Conteúdo

Capítulo 1

Matemática que você deve saber

Esse material é um texto sobre Cálculo estruturado para preparar estudantes para usar Cálculo nas ciências agronômicas. O primeiro capítulo não tem Cálculo de verdade: ele está aqui porque muitos alunos dão um jeito de ingressar na universidade sem habilidades adequadas de álgebra, geometria e outros tópicos de matemática básica. Assumimos que você já está familiar com o conceito de **variáveis** como x e y que simbolizam números cujo valor é desconhecido.

1.1 Resolvendo equações

Uma equação é uma expressão com um sinal de igual. Por exemplo:

$$x = 3$$

é uma equação muito simples! Ela nos diz que o valor da variável x é o número 3. Há um número de regras para manipular equações. O que essas regras fazem é mudar uma equação para outra equação com o mesmo resultado. As coisas que podemos fazer com uma equação preservando o seu resultado incluem: (em desenvolvimento...)

Capítulo 2

Limites, Derivadas e Regras elementares

Cursos tradicionais de cálculo começam com uma discussão formal detalhada sobre limites e continuidade. Este livro se afasta dessa tradição, com este capítulo introduzindo limites apenas de maneira informal para poder começar com cálculo. A agenda para este capítulo é fazer você entender uma definição operacional viável de limites; usar isso para dar a definição formal de uma derivada; desenvolver as regras para calcular derivadas; e terminar com uma discussão sobre o significado físico da derivada.

2.1 Limites

Suponha que nos seja dada uma definição de função como:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}.$$

Então, enquanto $x \neq -2$, podemos simplificar essa expressão da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x - 2.$$

Assim, esta função é uma reta – enquanto tivermos $x \neq -2$. O que acontece quando $x = -2$? Tecnicamente falando, a função não existe. É aqui que a noção de um limite se torna útil. Se formos capazes de encontrar uma série de valores de x e observar para onde eles estão indo à medida que nos aproximamos de -2, todos parecem estar indo em direção a menos 4. A frase chave aqui é ”*parecem estar*”. Por agora, vamos examinar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de -2.

Observe que esta tabela se aproxima pela direita (números maiores que $x = -2$) e pela esquerda (números menores que $x = -2$). Em uma função bem comportada, as aproximações pela esquerda e pela direita se dirigem para o mesmo lugar, mas existem funções onde isso não acontece. Chamamos isso de **limite lateral a direita** e **limite lateral a esquerda** que, por simplicidade chamaremos apenas de limites à esquerda e à direita. Se eles coincidem, seu valor comum é dito o **limite da função**. Como vimos, este é o caso ilustrado, assim o limite da função em $x = -2$ é -4.

À direita de -2		À esquerda de -2	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1	-3	-3	-5
$-1,5$	$-3,5$	$-2,5$	$-4,5$
$-1,75$	$-3,75$	$-2,25$	$-4,25$
$-1,8$	$-3,8$	$-2,2$	$-4,2$
$-1,9$	$-3,9$	$-2,1$	$-4,1$
$-1,95$	$-3,95$	$-2,05$	$-4,05$
$-1,99$	$-3,99$	$-2,01$	$-4,01$

Definição 2.1

Usamos os seguintes símbolos para os limites a direita e a esquerda e o limite de uma função $f(x)$ em um ponto $x = c$:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) \qquad \lim_{x \to c} f(x)$$

Exemplo 2.1

O que as informações tabeladas sobre $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ sugerem é que:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -4 \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = -4 \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -4$$

O problema com a função $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ é que parece forçada. Veremos em breve que funções com esse tipo de estrutura implausível surgem naturalmente quando tentamos responder à simples pergunta: **Qual é a reta tangente a uma função em um ponto?** Esta é a questão central para este capítulo.

Antes de chegarmos lá, precisamos das regras práticas para calcular limites. Suponha que estamos tentando calcular L tal que:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Podemos seguir estas regras:

- ☞ Se qualquer um dos limites laterais não existir, então L não existe.
- ☞ Se os limites laterais existirem, mas não forem iguais, então L não existe.
- ☞ Se os limites laterais existirem e forem iguais, então o limite da função é o valor comum dos limites à esquerda e à direita.
- ☞ Se a função $f(x)$ não tem problemas de domínio com o ponto c e é **contínua**, ou seja, que pode ser desenhada sem levantar o lápis, então podemos calcular o limite apenas substituindo x por c em $f(x)$.
- ☞ Se a função pode ser transformada em uma função bem comportada por um algoritmo que funciona em todos os lugares, exceto em $x = c$ (como cancelar $x + 2$ em nosso exemplo), então substituir c na função modificada fornece o valor do limite.

Exemplo 2.2

Calcule:

$$\lim_{x\to 2} x^3 + x^2 + x + 1.$$

Solução: Polinômios são as funções mais bem comportadas possíveis; podemos sempre calcular seus limites apenas substituindo. Assim,

$$\lim_{x\to 2} x^3 + x^2 + x + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$$

Exemplo 2.3

Calcule:

$$\lim_{x\to 1} \frac{xe^x - e^x}{x-1}.$$

Solução: Esta função é como nosso exemplo original no sentido de que

$$\frac{xe^x - e^x}{x-1} = \frac{e^x(x-1)}{x-1} = e^x.$$

que nos diz que

$$\lim_{x\to 1} \frac{xe^x - e^x}{x-1} = e^1 = e.$$

Exemplo 2.4

Calcule:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2}.$$

Solução: Se substituirmos $x = 2$ no numerador da fração como um teste, obtemos $8 - 24 + 22 - 6 = 0$. Assim, em $x = 2$ teremos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Por outro lado, o teorema de fatoração por raízes para polinomiais nos diz que $x - 2$ é um fator de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Assim, um pouco de trabalho nos dá que

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{x-2} = (x-3)(x-1).$$

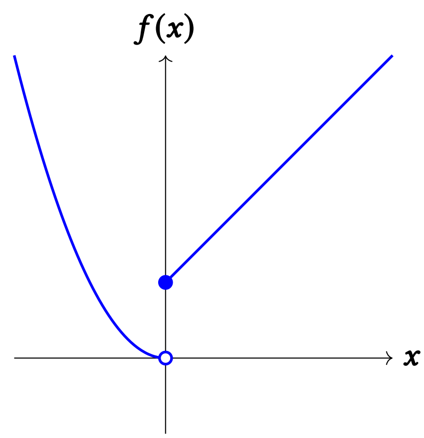
Assim, temos que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = (2-3)(2-1) = -1.$$

2.1.1 Funções definidas por partes

Às vezes é desejável ter funções que obedecem a regras diferentes para diferentes valores de x. Varejistas frequentemente oferecem descontos de preços em quantidade, por exemplo, com diferentes custos por unidade comprada para quantidades maiores e menores de unidades. Há uma notação para esse tipo de função, chamada **função definida por partes**. Suponha que $f(x)$ é uma função que eleva ao quadrado números negativos mas adiciona um a números positivos e zero. Então diríamos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 0 \\ x + 1, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$



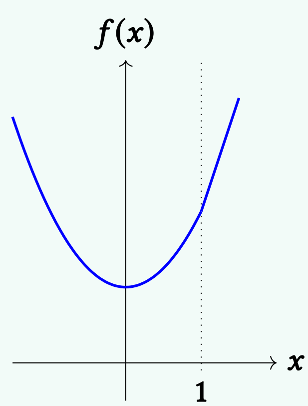
Se olharmos para o gráfico dessa função na figura ao lado, vemos que funções definidas por partes nos dão muito espaço para criar funções que não têm um limite em um ponto. Note que a desigualdade no ponto de mudança é denotada no gráfico usando um círculo preenchido para o ponto que faz parte da função e um círculo vazio para o ponto que não faz parte da função. Esse ”salto” do círculo vazio para o círculo preenchido é um exemplo do que chamamos formalmente de **descontinuidade**.

Exemplo 2.5

Examine a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 1 \\ 3x - 1, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

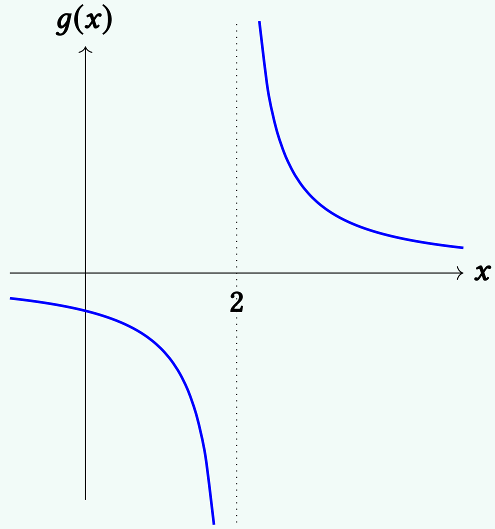
Qual é o valor de $\lim_{x\to 1} f(x)$?



Solução: À medida que nos aproximamos de 1 pela esquerda, o limite será determinado pela regra $x^2 + 1$, e assim o limite em 1 é 2, pela esquerda. À medida que nos aproximamos de 1 pela direita, o limite será determinado pela regra $3x - 1$, que fará o limite ser 2. Como os limites à esquerda e à direita coincidem, o limite da função em $x = 1$ é 2.

Exemplo 2.6

Examine a função: $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Qual é o valor de $\lim_{x\to 2} g(x)$?



Solução: Para esta função precisamos olhar para o gráfico, pelo menos até aprendermos mais:
À medida que nos aproximamos de 2 pela esquerda, o valor de $g(x)$ é negativo. Mas, como estamos dividindo por números que estão se aproximando cada vez mais de zero, esses números ficam maiores em valor absoluto, e a função dispara em direção a $-\infty$ (lê-se menos infinito). Isso significa que o limite não existe. Da mesma forma, o limite pela direita dispara em direção a $+\infty$ e também não existe. Isso significa que o limite desejado também não existe.

2.1.2 Exercícios propostos

1 Para cada um dos seguintes limites, dê uma razão pela qual o limite não existe ou calcule seu valor.

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-16}{x+4}$

c) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x+3}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2}{x^3-6x^2+11x-6}$

f) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$

2 Para cada um dos seguintes limites, dê uma razão pela qual o limite não existe ou calcule seu valor. Use as funções $f(x)$, $g(x)$, e $h(x)$ que seguem.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leqslant 1 \\ -4x+5, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{se } x < -1 \\ 3-x^2, & \text{se } x \geqslant -1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{se } x \leqslant 2 \\ 9-2x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim_{x\to -1} g(x)$

d) $\lim_{x\to 1} g(x)$

e) $\lim_{x\to -2} h(x)$

f) $\lim_{x\to 2} h(x)$

3 Para quais valores de c a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x < c \\ 2x+5, & \text{se } x \geqslant c \end{cases}$$

tem um limite em $x = c$?

4 Para quais valores de c a função:

$$g(x) = \begin{cases} x^2+7x+1, & \text{se } x < c \\ x-8, & \text{se } x \geqslant c \end{cases}$$

tem um limite em $x = c$?

5 Para quais valores de c a função:

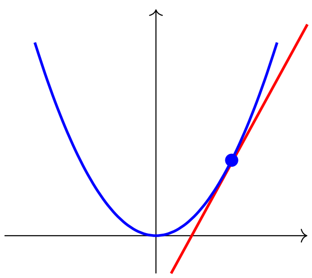
$$h(x) = \begin{cases} x^2+4x, & \text{se } x < c \\ 3x-2, & \text{se } x \geqslant c \end{cases}$$

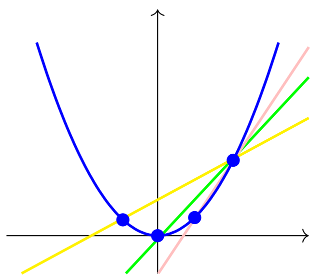
tem um limite em $x = c$?

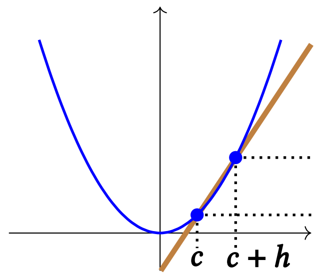
2.2 Derivadas

Nós mencionamos anteriormente que a questão central deste capítulo é: **O que é a reta tangente a uma função em um ponto**? Uma **derivada** é a inclinação dessa reta. Para calcular a derivada, precisamos usar o que aprendemos sobre limites na Seção 2.1. Então, o que é uma reta tangente?

Uma reta tangente é uma reta que toca uma curva em exatamente um ponto. O ponto é chamado de **ponto de tangência**. Se a curva tem uma forma complexa, então a reta tangente pode intersectar a curva em algum outro lugar também. Mas, em uma vizinhança do ponto de tangência, ela toca a curva apenas uma vez. A reta vermelha na figura abaixo mostra uma reta tangente a uma curva.







Uma reta secante é uma reta que passa por dois pontos em uma curva. A figura do meio acima mostra exemplos de várias retas secantes, todas as quais compartilham um ponto — o ponto de tangência na imagem à esquerda. Esta imagem nos ajuda a entender por que precisamos de limites para calcular inclinações de retas tangentes. As inclinações das retas secantes são todas calculadas com base nos dois pontos pelos quais elas passam. A inclinação da reta tangente é baseada em um único ponto, não sendo possível encontrá-la usando a fórmula de coeficiente angular para retas vista no Ensino Médio.

Se pensarmos na inclinação da reta tangente como o limite das inclinações de retas secantes de um ponto em movimento até o ponto de tangência, então o limite à medida que o ponto em movimento se aproxima do ponto de tangência será a inclinação da reta tangente. Suponha que o ponto de tangência seja $(c, f(c))$, e que examinemos a reta secante através desse ponto e um ponto "apenas um pouco" à direita, com a distância para a direita sendo h.

Então, o segundo ponto na reta secante é $(c + h, f(c + h))$, dando a situação mostrada na terceira figura. Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, então esse limite deve ser a inclinação da reta tangente. Aplicando a fórmula para a inclinação de uma reta usando dois pontos, obtemos que a inclinação da reta tangente em $f(x)$ no ponto $x = c$ é:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{c+h-c} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Esta fórmula é a definição da derivada e temos uma maneira especial de denotá-la: $f'(c)$.

Definição 2.2

A inclinação da reta tangente a uma função f no ponto $(c, f(c))$ é $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$.

No próximo exemplo, calculamos a inclinação de uma reta tangente e encontramos a fórmula para essa reta tangente.

Exemplo 2.7

Encontre a reta tangente a $f(x) = x^2$ no ponto $(1, 1)$.

Solução: Para obter a fórmula para a reta precisamos de um ponto e uma inclinação. Para este problema temos $c = 1$. Temos o ponto $(1, 1)$ na reta tangente, então tudo que precisamos calcular é a inclinação como mostrado ao lado.

Note que este limite é um que requer manipulação algébrica para ser resolvido. Não poderíamos apenas substituir $h = 0$ porque isso resultaria em $\frac{0}{0}$. Todos os cálculos de inclinação resultam em limites que requerem manipulação algébrica — explicando a ênfase neste tipo de limite na seção anterior. Agora temos o ponto $(1, 1)$ e uma inclinação de $m = 2$. A reta é portanto $y - 1 = 2(x - 1)$ ou $y = 2x - 1$. Concluímos mencionando que o gráfico da função e sua reta tangente em $c = 1$ é exatamente o gráfico exibido no início da seção com reta tangente em vermelho.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2 + h \\
&= 2
\end{aligned}$$

Agora sabemos como encontrar as inclinações das retas tangentes em valores $x = c$ específicos. Seria bom ter uma função geral para a derivada. Definimos a **derivada geral** de uma função da seguinte forma.

Proposição 2.1: (derivada geral)

A derivada geral (ou apenas derivada) de uma função $f(x)$ é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemplo 2.8

Calcule a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Portanto, para $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

A quantidade $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ é chamada de **quociente de diferença** para $f(x)$. Podemos dizer que a derivada de uma função é o limite do quociente de diferença à medida que $h \to 0$.

Vamos conferir um exemplo mais simples, quando temos uma função constante:

Exemplo 2.9

Encontre a derivada de $f(x) = c$, onde c é uma constante real qualquer.

Solução: **Como $f(x) = c$, para todo valor x, então temos**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Este resultado é nossa primeira regra de propósito geral para derivadas, a **regra da constante**.

Proposição 2.2: (regra da constante)

Seja $f(x) = c$ uma função tal que $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Então $f'(x) = 0$.

Regras são úteis quando queremos ir diretamente ao resultado sem as manipulações algébricas de limites. Vejamos mais uma regra que será muito usada:

Exemplo 2.10

Encontre a derivada de $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Solução: **Usando a expansão do Binômio de Newton, usualmente vista no segundo ano do Ensino Médio, temos:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \ldots + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{2} + \ldots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^1}{2} + \ldots + h^{n-1} \\
&= nx^{n-1} + 0 + \ldots + 0 = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Este resultado é nossa segunda regra de propósito geral para derivadas, a **regra da potência**.

Proposição 2.3: (regra da potência)

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Nota:

Não se preocupe em entender o porquê das regras. Nosso foco principal é saber usá-las adequadamente!

2.2.1 Derivadas de Somas e Múltiplos Constantes

Se $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = M$ existem, então

$$\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M.$$

Da mesma forma, se $k \in \mathbb{R}$ é uma constante, então

$$\lim_{x\to c} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to c} f(x) = k \cdot L.$$

Como as derivadas são baseadas em limites, obtemos duas regras muito úteis a partir desses fatos.

Proposição 2.4

☞ A derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

☞ Se k é uma constante, então

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Já temos uma regra de derivada para potências de x. Sabemos que um polinômio é uma soma de múltiplos constantes de potências de x. Isso significa que nossas duas novas regras se combinam com as regras de potência para nos permitir calcular a derivada de qualquer polinômio!

Exemplo 2.11

Se $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$, encontre $f'(x)$.

Solução: Usando as novas regras, a regra da potência, e lembrando que a derivada de uma constante é zero, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + 5x^2 + 7x + 2)' \\ &= (x^3)' + 5(x^2)' + 7(x^1) + 2' \\ &= 3x^2 + 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1x^0 + 0 \\ &= 3x^2 + 10x + 7 \end{aligned}$$

e pronto!

Em geral, para calcular a derivada de um polinômio em forma padrão, tudo o que precisamos fazer é trazer o expoente de cada termo para frente, multiplicando-o pelo coeficiente existente (que pode ser uma fração ou mesmo um número irracional), e subtrair uma unidade do expoente.

Então:

☞ $(x^6 + 7x^2 + 4x - 4)' = 6x^5 + 14x + 4$

☞ $(3x^5 + 14x^3 - 8x^2 + 6x + 7)' = 15x^4 + 42x^2 - 16x + 6$

☞ $(3x^9 - 9x^8 - 2x^7 + x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 7x)' = 27x^8 - 72x^7 - 14x^6 + 5x^4 + 16x^3 - 21x^2 + 7$

☞ $(5x^2 + 7)' = 10x$

Com um pouco de prática, isso se torna um reflexo e, se não ficar natural, é porque você não treinou o suficiente.

2.2.2 Exercícios propostos

1 Usando a definição da derivada, encontre $f'(c)$ para cada um dos seguintes pares de funções e constantes.

a) $f(x) = x, c = 4$

b) $g(x) = 3x + 7, c = 1$

c) $h(x) = x^2, c = -1$

d) $q(x) = x^3, c = 2$

2 Para as seguintes funções e valores $x = c$, encontre a reta tangente à função em $x = c$ na forma de equação da reta.

a) $f(x) = x^2 - 1, c = 2$

b) $g(x) = 2x^2 - 5x, c = 3$

c) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1, c = -1$

d) $g(x) = x^5 - 32, c = 2$

3 Para $f(x) = x^2 + 1$, encontre as retas tangentes a $f(x)$ para cada um dos seguintes valores $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ para x. Desenhe as retas tangentes e $f(x)$ no mesmo plano cartesiano.

4 Para cada uma das seguintes funções, encontre a derivada por qualquer método.

a) $a(x) = 2$

b) $b(x) = 115x - 234$

c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

d) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x - 11$

e) $h(x) = 5 - x + x^2 - x^3 + x^4$

f) $q(x) = (x + 1)^3$

5 Encontre a reta tangente a $y = \operatorname{sen}(x)$ em $\dfrac{\pi}{2}$. (*Dica: isso é um caso especial onde você não precisa da derivada para encontrar a reta tangente*).

6 Para $f(x) = ax + b$ com constantes a, b, encontre a reta tangente a $f(x)$ em $x = c$. (Não, você não recebeu um valor real para c, esse é o exercício).

7 Para a função $f(x) = \sqrt{x}$ calcule a derivada usando a definição. Isso requer um truque algébrico, mas não é muito difícil.

8 Encontre uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ que tenha $y = 3x + 2$ como uma reta tangente. Demonstre que sua resposta está correta.

2.3 Derivadas de Funções Elementares

Esta seção é um catálogo das derivadas da biblioteca de funções. Já podemos calcular a derivada de funções polinomiais usando combinações de potências de x. Acontece que a regra para potências da forma x^n também se aplica para potências que não são números inteiros.

Proposição 2.5: (A regra geral de potência para derivadas)

Se $f(x) = x^r$ para qualquer número real r, então $f'(x) = rx^{r-1}$.

Exemplo 2.12

Encontre a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Aplique a regra da potência e obtemos $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Neste ponto, apenas começamos e damos um monte de regras de derivadas. É difícil fazer bons exemplos até chegarmos à Seção 2.4, onde obtemos as regras para combinar funções de várias maneiras.

2.3.1 Logaritmos e expoentes

As regras para funções logarítmicas fornecem um sentido de por que $\ln(x)$ é chamado de logaritmo natural. Todas as outras funções logarítmicas têm regras de derivadas mais complexas baseadas em $\ln(x)$.

Proposição 2.6: (regras para logaritmos)

☞ Se $f(x) = \ln(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

☞ Se $f(x) = \log_b(x)$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(b)}$.

A função exponencial $y = e^x$ tem a derivada mais simples imaginável:

Proposição 2.7: (regras para exponenciais)

☞ Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

☞ Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Exemplo 2.13

Encontre a derivada de $f(x) = 3^x$. *Solução:* $f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$.

2.3.2 Funções trigonométricas

As derivadas das funções trigonométricas, como as demais, devem ser memorizadas. Dentre as várias existentes, focaremos apenas em duas delas por questões de simplicidade:

Proposição 2.8: (regras para funções trigonométricas)

☞ Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x$.

☞ Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

2.3.3 Exercícios propostos

1 Encontre a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ c) $h(x) = 4e^x$

b) $g(x) = x^{3,1}$ d) $r(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

2 Para quais valores de $y = \operatorname{sen}(x)$ tem uma reta tangente horizontal?

3 Suponha que você tome a derivada de $y = \operatorname{sen}(x)$ infinitas vezes. O que você obtém?

4 Encontre a reta tangente a cada uma das seguintes funções no ponto indicado.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 1$

b) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ em $x = \dfrac{\pi}{3}$

c) $h(x) = \cos(x)$ em $x = \dfrac{\pi}{4}$

d) $r(x) = \ln(x)$ em $x = \ln(2)$

2.4 As Regras do Produto, do Quociente e da Cadeia

Nesta seção aprenderemos as regras de derivadas que nos permitem lidar com funções construídas a partir de outras funções tanto por composição aritmética quanto funcional.

Nossa primeira regra nos permite tomar a derivada de um produto de duas funções. É, por isso, chamada de **regra do produto**.

Proposição 2.9: (regra do produto)

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Exemplo 2.14

Encontre a derivada de $h(x) = x \cdot \text{sen}\,(x)$.

Solução: Aplique a regra do produto às funções $f(x) = x$ e $g(x) = \text{sen}\,(x)$:

$$h'(x) = (x)' \cdot \text{sen}\,(x) + x \cdot (\text{sen}\,(x))' = 1 \cdot \text{sen}\,(x) + x \cdot \cos(x) = \text{sen}\,(x) + x \cdot \cos(x).$$

Exemplo 2.15

Encontre a derivada de $r(x) = \ln(x)\cos(x)$.
Solução: Aplique a regra do produto às funções $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \cos(x)$:

$$r'(x) = (\ln(x))' \cdot \cos(x) + \ln(x) \cdot (\cos(x))' = \frac{1}{x} \cdot \cos(x) + \ln(x) \cdot (-\text{sen}\,(x)) = \frac{\cos(x)}{x} - \ln(x)\text{sen}\,(x).$$

A próxima regra é a **regra do quociente** que é usada para lidar com a razão entre duas funções.

Proposição 2.10: (regra do quociente)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Exemplo 2.16

Encontre a derivada de $h(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$.

Solução: Aplique a regra do quociente às funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x + 5$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(2x+1)'(x+5) - (2x+1)(x+5)'}{(x+5)^2} \\ &= \frac{2(x+5) - (2x+1) \cdot 1}{(x+5)^2} \\ &= \frac{2x + 10 - 2x - 1}{(x+5)^2} \\ &= \frac{9}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

Em geral, não expandimos o denominador após usar a regra do quociente. É frequentemente mais fácil lidar com a forma fatorada a menos que uma simplificação melhor seja viável.

Exemplo 2.17

Encontre a derivada de $q(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Solução: Aplique a regra do quociente às funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 + 1$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Exemplo 2.18

Encontre a derivada de $r(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen}(x)}$.

Solução: Aplique a regra do quociente às funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \operatorname{sen}(x)$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(e^x)'(\operatorname{sen}(x)) - e^x(\operatorname{sen}(x))'}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\ &= \frac{e^x\operatorname{sen}(x) - e^x\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \\ &= \frac{e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))}{\operatorname{sen}^2(x)} \end{aligned}$$

2.4.1 Composição de Funções e a Regra da Cadeia

A composição de duas funções resulta da aplicação de uma a outra. Se as funções são $f(x)$ e $g(x)$, então sua composição é escrita como $f(g(x))$. Vamos olhar alguns exemplos.

Exemplo 2.19

Se $f(x) = x + 7$ e $g(x) = x^2$, então

$$f(g(x)) = x^2 + 7$$

enquanto

$$g(f(x)) = (x+7)^2 = x^2 + 14x + 49.$$

Exemplo 2.20

Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = e^x$, então

$$f(g(x)) = \operatorname{sen}(e^x)$$

enquanto

$$g(f(x)) = e^{\text{sen}\,(x)}.$$

A ordem em que duas funções são compostas importa bastante, pois como vimos, os resultados não são simétricos a menos de casos especiais. A **regra da cadeia** é usada para calcular a derivada de uma composição de funções.

Proposição 2.11: (regra da cadeia)

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'.$$

Na composição $f(g(x))$ chamamos $f(x)$ de função externa ou função de fora e $g(x)$ de função interna ou função de dentro. Assim, a regra da cadeia estabelece que "a derivada da composição é a derivada da função externa aplicada na interna e multiplicada pela derivada da função interna".

Exemplo 2.21

Calcule a derivada de $h(x) = e^{2x}$.

Solução: Aplique a regra da cadeia à composição para a qual a função externa é $f(x) = e^x$ e a função interna é $g(x) = 2x$. Para estas, $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = 2$. Então:

$$h'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Exemplo 2.22

Calcule a derivada de $q(x) = \text{sen}\,(x^2)$.

Solução: Aplique a regra da cadeia à composição para a qual a função externa é $f(x) = \text{sen}\,(x)$ e a função interna é $g(x) = x^2$. Para estas, $f'(x) = \cos(x)$ e $g'(x) = 2x$. Então:

$$q'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2).$$

A regra da cadeia evita um monte de multiplicação em alguns casos. Tecnicamente, poderíamos fazer o seguinte exemplo sem a regra da cadeia, mas seria bem chato expandir um polinômio de grau alto.

Exemplo 2.23

Calcule a derivada de $r(x) = (x^2 + x + 1)^7$.

Solução: Aplique a regra da cadeia à composição para a qual a função externa é $f(x) = x^7$ e a função interna é $g(x) = x^2 + x + 1$. Para estas, $f'(x) = 7x^6$ e $g'(x) = 2x + 1$. Então:

$$r'(x) = 7(x^2 + x + 1)^6(2x + 1).$$

Normalmente não multiplicamos em detalhe respostas como esta a menos que haja um bom motivo para olhar para a expressão expandida.

Exemplo 2.24

Calcule a derivada de $a(x) = \sqrt{e^x + 2}$.

Solução: Aplique a regra da cadeia à composição para a qual a função externa é $f(x) = \sqrt{x}$ e a função interna é $g(x) = e^x + 2$. Para estas, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = e^x$. Então:

$$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x + 2}} \cdot e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 2}}.$$

Exemplo 2.25

Calcule a derivada de $b(x) = \ln(\cos(x))$.

Solução: Aplique a regra da cadeia à composição para a qual a função externa é $f(x) = \ln(x)$ e a função interna é $g(x) = \cos(x)$. Para estas, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g'(x) = -\text{sen}\,(x)$. Então:

$$r'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot -\text{sen}\,(x) = \frac{-\text{sen}\,(x)}{\cos(x)} = -\text{tg}(x).$$

Note como simplificar esta resposta requer uma das identidades trigonométricas mais simples.

Com a regra do produto, do quociente e especialmente a regra da cadeia, a variedade de funções para as quais podemos calcular a derivada é substancialmente ampliada. A prática é necessária para desenvolver um senso de quando e qual regra usar corretamente.

2.4.2 Exercícios propostos

1 Encontre a derivada de cada uma das seguintes funções com a regra dp produto (talvez precise da regra da cadeia em algumas delas):

a) $f(x) = x \cdot \cos(x)$

b) $g(x) = \text{sen}\,(x) \cdot \cos(x)$

c) $h(x) = x^5(x+1)^6$

d) $q(x) = x^3 e^{2x}$

e) $r(x) = \cos(2x)e^{3x}$

f) $s(x) = \text{sen}\,(ex) \cdot \cos(\pi x)$

2 Encontre as derivadas das seguintes funções com a regra do quociente.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+2}$

b) $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-x}$

c) $h(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^3}$

d) $q(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

e) $r(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

f) $s(x) = \dfrac{\text{sen}\,(x)}{\cos(x)+1}$

3 Quando um certo composto é injetado em um músculo, este responde se contraindo. A quantidade de contração, s (em milímetros), é relacionada à concentração do composto, x (em mililitros), por

$$s(x) = \frac{x}{m + nx}$$

onde m e n são constantes.

a) Encontre $s'(x)$.

b) Calcule a taxa de contração quando a concentração do composto é 50 $m\ell$, $m = 10$ e $n = 3$.

4 A *fórmula de Murrell* para calcular o total de descanso, em minutos, requerido após executar uma atividade física específica por 30 minutos é dado pela expressão

$$R(w) = \frac{30(w-4)}{w-1,5}$$

onde w é o consumo em kcal/min (kilocalorias por minuto).

Fonte: *Human Factors in Engineering and Design.*

a) Um valor 5 para w indica exercício leve, como andar de bicicleta num local plano a 16km/h. Encontre $R(5)$.

b) Um valor 7 para w indica exercício moderado, como capinar um lote com enxada. Encontre $R(7)$.

c) Calcule $R'(5)$, $R'(7)$ e compare suas respostas. Explique se elas fazem sentido.

5 Encontre as derivadas das seguintes funções com a regra da cadeia.

a) $f(x) = (x^2 + 1)^{11}$

b) $g(x) = \cos(x^2 + 1)$

c) $h(x) = (\cos(x) + 1)^5$

d) $q(x) = \sqrt{\cos(x) + 1}$

e) $r(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^4$

f) $s(x) = e^{x^2+x+1}$

g) $a(x) = \ln(x^3 + 2x^2 + 7x + 5)$

h) $b(x) = \ln(e^x + 1)$

6 O número total de bactérias (em milhões) presente em uma cultura é dado por

$$N(t) = 2t(5t + 9)^{\frac{1}{2}} + 12,$$

onde t representa o tempo (em horas) depois do do começo de um experimento. Calcule a taxa de mudança da população de bactérias com respeito ao tempo para as seguintes quantidades de horas.

a) 0 b) $\frac{7}{5}$ c) 8

7 Encontre as derivadas das seguintes funções com a técnica mais apropriada.

a) $f(x) = x \cdot \ln(\cos(x) + 1)$

b) $g(x) = x \cdot 5x^2 + 1$

8 Usando a regra da cadeia quantas vezes forem necessárias, verifique a regra da cadeia tripla:

$$(f(g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g(h(x))' \cdot h'(x).$$

9 Encontre a derivada de $f(x) = (\text{sen}\,(\ln(x)))^5$.

10 Encontre a derivada de $g(x) = (\ln(e^x + 1))^3$.

Capítulo 3

Significado físico e Aplicações da Derivada

Até agora, passamos da definição baseada em limites de uma derivada para saber como calcular a derivada de um número bastante grande de funções diferentes. Agora, o que falta é a sua interpretação. O significado da derivada depende muito do contexto, mas há um princípio geral que cobre a maior parte do que a derivada significa.

Proposição 3.1: (significado da derivada)

Se $f(x)$ mede uma quantidade, então $f'(x)$ é a **taxa** na qual essa quantidade **está mudando**.

Temos usado a interpretação geométrica da derivada: é a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto. Uma reta $y = ax + b$ representa algo que começa em b e adiciona mais a por unidade de x percorrida; uma reta tem uma taxa constante na qual a quantidade medida muda. Isso explica por que "$f'(x)$ é a taxa de mudança de $f(x)$" e "$f'(x)$ é a inclinação da tangente ao gráfico em x" são ideias equivalentes.

3.1 Notação diferencial

Neste ponto, para permitir uma série de maneiras inovadoras de usar a derivada, introduzimos uma nova notação que reconhece que a derivada é uma taxa de mudança.

Proposição 3.2: (Notação diferencial)

Dado que $y = f(x)$, outra notação para a derivada é

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Isso é lido como "a diferencial de y em relação a x". Os novos símbolos dy e dx são a diferencial de y e de x, respectivamente.

Essa noção da derivada como uma taxa de mudança leva a uma aplicação natural na Física. Precisaremos de mais uma definição.

Definição 3.1

A derivada da derivada de uma função y é chamada de segunda derivada e é denotado por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

A segunda derivada mede a taxa na qual a taxa de mudança está mudando. Um exemplo disso se reflete na curvatura de um gráfico, guiando o que chamamos de grau de concavidade.

Além da curvatura, há uma interpretação direta da segunda derivada em Física que é a **aceleração**.

Proposição 3.3: (Posição, velocidade, e aceleração)

Se $y = f(t)$ mede a **posição** de um objeto no tempo t, então $\dfrac{dy}{dt} = f'(t)$ fornece sua **velocidade**, enquanto $\dfrac{d^2y}{dt^2} = f''(t)$ é sua **aceleração**.

Se pudermos medir a posição, então a taxa de mudança da posição é velocidade, e a taxa na qual a velocidade está mudando é aceleração. Se a unidade de posição é metros (m), então a velocidade é metros/segundo (m/s), e a aceleração é metros/segundo/segundo (m/s^2). Cada derivada sucessiva aumenta o número de qualificadores "por segundo". Isso é refletido na notação diferencial:

- ☞ $y = f(t)$ (sem denominador)
- ☞ $\dfrac{dy}{dt} = f'(t)$ (tempo no denominador)
- ☞ $\dfrac{d^2y}{dt^2} = f''(t)$ (tempo ao quadrado no denominador).

Exemplo 3.1

Suponha que a distância percorrida por um veículo é dada por $s(t) = 0.02t^2 + 0,5t + 2$. Encontre a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ do veículo.

Solução: Tome derivadas:

$$\begin{aligned} s(t) &= 0,02t^2 + 0,5t + 2\ m \\ v(t) &= 0,04t + 0,5\ m/s \\ a(t) &= 0,04\ m/s^2 \end{aligned}$$

A velocidade e a aceleração não são as únicas taxas de mudança que podemos estar interessados. O próximo exemplo mostra como calcular o fluxo de um tanque a partir do volume de fluido nele.

Exemplo 3.2

Um tanque cilíndrico com torneira aberta na parte inferior tem um volume de água que é

$$V(t) = 1216 - 72\sqrt{t}$$

litros em um tempo t. Encontre a taxa de fluxo (vazão) de água do tanque.

Solução: Tome derivadas:

$$\begin{aligned} V(t) &= 1216 - 72\sqrt{t}\ \ell \\ &= 1216 - 72t^{\frac{1}{2}}\ \ell \\ V'(t) &= -72 \cdot \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1}\ \ell/s \\ &= -36t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{36}{\sqrt{t}}\ \ell/s \end{aligned}$$

Claro que esta fórmula só funciona enquanto o tanque tiver água nele, então devemos também calcular:

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 \\ \Rightarrow 1216 - 72\sqrt{t} &= 0 \\ 1216 &= 72\sqrt{t} \\ 1478656 &= 5184t \Rightarrow t = 285,2 \end{aligned}$$

Assim, a fórmula é válida apenas para os primeiros 285 segundos, após os quais o tanque está vazio.

3.1.1 Derivadas Implícitas

Na Seção 1.4 usamos a circunferência como um objeto que o gráfico falhou no teste da reta vertical e, portanto, não é uma função.

Por outro lado, toda a teoria das derivadas que vimos serve apenas para funções, pelo menos até agora. **Derivadas implícitas** nos permitem contornar esse problema. Para usar derivadas implícitas, precisamos de um fato conveniente sobre diferenciais: eles se cancelam como variáveis.

Proposição 3.4: (Propriedades algébricas das diferenciais)

Para quaisquer variáveis a, b, c, temos

$$\frac{da}{db} \cdot \frac{db}{dc} = \frac{da}{\cancel{db}} \cdot \frac{\cancel{db}}{dc} = \frac{da}{dc}$$

e, de forma semelhante,

$$\frac{\frac{da}{db}}{\frac{dc}{db}} = \frac{da}{dc}.$$

O truque da diferenciação implícita é que podemos dizer "y é uma função de x, mas não estamos explicitamente resolvendo isso". Então, tomamos a derivada de tudo, como se x e y fossem ambos "a variável".

Como y é uma função de x, também pegamos $\frac{dy}{dx}$ a cada vez que tomamos a derivada de y. Isso é requerido pela regra da cadeia como já vimos. Vamos fazer um exemplo.

Exemplo 3.3

Suponha que $x^2 + y^2 = 25$, encontre a reta tangente no ponto $(3, -4)$.

Solução: Há um passo adicional para encontrar uma reta tangente dessa maneira, que é verificar se a tangência é legítima (se o ponto está na curva). Neste caso, $(3^2) + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$, então está tudo certo. Agora tomamos a derivada, normalmente para ambas as variáveis, mas inserindo um $\frac{dy}{dx}$ cada vez que tomamos a derivada de y. Isso resulta em

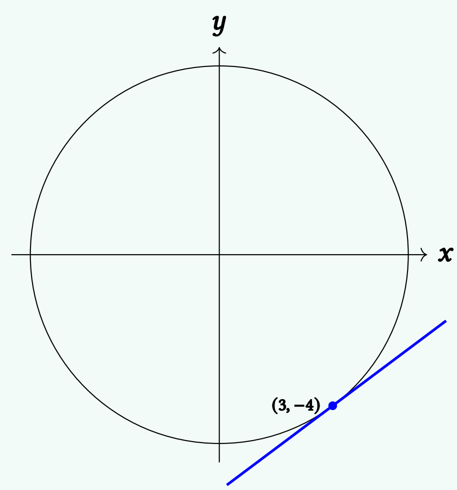
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Substituindo o ponto dado, temos

$$2(3) + 2(-4)\frac{dy}{dx} = 0,$$

e resolvemos isso para obter $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$ como a inclinação da tangente.

Substituindo na equação da reta, temos $y + 4 = \frac{3}{4}(x-3)$, ou seja, $y = \frac{3x}{4} - \frac{25}{4}$.



Vamos olhar para uma imagem do círculo e da reta tangente ao lado. Note que não tivemos que nos preocupar se a função que estávamos usando era a metade superior do círculo ou a metade inferior. Obtivemos uma expressão geral que cobria ambas as metades do círculo. Qual metade estávamos realmente trabalhando era determinada pela escolha do ponto e $(3, -4)$ está na metade inferior.

O próximo exemplo nos permite usar as propriedades algébricas das diferenciais.

Exemplo 3.4

Se $y = x^2$ e $x = t^2 + t + 3$, então o que é $\frac{dy}{dx}$ quando $t = 4$?

Solução: Quando $t = 4$, vemos que $x = 16 + 4 + 3 = 23$. Tomando algumas derivadas, vemos que $\frac{dy}{dx} = 2x$ e $\frac{dx}{dt} = 2t + 1$. Quando $t = 4$, temos $\frac{dx}{dt} = 2 \cdot 4 + 1 = 9$. Podemos então calcular que:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 2x \cdot 9 = 2 \cdot 23 \cdot 9 = 414.$$

Uma das boas características da derivada implícita é que ela evita resolver uma função para y antes de calcular a inclinação da tangente. O próximo exemplo cuidadosamente evita lidar com a função $y = \sqrt[3]{17 - x^2}$.

Exemplo 3.5

Dado $x^2 + y^3 = 17$, encontre a reta tangente à curva em $(3, 2)$.

Solução: Primeiro, novamente, verifique se o ponto está na curva. Obtemos $3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$, sem problemas. Agora, computamos a derivada implícita e obtemos que:

$$2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Substituindo o ponto $(3, 2)$ dado, temos $6 + 12\frac{dy}{dx} = 0$ e, resolvendo isso, encontramos $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$.

Usando a equação da reta obtemos que $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, o que simplifica para $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$. Pronto!

Suponha que temos uma relação que muda com o tempo. Então podemos tomar a derivada (implícita) do tempo dessa coisa. Qualquer variável z tem uma $\frac{dz}{dt}$, cortesia da regra da cadeia.

Exemplo 3.6

Suponha que um disco de cobre está sendo aquecido de modo que seu raio está se expandindo a 0,02 mm/minuto, quão rápido sua área de superfície está mudando quando o raio é 12 mm?

Solução: Começamos com a fórmula da área para um disco:

$$A = \pi \cdot r^2.$$

As variáveis são A e r. Tomando a derivada implícita do tempo obtemos: $\frac{dA}{dr} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$.

O enunciado do problema nos diz que a taxa de mudança do raio em relação ao tempo é $\frac{dr}{dt} = 0,02$ mm/min e que $r = 12$, então substituímos isso e obtemos

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(12)(0,02) = 0,48\pi \approx 1,508\ mm^2/min.$$

Este exemplo é um tipo de problema chamado problema de **taxa relacionada**. Em geral, se temos uma equação que relaciona quantidades que variam com o tempo, podemos usar sua derivada implícita do tempo para obter uma relação entre a maneira como as quantidades estão mudando.

Exemplo 3.7

Suponha que $0,5m^3$ de hidrogênio está sendo bombeado para dentro de um balão esférico a cada segundo, quão rápido o raio do balão está mudando quando ele contém $1000m^3$ de hidrogênio?

Solução: Este problema tem algumas partes para serem montadas. Primeiro de tudo, o volume de uma esfera, em termos de seu raio, é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Então a derivada temporal (implícita) é $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

O problema pediu $\frac{dr}{dt}$ para $\frac{dV}{dt} = 0,5\, m^3/s$. Também sabemos que queremos a resposta quando $V = 1000\, m^3$. Porém, nossa fórmula depende do raio r. Resolvendo

$$1000 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

para o raio, obtemos:

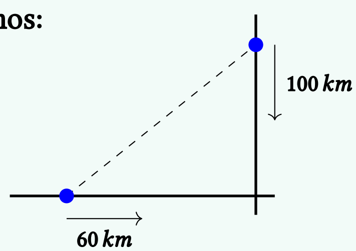
$$r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} \approx 6,2\, m.$$

Agora, substituímos e obtemos $0,5 = 4\pi(6,2)^2 \frac{dr}{dt}$, ou seja, $\frac{dr}{dt} = 0,00104\, m/s$ (Bem lento).

Exemplo 3.8

Um carro está se aproximando de uma interseção pelo norte a 100km/h; um segundo carro está se aproximando pelo oeste a 60km/h. Quando o primeiro carro está a 1km da interseção, e o segundo está a 1.2km da interseção, quão rápido os carros estão se aproximando um do outro?

Solução: A distância entre os carros é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Se a distância do primeiro carro da interseção é y, e a distância do segundo é x, então a distância D entre carros é dada por $D^2 = x^2 + y^2$. Tomando a derivada em relação ao tempo, obtemos:



$$2D\frac{dD}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

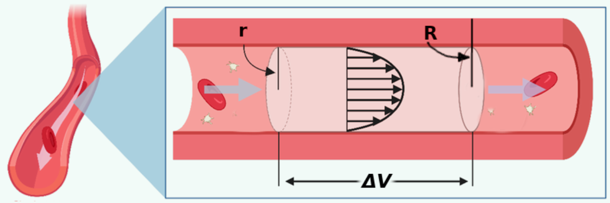
Já sabemos quanto é $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$, então precisamos calcular $D = \sqrt{1^2 + 1,2^2} = \sqrt{2,44} \approx 1,56$ km.

Substitua e obtenha $2(1,56)\frac{dD}{dt} = 2(1,2)(60) + 2(1)(100)$ ou $\frac{dD}{dt} = \frac{344}{3,12} \approx 110,3$ km/h. Note que a resposta é (e deve ser) plausível.

Exemplo 3.9

Sangue flui mais rápido quando está mais próximo do centro de um vaso sanguíneo. De acordo com a *Lei de Poiseuille*, a velocidade V do sangue é dada por

$$V = k(R^2 - r^2),$$



onde R é o raio do vaso sanguíneo, r é a distância de uma camada de fluxo de sangue até o centro do vaso e k é uma constante, que aqui assumiremos valer 375. Suponha que um vaso capilar tem raio $R = 0,08$ mm e que água fria está fazendo esse vaso se contrair a uma taxa $\frac{dR}{dt} = -0,01$ mm/min. Quão rápido a velocidade do sangue está mudando nesse vaso capilar?

Solução: Precisamos encontrar $\frac{dV}{dt}$. Como r não foi informado, vamos tratá-lo como uma constante e assumir que sua unidade é compatível com as demais.

$$\begin{aligned} V &= 375(R^2 - r^2) \\ \frac{dV}{dt} &= 375\left(2R\frac{dR}{dt} - 0\right) && (r \text{ é constante}) \\ &= 750R\frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

Sabemos que $R = 0,08$ e $\frac{dR}{dt} = -0,01$, então

$$\frac{dV}{dt} = 750(0,08)(-0,01) = -0.6$$

Ou seja, a velocidade do sangue está diminuindo a uma taxa de $-0,6$ mm por minuto a cada minuto. O sinal negativo indica uma desaceleração (aceleração negativa), já que isso representa uma taxa negativa de mudança de velocidade.

3.1.2 Derivação Logarítmica

Esta seção destaca outro uso para derivação implícita que é tão legal que recebe seu próprio nome: **derivação logarítmica**. A ideia é a seguinte: se uma função tem muitos produtos e/ou potências, passar o logaritmo de ambos os lados antes de tomarmos a derivada pode facilitar as coisas.

Lembre-se que:

☞ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

☞ $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

Exemplo 3.10

Suponha que $y = x^5(x+1)^7(x+3)^3$. Encontre a derivada $\frac{dy}{dx}$

Solução: Tome o logaritmo de ambos os lados e depois passe a derivada implícita. Então:

$$
\begin{aligned}
y &= x^5(x+1)^7(x+3)^3 \\
\Rightarrow \ln(y) &= \ln(x^5(x+1)^7(x+3)^3) && \text{(logaritmo)} \\
\Rightarrow \ln(y) &= \ln(x^5) + \ln((x+1)^7) + \ln((x+3)^3) \\
\Rightarrow \ln(y) &= 5\ln(x) + 7\ln(x+1) + 3\ln(x+3) \\
\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= 5\frac{1}{x} + 7\frac{1}{x+1} + 3\frac{1}{x+3} && \text{(derivada implícita)} \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{5}{x} + \frac{7}{x+1} + \frac{3}{x+3}\right) \\
&= x^5(x+1)^7(x+3)^3\left(\frac{5}{x} + \frac{7}{x+1} + \frac{3}{x+3}\right)
\end{aligned}
$$

Observe que o último passo elimina o y do lado direito da equação ao substituir o valor inicialmente conhecido de y em termos de x. Geralmente não simplificamos essas expressões.

Exemplo 3.11

Dado $y = \dfrac{x^6(x+2)^4}{(x^2+1)^5}$, encontre y'.

Solução: Tome o logaritmo de ambos os lados e depois passe a derivada implícita. Então:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^6(x+2)^4}{(x^2+1)^5} \\
\Rightarrow \ln(y) &= 6\ln(x) + 4\ln(x+2) - 5\ln(x^2+1) && \text{(logaritmo)} \\
\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{6}{x} + \frac{4}{x+2} - 5\frac{2x}{x^2+1} && \text{(derivada implícita)} \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{6}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{10x}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{x^6(x+2)^4}{(x^2+1)^5}\left(\frac{6}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{10x}{x^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

A diferenciação logarítmica também nos permite tomar a derivada de funções que não poderíamos trabalhar de forma alguma. O próximo exemplo demonstra isso.

Exemplo 3.12

Encontre a derivada de $y = x^x$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
y &= x^x \\
\Rightarrow \ln(y) &= x\ln(x) && \text{(logaritmo)} \\
\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= x\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln(x) && \text{(regra da cadeia e do produto)} \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= y\,(1+\ln(x)) \\
&= x^x\,(1+\ln(x))
\end{aligned}
$$

Obviamente, uma vez que temos a habilidade de tomar derivadas, podemos calcular retas tangentes, resolver problemas relacionados ou qualquer outra coisa que se possa fazer com derivadas.

3.1.3 Exercícios propostos

1 Cada uma das funções abaixo dá a distância como uma função do tempo. Calcule a velocidade e a aceleração.

a) $f(t) = 0,02t^3 + t^2$

b) $g(t) = t \cdot \ln(t)$

c) $h(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$

d) $r(t) = (\sqrt{t}+1)^{3,6}$

2 A altura em metros de uma bola acima do chão é dada pela equação

$$h(t) = 112 + 6t - 5t^2.$$

a) Quão alta no ar está a bola no tempo $t = 0$?

b) A bola está se movendo para cima ou para baixo em $t = 0$?

c) Quando a bola atinge o chão?

d) Dê uma expressão para a velocidade da bola.

e) Qual é a aceleração da bola?

3 A quantidade de água em um tanque no tempo t, em litros, é dada por $A(t) = 0,2t + \sqrt{t}$.

a) A que taxa a água está fluindo para dentro do tanque?

b) O tanque está enchendo ou esvaziando?

c) Em que ponto haverá 100 litros de água no tanque?

4 Dadas as pares de funções, encontre a diferencial indicada.

a) $y = 3x + 5, x = t^2 - 1$. Determine $\dfrac{dy}{dt}$ quando $t = 2$.

b) $y = \ln(x), x = 5t + 4$. Determine $\dfrac{dy}{dt}$ quando $t = 1$.

c) $y = \dfrac{x+1}{x-1}, x = \operatorname{sen}(t)$. Determine $\dfrac{dy}{dt}$ quando $t = \dfrac{\pi}{3}$.

d) $y = 4x - 1, x = t \cdot e^t$. Determine $\dfrac{dy}{dt}$ quando $t = 1$.

5 Suponha que $\dfrac{dy}{dx} = 1,2$, $\dfrac{dx}{dt} = 3,4$ e $\dfrac{dt}{du} = -1,5$. Encontre as seguintes diferenciais:

a) $\dfrac{dy}{dt}$

b) $\dfrac{dy}{du}$

c) $\dfrac{dx}{du}$

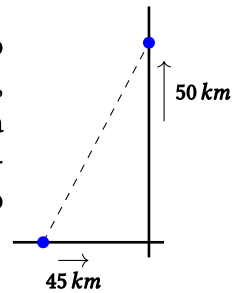
d) $\dfrac{dt}{dy}$

e) $\dfrac{du}{dx}$

f) $\dfrac{du}{dy}$

6 Um carro está saindo de uma interseção para o norte a 50 km/h; outro está vindo do oeste a 45km/h.

Quando o carro que vai para o norte está a 100m da interseção, e o carro que vai para o leste está a 60m da interseção, qual é a velocidade relativa do afastamento dos carros?



7 Um pequeno disco de metal é resfriado com água fria de modo que seu diâmetro está diminuindo em $0,003\,mm$ por segundo. Quão rápido a área de superfície de um lado está diminuindo quando o diâmetro é $20\,mm$?

8 O topo de uma escada de $5\,m$ está deslizando para baixo de uma parede a $1,4\,m$ por segundo. Quão rápido a base da escada está deslizando para longe da parede quando o topo da escada está a $4\,m$ do chão?

9 Uma esquiadora tem um histórico de problemas de coração. Ela toma nitroglicerina para dilatar seus vasos sanguíneos para evitar angina (dor no peito) devido a contração dos vasos. Use a lei de Poiseuille com $k = 555,6$ para encontrar a taxa de mudança da velocidade do sangue quando $R = 0,02\,mm$ e R está mudando a $0,003\,mm$ por minuto. Assuma que r é constante.

10 A massa cerebral de um feto pode ser estimada usando a massa total do feto pela função

$$b = 0,22m^{0,87},$$

onde m é a massa do feto (em gramas) e b é a massa cerebral (em gramas). Suponha que a massa cerebral de um feto de $25g$ está variando a uma taxa de $0,25g$ por dia. Use isso para estimar a taxa de variação da massa total do feto, ou seja, $\frac{dm}{dt}$.

Fonte: *Archives d'Anatomie, d'Histologie et d'Embryologie.*

11 O consumo de energia durante o voo de uma ave em função da sua massa corporal é dado por

$$E = 429m^{-0,35},$$

onde m é a massa corporal da ave (em gramas) e E é o consumo de energia (em calorias por grama por hora). Suponha que a massa de uma ave de 10g está aumentando $0,001\,g$ por hora. Encontre a qual taxa o consumo de energia está variando com respeito ao tempo.

Fonte: *Wildlife Feeding and Nutrition.*

3.2 Máximos, Mínimos e Aplicações

Nesta seção, começaremos a otimização, o processo de encontrar o maior ou menor valor que uma função pode assumir, bem como valores que são maiores (ou menores) do que todos os valores próximos. Como de costume, nosso primeiro passo é definir nossos termos.

Definição 3.2

Se uma função $f(x)$ é definida em um intervalo ou coleção de intervalos I, então o máximo global de $f(x)$ é o maior valor que $f(x)$ assume em qualquer lugar em I.

Definição 3.3

Se uma função $f(x)$ é definida em um intervalo ou coleção de intervalos I, então o mínimo global de $f(x)$ é o menor valor que $f(x)$ assume em qualquer lugar em I.

Definição 3.4

Se uma função $f(x)$ é definida próxima de $x = c$ e, em algum intervalo contendo esse ponto, temos que, para todo valor a nesse intervalo, $f(c) \geqslant f(a)$, então dizemos que $f(x)$ tem um máximo local em $x = c$.

Definição 3.5

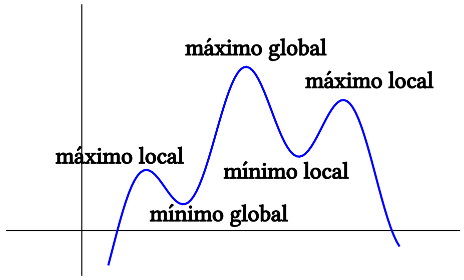
Se uma função $f(x)$ é definida próxima de $x = c$ e, em algum intervalo contendo esse ponto, temos que, para todo valor a nesse intervalo, $f(c) \leqslant f(a)$, então dizemos que $f(x)$ tem um mínimo local em $x = c$.

Usamos o termo *valor extremo* para valores que são máximos ou mínimos. A chave para encontrar extremos é o comportamento da derivada. Note que, em um extremo, a função muda entre crescente e decrescente. Se considerarmos a reta tangente em um ponto extremo, obtemos uma descrição geométrica do comportamento da derivada. Uma reta com uma inclinação 0 é uma reta tangente horizontal. Isso nos diz que extremos podem ocorrer em retas tangentes horizontais.

Proposição 3.5: (Pontos críticos em otimização)

Exceto nas fronteiras de um problema de otimização, os extremos de uma função contínua e diferenciável ocorrem em pontos críticos, ou seja, pontos onde a derivada é igual a zero.

A imagem ao lado mostra exemplos de extremos locais e globais. Tendo dito isso, o outro lugar além dos pontos críticos onde os ótimos podem ocorrer é nas bordas da região onde estamos otimizando. Em geral, ao otimizar uma função contínua e diferenciável, verificamos os pontos críticos e os pontos nas bordas da área que estamos otimizando. O próximo exemplo pede que você otimize uma função quadrática, algo que deve ser fácil, mas pede que você faça isso em um domínio limitado.

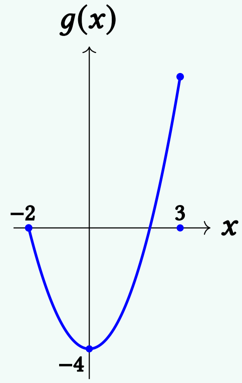


Uma parábola com concavidade para cima tem um mínimo único. Assim como os pontos críticos, também devemos verificar os valores de x em seus pontos inicial e final do intervalo.

Exemplo 3.13

Encontre o máximo e mínimo globais de $g(x) = x^2 - 4$ no intervalo $[-2, 3]$.

Solução: O ponto crítico desta função é fácil: $g'(x) = 2x$. Então $x = 0$ é o valor crítico, e há um ponto crítico em $(0, -4)$. As bordas da área de otimização são $x = -2$ e $x = 3$. Como $g(-2) = 0$ e $g(3) = 5$, temos três pontos candidatos: $(-2, 0)$, $(0, -4)$ e $(3, 5)$. O menor valor de y é -4, fazendo de $(0, -4)$ o ponto onde o mínimo global ocorre, enquanto 5 é o maior valor de y, fazendo de $(3, 5)$ o ponto onde o máximo global ocorre. Confira o gráfico ao lado.

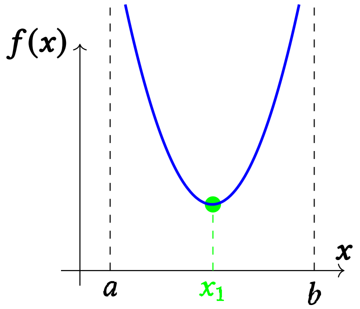


O seguinte resultado resume o que temos até agora.

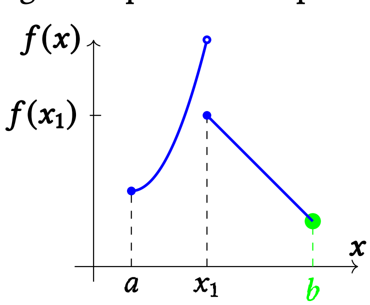
Teorema 3.1 (Teorema do Valor Extremo)

O máximo e mínimo globais de uma função contínua e diferenciável em $[a, b]$ devem ocorrer em pontos críticos (tangências horizontais) ou nas fronteiras do intervalo.

Uma função contínua em um intervalo aberto pode ou não ter um máximo ou mínimo absoluto. Por exemplo, a função na figura (a) tem um mínimo absoluto no intervalo $[a, b]$ em x_1, mas não tem um máximo absoluto. Em vez disso, ela se torna arbitrariamente grande quando x se aproxima de a ou b.



(a)



(b)

Além disso, uma função descontínua em um intervalo fechado pode ou não ter um mínimo ou máximo absoluto. A função na figura (b) tem um mínimo absoluto em $x = b$, mas não tem máximo absoluto. Pode parecer à primeira vista ter um máximo absoluto em x_1, mas observe que $f(x_1)$ tem um valor menor que f em valores de x menores que x_1.

O teorema do Valor Extremo garante a existência de extremos absolutos para uma função contínua em um intervalo fechado. Para encontrar esses extremos, use o seguinte passo-a-passo:

Proposição 3.6: (Encontrando Valores Extremos)

Para encontrar extremos absolutos para uma função f contínua em um intervalo fechado $[a, b]$:

① Encontre todos os valores críticos para f em $[a, b]$.

② Calcule f para todos os pontos críticos em $[a, b]$.

③ Calcule f para as fronteiras a e b do intervalo $[a, b]$.

④ O maior valor encontrado na Etapa ② ou ③ é o máximo absoluto para f em $[a, b]$, e o menor valor encontrado é o mínimo absoluto para f em $[a, b]$.

Exemplo 3.14

Encontre os extremos, se existirem, para a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$.

Solução: Primeiramente, observe que o Teorema do Valor Extremo não se aplica aqui já que o domínio de $f(x)$ é o intervalo aberto $(-\infty, \infty)$ que não possui fronteiras. Começamos encontrando os pontos críticos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \\ 12x(x^2 - x - 2) &= 0 \qquad \text{(12}x\text{ é fator comum)} \\ 12x(x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = -1 \qquad \text{ou} \qquad x = 2$$

Para um intervalo aberto, em vez de avaliar a função nas fronteiras, avaliamos o limite da função nas proximidades das fronteiras. Como o termo positivo x^4 domina os outros termos à medida que x se torna grande, $\lim\limits_{x\to\infty} 13x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 = \infty$. O limite também é ∞ quando x se aproxima de $-\infty$. Como a função pode ser arbitrariamente grande, ela não tem máximo absoluto. O mínimo absoluto, -30, ocorre em $x = 2$.

Em muitos dos problemas com extremos aplicados como a seguir, uma função contínua em um intervalo aberto tem apenas um ponto crítico. Nesse caso, podemos usar o seguinte teorema, que também se aplica a intervalos fechados.

Teorema 3.2 (Teorema do Ponto Crítico)

Suponha que uma função f seja contínua em um intervalo I e que f tenha exatamente um ponto crítico em I, localizado em $x = c$.

- ☞ Se f tiver um máximo relativo em $x = c$, então esse máximo relativo é o máximo absoluto de f no intervalo I.
- ☞ Se f tiver um mínimo relativo em $x = c$, então esse mínimo relativo é o mínimo absoluto de f no intervalo I.

O Teorema do Ponto Crítico não ajuda no exemplo anterior, pois este tinha mais de um ponto crítico no intervalo em consideração. Mas o teorema pode ser útil para alguns casos como veremos a diante.

Nota:

Se um problema solicitar que você maximize uma quantidade e você encontrar um ponto crítico, não presuma automaticamente que o máximo ocorre nele, pois este pode ocorrer em uma fronteira ou pode nem existir!
Um caso infame desse erro ocorreu em um estudo de 1945 sobre projetos de design de aeronaves semelhantes ao bombardeiro Stealth. Ao buscar maximizar o alcance da aeronave (a distância que ela pode voar com um tanque de combustível), os autores do estudo descobriram que um ponto crítico ocorria quando quase todo o volume do avião estava na asa. Eles afirmaram que esse ponto crítico era um máximo. Mas outro engenheiro descobriu posteriormente que esse ponto crítico, de fato, **minimizava** o alcance da aeronave! ***Fonte:*** *Revista Science.*

Exemplo 3.15 (Maximizando um valor)

Encontre dois números não negativos x e y para os quais $2x + y = 30$, tais que xy^2 seja maximizado.

Solução: Começamos entendo o que é pedido: queremos valores $x, y \geqslant 0$, tais que xy^2 seja máximo com a **restrição** de que $2x+y = 30$. Como xy^2 deve ser maximizado, atribuímos uma variável a essa quantidade, digamos,

$$M = xy^2.$$

Por simplicidade, vamos expressar M em termos de apenas uma variável, o que pode ser feito usando a restrição $2x + y = 30$, resolvendo-a para x ou y. Resolvendo em y nos fornece $y = 30 - 2x$.
Tomamos esse valor e substituímos em M para obter

$$\begin{aligned} M &= x(30-2x)^2 \\ &= x(900 - 120x + 4x^2) && \text{(quadrado de } 30 - 2x\text{)} \\ &= 900x - 120x^2 + 4x^3. \end{aligned}$$

Agora olhamos o domínio da função. Devido ao requisito de não negatividade, x deve ser pelo menos 0. Como y também deve ser pelo menos 0, exigimos $30 - 2x \geqslant 0$, ou seja, $x \leqslant 15$. Assim, x está confinado no intervalo $[0, 15]$. Encontramos os pontos críticos para M encontrando $\dfrac{dM}{dx}$ e, em seguida, resolvendo a equação $\dfrac{dM}{dx} = 0$ para x.

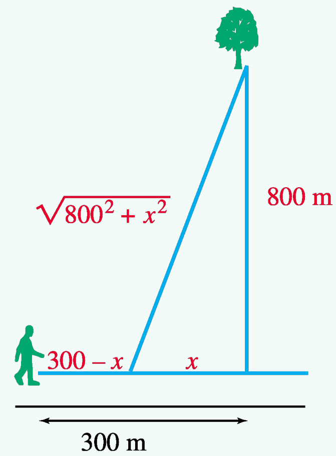
$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= 900 - 240x + 12x^2 = 0 \\ &\Rightarrow 12(75 - 20x + x^2) = 0 && \text{(12 é fator comum)} \\ &\Rightarrow 12(x-5)(x-15) = 0 && \text{(resolvendo a equação do 2° grau)} \\ &\Rightarrow x = 5 \quad \text{ou} \quad x = 15 \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos M para os pontos críticos $x = 5$ e $x = 15$, bem como para $x = 0$, uma fronteira do domínio. A outra fronteira, $x = 15$, já foi incluída. Vemos na tabela que o valor máximo da função ocorre quando $x = 5$. Como $y = 30 - 2x = 30 - 2(5) = 20$, os valores que maximizam xy^2 são $x = 5$ e $y = 20$.

Candidatos a extremo		
x	M	
0	0	
5	2000	← Máximo
15	0	

Exemplo 3.16 (Minimizando tempo)

Um engenheiro competindo em uma trilha a pé deve chegar a uma árvore específica na floresta o mais rápido possível. Ele pode chegar lá caminhando para o leste ao longo de uma vereda por 300 *m* e depois para o norte através da floresta por 800 *m*. Ele pode correr 160 *m* por minuto ao longo da vereda, mas apenas 70 *m* por minuto através da floresta. Correr diretamente pela floresta em direção à árvore minimiza a distância, mas ele estará indo devagar o tempo todo. Ele poderia, em vez disso, correr 300 *m* ao longo da vereda antes de entrar na floresta, maximizando a distância total, mas minimizando o tempo na floresta. Talvez o caminho mais rápido seja uma combinação, como mostrado na figura ao lado. Encontre o caminho que o levará à árvore no menor tempo possível.



Solução: Como no exemplo anterior, o primeiro passo é ler e entender o problema. Se o enunciado do problema não estiver claro para você, volte e releia até entendê-lo antes de prosseguir.
Seja x a distância mostrada na figura, então a distância que ele percorre na vereda é $300 - x$. Pelo teorema de Pitágoras, a distância que ele percorre na floresta é $\sqrt{800^2 + x^2}$.
Agora, observe que estamos tentando minimizar o tempo total, que é a soma do tempo na vereda e do tempo na floresta. Devemos expressar esse tempo como uma função de x. Como tempo $= \dfrac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$, o tempo total é

$$T(x) = \frac{300 - x}{160} + \frac{\sqrt{800^2 + x^2}}{70} \qquad \text{com } 0 \leqslant x \leqslant 300.$$

Assim, encontramos os pontos críticos calculando a derivada e igualando a 0, ou seja:

$$\begin{aligned}
T'(x) = \frac{-1}{160} + \frac{1}{70}\frac{2x}{2\sqrt{800^2 + x^2}} &= 0 && \text{(}2x\text{ vem da Regra da Cadeia)}\\
\Rightarrow \frac{x}{70\sqrt{800^2 + x^2}} &= \frac{1}{160}\\
\Rightarrow 16x &= 7\sqrt{800^2 + x^2} && \text{(Multiplicação cruzada de frações)}\\
\Rightarrow 256x^2 &= 49 \cdot 800^2 + 49x^2 && \text{(Elevando os lados ao quadrado)}\\
\Rightarrow 207x^2 &= 49 \cdot 800^2\\
\Rightarrow x^2 &= \frac{49 \cdot 800^2}{207}\\
\Rightarrow x &= \frac{7 \cdot 800}{\sqrt{207}} \approx 389.
\end{aligned}$$

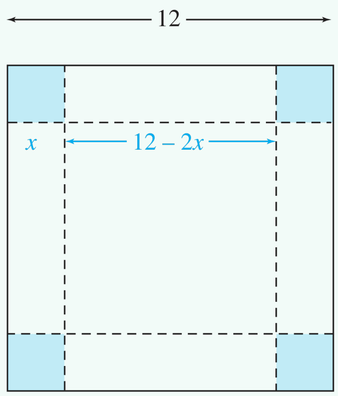
Como 389 não está no intervalo $[0, 300]$, o tempo mínimo deve ocorrer em uma das fronteiras. Agora, concluímos criando uma tabela com $T(x)$ avaliado nas fronteiras. Vemos pela tabela que o tempo é minimizado quando $x = 300$, ou seja, quando o engenheiro corta caminho direto para a árvore.

Candidatos a extremo	
x	$T(x)$
0	13, 30
300	12, 21 ⟵ Mínimo

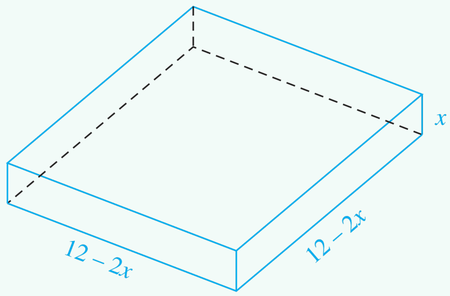
Exemplo 3.17 (Maximizando volume)

Um fornecedor de parafusos deseja criar caixas abertas para os parafusos cortando um quadrado de cada canto de uma peça de metal de 12 *cm* por 12 *cm* e, em seguida, dobrando as laterais. Qual o tamanho do quadrado que deve ser cortado de cada canto para produzir uma caixa de volume máximo?

Solução: Seja x o comprimento de um lado do quadrado cortado de cada canto, conforme mostrado na figura (a). A largura da caixa é $12 - 2x$, com o comprimento também sendo $12 - 2x$.



(a)



(b)

Conforme mostrado na figura (b), a altura da caixa será de $x\,cm$. O volume da caixa é dado pelo produto do comprimento, largura e altura. Neste exemplo, o volume, $V(x)$, depende de x:

$$V(x) = x(12 - 2x)(12 - 2x) = 144x - 48x^2 + 4x^3.$$

Claramente, $0 \leqslant x$, e como nem o comprimento nem a largura podem ser negativos, $0 \leqslant 12 - 2x$, então $x \leqslant 6$. Portanto, o domínio de V é o intervalo $[0, 6]$.
A derivada será $V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$ e, fazendo-a igual a 0, temos

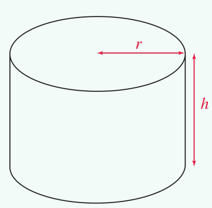
$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 96x + 144 = 0 \\ &\Rightarrow 12(x^2 - 8x + 12) = 0 && \text{(12 é fator comum)} \\ &\Rightarrow 12(x-2)(x-6) = 0 && \text{(resolvendo a equação do 2° grau)} \\ &\Rightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 6. \end{aligned}$$

Calculamos $V(x)$ para x igual a 0, 2 e 6 para encontrar a altura que maximizará o volume. A tabela indica que a caixa terá volume máximo quando $x = 2$ e que o volume máximo será $128\,cm^3$.

Candidatos a extremo		
x	$V(x)$	
0	0	
2	128	⟵ Máximo
6	0	

Exemplo 3.18 (Minimizando área)

Uma empresa de distribuição de milho verde deseja fabricar latas cilíndricas de alumínio com um volume de 1000 cm^3 (1 litro). Quais devem ser o raio e a altura da lata para minimizar a quantidade de alumínio utilizada?



Solução: As duas variáveis neste problema são o raio e a altura da lata, que chamaremos de r e h, como na figura. Minimizar a quantidade de alumínio utilizada requer minimizar a área da superfície da lata, que denotaremos como S.

A área da superfície consiste em uma parte superior e uma parte inferior, cada uma das quais é um círculo com uma área πr^2, mais a lateral. Se a lateral fosse cortada verticalmente e desenrolada, formaria um retângulo com altura h e largura igual circunferência da lata, que é $2\pi r$. Assim, a área da superfície é dada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

O lado direito da equação envolve duas variáveis. Precisamos obter uma função de uma única variável. Podemos fazer isso usando as informações sobre o volume da lata: $V = \pi r^2 h = 1000$. (Aqui, usamos a fórmula para o volume de um cilindro.) Resolvendo isso para h, temos $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$. (Escolhemos h aqui porque resolver para r envolveria uma raiz quadrada e uma função mais complicada.) Agora substituímos essa expressão para h na equação para S para obter

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Não há restrições para r além de ser um número positivo, portanto, o domínio de S é $(0, \infty)$. Encontramos os pontos críticos para S calculando $\dfrac{dS}{dr}$ e resolvendo a equação $\dfrac{dS}{dr} = 0$ para r.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \\
&\Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \\
&\Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \\
&\Rightarrow r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5,419 \text{ centímetros}
\end{aligned}$$

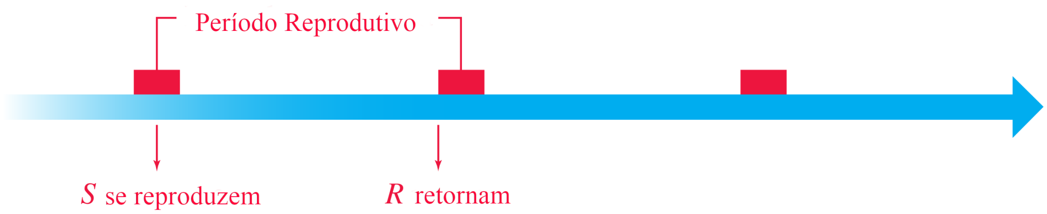
Substituindo este valor na equação para h encontramos $h = \dfrac{1000}{\pi \cdot (5,419)^2} \approx 10,84$ centímetros. Note que a altura tem o dobro do raio. Existem várias maneiras de verificar que de fato encontramos o mínimo. Como existe apenas um número crítico, podemos considerar o Teorema do Ponto Crítico para garantir que este mínimo é absoluto.

Observe que, se o exemplo anterior tivesse solicitado a altura e o raio que maximizam a quantidade de alumínio utilizada, o problema não teria resposta. Não há máximo para uma função que pode se tornar arbitrariamente grande.

3.2.1 Captura Máxima Sustentável

Para a maioria dos seres vivos, a reprodução é sazonal — ela só pode ocorrer em determinadas épocas do ano. As grandes baleias, por exemplo, reproduzem-se a cada dois anos durante um período relativamente curto de cerca de dois meses. O eixo temporal da figura abaixo mostra os períodos reprodutivos.

Fonte: *Mathematics for the Biosciences.*

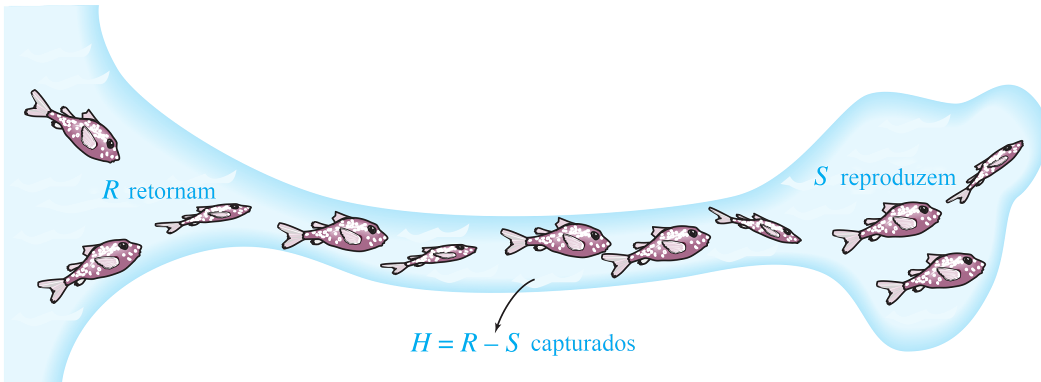


Seja S = número de adultos presentes durante o período reprodutivo e seja R = número de adultos que retornam na próxima estação para se reproduzir. Se encontrarmos uma relação entre R e S, $R = f(S)$, então formamos uma função **parente-prole**. Essas funções são notoriamente difíceis de desenvolver devido à dificuldade de obter contagens precisas e às muitas hipóteses que podem ser feitas sobre os estágios da vida. Vamos simplesmente supor que a função f assume várias formas.

Se $R > S$, podemos presumivelmente capturar

$$H = R - S = f(S) - S$$

indivíduos, deixando S para se reproduzir. Na próxima temporada, $R = f(S)$ retornarão e o processo de captura poderá ser repetido, conforme mostrado na figura abaixo.



Seja S_0 o número de reprodutores que permitirá a maior captura possível sem ameaçar a população com extinção. Então, $H(S_0)$ é chamado de **captura máxima sustentável**.

Exemplo 3.19

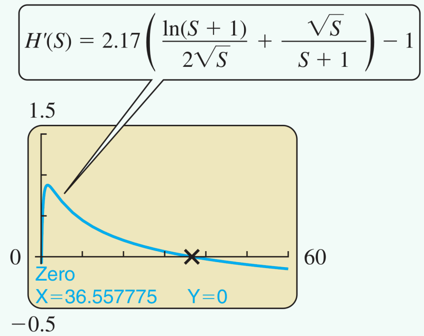
O tapiti (*Sylvilagus brasiliensis*), também conhecido como candimba ou coelho-do-mato, é a única espécie de coelho nativa do Brasil, cuja carne é muito apreciada. Suponha que a função parente-prole para tapitis seja $f(S) = 2,17\ln(S+1)\sqrt{S}$, onde S é medido em milhares de tapitis. Encontre S_0 e a captura máxima sustentável, $H(S_0)$.

Solução: **S_0 é o valor de S que maximiza H. Como $H(S) = f(S) - S = 2,17\ln(S+1)\sqrt{S} - S$, então temos**

$$H'(S) = 2,17\left(\frac{\ln(S+1)}{2\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S}}{S+1}\right) - 1$$

Agora queremos encontrar S tal que essa derivada seja 0.

$$0 = 2,17\left(\frac{\ln(S+1)}{2\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S}}{S+1}\right) - 1$$



Esta equação não pode ser resolvida analiticamente, por isso vamos representar graficamente $H'(S)$ com uma ferramenta numérica ou outra solução computacional viável para encontrar quaisquer valores S em que $H'(S)$ seja 0. O gráfico com o valor em que $H'(S)$ é 0 é mostrado na figura ao lado. A partir do gráfico, vemos que $H'(S) = 0$ quando $S = 36,557775$, portanto, o número de coelhos necessários para sustentar a população é de cerca de 36.600. Um gráfico de H mostrará que este é um máximo. A partir do gráfico, usando a capacidade da calculadora, descobrimos que a captura é $H(36,557775) \approx 11,015504$.

Esses resultados indicam que, após uma temporada reprodutiva, uma população de 36.600 tapitis terá aumentado para 47.600. Desses, 11.000 podem ser caçados, deixando 36.600 para regenerar a população. Qualquer captura superior a 11.000 ameaçará o futuro da população de tapitis, enquanto uma caça inferior a 11.000 permitirá que a população cresça a cada temporada.
Portanto, 11.000 é a captura máxima sustentável.

3.2.2 Exercícios propostos

1 Nos itens abaixo, use as etapas mostradas nos exemplos para encontrar números x e y não negativos que satisfaçam os requisitos dados. Dê o valor ótimo da expressão indicada.

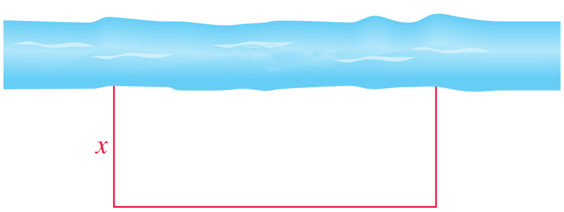
a) $x + y = 180$ e o produto $P = xy$ é o maior possível.

b) $x + y = 140$ e a soma dos quadrados de x e y é minimizada.

c) $x + y = 90$ e x^2y é maximizada.

d) $x + y = 105$ e xy^2 é maximizada.

2 O proprietário de um acampamento tem 1400 m de cerca. Ele quer cercar um lote retangular na margem de um rio, sem necessidade de cerca ao longo do rio. (Veja o esboço.) Seja x a largura do campo.



a) Escreva uma expressão para o comprimento do lote.

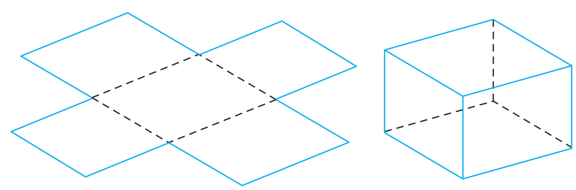
b) Encontre a área do lote (área = comprimento × largura).

c) Encontre o valor de x que leva à área máxima.

d) Encontre a área máxima.

3 Encontre as dimensões do lote retangular de área máxima que pode ser feito com 300 m de cerca. (Este lote tem quatro lados.)

4 Um produtor de uvas precisa projetar uma caixa aberta com base quadrada. A caixa deve ter capacidade para 320 cm^3. Determine as dimensões da caixa que podem ser construídas com a quantidade mínima de materiais. (Veja a figura.)



5 Epidemiologistas descobriram uma nova doença transmissível que se alastra rapidamente em Formosa-GO. Eles estimam que t dias após a doença ter sido observada pela primeira vez na comunidade, a porcentagem da população infectada pela doença é aproximada por

$$p(t) = \frac{20t^3 - t^4}{1000}$$

a) Após quantos dias a porcentagem da população infectada atinge o máximo?

b) Qual é a porcentagem máxima da população infectada?

6 Encontre a captura máxima sustentável para populações com as funções parente-prole:

a) $f(S) = 12S^{\frac{1}{4}}$

b) $f(S) = \dfrac{25S}{S + 2}$

Capítulo 4

Integrais

Até este ponto do cálculo, você resolveu problemas como

$$f(x) = x^5; \text{ encontre } f'(x).$$

Neste capítulo, você será solicitado a resolver problemas que são o inverso desses, ou seja, problemas da forma

$$f'(x) = 5x^4; \text{ encontre } f(x).$$

A derivada e suas aplicações, que você estudou nos capítulos anteriores, fazem parte do que é chamado de *Cálculo Diferencial*. Os próximos dois capítulos são dedicados ao outro ramo principal do cálculo, o *Cálculo Integral*. As integrais têm muitas aplicações: encontrar áreas; determinar os comprimentos de trajetórias curvas; resolver problemas complicados de probabilidade; e calcular a localização de um objeto (como a distância de um ônibus espacial da Terra) quando sua velocidade e posição inicial são conhecidas. O Teorema Fundamental do Cálculo, apresentado mais adiante neste capítulo, revelará uma conexão surpreendentemente próxima entre o cálculo diferencial e o integral.

4.1 Antiderivadas

As funções utilizadas nas aplicações dos capítulos anteriores forneceram informações sobre o valor total de uma quantidade, como área, volume, tempo, temperatura ou distância. As derivadas dessas funções forneceram informações sobre a taxa de variação dessas quantidades e nos permitiram responder a perguntas importantes sobre os extremos das funções. Nem sempre é possível encontrar funções prontas que forneçam informações sobre a quantidade total de uma unidade de medida, mas muitas vezes é possível coletar dados suficientes para criar uma função que forneça a *taxa de variação* de uma quantidade. Sabemos que as derivadas fornecem a taxa de variação quando a quantidade total é conhecida. O inverso de encontrar uma derivada é conhecido como *antiderivação*. O objetivo é encontrar uma antiderivada, também chamada de **primitiva**, dada da seguinte forma.

Definição 4.1

Se $F'(x) = f(x)$, então $F(x)$ é uma *antiderivada* ou *primitiva* de $f(x)$.

Exemplo 4.1

☞ Se $F(x) = 10x$, então $F'(x) = 10$, ou seja, $F(x) = 10x$ é uma primitiva de $f(x) = 10$.

☞ Para $F(x) = x^2$, $F'(x) = 2x$, fazendo $F(x) = x^2$ ser uma primitiva de $f(x) = 2x$.

Exemplo 4.2

Encontre uma primitiva de $f(x) = 5x^4$.

Solução: Para encontrar uma função $F(x)$ cuja derivada é $5x^4$, faça a reversão. Lembre-se que a derivada de x^n é nx^{n-1}. Se

$$nx^{n-1} = 5x^4,$$

então $n - 1 = 4$ e $n = 5$, ou seja, x^5 é uma primitiva de $5x^4$.

Exemplo 4.3

Suponha que uma população (em milhões) esteja crescendo a uma taxa dada por $f(x) = e^x$, onde x é o tempo em anos a partir de uma data inicial. Encontre uma função que forneça a população no tempo x.

Solução: Seja $F(x)$ a função da população. Então,

$$f(x) = F'(x) = e^x.$$

A derivada da função definida por $F(x) = e^x$ é $F'(x) = e^x$, portanto, uma possível função de população com a taxa de crescimento dado é $F(x) = e^x$.