

# Problème du $p$ -centre avec contraintes de capacité, stratification et gestion de pannes

CARPENTIER Antonin, BRISOUX-DEVENDEVILLE Laure,  
LUCET Corinne, SÁ SHIBASAKI Rui, CHERIF Sami

27 février 2025

# ROADEF

.....  
SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE  
ET D'AIDE À LA DÉCISION

# Description du problème

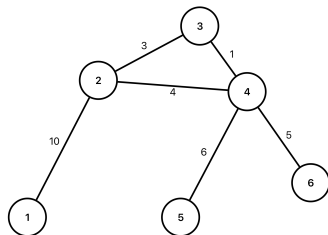
## Problème d'optimisation NP-Difficile

Soit un graphe  $G = (N, E)$  où :

- ▶  $N$  est l'ensemble des nœuds (des villes)
- ▶  $E$  est l'ensemble des arêtes pondérées (des routes)

Au maximum  $p$  centres (unités mobiles de soin) à placer dans  $G$ , avec  $P$  l'ensemble des centres placés.

- ▶  $N$  est aussi l'ensemble des emplacements candidats pour les centres

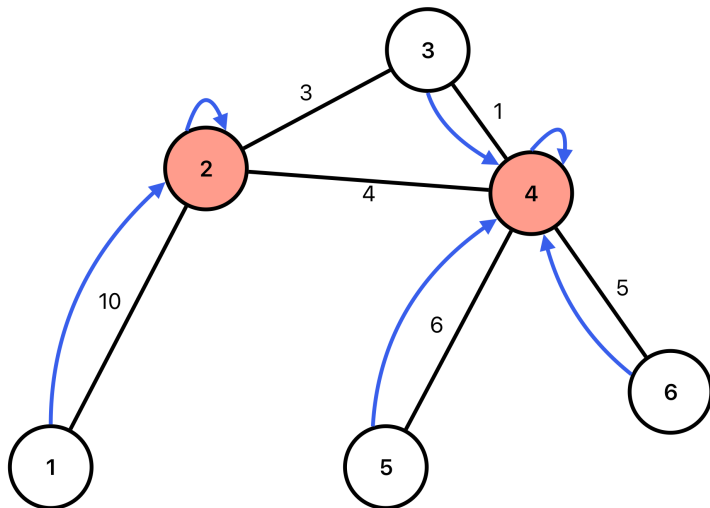


## Problème du $p$ -centre

Placer  $p$  centres dans  $G$  en minimisant la distance maximale entre les villes et leur centre le plus proche

$$\min_{\substack{P \subseteq N \\ |P|=p}} \max_{i \in N} \min_{j \in P} d_{ij}$$

## Description du problème



Plusieurs variantes du problème existent :

- ▶ Ajout de  $p$  centres avec  $q$  centres déjà existants
- ▶ Prise en compte de paramètres incertains
- ▶ Ajout de contraintes de capacité
- ▶ Stratification du problème
- ▶ Gestion de pannes
- ▶ ...

Plusieurs variantes du problème existent :

- ▶ Ajout de  $p$  centres avec  $q$  centres déjà existants
- ▶ Prise en compte de paramètres incertains
- ▶ Ajout de contraintes de capacité
- ▶ Stratification du problème
- ▶ Gestion de pannes
- ▶ ...

**Combinaison de 3 variantes**

# Description du problème : Contraintes de capacité

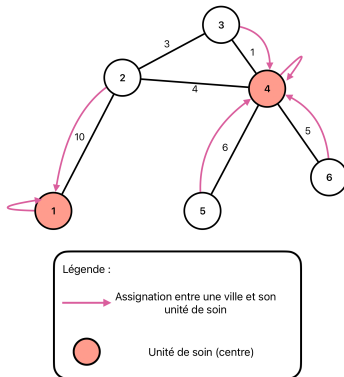
Samir Khuller and Yoram J.Sussmann. The Capacitated  $K$ -Center Problem, SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol.13, no.3, pp. 403–418, Jan. 2000

**Demande :** Quantité de soins demandés dans une ville

**Capacité :** Quantité de soins que peut fournir une unité de soin (centre)

Nœud	1	2	3	4	5	6
Demande	3	5	1	3	2	3
Capacité	9	6	2	9	4	4

Table: Demandes et capacités du graphe



# Description du problème : Gestion de pannes

Inmaculada Espejo, Alfredo Marín, and Antonio M. Rodríguez-Chía. Capacitated  $p$ -center problem with failure foresight, European Journal of Operational Research, vol. 247, no. 1, pp. 229–244, Nov. 2015

Yolanda Hinojosa, Alfredo Marín, and Justo Puerto. Dynamically second-preferred  $p$ -center problem, European Journal of Operational Research, vol. 307, no. 1, pp. 33–47, 2023

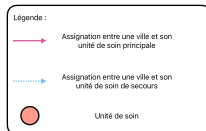
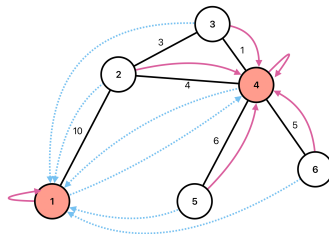
**Ajout :** Une unité de soin peut maintenant tomber en panne

- Toutes les villes assignées à l'unité de soin en panne doivent être re-dirigées vers une autre unité

Noeud	1	2	3	4	5	6
Demande	3	5	1	3	2	3
Capacité	17	6	2	18	4	4

Table: Demandes et capacités du graphe

L'unité de soin de secours est la deuxième unité la plus proche disponible (demande/capacité)



# Description du problème : Stratification

Maria Albareda-Sambola, Luisa I. Martínez-Merino, and Antonio M. Rodríguez-Chía. The stratified  $p$ -center problem, Computers & Operations Research, vol. 108, pp. 213–225, Aug. 2019

## Ajouts :

- ▶ Nous avons un ensemble de soins  $S = \{\text{gériatrie, gynécologie, ...}\}$
- ▶ Chaque ville demande différents soins avec des quantités distinctes
- ▶ Chaque unité de soin fournit un ensemble de soins avec des capacités distinctes
- ▶ Les soins demandés ou fournis ne sont pas nécessairement tous présents dans une même ville.



# Description du problème : Stratification

**Lignes pleines :** Assignment au centre principal

**Lignes pointillées :** Assignment au centre de secours

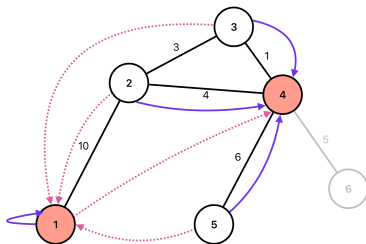


Figure: Soin gériatrique

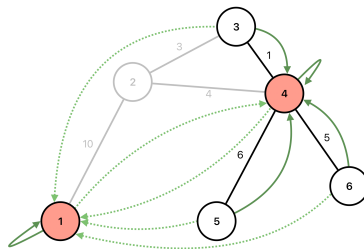


Figure: Soin gynécologique

**Difficulté :** Trouver une solution faisable commune à chaque soin

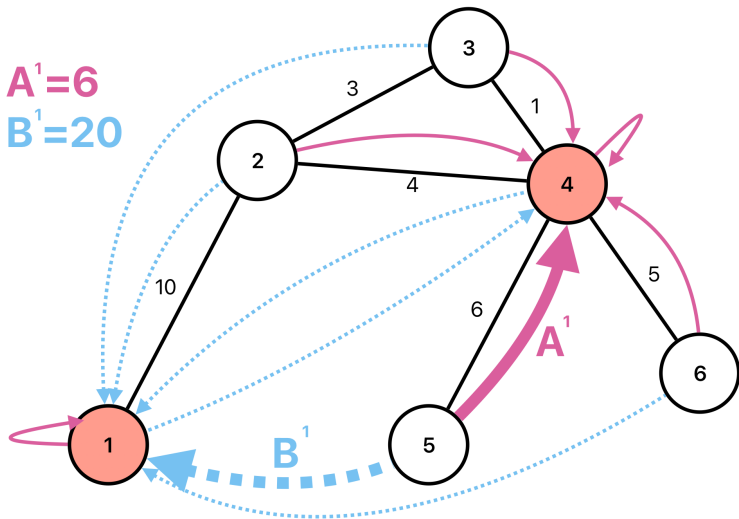
Dans le problème nous avons :

- ▶  $N$  l'ensemble des villes et emplacements candidats
- ▶  $E$  l'ensemble des arêtes
- ▶  $p$  unités de soin à placer

Nous ajoutons :

- ▶  $S$  : ensemble des soins
- ▶  $A^s = \max_{i \in N} \{d_{ik}\}$ , où  $k$  est le centre principal de la ville  $i$  pour la strate  $s$ , Le maximum sur l'ensemble des distances entre les villes et leur premier centre, pour la strate  $s$
- ▶  $B^s = \max_{i \in N} \{d_{ik}\}$ , où  $k$  est le centre de secours de la ville  $i$  pour la strate  $s$ , Le maximum sur l'ensemble des distances entre les villes et leur centre de secours, pour la strate  $s$

## Exemple A et B pour une strate



# Fonctions objectives comparées

Fonction objective inspirée de la littérature<sup>1</sup>:

$$f = \sum_{s \in S} B^s$$

Minimiser la distance maximale assignée entre les villes et leur centre de secours pour chaque strate.

Fonction objective proposée :

$$g = \sum_{s \in S} (A^s + B^s)$$

Minimiser la distance maximale assignée entre les villes et leur centre principal et leur centre de secours pour chaque strate.

*f* reste-t-elle pertinente pour notre problème ?

---

<sup>1</sup>Inmaculada Espejo, Alfredo Marín, and Antonio M. Rodríguez-Chía. Capacitated  $p$ -center problem with failure foresight, European Journal of Operational Research, vol. 247, no. 1, pp. 229–244, Nov. 2015

# Modèle du problème

$$\text{Min } F \quad (1)$$

s.c

$$\sum_{j \in N} y_j = p \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{j \in N \\ s \in C_j}} x_{ijs} = 1 \quad \forall i \in N, \forall s \in S_i \quad (3)$$

$$\sum_{\substack{j \in N \\ s \in C_j}} w_{ijs} = 1 \quad \forall i \in N, \forall s \in S_i \quad (4)$$

$$x_{ijs} \leq y_j \quad \forall i, j \in N, s \in S_i \cap C_j \quad (5)$$

$$w_{ijs} \leq y_j \quad \forall i, j \in N, s \in S_i \cap C_j \quad (6)$$

$$x_{ijs} + w_{ijs} \leq 1 \quad \forall i, j \in N, s \in S_i \cap C_j \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{j \in N \\ s \in C_j}} d_{ij} \cdot x_{ijs} \leq A^s \quad \forall i \in N, s \in S_i \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{j \in N \\ s \in C_j}} d_{ij} \cdot w_{ijs} \leq B^s \quad \forall i \in N, s \in S_i \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{j \in N \\ s \in C_j}} d_{ij} \cdot x_{ijs} \leq \sum_{\substack{j \in N \\ s \in C_j}} d_{ij} \cdot w_{ijs} \quad \forall i \in N, s \in S_i \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ s \in S_i}} q_{is} \cdot x_{ijs} + \sum_{\substack{i \in N \\ s \in S_i}} q_{is} \cdot w_{ijs} \leq u_{js} \cdot y_{js} \quad \forall j \in N, s \in C_j \quad (11)$$

$$x_{ijs} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N, s \in S_i \cap C_j \quad (12)$$

$$w_{ijs} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N, s \in S_i \cap C_j \quad (13)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N \quad (14)$$

$$A^s, B^s \geq 0 \quad \forall s \in S \quad (15)$$

Le nombre de contraintes et variables est de l'ordre  $O(|S| \cdot |N|^2)$ .

Pour les deux fonctions objectives  $f$  et  $g$ , nous analysons :

- ▶ La structure des solutions données
- ▶ Les performances en termes de temps

Benchmarks effectués avec IBM ILOG Cplex 22.1.1.

Pour effectuer nos benchmarks :

- ▶ Nous limitons le temps de résolution à 3600 secondes
- ▶ Nous distinguons le cas où  $f$  et  $g$ 
  - ▶ trouvent simultanément l'optimalité
  - ▶ ne trouvent pas simultanément l'optimalité

Les instances sont tirées de la littérature et ont été enrichies.

Famille	$N$	$p$	$S$	Nombre d'instances
Pmed	[100, 800]	$[5, \frac{N}{3}]$	{3, 5, 10, 15, 20}	54
Beasley	{100, 150}	5 quand $N = 50$ , 10 quand $N = 100$	{3, 5, 10, 15, 20}	99
Galvao	{100, 150}	{5, 15}	{3, 5, 10, 15, 20}	31
Lorena	[100, 402]	[10, 40]	{3, 5, 10, 15, 20}	7
Aleatoire	{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}	$\{\frac{N}{10}, \frac{N}{5}, \frac{N}{3}\}$	$\{\frac{N}{10}, \frac{N}{5}\}$	42

Pour chaque instance résolue, nous avons :



avec : 
$$A = \sum_{s \in S} A^s \quad B = \sum_{s \in S} B^s \quad A + B = \sum_{s \in S} (A^s + B^s)$$

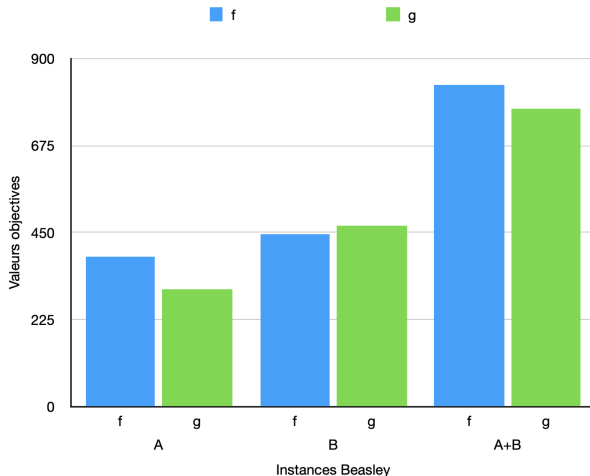
Nous comparons entre les deux fonctions objectives :

- ▶ La moyenne des valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $A + B$  pour chaque famille d'instances
- ▶ Le nombre d'occurrences où  $f$  (resp.  $g$ ) obtient une valeur de  $A$  (resp.  $B$  et  $A + B$ ) meilleure ou équivalente pour chaque famille d'instances.



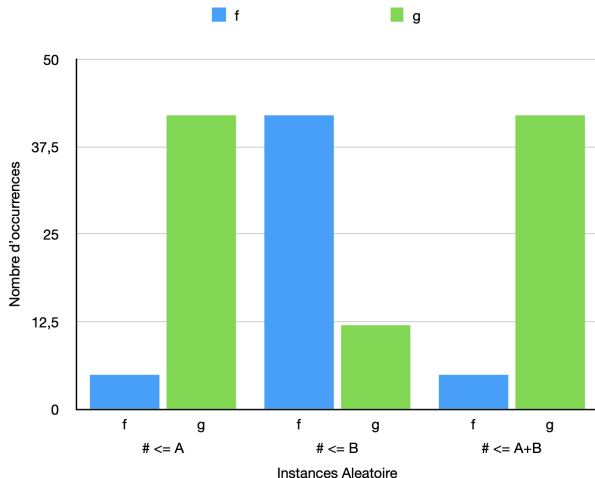
# Analyses structurelles : valeurs des fonctions objectives en cas d'optimalité simultanée

- Axes des abscisses : Moyenne des valeurs objectives pour une famille d'instances donnée



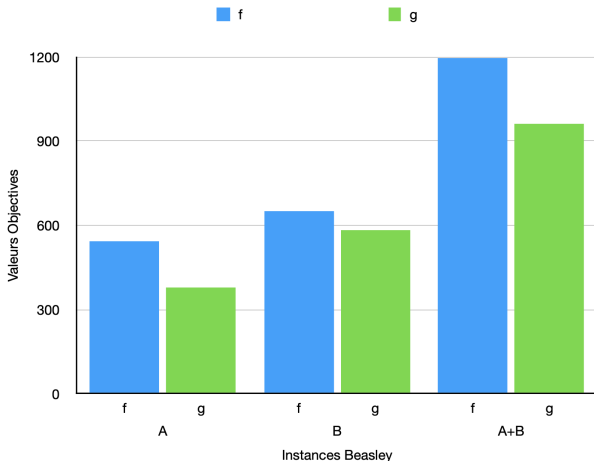
## Analyses structurelles : fréquence d'obtention de résultats meilleurs ou équivalents sur $A$ , $B$ et $A + B$ en cas d'optimalité simultanée

- Axes des abscisses : Nombre de cas où une fonction objective produit un résultat meilleur ou équivalent à l'autre, sur les valeurs  $A$ ,  $B$  et  $A + B$ .



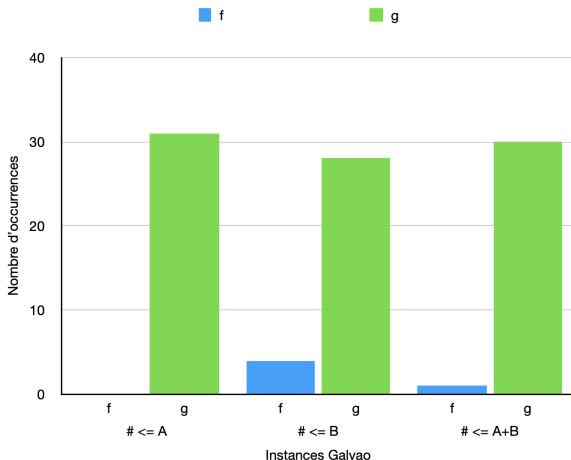
# Analyses structurelles : valeurs des fonctions objectives en cas d'optimalité non simultanée

- Axes des abscisses : Moyenne des valeurs objectives pour une famille d'instances donnée



## Analyses structurelles : fréquence d'obtention de résultats meilleurs ou équivalents sur $A$ , $B$ et $A + B$ en cas d'optimalité non simultanée

- Axes des abscisses : Nombre de cas où une fonction objective produit un résultat meilleur ou équivalent à l'autre, sur les valeurs  $A$ ,  $B$  et  $A + B$ .



## D'autres critères de comparaison

Lors d'optimalité simultanée par  $f$  et  $g$ , pour chaque instance nous avons :

$$M_A = \{A^1, A^2, \dots, A^{|S|}\}$$

et

$$M_B = \{B^1, B^2, \dots, B^{|S|}\}$$

Pour les deux fonctions objectives, nous comparons le minimum, le maximum et la moyenne sur les ensembles  $M_A$  et  $M_B$ , avec :

$$\blacktriangleright \min M_A = \min_{i \in M_A} i$$

$$\blacktriangleright \max M_A = \max_{i \in M_A} i$$

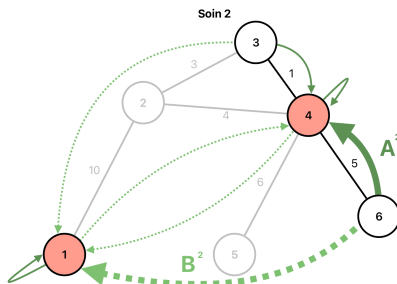
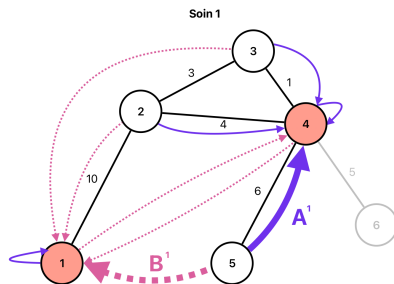
$$\blacktriangleright \text{moyenne } M_A = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in M_A} i$$

$$\blacktriangleright \min M_B = \min_{i \in M_B} i$$

$$\blacktriangleright \max M_B = \max_{i \in M_B} i$$

$$\blacktriangleright \text{moyenne } M_B = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in M_B} i$$

# Exemple

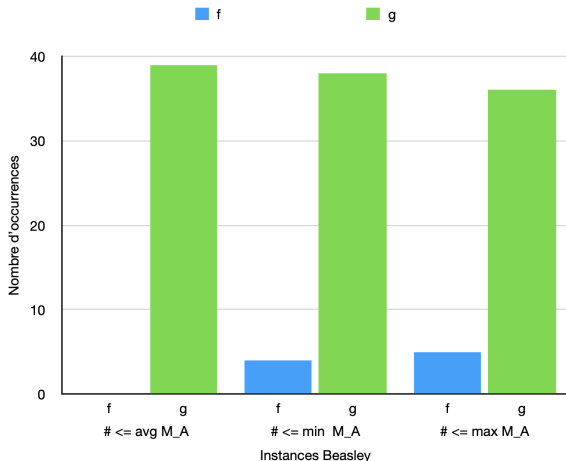


Nous avons donc :

- ▶  $M_A = \{A^1, A^2\} = \{6, 5\}$
- ▶  $M_B = \{B^1, B^2\} = \{20, 19\}$

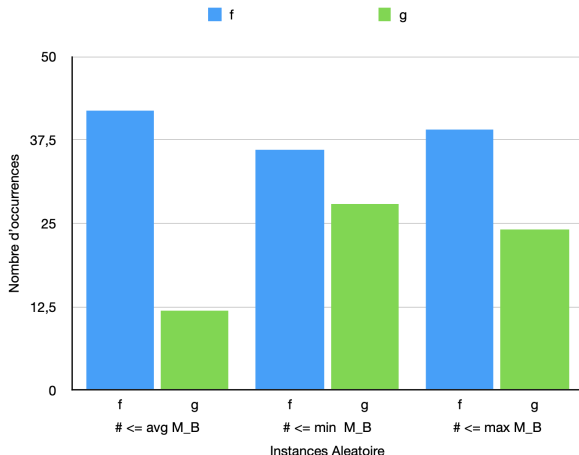
## Analyses structurelles : fréquence d'obtention de résultats meilleurs ou équivalents sur $A^s$ (moyenne, minimum, maximum)

- Axes des abscisses : Nombre de cas où une fonction objective produit un résultat meilleur ou équivalent à l'autre, sur la moyenne, le minimum et le maximum des plus grandes distances assignées  $A^s, s \in S$ .



## Analyses structurelles : fréquence d'obtention de résultats meilleurs ou équivalents sur $B^s$ (moyenne, minimum, maximum)

- Axes des abscisses : Nombre de cas où une fonction objective produit un résultat meilleur ou équivalent à l'autre, sur la moyenne, le minimum et le maximum des plus grandes distances assignées  $B^s, s \in S$ .





En termes de valeurs objectives

- ▶ En cas d'optimalité simultanée :
  - ▶  $f$  obtient de meilleurs  $B$  ( $g$  est en moyenne 2.58% plus élevée)
  - ▶  $g$  obtient de meilleurs  $A + B$  ( $f$  est en moyenne 5.79% plus élevée)
  - ▶  $g$  obtient de meilleurs  $A$  ( $f$  est en moyenne 17.69% plus élevée)
- ▶ En cas d'optimalité non simultanée
  - ▶ La fonction  $g$  est meilleur sur  $A$ ,  $B$  et  $A + B$

En termes de structures :

- ▶ La fonction  $g$  obtient de meilleurs minimum, maximum et moyennes sur  $M_A$
- ▶ La fonction  $f$  obtient de meilleurs minimum, maximum et moyennes sur  $M_B$
- ▶ La fonction  $g$  fournit plus souvent de meilleurs résultats en ce qui concerne les valeurs minimales, maximales et moyennes sur  $M_B$ , par rapport aux mêmes mesures obtenus par  $f$  sur  $M_A$ .

# Résultats en termes de temps

- ▶  $T(s)$  étant le temps en secondes
- ▶  $Node$  étant le nombre de nœuds CPLEX développés

Instances	F	$T_{avg}(s)$	$T_{min}(s)$	$T_{max}(s)$	$Node_{avg}$	# optimum
Pmed <sup>sim</sup>	<i>f</i>	1196.1	14.6	3516.5	836.3	21
	<i>g</i>	<b>664.6</b>	<b>8.5</b>	<b>2890.0</b>	<b>461.4</b>	
Beasley <sup>sim</sup>	<i>f</i>	910.5	120.8	3442.9	16757.3	39
	<i>g</i>	<b>166.2</b>	<b>11.2</b>	<b>487.8</b>	<b>5244.0</b>	
Aleatoire	<i>f</i>	135.0	0.1	3102.1	4429.3	42
	<i>g</i>	<b>48.9</b>	0.1	<b>783.4</b>	<b>2525.2</b>	

**Table:** Résultats en termes de temps en cas d'optimalité simultanée

Instances	F	$T_{avg}(s)$	$T_{min}(s)$	$T_{max}(s)$	$Node_{avg}$	# optimum
Lorena	<i>f</i>	3600	3600	3600	3434.1	0 sur 7
	<i>g</i>	3600	3600	3600	<b>4582.9</b>	
Galvao	<i>f</i>	3600	3600	3600	2852.8	0 sur 31
	<i>g</i>	3600	3600	3600	<b>3420.8</b>	
Pmed <sup>dif</sup>	<i>f</i>	3564.4	2420.3	3600	6191.2	1 sur 33
	<i>g</i>	<b>3084.2</b>	<b>376.3</b>	3600	<b>11868.0</b>	8 sur 33
Beasley <sup>dif</sup>	<i>f</i>	3600	3600	3600	5789.1	0 sur 60
	<i>g</i>	<b>3277.9</b>	<b>860.0</b>	3600	<b>6282.2</b>	10 sur 60

**Table:** Résultats en termes de temps en cas d'optimalité non simultanée

- ▶ Un nouveau problème combinant 3 variantes connues :
  - ▶ Contraintes de capacités
  - ▶ Ajout de gestion de pannes
  - ▶ Stratification du problème
- ▶ Comparaison de deux fonctions objectives :
  - ▶  $f = \sum_{s \in S} B^s$  inspirée de la littérature
  - ▶  $g = \sum_{s \in S} (A^s + B^s)$
- ▶ D'après nos analyses, la fonction  $g$  :
  - ▶ obtient des solutions avec une meilleure structure
  - ▶ est plus performantes en termes de temps

$f$  reste-t-elle pertinente pour notre problème ?

Non, elle ne l'est pas !

Nous aimerions :

- ▶ En termes de modélisation :
  - ▶ Ajouter des poids à chaque soin pour en prioriser certains ou en particulier les distances  $A^s$
  - ▶ Ajouter des capacités de surcharges pour les centres de secours
- ▶ En termes de résolution
  - ▶ Décomposer le problème strate par strate

## Merci de m'avoir écouté !

Avez-vous des questions ?

# ROADEF

.....  
SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE  
ET D'AIDE À LA DÉCISION