



Universidade Federal de São Paulo  
Instituto de Ciência e Tecnologia

# Sincronização em Redes Neurais Celulares

Antonio Edimar de Melo Junior



$$C(k, l) \in N_r(i, j)$$

27 de Abril de 2021

## Redes Acopladas

Dinâmica Equivariante

## Sistemas Dinâmicos Reticulados

## Aplicações

Central Pattern Generator - CPG

Sistemas de Giroscópios Acoplados

Dispositivos de Colheita de Energia

Dispositivos de Tempo de Alta Precisão

Referências Bibliográficas

A **dinâmica equivariante** examina como as simetrias de uma equação diferencial afetam o comportamento de suas soluções.[1, 4]

Por simplicidade, assuma que o *espaço de fase* de um sistema dinâmico é  $X = \mathbb{R}^k$  e considere uma EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x \in X, \quad (1)$$

onde  $f : X \rightarrow X$  é uma função suave (campo vetorial).

Simetrias surgem quando um grupo  $\Gamma$  de transformações lineares age em  $X$ . Exigimos que todos os elementos de  $\Gamma$  associem soluções da EDO a outras soluções. Isso é equivalente a  $f$  ser  $\Gamma$ -equivariante, ou seja,

$$f(\gamma x) = \gamma f(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in X \quad (2)$$

## Exemplo

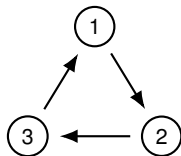
Considere o sistema de equações para 3 neurônios de Fitzhugh-Nagumo acoplados:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_1(a - v_1)(v_1 - 1) - w_1 - cv_2 & \dot{w}_1 &= bv_1 - \gamma w_1 \\ \dot{v}_2 &= v_2(a - v_2)(v_2 - 1) - w_2 - cv_3 & \dot{w}_2 &= bv_2 - \gamma w_2 \\ \dot{v}_3 &= v_3(a - v_3)(v_3 - 1) - w_3 - cv_1 & \dot{w}_3 &= bv_3 - \gamma w_3\end{aligned}\tag{3}$$

onde  $v_i$  é o potencial de membrana da célula  $i$ ,  $w_i$  é um substituto para uma corrente iônica e  $a, b, \gamma$  são parâmetros constantes com  $0 < a < 1$ ,  $b < 0$ ,  $\gamma > 0$ .

O grupo de simetria é  $\mathbb{Z}_3$  gerado pelo 3-ciclo (123) atuando nos pares  $(v_j, w_j)$ .

Podemos pensar num **diagrama de rede** para o sistema (3) que represente os acoplamentos como mostrado abaixo.



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_3),$$

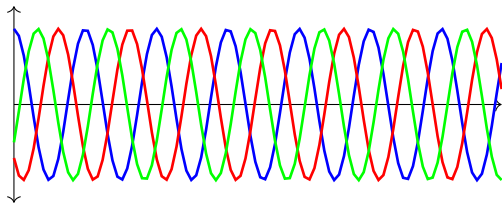
$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_1),$$

onde os círculos representam células e setas representam os acoplamentos das variáveis nas equações. Como essas entram nas equações do mesmo modo para cada  $i$  sujeita à permutação cíclica, as setas exibem o mesmo tipo assim como as células por terem o mesmo *espaço de estados*.

Acima, fazemos  $x_j = (v_j, w_j)$  para exibir a forma geral de outros sistemas com essa configuração.

Ressaltamos que, quando  $a = b = \gamma = 0.5$  e  $c = 2$ , o sistema (3) tem um estado periódico estável em que as células sucessivas têm um terço de um período fora de fase. Abaixo mostramos o padrão para  $v_j$ ; o mesmo padrão ocorre para  $w_j$ . Este estado é uma *onda rotativa discreta* que exhibe simetria espaço-temporal induzida pela ação de  $\mathbb{Z}_3$ :

$$x_2(t) = x_1(t - T/3) \quad x_3(t) = x_1(t - 2T/3)$$



Com as devidas adequações, muitos resultados de dinâmica equivariante se aplicam a redes simétricas. Contudo, poucos modelos em ciências aplicadas exibem simetrias globais.

Em 2002, Marcus Pivato descreveu uma rede de 16 células que tinha um estado periódico em que os nós foram particionados em 4 subconjuntos de 4 nós. [7]

As células em cada partição eram síncronas enquanto células em partições distintas apresentavam a mesma dinâmica a menos de um deslocamento de fase múltiplo de  $1/4$  do período. Tratava-se de uma onda rotativa induzida por  $\mathbb{Z}_4$ , exceto pelo fato da rede **não possuir** simetria  $\mathbb{Z}_4$ .

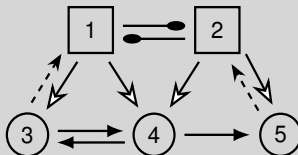
Por volta de 2003, Marty Golubitsky, Ian Stewart e demais colaboradores propuseram uma teoria para estudar esse tipo de rede partindo da noção de simetria local, estabelecendo o **formalismo via grupoides**. [3, 5]

Matematicamente, uma rede é representada por um grafo direcionado cujos nós e arestas são classificados de acordo com rótulos ou “tipos” associados. Os nós (ou “células”) de uma (direcionada e rotulada) rede  $\mathcal{G}$  representam sistemas dinâmicos (variáveis de estado) e as arestas (“setas”) representam acoplamentos, interações entre essas variáveis.



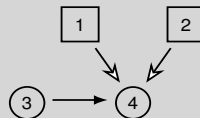
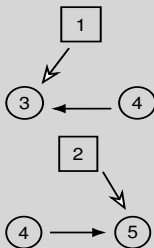
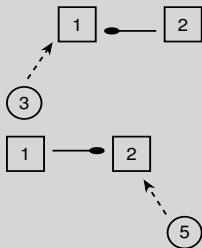
## Exemplo

Seja  $\mathcal{G}$  a rede exibida abaixo:



Vemos que as células 1 e 2 são isomórficas por entradas, assim como as células 3 e 5. Porém, as células 1 e 3 não são isomórficas por entradas. Apesar de ambas receberem duas entradas, os tipos de seta são diferentes.

## Exemplo de conjunto de entradas



Da esquerda para a direita:  $I(1)$ ,  $I(3)$ ,  $I(4)$ ,  $I(2)$ ,  $I(5)$ .

Estritamente, as setas constituem o conjunto de entradas mas é conveniente também mostrar as células da cabeça e cauda delas.

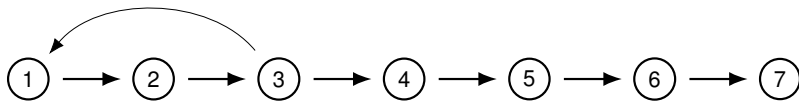
Veremos agora como a sincronia se manifesta em redes.

Uma **polidiagonal** é um subespaço

$$\Delta = \{x \mid x_c = x_d \text{ para alguns subconjuntos de células}\}$$

Um **subespaço de sincronia** é uma polidiagonal fluxo-invariante.

Considere a seguinte rede do tipo “alimentação direta” (feed-forward) com suas funções admissíveis:



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$

$$\dot{x}_4 = f(x_4, x_3),$$

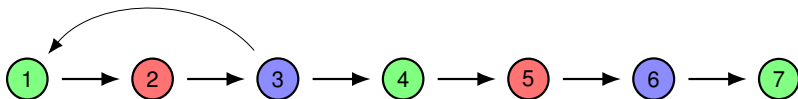
$$\dot{x}_5 = f(x_5, x_4),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

Podemos particionar essa rede usando **colorações** onde  $\Delta = \{x \mid x_1 = x_4 = x_7; x_2 = x_5; x_3 = x_6\}$  é fluxo-invariante.

Considere a seguinte rede do tipo “alimentação direta” (feed-forward) com suas funções admissíveis:



$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_3),$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2, x_1),$$

$$\dot{x}_3 = f(x_3, x_2),$$

$$\dot{x}_4 = f(x_4, x_3),$$

$$\dot{x}_5 = f(x_5, x_4),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

$$\dot{x}_7 = f(x_7, x_6),$$

Podemos particionar essa rede usando **colorações** onde  $\Delta = \{x \mid x_1 = x_4 = x_7; x_2 = x_5; x_3 = x_6\}$  é fluxo-invariante.

## Definição (coloração)

Uma *coloração* de uma rede  $\mathcal{G}$  é um mapa

$$\kappa : \mathcal{C} \rightarrow K$$

onde  $K$  é um conjunto cujos elementos são chamados *cores*.

Dizemos que  $c$  e  $d$  *tem a mesma cor* se  $\kappa(c) = \kappa(d)$  e escrevemos  $c \sim_{\kappa} d$  (equivalência por cores).

Uma coloração  $\kappa$  é *balanceada* se, sempre que  $c$  e  $d$  tem a mesma cor, então existe um isomorfismo de entradas  $\beta : I(c) \rightarrow I(d)$  tal que  $i$  e  $\beta(i)$  têm a mesma cor para todo  $i \in \mathcal{T}(I(i))$ .

Na prática, uma coloração é balanceada se existe um isomorfismo de entradas que preserva cores de quaisquer duas células de mesma cor. Como células da mesma cor devem ser equivalentes por entradas, uma coloração balanceada é um refinamento da equivalência de entradas.

A *polidiagonal* definida por uma coloração  $\kappa$  de  $\mathcal{G}$  é o espaço

$$\Delta_{\kappa} = \{x \mid \kappa(c) = \kappa(d) \implies x_c = x_d\}$$

Ou seja, células da mesma cor são síncronas para  $x \in \Delta_{\kappa}$ .

## Teorema

Uma polidiagonal  $\Delta_{\kappa}$  é invariante para toda função admissível se, e somente se,  $\kappa$  é balanceada.

## Definição

Um *reticulado*  $n$ -dimensional é um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  da forma

$$\mathcal{L} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\},$$

onde  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é um conjunto de vetores linearmente independentes em  $\mathbb{R}^n$  chamados de *geradores* do reticulado  $\mathcal{L}$ .

Observe que  $\mathcal{L}$  é um subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$ .



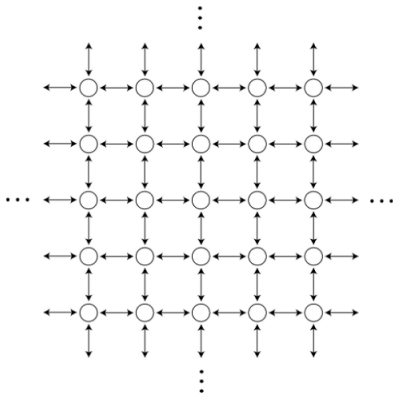
## Definição

Um *sistema dinâmico reticulado*  $n$ -dimensional é um sistema de EDOs associado com um reticulado  $n$ -dimensional  $\mathcal{L}$  tal que

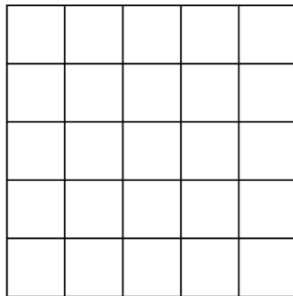
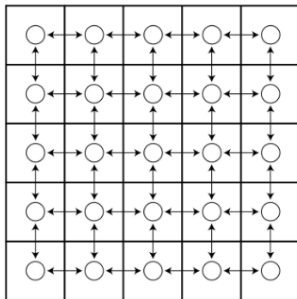
$$\dot{x}_c = f(x_c, x_{I(c)}) \quad c \in \mathcal{L},$$

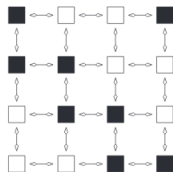
onde  $x_c \in \mathbb{R}^k$ ,  $I(c) = (c_1, \dots, c_\ell)$ ,  $x_{I(c)} = (x_{c_1}, \dots, x_{c_\ell}) \in \mathbb{R}^{k\ell}$  e a função  $f : \mathbb{R}^{k(\ell+1)} \rightarrow \mathbb{R}^k$  é suave e invariante por todas as permutações de variáveis que levam cada classe de vizinhos de  $c$  em si próprio.

Fazendo  $\mathcal{L} \cong \mathbb{Z}^2$ , podemos visualizar um SDR como

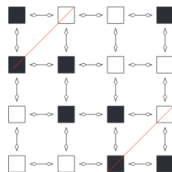


Considerando uma região finita de um SDR, temos uma rede neural celular (RNC).

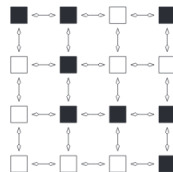




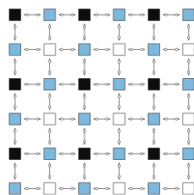
(a)



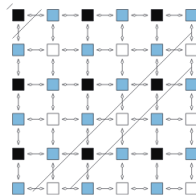
(b)



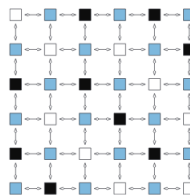
(c)



(a)

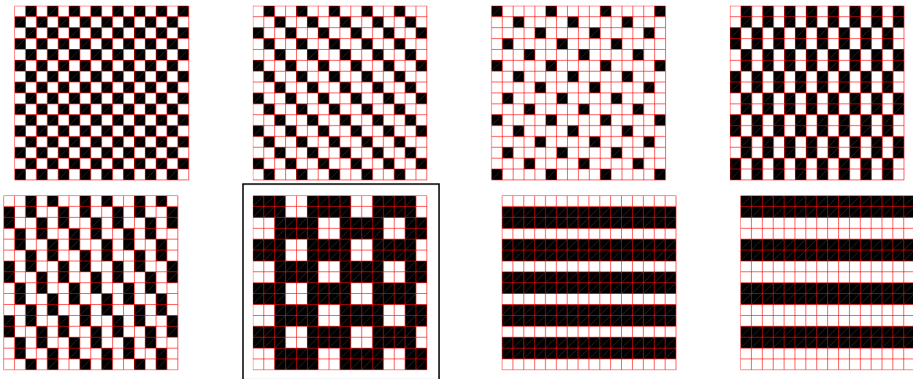


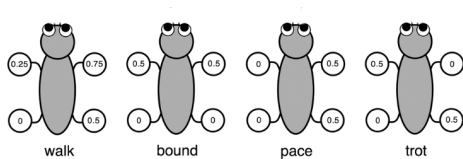
(b)



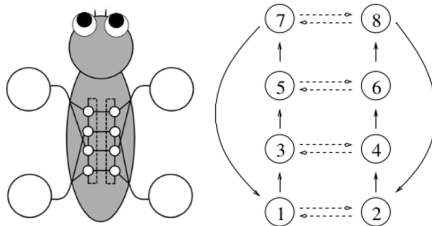
(c)

Wang e Golubitsky [8] listam vários padrões para duas cores.

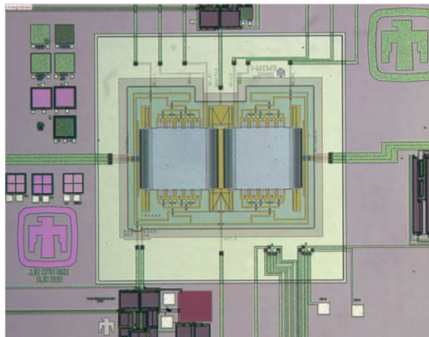
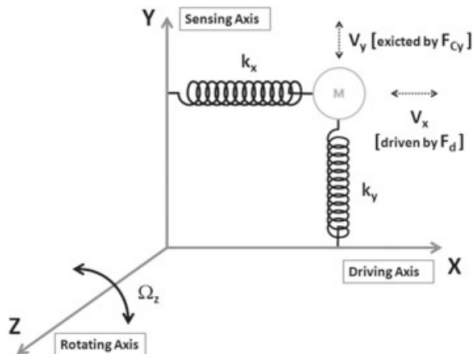


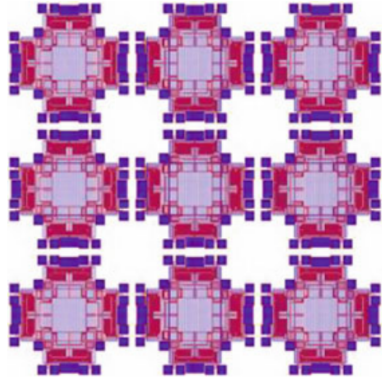
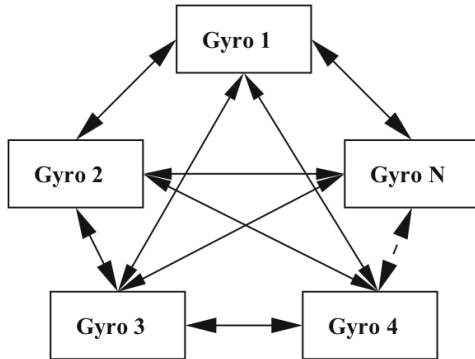


(a)

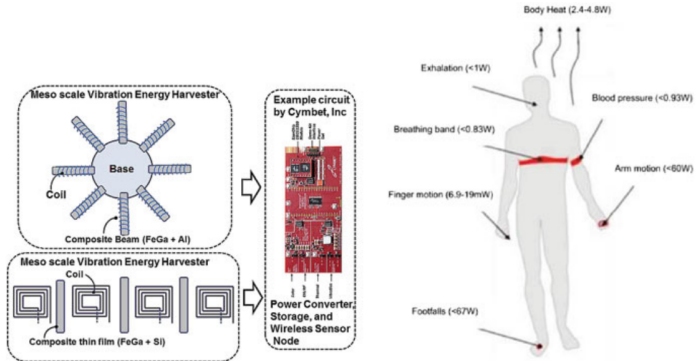


(b)

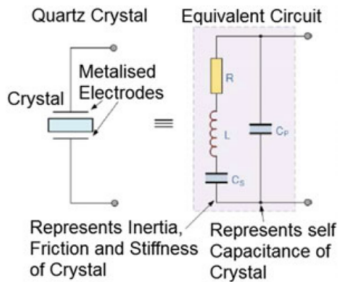
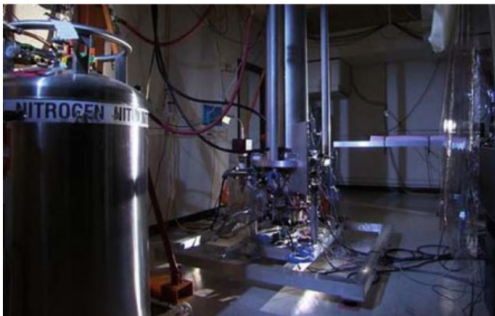








**Fig. 1.27** (Left) Schematic of network implementation of a coupled energy harvester device. (Right) One of many applications of energy harvesters includes health monitoring devices



- [1] F. Antoneli, I. Stewart. *Symmetry and synchrony in coupled cell networks 1: Group networks*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 16, No. 3 (2006), 559–577.
- [2] F. Antoneli, A.P.S. Dias, M. Golubitsky, Y. Wang. Synchrony in lattice differential equations. In: Some Topics In Industrial and Applied Mathematics. (R. Jeltsch, T. Li, and I. Sloan, eds.) Contemporary Applied Mathematics Series 8 World Scientific Publ. Co., 2007.
- [3] M. Golubitsky, I. Stewart. *Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism*. Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006) 305–364.
- [4] M. Golubitsky, I. Stewart, and D. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Vol. 2.*, Appl. Math. Sci. 69, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [5] M. Golubitsky, I. Stewart, and A. Török. *Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 4(1) (2005) 78–100.

- [6] A. Melo. Redes de sistemas dinâmicos acoplados com estrutura gradiente ou hamiltoniana. Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP, 2020.
- [7] I. Stewart, M. Golubitsky, M. Pivato. *Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2 no. 4 (2003) 609–646.
- [8] Y. Wang, M. Golubitsky. Two-color patterns of synchrony in lattice dynamical systems. Nonlinearity 18 (2005) 631–657.

$C_{1,1}$  $C_{1,m}$ 

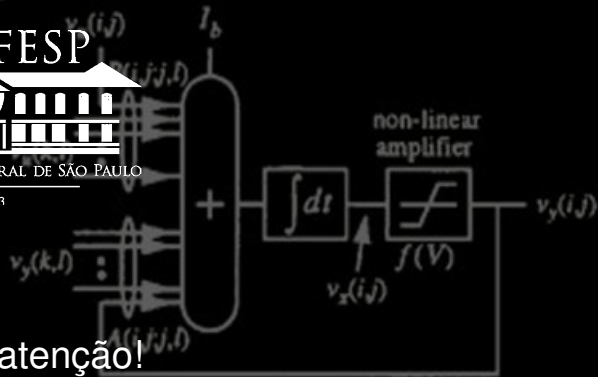
UNIFESP



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

1933

Grato pela atenção!

 $C_{n,1}$  $C_{n,m}$  $C(k,l) \in N_r(i,j)$