

Programa: Convección Natural en Recinto Cerrado

Situación física

El recinto se halla aislado del exterior, pero en su interior hay un fluido circulando libremente, las paredes superior e inferior son adiabáticas y existe un flujo de calor desde la pared izquierda mientras la pared derecha se encuentra a otra temperatura menor. Esta se puede aplicar a casos de: contaminación, enfriamiento de reactores nucleares, diseño de hornos. En esta situación se necesita conocer lo que sucede dentro del recinto en sus parámetros principales esto es distribución de velocidades, centro de rotación del fluido, distribución de temperaturas y cálculo del número de Prandtl.

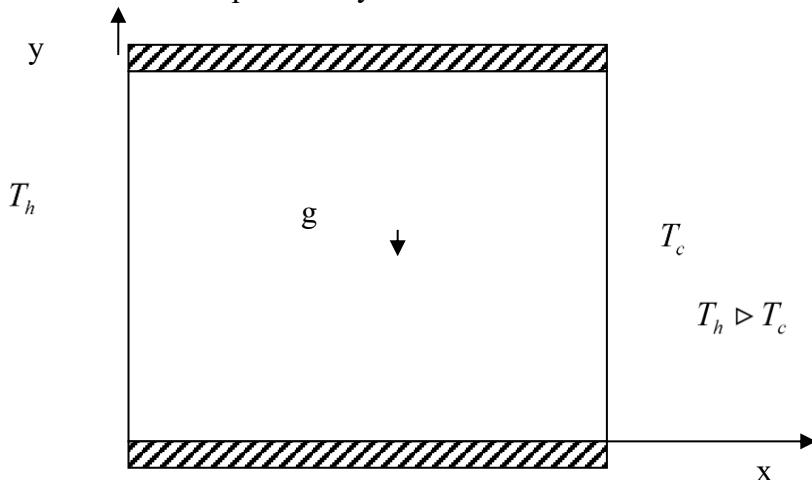


Figura 1: Situación física para el problema 1.

Modelo matemático para casos a resolver 1 y 2

Ecuación de continuidad (conservación de la masa)

Definida en general como sigue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Por ser el caso estacionario y bidimensional (la masa se traslada en x e y)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Ecuación de momento lineal (cantidad de movimiento define las velocidades características)

Momento lineal en x (MLX)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Por ser permanente y propiedades constantes

$$\rho \left(u \frac{\partial(u)}{\partial x} + v \frac{\partial(u)}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial(u)}{\partial x} + v \frac{\partial(u)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Reemplazando la definición de viscosidad cinemática

$$\text{MLX}) \quad \boxed{u \frac{\partial(u)}{\partial x} + v \frac{\partial(u)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)} \quad (3)$$

Para el momento lineal en y (MLY) se obtiene una ecuación análoga a la anterior pero se agrega un componente de la fuerza de gravedad (g_y) que actúa en el eje y que influye en la diferencia de densidades.

$$\text{MLY}) \quad u \frac{\partial(v)}{\partial x} + v \frac{\partial(v)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\Delta\rho}{\rho} g_y \quad (4)$$

Para encontrar una expresión que permita acercarnos a esta diferencia de densidades producidas utilizaremos la aproximación lineal de Bussinesq.

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \beta (T - T_{referencia}) \quad (5)$$

Donde $T_{referencia}$ puede ser la temperatura media ó la temperatura menor y $\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$,

llamado coeficiente de expansión volumétrica a presión constante. Manipulando la ecuación anterior llegamos a

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \beta (T - T_{referencia}) \quad \text{ó} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \beta (T - T_{referencia}) \quad (6)$$

Reemplazando en la ecuación (3.4)

$$\boxed{u \frac{\partial(v)}{\partial x} + v \frac{\partial(v)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \beta (T_1 - T_c) g_y} \quad (7)$$

Donde T_1 es la temperatura de la cara izquierda de la pared

Ecuación de la energía

Definida en general como

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + u \phi$$

Dejando los términos aplicados al caso particular y reordenando

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \text{ó} \quad \boxed{u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)} \quad (8)$$

Donde α es la difusividad térmica.

Para adimensionalizar las ecuaciones resultantes utilizaremos los siguientes parámetros de longitud

$$X^* \equiv \frac{x}{L} \quad \text{y} \quad Y^* \equiv \frac{y}{L}$$

Donde L es la longitud característica para la superficie de interés. Las variables dependientes adimensionales se definen como

$$V^* \equiv \frac{vL}{\infty} \quad \text{y} \quad U^* \equiv \frac{uL}{\infty}$$

Para la temperatura, la presión y el tiempo, respectivamente.

$$\theta \equiv \frac{T - T_c}{T_h - T_c}; \quad P^* = \frac{P}{\rho \left(\frac{\infty}{L} \right)^2}; \quad \tau = \frac{t \alpha}{L^2}$$

números adimensionales de Rayleigh que corresponde a la multiplicación del número de Grashof por el número de Prandlt:

$$Ra = \frac{g \beta (T_h - T_c) L^3}{\nu \alpha}; \quad Gr = \frac{g_y \beta (T_h - T_c) L^3}{\nu^2}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (11)$$

Donde ν corresponde a la viscosidad cinemática.

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones de continuidad, momento y energía (3), (7) y (8).

continuidad

$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} = 0} \quad (9)$$

Momento

$$\text{MLX}) \quad \frac{\nu^2}{L^3} \left(U^* \frac{\partial(U^*)}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial(U^*)}{\partial Y^*} \right) = -\frac{\nu^2}{L^3} \frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \frac{\nu^2}{L^3} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^{*2}} \right)$$

Finalmente queda

$$\text{MLX}) \quad \boxed{\left(U^* \frac{\partial(U^*)}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial(U^*)}{\partial Y^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^{*2}} \right)} \quad (10)$$

Para el momento en y

$$\text{MLY}) \quad \frac{\nu^2}{L^3} \left(U^* \frac{\partial(V^*)}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial(V^*)}{\partial Y^*} \right) = -\frac{\nu^2}{L^3} \frac{\partial P^*}{\partial Y^*} + \frac{\nu^2}{L^3} \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Y^{*2}} \right) - g_y \beta (T - T_c) \frac{(T_h - T_c)}{(T_h - T_c)}$$

Finalmente queda

$$\text{MLY}) \quad \boxed{\left(U^* \frac{\partial(V^*)}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial(V^*)}{\partial Y^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial Y^*} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Y^{*2}} \right) - Ra \text{Pr} \theta_{m,y}} \quad (12)$$

Ecuación de la energía

$$\frac{\nu}{L} \frac{\Delta T}{L} \left(U^* \frac{\partial \theta}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} \right) = \alpha \frac{\Delta T}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^{*2}} \right)$$

Finalmente queda

$$\left(U^* \frac{\partial \theta}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial \theta}{\partial Y^*} \right) = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^{*2}} \right) \quad (13)$$

Donde Pr es el número de Prandt definido anteriormente

Situación física en estado transiente

Para modelar matemáticamente esta situación física en estado transiente se deben considerar los términos $\frac{\partial u}{\partial t}; \frac{\partial v}{\partial t}; \frac{\partial T}{\partial t}$ para los momentos en x e y, y para la ecuación de la energía respectivamente. Una vez sumados a las ecuaciones adimensionales respectivas para adimensionalizar debemos considerar en esta etapa otro número sin dimensión

$$\tau = \frac{t\alpha}{L^2}$$

Así a la ecuación de momento en x e y se debe sumar los términos $\frac{\partial U}{\partial \tau}; \frac{\partial V}{\partial \tau}$

Para la expresión de la energía se suma $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$. Para aplicar este término transiente en la implementación computacional utilizamos la serie de Taylor

$$\phi(p + \Delta p) = \phi(p) + \frac{\partial \phi}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} \Delta p^2 \dots$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{\phi(p + \Delta p) - \phi(p)}{\Delta p} \quad (14)$$

Para la temperatura adimensional la ecuación (14) queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^t}{\Delta \tau} \quad (15)$$

La ecuación general para aplicar en el programa está definida como sigue

$$\operatorname{div}(\rho v \phi) = \operatorname{div}(\tau \cdot \operatorname{grad} \phi) + (S_c + S_p \phi_p) \quad (16)$$

Tabla 1: Términos adimensionales para la ecuación general de transporte.

ϕ	τ	S_c	S_p
U^*	Pr	$\frac{-1}{\Delta \tau}$	$\frac{U^{t+\Delta t}}{\Delta \tau}$
V^*	Pr	$\frac{-1}{\Delta \tau}$	$\frac{U^{t+\Delta t}}{\Delta \tau} - Ra * Pr * \theta$

θ^*	1	$\frac{-1}{\Delta \tau}$	$\frac{\theta^{t+\Delta t}}{\Delta \tau}$
------------	---	--------------------------	---

Aplicación computacional

Características del programa

- El método calcula acopladamente temperaturas y velocidades adimensionales.
- Se utilizan paredes adiabáticas superior e inferior para los cálculos.
- El programa asume la temperatura T_w constante
- El programa es adimensional por lo que las propiedades en este caso varían entre 0 y 1.

Tarea 1: Análisis del efecto del número de Prandtl en la fluido-dinámica al interior de la cámara por convección natural

El Número de Prandtl

Se define como el cociente entre la viscosidad cinemática y la difusividad térmica y no tiene dimensiones (número adimensional).

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Su interpretación física se sigue de su definición ya que esta razón proporciona una medida de la efectividad relativa del transporte de momento y energía por difusión en la capa límite hidrodinámica y térmica, respectivamente.

Los gases tienen números de Prandtl cercanos a la unidad, por lo que deducimos que la transferencia de energía y momento por difusión son aproximadamente los mismos valores.

En un metal líquido este número es mucho menor a uno y la velocidad de difusión de energía excede grandemente la velocidad de difusión de momento.

Lo opuesto es cierto para aceites, aquí los valores del Prandtl son mucho mayores a 1.

Por todo lo anterior se sigue que el valor del Pr influye fuertemente en el crecimiento relativo de la capa límite hidrodinámico y térmico.

Para capas límite laminares sobre una placa plana, es de esperar que la tasa entre la capa límite térmica y la de velocidad sea proporcional a:

$$\frac{\delta_T}{\delta_v} \approx \text{Pr}^{1/3}$$

Si el Pr es mucho menor a 1, la capa límite térmica es mas gruesa que la de velocidad.
Ejemplo metal líquido ($\text{Pr}=0.02$)

1.1.- Resultados y respuestas que se deben incluir en el informe para la tarea 1

Utilizar el programa entregado en el laboratorio (educandus) para estudiar el efecto del número de Prandtl en la convección natural

1.- Los casos que se deben analizar con el programa se resumen en la siguiente tabla 2. Vamos a fijar el número de Rayleigh en $Ra = 10^5$; el Prandlt varia; temperatura de paredes $T_{hot} = 1$ --- $T_{cool} = 0$.

Tabla 2: casos de convección natural a resolver.

		Nº volúmenes	Nº de Prandlt	Observaciones
Caso 1	Aire	50x50	0.7	
Caso 2	Agua	50x50	6.13	
Caso 3	Miel	50x50	100	
Caso 4	Magma	50x50	100.000	

2.-Verifique en todos los casos el tiempo final haya llegado a su estado estacionario. Originalmente el programa tiene un tiempo final adimensional de 1.¿Será suficiente para asegurar la convergencia o debo aumentarlo? Indique como verificará que haya llegado a la solución a estado estacionario.

3.- Programe un nodo de control central en FORTRAN que le permita ver la evolución temporal de las velocidades en U y en V y la evolución temporal de la Temperatura. Haga esto para cada caso y malla presentada.

- a) Grafique en Tecplot para cada número de Pr utilizado (gráfico U nodo central vs tiempo, V nodo central vs tiempo y T nodo central vs tiempo).
- b) Presente comentarios de los resultados obtenidos en base al N° de Prandlt y al tipo de fluido que representa.

4.- Presente los perfiles de velocidades y de temperatura en Y en $=0.5$ (U vs perfil_Y, V vs perfil_Y, T vs perfil_Y) al tiempo final para cada número de Prandlt.

- a) comente respecto a: la forma de los perfiles, los valores de las velocidades y temperaturas cerca de las paredes y hacia el centro de la cámara.

5.- Presente para cada número de Prandlt (cada caso estudiado) los gráficos en 2D (contornos) a un tiempo intermedio y a tiempo final para: 1) la temperatura (isotermas), 2) velocidades (isovelocidades) en U en V y 3) las líneas de corriente. Las líneas de corriente las puede superponer en algunos de los datos 2D de velocidad. Serían en total 3 figuras.

Tarea 2: Comparación de resultados con caso experimental obtenido de referencias

Comparar los resultados del programa entregado en clases con los casos planteados para convección natural de agua en el paper de Banaszek et al., 1999 (model verification section, Figure 3). DOI:[10.1080/104077899274624](https://doi.org/10.1080/104077899274624)

Para este caso el N° de Pr =1; $T_h = 0.5$ y $T_c=-0.5$ y el Rayleigh tiene distintos valores.

Lo que debe hacer para el informe es:

- 1.- Presentar el caso de estudio que resuelve la referencia con las condiciones iniciales de borde y dimensiones del dominio de cálculo.
- 2.- Mostrar la figura del paper (Fig. 3) al lado de cada resultado que usted obtenga con Tecplot para cada número de Rayleigh. Comente y compare los resultados suyos con los del paper.

Tarea 3. Simulación de fluidos no newtonianos con alta viscosidad.

Sección basada en la sección 3.1 del paper: Temporal Evolution of Cooling by Natural Convection in an Enclosed Magma Chamber (<https://doi.org/10.3390/pr10010108>).

Se reproducen los resultados obtenidos de un paper (ver referencia en el paper). Se estudió numéricamente la refrigeración transitoria por convección natural ($Ra_T = 1 \times 10^6$) de un fluido altamente no newtoniano con un número de Prandtl elevado (4×10^4) dentro de una cavidad cuadrada rodeada por un sólido. El dominio calculado fue de 0.2 m en las direcciones x e y, e incluyó un contorno de Plexiglás de 0.01 m de espesor. Inicialmente, el fluido estaba en reposo ($U = V = 0$) y tanto las temperaturas del fluido como del Plexiglás eran constantes a $T_0 = 45^\circ\text{C}$ ($\theta = 0$). Para comparar los resultados publicados con los obtenidos mediante nuestro algoritmo, se utilizaron dos casos. En el primer caso, se usó una temperatura constante de $T_w = 25^\circ\text{C}$ ($\theta = -1$) en el exterior del contenedor. En el segundo caso, se impuso la misma temperatura $T_w = 25^\circ\text{C}$ ($\theta = -1$) en tres de las fronteras, pero con una condición adiabática en la frontera inferior. El modelo matemático adimensional desarrollado en el paper se utilizó para simular el modelo matemático (usando $L_{cl} = L_c$ y $\Delta T_{cl} = 1$) y el método de volúmenes finitos (FVM) propuesto en este trabajo. En ambos casos, el dominio calculado se discretizó con cinco mallas uniformes de 40×40 , 180×180 , 120×120 , 60×60 y 40×40 nodos y tres pasos de tiempo Δt , de 1×10^{-4} , 1×10^{-3} y 1×10^{-2} (en tiempo adimensional). Las simulaciones se realizaron hasta alcanzar 1785 s ($\theta = t = 1165$). Para calcular la viscosidad aparente, se utilizó la siguiente ecuación:

$$\eta = \eta_{ref} \exp\left(\frac{1}{AT^2+BT+C}\right); \eta_{ref} = 4.485E - 8 \text{ Pa s};$$

$$A = -7.5907E - 7; B = 3.8968E - 4; C = 4.0130E - 2$$

donde la temperatura debe ingresarse en $^\circ\text{C}$. La viscosidad aparente varía de aproximadamente 10 a 200 Pa·s para un rango de enfriamiento de 45-25 $^\circ\text{C}$. Estos valores de viscosidad son cercanos a los del magma basáltico a temperaturas entre 1498 K y 1473 K (ver referencias en el paper), y un número de Prandtl de 4E4 es cercano al valor del magma basáltico (ver referencia en el paper). Es importante que el número de Prandtl sea cercano al del magma basáltico, ya que la teoría de similitud entre números adimensionales permite predecir el mismo comportamiento en ambos fluidos en términos de cantidad de movimiento y transferencia de calor. Esto es fundamental para la validación de los flujos magmáticos, ya que las altas temperaturas a las que ocurren hacen muy difícil su estudio en el laboratorio. Las dos características anteriores del problema de referencia (viscosidad y número de Prandtl) nos permiten confirmar que la solución adimensional para las velocidades y las temperaturas es comparable a las que se producen en magmas basálticos. En la Figura 2B del paper se presentan los vectores de velocidad y las isotermas obtenidos después de 1785 s, utilizando una malla de 180×180 nodos.

Tarea 3 a realizar en el laboratorio y a incluir en el informe:

- a) Correr programa que aparece en el paper
 - i. Bajar el paper y el programa que está en él (link del programa).
 - ii. Compilar el programa en Fortran
 - iii. Correr el programa y obtener los resultados.
 - iv. Editar los resultados en tecplot con el fin de que sean lo mas parecidos a los presentados en el paper (Figura 2B del paper). Presentar los vectores de

velocidad e isotermas superpuestos editados por usted en tecplot al lado de la figura 2B del paper.

**Tarea 4: Incluir al final de su informe la sección:
Discusión y Conclusiones generales**

Enumere 6 casos donde los resultados de los programas como los utilizados en este laboratorio puedan servir para mejorar algún proceso de ingeniería. Antes de responder lea los paper y asegúrese de comprender la aplicación que se hace a esta simulación y las restricciones asumidas.