Universidade Estadual de Goiás
Câmpus Nordeste
UnU - Posse

Curso: Sistemas para Internet	Ano/Período: 2025/1	Bimestre: 2	Data: 14/06/2025
Disciplina: Fundamentos de Matemática para Computação		Valor: 6,0	Prof.: Antonio Melo
Aluno(a):		Menção obtida ____,____	________ Visto do Aluno(a)

SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
UEG - CÂMPUS POSSE

AVALIAÇÃO BIMESTRAL — Sequências, Somatórios e Contagem

1 Uma urna contém 10 bolas de pingue-pongue, numeradas de 1 a 10. Quatro bolas são retiradas da urna em sequência, e os números nas bolas são gravados. Quantas maneiras existem de isso ser feito se:

a) cada bola é recolocada na urna antes da próxima ser retirada.

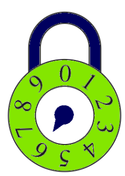
Como cada bola é recolocada na urna antes da próxima ser retirada, sempre teremos 10 bolas disponíveis, ou seja, para retirarmos 4 delas, isso pode ser feito de $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ maneiras.

b) as bolas são retiradas e não são devolvidas à urna.

Aqui temos um exemplo clássico de arranjo mas podemos usar o Princípio Multiplicativo como antes: para a primeira bola, temos 10 opções, 9 para a segunda, 8 para a terceira e 7 para a quarta. Portanto, isso pode ser feito de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ maneiras.

(* Repare que sortear as bolas na sequência 1, 2, 3 ,4 é diferente de sortear as bolas 4, 3, 2, 1, mesmo sendo os mesmos números. Como tratamos em sala, aqui a ordem conta, por isso seria errado usar a fórmula da combinação como muitos fizeram nessa questão.)

2 Um cadeado tem os dígitos de 0 a 9 dispostos em um círculo na sua frente. Uma combinação para esse cadeado tem quatro dígitos. Por causa dos mecanismos internos da fechadura, nenhum par de números consecutivos na combinação pode ser o mesmo ou adjacentes na frente. Por exemplo, 0-2-7-1 é uma combinação válida, mas nem 0-4-4-7 (dígito repetido 4) nem 3-0-9-5 (dígitos adjacentes 0-9) são permitidos.



Quantas combinações são possíveis nesse cadeado?

Aqui temos o Princípio Multiplicativo com restrições: temos que excluir da contagem o número usado e seu adjacente. Dessa forma, para o primeiro dígito temos 10 opções, 8 para o segundo pois temos que excluir o primeiro e seu adjacente, 8 para o terceiro pois temos que excluir o segundo e seu adjacente e 9 para o quarto dígito pois, agora, temos que excluir apenas o terceiro já o último dígito não terá adjacente. Portanto, isso pode ser feito de $10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 = 5760$ maneiras.

3 Os estados de Califórnia, Arizona, Novo México, Utah e Nevada enviaram cada um grupo de 3 representantes para a conferência anual dos Estados do Sudoeste americano. Deve-se formar uma subcomissão de 5 pessoas para discutir o problema da água.

a) Quantas subcomissões podem ser formadas?

Aqui muitos usaram permutação quando na verdade temos uma combinação: de um conjunto com n indivíduos queremos escolher um **subconjunto** com k deles (usei o termo subcomissão para deixar isso mais óbvio mas parece que não adiantou muito).

Temos ao todo 15 representantes e queremos escolher 5 deles, ou seja,

$$C_5^{15} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3003$$

b) Quantas subcomissões podem ser formadas sem representantes do Novo México?

Excluindo o Novo México, termos agora 12 representantes e queremos escolher 5 deles, ou seja,

$$C_5^{12} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 792$$

c) Quantas subcomissões podem ser formadas com exatamente 1 representante do Novo México?

Agora, fixamos um representante do Novo México, para o qual há 3 opções e teremos agora 12 representantes dos outros estados dos quais queremos escolher 4 deles, ou seja,

$$3 \cdot C_4^{12} = 3 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1485$$

4 Sobre o Binômio de Newton:

a) Escreva a fórmula para o termo geral. $T_k = C_k^n \cdot a^{n-k} b^k$ com $0 \leq k \leq n$.

b) Use sua fórmula para calcular o oitavo termo da expansão de $(2+x)^{11}$.

Como o primeiro termo na expansão começa com $k = 0$, o oitavo termo terá $k = 7$. Com $n = 11$, $a = 2$ e $b = x$, temos

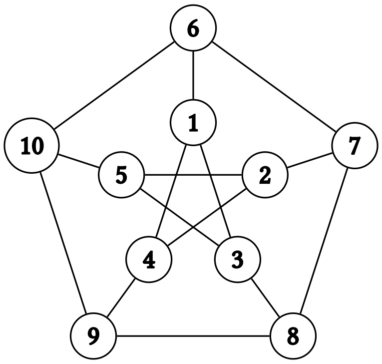
$$T_7 = C_7^{11} \cdot 2^4 x^7 = 330 \cdot 16x^7 = 5280x^7.$$

5 Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{k}{k+2} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} = \frac{126}{60} = \frac{21}{10} = 2,1.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{2^{k-1}}{k} = \frac{2^0}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \frac{2^4}{5} + \frac{2^5}{6} = 4 + \frac{296}{30} \approx 13,8667.$

6 O desenho abaixo ilustra o *grafo de Petersen*. Ele serve como exemplo e contraexemplo útil para muitos problemas da Teoria dos Grafos. O grafo de Petersen recebeu o nome de Julius Petersen, que em 1898 o construiu para ser o menor grafo cúbico sem ponte e sem coloração de três arestas. Escreva a matriz de adjacência desse grafo.



$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Desafio (1 ponto extra)

Os *números de Fibonacci* seguem a expressão recursiva $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Na formulação original, o termo $F(n-1)$ representa o número de pares de coelhos presentes no mês anterior. O termo $F(n-2)$ representa o número de novos pares de coelhos, que é igual ao número de pares de coelhos presentes dois meses atrás. Portanto, a soma desses dois termos é o número total de pares de coelhos presentes no mês n, o mês corrente. Contudo, essa formulação assume que os coelhos vivem para sempre. A seguinte modificação leva em conta os coelhos que morrem:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \le 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) - F(n-8) & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

a) Nessa modificação, por quanto tempo vivem os coelhos?

No modelo, subtraímos $F(n-8)$, ou seja, os coelhos nascidos há 8 meses morrem naquele mês. Logo, a longevidade dos coelhos é de 8 meses.

b) Calcule $F(12)$ com a modificação.

$F(0) = 0,$

$F(1) = 1,$

$F(2) = 1,$

$F(3) = 1 + 1 - 0 = 2,$

$F(4) = 2 + 1 - 0 = 3,$

$F(5) = 3 + 2 - 0 = 5,$

$F(6) = 5 + 3 - 0 = 8,$

$F(7) = 8 + 5 - 0 = 13,$

$F(8) = 13 + 8 - 0 = 21,$

$F(9) = 21 + 13 - 1 = 33,$

$F(10) = 33 + 21 - 1 = 53,$

$F(11) = 53 + 33 - 2 = 84,$

$F(12) = 84 + 53 - 3 = 134.$

(Obs.: Este é um desafio e como tal, a pontuação será atribuída apenas com solução correta e minimamente explicada.)