Problema extra: mecánica

Antonio Arcila

mayo, 2017

Apartado a) Considerando el lagrangiano:

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2e^{2\gamma t} - \frac{1}{2}k^2q^2e^{2\gamma t}$$

tal que $\gamma > 0$, queremos hallar en primer lugar las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de ese lagrangiano. Sabemos que en general, estas son de la forma:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}] - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

. En nuestro caso tenemos que $q_\alpha = \{q\}$, $\dot{q_\alpha} = \{\dot{q}\}$, y por tanto:

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}me^{2\gamma t}2\dot{q} = me^{2\gamma t}\dot{q}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}] = m[e^{2\gamma t}2\gamma\dot{q} + e^{2\gamma t}\ddot{q}] = me^{2\gamma t}[2\gamma\dot{q} + \ddot{q}]$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = -k^2e^{2\gamma t}\frac{1}{2}2q = -k^2e^{2\gamma t}q$$

Por tanto la ecuación de movimiento nos queda como:

$$me^{2\gamma t}[2\gamma\dot{q} + \ddot{q}] + k^2e^{2\gamma t}q = 0$$

Apartado b) Para determinar el hamiltoniano, determinamos en primer lugar el momento conjugado $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = me^{2\gamma t}\dot{q}$ y tomamos este como la variable p: $= me^{2\gamma t}\dot{q}$. Entonces el hamiltoniano sería:

$$H = me^{2\gamma t}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2e^{2\gamma t} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{2\gamma t}$$

Pero nuestro objetivo es tener la expresión del hamiltoniano sin derivadas de la coordenada generalizada, por tanto usamos la definición que hemos dado de p para sustituir:

$$\dot{q} = \frac{p}{me^{2\gamma t}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H = me^{2\gamma t}(\frac{p}{me^{2\gamma t}})^2 - \frac{1}{2}m(\frac{p}{me^{2\gamma t}})^2 + \frac{1}{2}k^2q^2e^{2\gamma t} = \frac{p^2}{me^{2\gamma t}} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{me^{2\gamma t}} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{2\gamma t} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{me^{2\gamma t}} + \frac{1}{2}k^2q^2e^{2\gamma t}$$

Podemos comprobar que:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{me^{2\gamma t}} = \dot{q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = k^2qe^{2\gamma t}$$

Y tiene que cumplirse $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$, por tanto igualamos:

$$-\dot{p} = \begin{cases} k^2qe^{2\gamma t} \\ -m(\ddot{q}e^{2\gamma t} + \dot{q}e^{2\gamma t}2\gamma) \end{cases} \Longrightarrow k^2qe^{2\gamma t} + m(\ddot{q}e^{2\gamma t} + \dot{q}e^{2\gamma t}2\gamma) = 0 \Longleftrightarrow e^{2\gamma t}[k^2q + m(\ddot{q} + 2\gamma)] = 0$$

Así, nos queda:

$$k^2q + m(\ddot{q} + 2\gamma\dot{q}) = 0$$

.