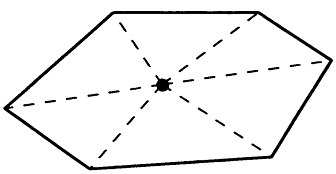
Глава 31 Как охранять музей

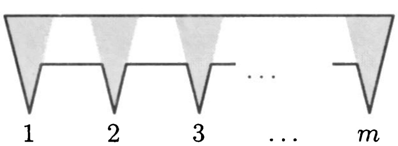
Следующую занятную задачу поставил в 1973 г. Виктор Кли. Предположим, что директор музея хочет, чтобы каждая точка музея постоянно наблюдалась охранником. Охранники располагаются в стационарных пунктах, но могут поворачиваться. Сколько охранников необходимо иметь?

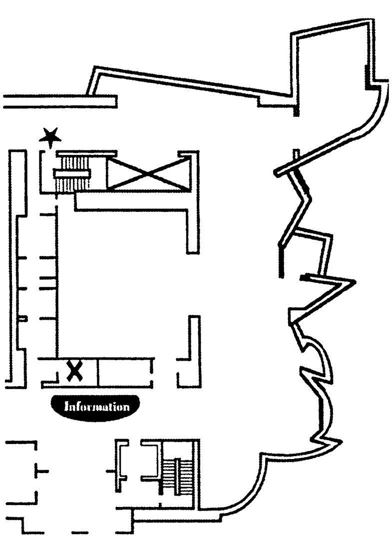


Выпуклый выставочный зал

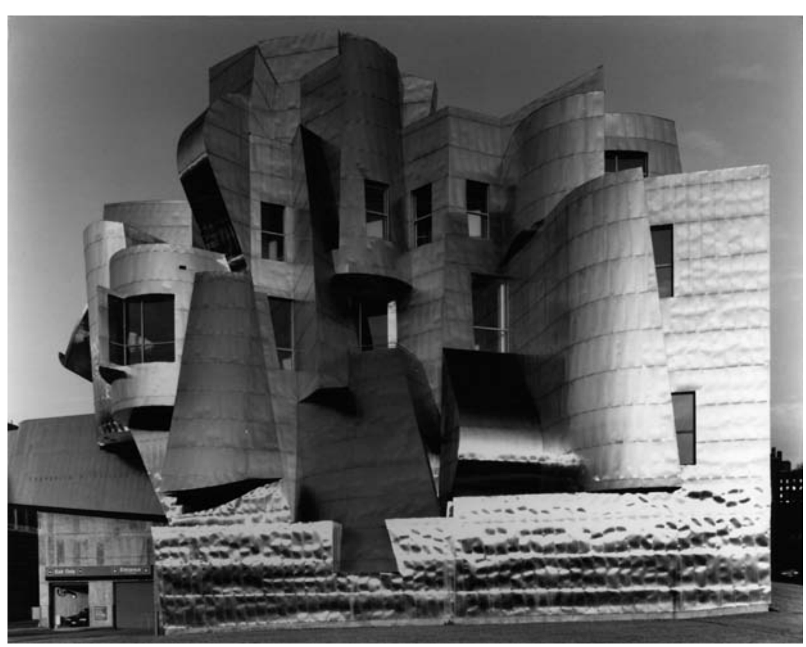
Представим себе стены музея в виде многоугольника с n сторонами. Конечно, если многоугольник выпуклый, то достаточно иметь одного охранника, и его можно разместить в любой точке музея. Но в общем случае стены музея могут иметь форму любого замкнутого многоугольника.

Рассмотрим представленный на полях музей с $n = 3m$ стенами, который имеет вид пилы. Легко видеть, что здесь требуется по меньшей мере $m = \frac{n}{3}$ охранников. Действительно, имеется n стен. Теперь заметим, что точку 1 может наблюдать охранник, располагающийся в затемненном треугольнике, и то же замечание относится к точкам $2, 3, \ldots, m$. Так как эти треугольники не пересекаются, то нужно иметь не менее m охранников. Отсекая одну или две стены в конце, мы заключаем, что для любого n имеется музей с n стенами, для охраны которого требуется $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ охранников.



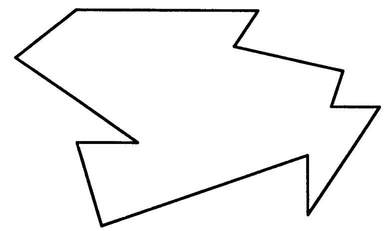


Реальная схема художественной галереи...



Следующее предложение утверждает, что этот случай является наихудшим.

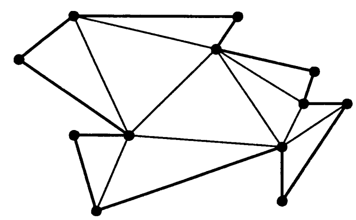
> **Теорема.** *Для любого музея с n стенами достаточно иметь $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ охранников.*



Музей с $n = 12$ стенами

Впервые эту «теорему о художественной галерее» доказал Вашек Чватал [1], использовавший тонкие рассуждения. Но здесь приведено поистине красивое доказательство, принадлежащее Стиву Фиску [2].

■ **Доказательство.** Прежде всего проведем $n - 3$ непересекающихся диагоналей, соединяющих углы стен, пока внутренность музея не будет триангулирована. Например, в музее, изображенном на полях, мы можем провести 9 диагоналей, чтобы выполнить триангуляцию. Не существенно, какую триангуляцию мы выбрали: любая из них годится. Теперь представим себе новую фигуру как плоский граф, углы стен — как вершины, а стены и диагонали — как ребра.



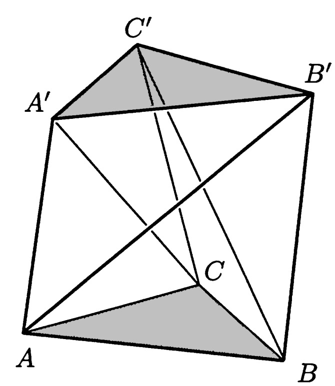
Триангуляция музея

Утверждение. *Этот граф является 3-раскрашиваемым.*

Для $n = 3$ доказывать нечего. Далее воспользуемся индукцией и для $n > 3$ выберем любые две вершины u и v, связанные диагональю. Эта диагональ разбивает граф на два меньших триангулированных графа, каждый из которых содержит ребро uv. В силу предположения индукции можно каждую часть раскрасить в три цвета, и в обеих раскрасках выбрать цвет 1 для u и цвет 2 для v. Склеивая раскраски вместе, получаем 3-раскраску всего графа.

Остальное просто. Так как имеется n вершин, то по крайней мере один цветовой класс (например, вершины, раскрашенные в цвет 1) содержит не более $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ вершин, и в них мы поместим охранников. Учитывая, что каждый треугольник имеет вершину, раскрашенную в цвет 1, мы приходим к заключению, что каждый треугольник охраняется и, следовательно, то же верно для всего музея. □

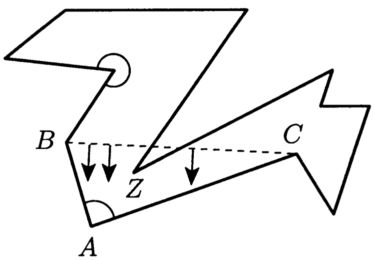
Вдумчивый читатель мог заметить одно тонкое место в нашем рассуждении. Всегда ли существует триангуляция? Вероятно, первая реакция каждого есть: «Очевидно, да!». Действительно, она существует, но это не совсем очевидно, и естественное обобщение на три измерения (разбиение на тетраэдры) на самом деле не верно! Это можно увидеть, рассматривая *многогранник Шенхардта*, изображенный на полях. Он получается из трехгранной призмы вращением верхнего треугольника в его плоскости так, что каждая четырехугольная грань разбивается на два треугольника, образующих вогнутый участок границы многогранника. Попробуйте разбить этот многогранник на тетраэдры! Вы заметите, что любой тетраэдр, который содержит нижний треугольник, должен содержать также одну из трех верхних вершин. Но такой тетраэдр не будет содержаться в многограннике Шенхардта. Поэтому не существует разбиения без дополнительной вершины.



Многогранник Шенхардта: внутренние двугранные углы при ребрах AB', BC' и CA' больше 180°.

Для доказательства того, что триангуляция плоского невыпуклого многоугольника существует, используем индукцию по числу вершин n.

Для $n = 3$ многоугольник является треугольником, и доказывать нечего. Пусть $n \geq 4$. Чтобы воспользоваться предположением индукции, нам достаточно провести *одну* диагональ, которая разобьет многоугольник P на две меньшие части так, что триангуляция многоугольника получится объединением триангуляций частей.

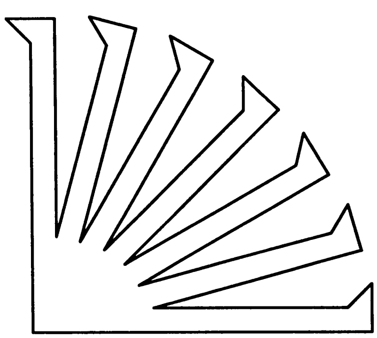


Назовем вершину A *выпуклой*, если внутренний угол при этой вершине меньше 180°. Так как сумма внутренних углов P равна $(n-2)180°$, то выпуклая вершина A должна существовать. Более того, должны существовать по крайней мере три таких вершины. По существу это следует из принципа Дирихле. Или можно рассмотреть выпуклую оболочку многоугольника и заметить, что все ее вершины являются выпуклыми также и для исходного многоугольника P.

Теперь рассмотрим две соседние с A вершины B и C. Если отрезок BC целиком лежит в P, то он является искомой диагональю. В противном случае треугольник ABC содержит другие вершины многоугольника P. Будем параллельно перемещать отрезок BC в направлении к вершине A до тех пор, пока на нем не окажется последняя лежащая в ABC вершина многоугольника P. Отрезок AZ целиком лежит внутри P и является искомой диагональю.

Существует много вариантов теоремы о художественной галерее. Например, можно охранять только те стены, на которых висят картины, или размещать всю охрану в вершинах. Очень изящный (нерешенный) вариант формулируется следующим образом.

> *Пусть каждый охранник может патрулировать одну стену музея и, перемещаясь вдоль своей стены, он видит все, что можно рассмотреть хотя бы из одной точки этой стены. Сколько «стенных охранников» необходимо для охраны любого музея с n стенами?*



Готфрид Туссан построил пример изображенного на полях музея, который показывает, что может потребоваться $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ охранников.

Этот многоугольник имеет 28 сторон (в общем случае $4m$ сторон), и читателю предлагается проверить, что необходимо иметь m стенных охранников. Предполагается, что (за исключением некоторых малых значений n) это число также и достаточно, но доказательства, не говоря уже о доказательстве из Книги, еще не найдено.

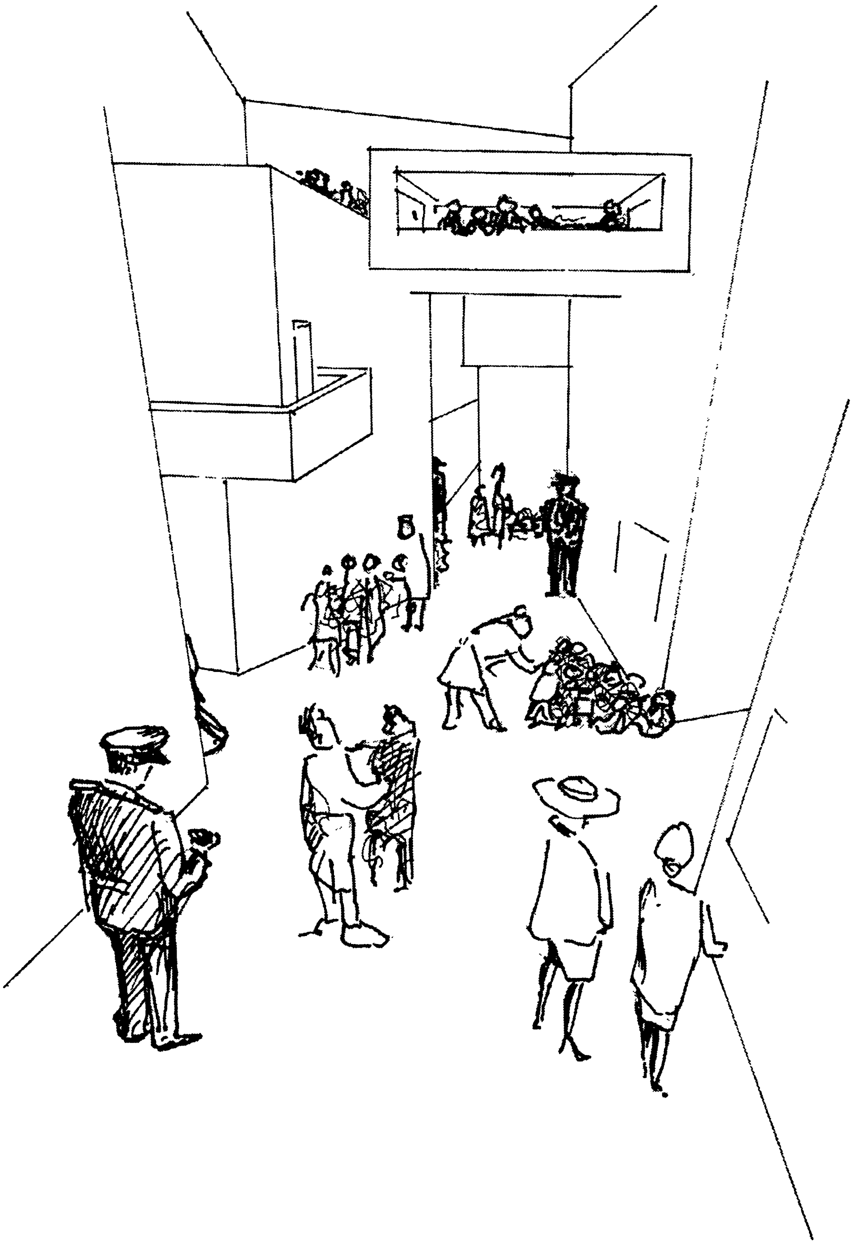
Литература

[1] Chvátal V. *A combinatorial theorem in plane geometry.* J. Combinatorial Theory, Ser. B, **18** (1975), 39–41.

[2] Fisk S. *A short proof of Chvátal's watchman theorem.* J. Combinatorial Theory, Ser. B, **24** (1978), 374.

[3] O'Rourke J. *Art Gallery Theorems and Algorithms.* Oxford University Press, 1987.

[4] Schönhardt E. *Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder.* Math. Annalen, **98** (1928), 309–312.



«Музейные охранники»
(Задача о трехмерной галерее)

Глава 32 Теорема Турана о графах

Пауль Туран

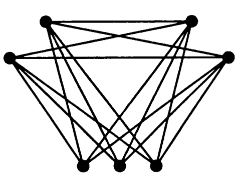
Одним из фундаментальных результатов теории графов является теорема Турана 1941-го года, которая положила начало теории экстремальных графов. Теорема Турана переоткрывалась много раз и имеет различные доказательства. Мы обсудим пять доказательств; пусть читатель решает, которое из них достойно Книги.

Введем несколько обозначений. Рассмотрим простой граф G с множеством вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и множеством ребер E. Если v_i и v_j — соседи, то будем писать $v_i v_j \in E$. Полный граф с p вершинами обозначается K_p. Подграф графа G, совпадающий с K_p, называется *p-кликой* в графе G .

Пауль Туран поставил следующую задачу.

> *Пусть G — простой граф, не содержащий p-клик. Какое наибольшее число ребер может иметь G?*

Легко построить примеры простых графов без p-клик, разбивая V на $p-1$ попарно не пересекающихся подмножеств $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{p-1}$, $|V_i| = n_i$, $n = n_1 + \ldots + n_{p-1}$, и соединяя две вершины ребром тогда и только тогда, когда они принадлежат различным множествам V_i, V_j. Обозначим полученный граф $K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$; он имеет $\sum_{i<j} n_i n_j$ ребер. Среди всех таких графов с данным n максимальное число ребер имеет граф, у которого числа n_i максимально близки, т. е. $|n_i - n_j| \leq 1$ для всех i, j. Действительно, если $n_1 \geq n_2 + 2$, то, переместив одну вершину из V_1 в V_2, мы получим граф, имеющий на $(n_1-1)(n_2+1) - n_1 n_2 = n_1 - n_2 - 1 \geq 1$ ребер больше, чем в $K_{n_1,n_2,\ldots,n_{p-1}}$. Графы, для которых $|n_i - n_j| \leq 1$, назовем *графами Турана.*



Граф $K_{2,2,3}$

Если $p-1$ делит (нацело) n, то мы можем положить $n_i = \frac{n}{p-1}$ для всех i; граф с такими n_i имеет

$$\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$$

ребер. Теорема Турана утверждает, что это число — оценка сверху для числа ребер *произвольного* графа с n вершинами, не имеющего p-клик.

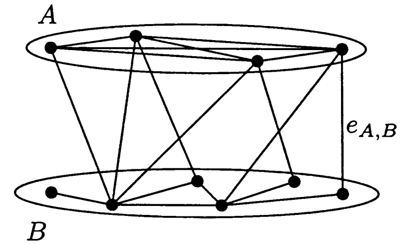
Теорема. *Если граф $G = (V, E)$ с n вершинами не имеет p-клик, $p \geq 2$, то*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}. \tag{1}$$

Для $p = 2$ это утверждение тривиально. В первом интересном случае $p = 3$ теорема утверждает, что граф с n вершинами, не имеющий треугольников, содержит не более $\frac{n^2}{4}$ ребер. Доказательства в этом частном случае были известны до Турана. Два изящных доказательства, использующие неравенства, приведены в гл. 17.

Перейдем к общему случаю. Два первых доказательства используют индукцию и принадлежат Турану и Эрдёшу, соответственно.

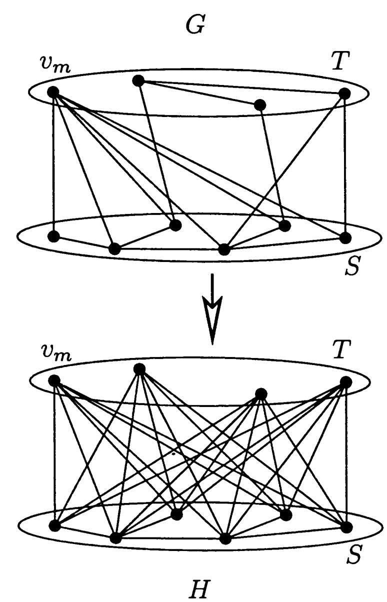
■ **Первое доказательство.** Воспользуемся индукцией по n. При $n < p$ неравенство (1) легко проверяется. Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ без p-клик, имеющий максимальное число ребер, и $n \geq p$. Конечно, G имеет $(p-1)$-клики, так как в противном случае можно было бы добавить ребра. Пусть A — одна из $(p-1)$-клик; положим $B := V \backslash A$. Клика A имеет $\binom{p-1}{2}$ ребер; оценим число e_B ребер в B и число $e_{A,B}$ ребер между A и B. По предположению индукции $e_B \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1})(n-p+1)^2$. Так как G не имеет p-клик, то каждая вершина $v_j \in B$ смежна не более чем с $p-2$ вершинами из A; значит, $e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1)$. Поэтому



$$|E| \leq \binom{p-1}{2} + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big)(n-p+1)^2 + (p-2)(n-p+1)\,.$$

Правая часть этого неравенства в точности равна $(1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$. □

■ **Второе доказательство.** Это доказательство использует структуру графов Турана и индукцию по числу вершин n. При $n < p$ теорема верна. Допустим, что теорема верна, если число вершин графа меньше n, и G — граф с множеством вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Пусть d_j — степень вершины v_j, а $v_m \in V$ — вершина максимальной степени $d_m = \max_{1 \leq j \leq n} d_j$. Множество соседей v_m обозначим S, $|S| = d_m$, и положим $T := V \backslash S$. Так как G не имеет p-клик и v_m смежна всем вершинам из S, то S не может содержать $(p-1)$-клик.



Построим теперь новый граф H с множеством вершин V (см. рисунок). Граф H совпадает с G на множестве S; множество его ребер $E(H)$ содержит все ребра, соединяющие S и T, и не содержит ребер, соединяющих вершины из T. Поэтому T — независимое множество в H, и мы приходим к выводу, что H тоже не имеет p-клик. Пусть d'_j — степень v_j в H. Если $v_j \in S$, то $d'_j \geq d_j$ по построению H, а если $v_j \in T$, то $d'_j = |S| = d_m \geq d_j$ вследствие выбора v_m. Значит, $|E(H)| \geq |E|$, т. е. среди графов на V с максимальным числом ребер должен быть граф вида H. В силу предположения индукции подграф графа G с множеством вершин S имеет не больше ребер, чем некоторый граф $K_{n_1,\dots,n_{p-2}}$ на множестве S. Поэтому $|E| \leq |E(H)| \leq E(K_{n_1,\dots,n_{p-1}})$, где $n_{p-1} = |T|$. Отсюда следует (1). □

Следующие два совершенно разные доказательства используют сведение к экстремальным задачам и идеи из теории вероятностей. Одно из них принадлежит Моцкину и Штраусу [4], другое — Алону и Спенсеру [2].

■ **Третье доказательство.** Рассмотрим *вероятностное распределение* $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$ на вершинах, т. е. сопоставим вершинам значения (веса) $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Найдем максимальное значение функции

$$f(\boldsymbol{w}) \;=\; \sum_{v_i v_j \in E} w_i w_j .$$

Предположим, что $\boldsymbol{w}$ — произвольное распределение, v_i, v_j — пара не смежных вершин с положительными весами w_i, w_j. Пусть s_i — сумма