона**",** в *Proc.* 986 *IEEE Int. **Conf. Робототехника** и автоматизация,* 1986, с. 615-620.
[115] K. Сугихара, И. Сузуки и М. Ямашита, "Проблема планирования прожекторов", *SIA* I *J. Computing,* будет опубликовано.
[116] S. Сури, "Минимальные связующие пути в многоугольниках и связанные с ними проблемы
Проблемы", докторская диссертация, Университет Джона Хопкинса, Балтимор, 1987.
[117] R. Тамассия и 1. Толлис, "Единый подход к представлениям видимости планарных графов", *Дискретная и вычислительная геометрия,* том 1, с. 321-341, 1986.
[118] R. Таян и К. ван Вик, "Алгоритм 0(ti log log n)для триангуляции простых многоугольников", SfAñf J. *Computing,* vol. 17, pp. 143-178, 1988.
(119] G. Toussaint, "Распознавание образов и геометрические *", 'in Proc. 5th Int. Conf. Pattern Retognition,* 1980, pp. 1324-1347.
[120] J. Умитиа и Дж. Закс, "Просвечивание выпуклых множеств", Tech. Rep.
89-31, факультет компьютерных наук, Университет Оттавы, 1989.
[121] F. Валентайн, "Локальная выпуклость и Є-множества", *Proc. Amer.Math. Soc.,* vol. 16, pp. 1305-1310, 1965.
[122] V. Винай и К. Вени Мадхаван, "Строгость графов видимости простых многоугольников", рукопись, кафедра
Компьютерные науки и автоматизация, Индийский институт науки, Бангалор, 1990.
[123] S. Висмат, "Характеризующие графы линии прямой видимости", в *Proc.1st ACM Computational Geometry Symp.* (Балтимор), 1985, с. 147-152.
[124] S. Кси, Т. Калверт и Б. Бхаттачария, "Планирование видов для инкрементального построения моделей тела ", in *Proc.Int.Conf.Pattern Recognition* (Paris), 1986, pp. 154-157. 51 M.
[12 Ячида, "Получение трехмерных данных с помощью нескольких видов", в *Исследования в области робототехники: Third Int. Symp.,* 1986, pp. 11-18.

Томас К. Шермер получил степень бакалавра электротехники и информатики в Университете Джона Хопкинса (Балтимор) в 1984 году и степень доктора философии в области компьютерных наук в Университете Макгилла (Монреаль) в 1989 году, где он был удостоен премии Д. В. Амбриджа как выдающийся аспирант года в области физических и прикладных наук.

Он работал в Лаборатории компьютерной графики Нью-Йоркского технологического института в качестве компьютерного аниматора и старшего научного сотрудника.

В настоящее время является доцентом кафедры вычислительной техники в Университете Саймона Фрейзера. В сферу его научных интересов входят вычислительная геометрия, сети, распределенные вычисления и компьютерная графика.