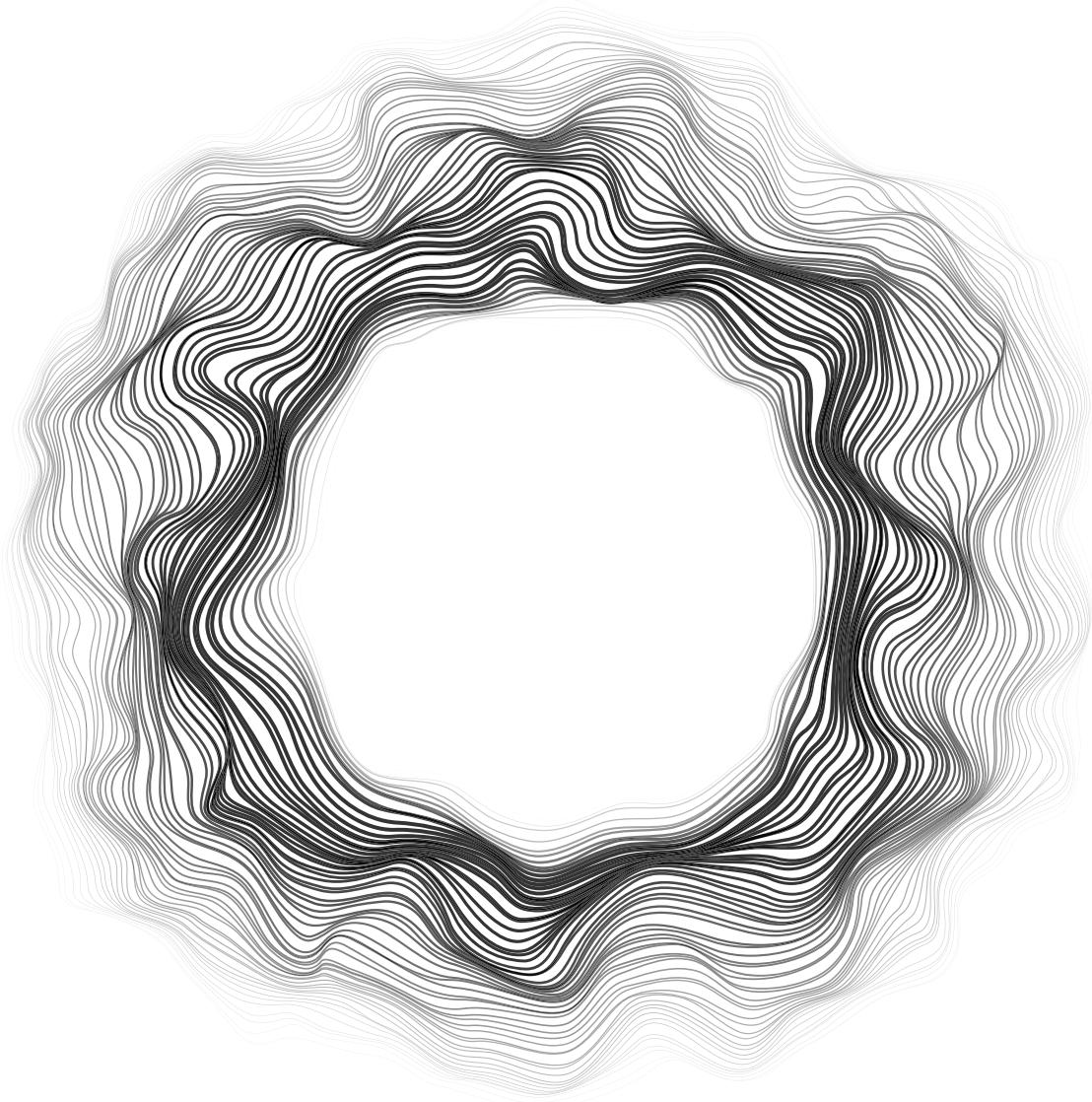


CÁLCULO MULTIVARIABLE



Sabino D. Castro

Antonio M. Mendoza

CÁLCULO III

Cálculo de varias variables

Andrés Sabino Díaz Castro

Profesor de matemáticas de la ESFM



México, 2024

CONTENIDO

- PREFACIO 7**
- 1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 9**
 - 1.1 Funciones y su dominio 10
 - 1.2 Gráficas de funciones y curvas de nivel 12
 - 1.3 Definición y ejemplos de normas 15
 - 1.4 Definición y ejemplos de métricas 20
 - 1.5 Topología de \mathbb{R}^n 22
 - 1.5.1 Clasificación de puntos 23
 - 1.5.2 Conjuntos abiertos y cerrados 25

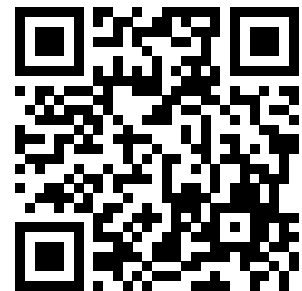
PREFACIO

Se recalca que esta obra son notas del curso de Cálculo III, del periodo de 2024/2. Es probable que exista algún error ortográfico o matemático, por lo que se recomienda consultar la bibliografía proporcionada al final de este trabajo. La presente obra consta de todo el contenido que adjudicó el Lic. Andrés Sabino Díaz Castro, quien imparte clases en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) en el Instituto Politécnico Nacional (IPN). Hice el mayor esfuerzo en estructurar el libro a base de proposiciones, ejercicios, notas, etc.; y se agregaron y modificaron algunas definiciones, a fin de lograr una mayor comprensión sin llegar a tener alguna ambigüedad.

Cada capítulo contiene varios ejercicios y demostraciones. Estos son de diversos tipos y pueden ayudar a tener una mejor comprensión del tema. Cabe mencionar que este libro fue mecanografiado por Marco Antonio Molina Mendoza, estudiante de la Escuela Superior de Física y Matemáticas. Si lo deseas o lo requieres, puedes imprimir esta obra, eres libre de hacerlo y no necesitas autorización. Cualquier mención a esta obra es apreciada, pero no requerida. Se sigue trabajando para corregir errores y/o mejorar este trabajo, por lo que está en constante cambio. Se recomienda entrar en **Biblioteca ESFM** para encontrar la versión más actualizada.

Algunos cambios han sido resultado de los comentarios de mis amigos y estudiantes de la Escuela Superior de Física y Matemáticas. Estas son algunas de las muchas mejoras que se han incorporado en esta edición.

- Aspecto estético mejorado: He trabajado arduamente en mejorar el aspecto visual del libro. Se han incorporado nuevas fuentes y estilos para que sea más fácil de leer y asimilar los conceptos.
- Errores ortográficos y matemáticos corregidos: He realizado una revisión minuciosa para garantizar la precisión en todos los aspectos del contenido. Los errores ortográficos y matemáticos se han corregido para ofrecer una experiencia de aprendizaje fluida y confiable.
- Imágenes actualizadas: He renovado todas las imágenes y gráficos del libro para asegurarme de que sean claros, informativos y visualmente atractivos. Las nuevas ilustraciones ayudarán a comprender mejor los conceptos y aplicaciones del álgebra lineal en el mundo real.



- Ejemplos adicionales y ejercicios prácticos: He añadido más ejemplos paso a paso y problemas resueltos para reforzar el entendimiento de los temas discutidos.

Quiero destacar que este libro, disponible en formato PDF, ofrece una funcionalidad adicional a través de tres hipervínculos de gran utilidad.

- Números de páginas: Se ubican en la parte superior derecha e izquierda, dependiendo de si es una página par o impar. Al hacer clic, te redirigirán al índice del libro.
- Nombres de secciones en el encabezado: Se localizan en la parte superior derecha de cada página impar. Al hacer clic, te llevarán al inicio de la respectiva sección
- Nombres de capítulos en el encabezado: Se encuentran en la parte superior izquierda de cada página par. Al hacer clic, te dirigirán al inicio del correspondiente capítulo.

En la elaboración de este libro, he optado por una presentación que refleje la esencia misma de la disciplina: precisión, claridad y elegancia matemática. Con este propósito en mente, he desarrollado una plantilla en LaTeX que resalta la pureza del contenido, utilizando únicamente el contraste entre el blanco y el negro para enfocar la atención en los conceptos fundamentales que exploraremos a lo largo de estas páginas.

La elección de un diseño en blanco y negro no es solo estética, sino una decisión que busca facilitar la comprensión del material para los lectores. Al eliminar cualquier distracción visual que pueda surgir del uso de colores llamativos, me he enfocado en ofrecer una experiencia de lectura que permita una inmersión total en el mundo del Cálculo.

Las ecuaciones, teoremas y demostraciones, que constituyen el núcleo de este texto, se presentan de manera clara y legible, sin interferencias visuales. La tipografía se ha seleccionado con cuidado para garantizar una lectura fluida y agradable, mientras que las figuras y gráficos han sido diseñados con precisión para complementar y reforzar los conceptos expuestos en el texto.

Debo mencionar que las imágenes que se presentan en este libro están hechas con **TikZ**, una herramienta para la producción de gráficos vectoriales. Dichas imágenes son de elaboración propia y son de dominio público.

Entiendo la importancia de la legibilidad tanto en la versión impresa como en la digital, por lo que he dedicado especial atención a la adaptabilidad de mi plantilla. Ya sea en un libro físico o en un documento electrónico, los lectores encontrarán una presentación coherente y accesible que facilitará su inmersión en los temas tratados.

Con una presentación clara y concisa de los temas, busco fomentar la apreciación de la belleza y utilidad de esta rama de las matemáticas. Se aspira a que los lectores adquieran las habilidades y conocimientos necesarios para resolver problemas complejos y se sientan motivados a explorar aplicaciones más avanzadas del cálculo en su futuro académico y profesional.

Marco Antonio Molina Mendoza
México, 18 de marzo de 2024

Capítulo

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El estudio de las funciones de varias variables constituye un pilar fundamental en el ámbito del Cálculo III, donde se exploran fenómenos matemáticos que implican más de una dimensión. A diferencia del cálculo de una sola variable, donde las funciones dependen únicamente de un parámetro, en el cálculo de varias variables, las funciones pueden depender de dos o más variables independientes. Este capítulo se adentra en la comprensión y análisis de estas funciones, explorando su comportamiento, propiedades y aplicaciones en diversos contextos.

En esencia, una función de varias variables asigna a cada punto en un dominio de dos o más dimensiones un único valor en el espacio real. Este enfoque multifacético permite modelar y comprender una amplia gama de fenómenos físicos, económicos y científicos, desde la trayectoria de un proyectil en el espacio hasta la distribución de temperatura en un sólido tridimensional.

La comprensión de las funciones de varias variables requiere el dominio de conceptos clave, entre ellos, la noción de dominio y rango, continuidad, derivadas parciales, gradientes, y optimización. A través del análisis de estas herramientas matemáticas, los estudiantes desarrollarán una perspicacia profunda sobre cómo las funciones de varias variables se comportan y cómo pueden ser utilizadas para resolver problemas prácticos.

Este capítulo se estructura para guiar al lector desde los conceptos básicos hasta las aplicaciones avanzadas. Comienza con la definición formal de una función de varias variables, examinando su representación gráfica y sus propiedades fundamentales. A medida que avanzamos, exploramos la diferenciabilidad y la integrabilidad de estas funciones, así como las técnicas para encontrar máximos y mínimos locales y absolutos.

Contenido

- 1.1** Funciones y su dominio, *p. 10*
- 1.2** Gráficas de funciones y curvas de nivel, *p. 12*
- 1.3** Definición y ejemplos de normas, *p. 15*
- 1.4** Definición y ejemplos de métricas, *p. 20*
- 1.5** Topología de \mathbb{R}^n , *p. 22*

1.1. Funciones y su dominio

Definición 1.1.1: Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D , un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su rango es el conjunto de valores que toma f , es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo, escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y) . Las variables x y y son variables independientes y z es la variable dependiente [compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una variable].

Una función de dos variables es una función cuyo dominio es un subconjunto de \mathbb{R}^2 y cuyo rango es un subconjunto de \mathbb{R} . Una manera de representar tal función es mediante un diagrama de flechas (véase la figura 1.1), donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy y el rango es un conjunto de números sobre una recta real, que se muestra como un eje z .

Si una función f está dada por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de parejas (x, y) para el cual la expresión dada es un número bien definido.

Ejemplo 1.1.1: Para las siguientes funciones, evalúe $f(3, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Solución:

a) Tenemos que

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}.$$

La desigualdad $x + y + 1 \geq 0$, o bien, $y \geq -x - 1$, describe los puntos que quedan en o por arriba de la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio. Vea la figura 1.2.

b) Tenemos que

$$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 0.$$

Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define solo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\}.$$

Este es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. Vea la figura 1.3.

Ejemplo 1.1.2: Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

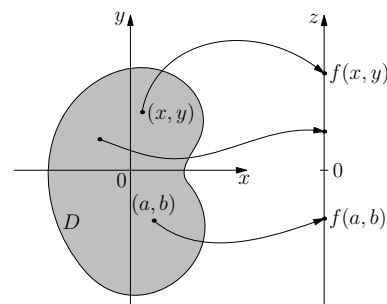


Figura 1.1

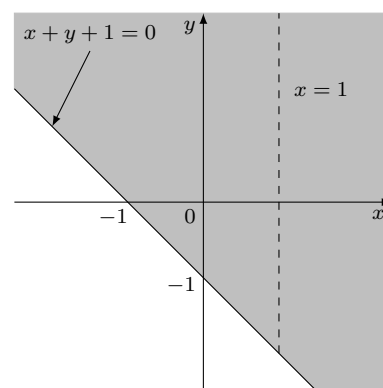


Figura 1.2 Representación geométrica del dominio de $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

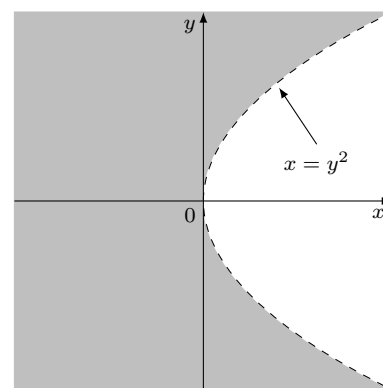


Figura 1.3 Representación geométrica del dominio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

Solución:

- a) Siguiendo la misma idea el ejemplo anterior, la expresión para f tiene sentido si la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Así, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}.$$

La desigualdad $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, o bien, $x^2 + y^2 \geq 1$, describe los puntos que quedan en o fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

- b) Puesto que $\ln(x^2 + y^2 - 1)$ se define solo cuando $x^2 + y^2 - 1 > 0$, es decir, $x^2 + y^2 > 1$ el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

Este es el conjunto de puntos que están fuera de la circunferencia sin tomar los puntos que están en $x^2 + y^2 = 1$.

Definición 1.1.2: Una función de tres variables, f , es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un único número real denotado por $f(x, y, z)$.

Ejemplo 1.1.3: Graficar el dominio de la siguiente función:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\right).$$

Solución: Procediendo como ejemplos anteriores, notemos que se debe cumplir que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 \geq 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 1 > 0.$$

Analicemos la primer desigualdad, si tomamos la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 4 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &\geq 4 \end{aligned}$$

la cual es una esfera centrada en el origen y de radio igual a 2. Luego, tomando la segunda desigualdad, se sigue que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &> 0 \\ x^2 + y^2 &> 1 \end{aligned}$$

Si se toma la igualdad, esta será un cilindro de radio igual a 1. Así, el dominio de la función f es todo el exterior tanto del cilindro, como de la esfera. La función puede tomar puntos del “contorno” de la esfera, pero no puede tomar puntos del “contorno” del cilindro. Es difícil dibujar con exactitud el dominio de f , pero puede mirar la figura 1.6.

Ejemplo 1.1.4: Graficar el dominio de la siguiente función:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{y + z - 2}.$$

Solución: Procediendo como ejemplos anteriores, notemos que se debe cumplir que

$$x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \quad \text{y} \quad y + z - 2 \neq 0.$$

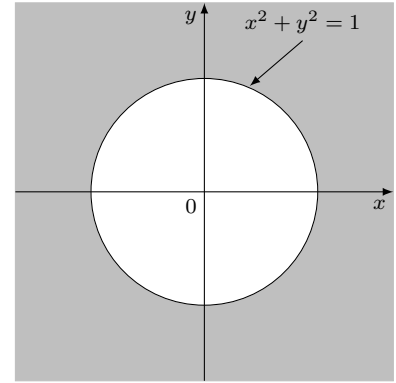


Figura 1.4 Representación geométrica del dominio de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

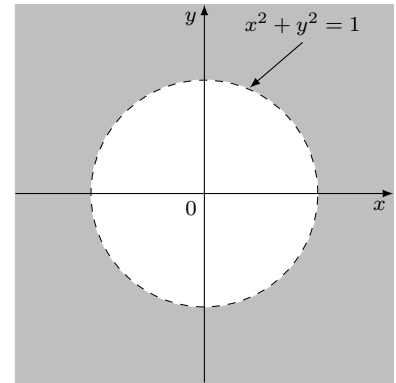


Figura 1.5 Representación geométrica del dominio de $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

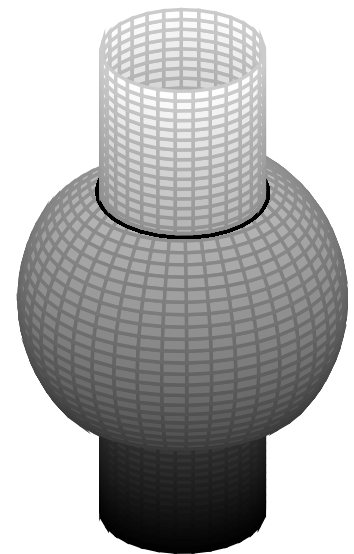


Figura 1.6

Analicemos la primer desigualdad, si tomamos la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4 &\geq 0 \\x^2 + y^2 &\geq 4\end{aligned}$$

la cual es un cilindro centrado en el origen y de radio igual a 2. Luego, analizando la segunda expresión; si tomamos la igualdad, se obtiene $y + z = 2$, el cual, es un plano. Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto de (x, y, z) que quedan en o fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Además, no puede tomar los puntos que conforma el plano $y + z - 2 = 0$, pues la división entre 0 no está definida. Es difícil dibujar con exactitud el dominio de f , pero puede mirar la figura 1.7.

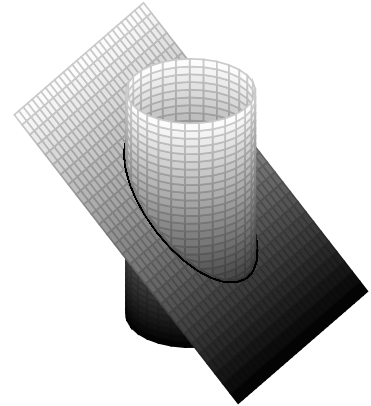


Figura 1.7

1.2. Gráficas de funciones y curvas de nivel

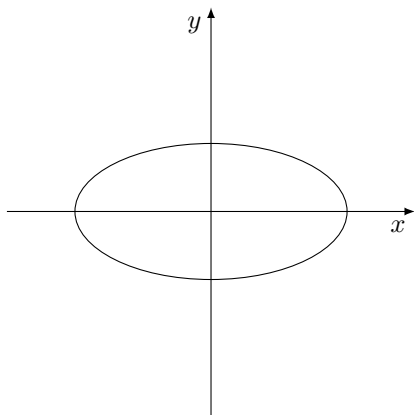
Recordatorio: Es importante destacar que el círculo es un caso particular de la elipse, pues recordemos que la expresión para una circunferencia centrada en el origen está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

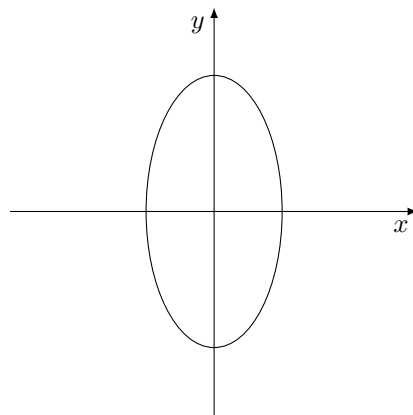
donde r es el radio de dicha circunferencia y es una constante real, mientras que una elipse está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo a y b constantes reales. Generalmente la elipse tiene dos ejes de diferentes longitudes y dos focos distintos, pero el círculo es una forma particular de elipse donde ambos ejes son idénticos y los dos focos coinciden en el centro del círculo. La elipse puede presentarse de dos maneras distintas: horizontalmente o verticalmente. Cuando decimos que una elipse está en posición horizontal, significa que su eje mayor se extiende más en el eje x , mientras que en la posición vertical, el eje mayor se extiende más en el eje y .



(a) Elipse horizontal: Cuando $a > b$



(b) Elipse vertical: Cuando $b > a$

Figura 1.8 Representación de la elipse

La hipérbola es otra cónica, al igual que la elipse. Sin embargo, a diferencia de la elipse que tiene una forma cerrada, la hipérbola es una curva abierta que se extiende hacia el infinito en ambas direcciones. En términos algebraicos, la ecuación de una hipérbola con centro en el origen se expresa como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son constantes reales. Al igual que la elipse, la hipérbola puede presentarse en dos configuraciones principales: horizontal y vertical. En el caso de una hipérbola horizontal, las ramas principales de la hipérbola se extienden horizontalmente a lo largo del eje x , mientras que en una hipérbola vertical, las ramas principales se extienden verticalmente a lo largo del eje y .

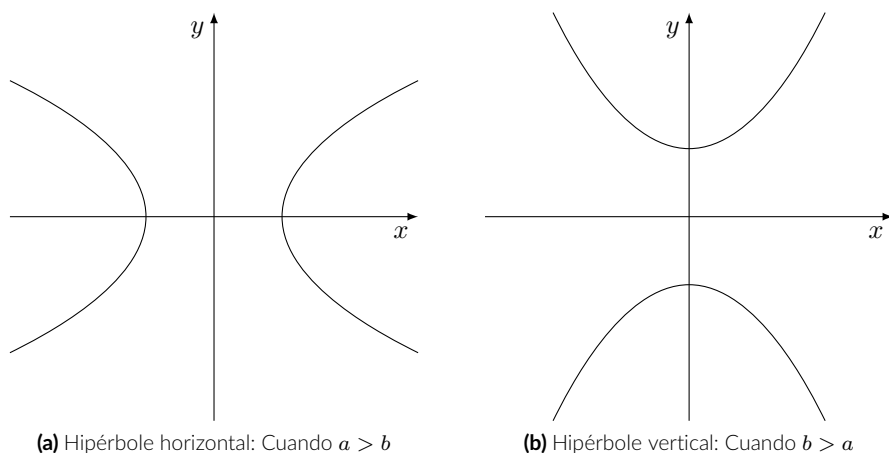


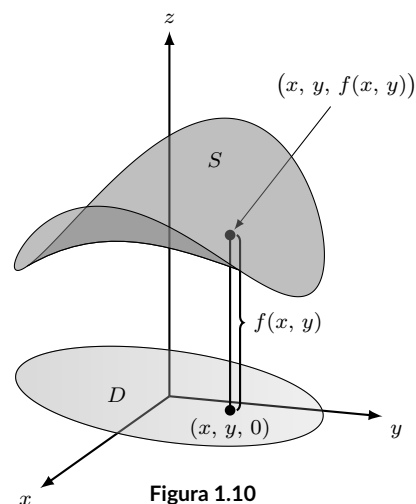
Figura 1.9 Representación de la hipérbola

Definición 1.2.1: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces la gráfica de f es

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observación: Si f es una función de dos variables con dominio D , entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en \mathbb{R}^3 tal que (x, y) y $z = f(x, y)$ está en D .

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Podemos visualizar la gráfica S de f directamente sobre o abajo de su dominio D en el plano xy (véase la figura 1.10).



Un método para poder graficar funciones de dos variables es mediante un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar líneas de contorno o curvas de nivel. Las curvas de nivel son líneas imaginarias que se utilizan para representar superficies tridimensionales en dos dimensiones, como mapas topográficos o gráficos de funciones de dos variables. Estas curvas conectan puntos que tienen la misma altura o el mismo valor de la función en el caso de las superficies. Por ejemplo, en un mapa topográfico, las curvas de nivel unen puntos que tienen la misma elevación sobre el nivel del mar. Al observar estas curvas, podemos entender la variación de la elevación o la función en diferentes áreas de la superficie, lo que proporciona una representación visual y comprensible del terreno o de la función en cuestión.

Definición 1.2.2: Se define la **curva de nivel** de f correspondiente al valor $k \in \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{C}_k(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\}.$$

Observación: Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k . En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f . Vea la imagen 1.12.

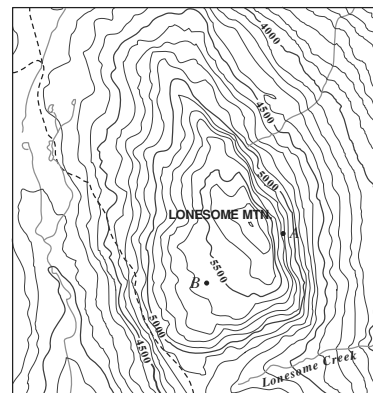


Figura 1.11 Un ejemplo común de las curvas de nivel son los mapas topográficos de regiones montañosas

Ejemplo 1.2.1: Graficar la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Solución: Para graficar la función f , obtengamos algunas curvas de nivel. Sea $z = x^2 - y^2$,

- Si $z = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 \\ &= (x - y)(x + y); \end{aligned}$$

así que $y = x$ o $y = -x$. Es decir, obtenemos dos rectas perpendiculares.

- Si $z = 1$, entonces

$$1 = x^2 - y^2;$$

así que obtenemos una hipérbola (cuando $y = 0$, $x = \pm 1$).

- Si $z = 2$, entonces

$$2 = x^2 - y^2;$$

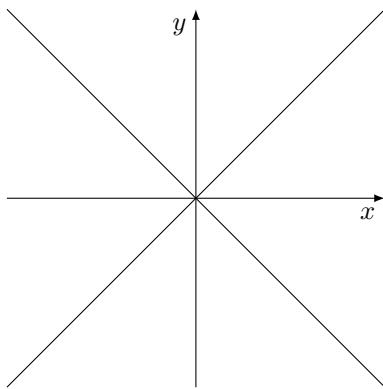
así que obtenemos una hipérbola (cuando $y = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$).

- Si $z = 3$, entonces

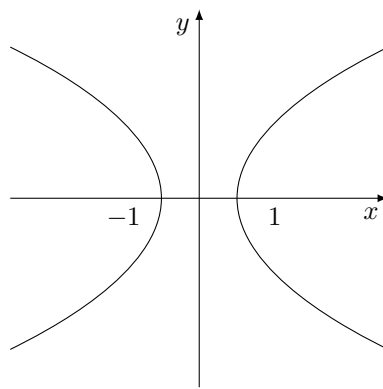
$$3 = x^2 - y^2;$$

así que obtenemos una hipérbola (cuando $y = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$).

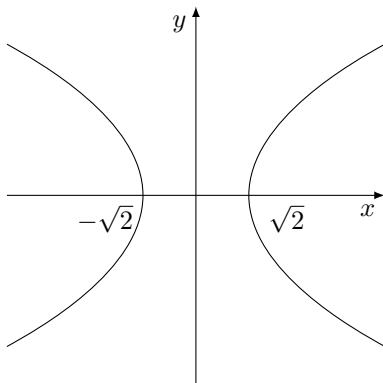
Entonces, las curvas de nivel (en el plano xy) son como se muestran a continuación:



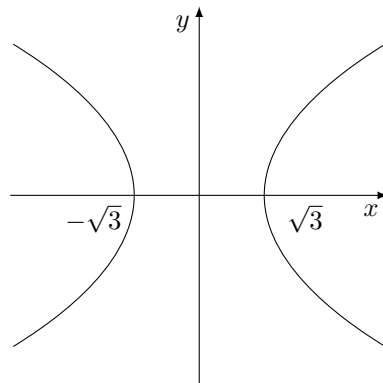
(a) Cuando $z = 0$



(b) Cuando $z = 1$



(c) Cuando $z = 2$



(d) Cuando $z = 3$

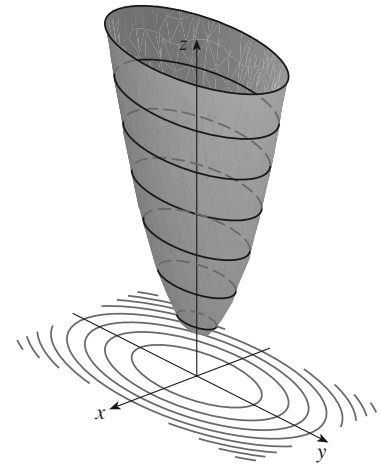


Figura 1.12 Representación geométrica de las curvas de nivel de una función

Figura 1.13 Algunas curvas de nivel de $x^2 - y^2$

Por último, encontremos los “perfiles” de la función. Si $y = 0$, entonces $z = x^2$; y si $x = 0$, entonces $z = -y^2$. Por tanto, la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ está dada como sigue:

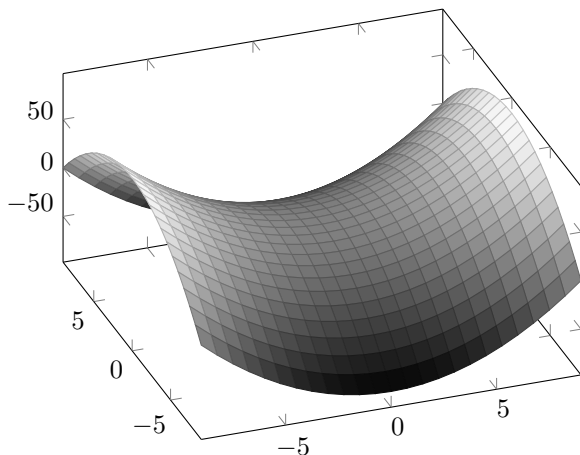


Figura 1.14 Gráfica de la función $x^2 - y^2$

1.3. Definición y ejemplos de normas

Una norma en el contexto del cálculo de varias variables es una función que asigna a cada vector en un espacio vectorial una magnitud no negativa, de modo que satisface ciertas propiedades fundamentales. La norma más comúnmente utilizada es la norma euclidiana o norma ℓ_2 , que se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector. Esta norma captura la noción geométrica de distancia y es fundamental en el análisis vectorial y el cálculo diferencial e integral.

Además de la norma euclidiana, existen otras normas importantes en el cálculo de varias variables, como la norma ℓ_1 (que es la suma de los valores absolutos de las componentes del vector), la norma ℓ_∞ (que es el máximo valor absoluto de las componentes del vector), entre otras.

Definición 1.3.1: Sea V un espacio vectorial sobre K (donde K generalmente es el conjunto de los números reales \mathbb{R} o los números complejos \mathbb{C}). La norma en V es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades: Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y $\lambda \in K$

- i. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$,
- ii. $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- iii. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$,
- iv. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (desigualdad del triángulo).

Ejemplo 1.3.1: En \mathbb{R} , sea $\|\mathbf{x}\| = |x|$, probemos entonces que $\|\cdot\|$ cumple las cuatro propiedades establecidas en la definición previa.

- i. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= |x| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.

ii. Por el curso de Cálculo I,

$$\|\mathbf{x}\| = 0_{\mathbb{R}} \iff |x| = 0_{\mathbb{R}} = 0 \iff x = 0 = \mathbf{0}_V.$$

Por tanto, $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iii. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathbf{x}\| &= |\lambda x| \\ &= |\lambda| |x| \\ &= |\lambda| \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$.

iv. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= |x + y| \\ &\leq |x| + |y| \\ &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Dado que $\|\cdot\|$ satisface las cuatro propiedades de una norma, concluimos que $\|\cdot\|$ es una norma.

Observación: En el ejemplo anterior, aunque el espacio vectorial era \mathbb{R} , es importante distinguir entre los vectores y los números reales, pues son cosas muy distintas. Por tanto, los vectores los representaremos utilizando letras en negrita para distinguirlos de los números reales.

Ejemplo 1.3.2: En \mathbb{R}^2 , sea $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$, probemos entonces que $\|\cdot\|_1$ cumple las cuatro propiedades establecidas en la definición previa.

i. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \underbrace{|x|}_{\geq 0} + \underbrace{|y|}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Así, $\|(x, y)\|_1 \geq 0$.

ii. \Rightarrow) Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|,$$

así que $|x| = 0$ y $|y| = 0$. Es decir, $x = 0$ y $y = 0$. Así pues, se sigue que $(x, y) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

\Leftarrow) Sea $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ con $\mathbf{0} = (0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} \|(0, 0)\|_1 &= |0| + |0| \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|(0, 0)\|_1 = 0$.

iii. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\lambda(x, y)\|_1 &= \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 \\ &= |\lambda x| + |\lambda y| \\ &= |\lambda||x| + |\lambda||y| \\ &= |\lambda|(|x| + |y|) \\ &= |\lambda|\|(x, y)\|_1\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\lambda(x, y)\|_1 = |\lambda|\|(x, y)\|_1$.

iv. Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned}\|(x, y) + (u, v)\|_1 &= \|(x + u, y + v)\|_1 \\ &= |x + u| + |y + v| \\ &\leq |x| + |u| + |y| + |v| \\ &= |x| + |y| + |u| + |v| \\ &= \|(x, y)\|_1 + \|(u, v)\|_1\end{aligned}$$

Por tanto, $\|(x, y) + (u, v)\|_1 \leq \|(x, y)\|_1 + \|(u, v)\|_1$.

Dado que $\|\cdot\|_1$ satisface las cuatro propiedades de una norma, concluimos que $\|\cdot\|_1$ es una norma.

Ejemplo 1.3.3: En \mathbb{R}^2 , sea $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$, probemos entonces que $\|\cdot\|_\infty$ cumple las cuatro propiedades establecidas en la definición previa.

i. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

Notemos que si $\max\{|x|, |y|\} = |x|$, entonces $\|(x, y)\|_\infty = |x| \geq 0$. De manera análoga, si $\max\{|x|, |y|\} = |y|$, entonces $\|(x, y)\|_\infty = |y| \geq 0$. Así que, en cualquiera de los dos casos, $\|(x, y)\|_\infty \geq 0$.

ii. \Rightarrow) Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

Si $\max\{|x|, |y|\} = |x|$, entonces implica que $|y| \leq |x| = 0$. Sin embargo, $0 \leq |y| \leq |x| = 0$, lo que conduce a $|x| = 0$ y $|y| = 0$. Por lo tanto, $x = 0$ y $y = 0$, es decir, $(x, y) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

\Leftarrow) Si $(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $x = 0$ y $y = 0$. Así,

$$\begin{aligned}\|(x, y)\|_\infty &= \|(0, 0)\|_\infty \\ &= \max\{|0|, |0|\} \\ &= \max\{0\} \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|(0, 0)\|_\infty = 0$.

iii. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\lambda(x, y)\|_\infty &= \|(\lambda x, \lambda y)\|_\infty \\ &= \max\{|\lambda x|, |\lambda y|\} \\ &= |\lambda| \max\{|x|, |y|\} \\ &= |\lambda|\|(x, y)\|_\infty\end{aligned}$$

Por tanto $\|\lambda(x, y)\|_\infty = |\lambda|\|(x, y)\|_\infty$.

Por el curso de Cálculo I, se establece que

$$\max\{|\lambda||x|, |\lambda||y|\} = |\lambda| \max\{|x|, |y|\}.$$

En efecto: Si $\lambda = 0$, es evidente que la anterior igualdad se cumple. En caso contrario, es decir, $\lambda \neq 0$, procedemos por casos:

i) Si $|\lambda||x| \leq |\lambda||y|$, entonces $\max\{|\lambda||x|, |\lambda||y|\} = |\lambda||y|$ y $|x| \leq |y|$, pues $\lambda \neq 0$ y además, $|\lambda| > 0$. Por lo tanto $|\lambda| \max\{|x|, |y|\} = |\lambda||y|$. Así, se verifica la igualdad.

ii) Se procede de manera análoga a (i).

iv. Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (u, v)\|_\infty &= \|(x + u, y + v)\|_\infty \\ &= \max\{|x + u|, |y + v|\} \\ &\leq \max\{|x| + |u|, |y| + |v|\} \\ &\leq \max\{|x|, |y|\} + \max\{|u|, |v|\} \\ &= \|(x, y)\|_\infty + \|(u, v)\|_\infty \end{aligned}$$

Dado que $\|\cdot\|_\infty$ satisface las cuatro propiedades de una norma, concluimos que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma.

Teorema 1.3.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): Sea V un k -espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, entonces se cumple

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Demostración: Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, con $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ y sea $\lambda \in K$. Consideremos al vector $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \lambda \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \lambda \langle \mathbf{y}, \lambda \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + |\lambda|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Así,

$$0 \leq \|\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + |\lambda|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Entonces

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + |\lambda|^2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (1.3.1)$$

lo cual se cumple para toda $\lambda \in K$, en particular para $\lambda = \frac{(-1)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Además,

es evidente que $\bar{\lambda} = \frac{(-1)\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Así que,

$$|\lambda|^2 = \frac{(-1)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \cdot \frac{(-1)\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{y}\|^2} = \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^4}.$$

Sustituyendo $\lambda, \bar{\lambda}$ y $|\lambda|^2$ en la expresión (1.3.1), se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{y}\|^2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^4} \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \leq \|\mathbf{x}\|^2,$$

de donde se sigue que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Recordatorio: Sea V un k -espacio vectorial. Un producto interno en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ tal que

- i) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.
- ii) $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \forall \lambda \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- iv) Si $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.

Además, recordemos que el producto interno es aditivo y homogéneo conjugado respecto al segundo argumento, es decir,

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$,
- $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Así, finalmente obtenemos que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Observación: Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son linealmente dependientes, entonces

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son linealmente independientes, entonces

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| < \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Ejemplo 1.3.4: Sea V un k -espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, entonces

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

es una norma.

Demostración: Probemos que $\|\mathbf{x}\|$ cumple las cuatro propiedades de una norma.

i. Sea $\mathbf{x} \in V$,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq 0.$$

Por lo tanto $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.

ii. Por las propiedades del producto interno, se sigue que

$$0 = \|\mathbf{x}\| \iff \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iii. Sean $\mathbf{x} \in V$ y $\lambda \in K$,

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathbf{x}\| &= \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda \bar{\lambda}} \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \\ &= |\lambda| \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$.

iv. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

por lo que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Dado que $\|\cdot\|$ satisface las cuatro propiedades de una norma, concluimos que $\|\cdot\|$ es una norma.

Definición 1.3.2: Sea V un k -espacio vectorial con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norma en V inducida por el producto interno, se define mediante la regla

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Ejemplo 1.3.5: En el espacio vectorial \mathbb{R}^2 ,

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

define una norma. En efecto: Observemos que

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto interno usual en \mathbb{R}^2 . Sin embargo, notamos que

$$\sqrt{\langle (x, y), (x, y) \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2.$$

Por lo tanto, concluimos que $\|\cdot\|_2$ constituye una norma en \mathbb{R}^2 .

1.4. Definición y ejemplos de métricas

Definición 1.4.1: Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama distancia o métrica en X si cumple las siguientes propiedades:

- i. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,
- ii. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- iii. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,
- iv. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$.

Ejemplo 1.4.1: Sea V un k -espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$. Entonces la función $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente regla es una métrica en V :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Demostración: Probemos pues, que la anterior expresión cumple los cuatro axiomas de una métrica.

- i. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.

- ii. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

- iii. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= \|-(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &= \|(-1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &= |-1| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Por tanto, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

iv. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{z} - \mathbf{z} - \mathbf{y}\| \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z} - \mathbf{z} + \mathbf{y}\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Por tanto, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Dado que d satisface los cuatro axiomas de una métrica, concluimos que d es una métrica.

Definición 1.4.2: Sea V un k -espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$. La distancia o métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Ejemplo 1.4.2: En el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , la expresión

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |x - y|$$

constituye una métrica.

Ejemplo 1.4.3: En el conjunto \mathbb{R}^2 , la expresión

$$d_2((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

constituye una métrica. En efecto: Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} d_2((x, y), (u, v)) &= \|(x, y) - (u, v)\| \\ &= \|(x - u, y - v)\|_2 \\ &= \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia o métrica d_2 es inducida por la norma $\|\cdot\|_2$.

Ejemplo 1.4.4: En el conjunto \mathbb{R}^2 , la expresión

$$d_1((x, y), (u, v)) = |x - u| + |y - v|$$

constituye una métrica. En efecto: Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} d_1((x, y), (u, v)) &= \|(x, y) - (u, v)\| \\ &= \|(x - u, y - v)\|_1 \\ &= |x - u| + |y - v| \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia o métrica d_1 es inducida por la norma $\|\cdot\|_1$.

Ejemplo 1.4.5: En el conjunto \mathbb{R}^2 , la expresión

$$d_\infty((x, y), (u, v)) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$$

constituye una métrica. En efecto: Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} d_\infty((x, y), (u, v)) &= \|(x, y) - (u, v)\| \\ &= \|(x - u, y - v)\|_\infty \\ &= \max\{|x - u|, |y - v|\} \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia o métrica d_∞ es inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Ejemplo 1.4.6: Probemos que en el conjunto X , la expresión

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$$

constituye una métrica en X .

Demostración: Probemos que dicha expresión cumple las cuatro propiedades de la definición 1.4.1.

i. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, entonces

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

o

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \quad \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Así, en cualquier caso, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$.

ii. Por definición de la métrica, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

iii. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Procedamos por casos:

a) Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, pero $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Por tanto, $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, por lo que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

b) Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, pero $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Por tanto, $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 1$, por lo que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Así, en cualquiera de los casos, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

iv. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Procedamos por casos:

a) Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

b) Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} 1 &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Afirmamos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ y $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$ no ocurre, pues si $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ y $d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ y $\mathbf{z} = \mathbf{y}$. Por lo tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ lo cual no puede ser.

1.5. Topología de \mathbb{R}^n

La Topología es un área de las matemáticas muy importante que se interesa por conceptos como proximidad, continuidad, conectividad (o conexidad), compacidad, y muchos otros más. Para abordarlos de manera precisa, primero es necesario definir un cierto tipo de conjuntos (que en Topología se les conoce como los conjuntos abiertos).

Cuando en un conjunto se cuenta con una forma de medir la distancia entre cualesquiera dos de sus elementos (como es el caso de \mathbb{R}^n), existe una manera de decir quiénes son los conjuntos abiertos y con base en estos desarrollar los conceptos que mencionamos al principio de esta sección.

1.5.1. Clasificación de puntos

La clasificación de puntos se refiere a la categorización de puntos dentro y fuera de conjuntos en un espacio métrico. Las bolas, o vecindades, son conjuntos abiertos definidos alrededor de un punto dado. Estas bolas juegan un papel crucial en la clasificación de puntos, ya que nos permiten definir conceptos como puntos interiores, exteriores, fronterizos, de acumulación y de adherencia, que son fundamentales para comprender la topología y la convergencia en Cálculo III. Las bolas se definen generalmente como conjuntos de puntos que están dentro de una cierta distancia (radio) de un punto central.

En lugar de clasificar un punto en este momento, examinaremos algunos ejemplos de conjuntos de bolas para derivar la idea a partir de ellos. En \mathbb{R}^n , definimos el concepto de vecindad o bola apoyándonos en alguna de las formas que disponemos para medir la distancia entre elementos de \mathbb{R}^n , que en nuestro caso será la distancia euclídeana (en los problemas mostraremos que, en términos topológicos, da lo mismo cuál de estas distancias elijamos o, en última instancia, cuál norma elijamos).

Algunos objetos geométricos son muy sencillos de describir en términos del concepto de distancia, y sin duda el más sencillo de ellos es el formado por los puntos que se encuentran a una distancia constante $r > 0$ de un punto fijo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, que como todos sabemos, en \mathbb{R}^2 es una circunferencia de radio r , y en \mathbb{R}^3 es una esfera, también de radio r . Sin embargo, para nuestros objetivos, el conjunto que resultará de mayor interés no es tanto el formado por los puntos que se encuentran a una distancia r de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sino los que se encuentran a una distancia menor a r . En \mathbb{R}^2 este conjunto consistirá de los puntos que se encuentran “dentro” de la circunferencia de radio r , y en \mathbb{R}^3 consistirá de los que están “dentro” de la esfera, también de radio r .

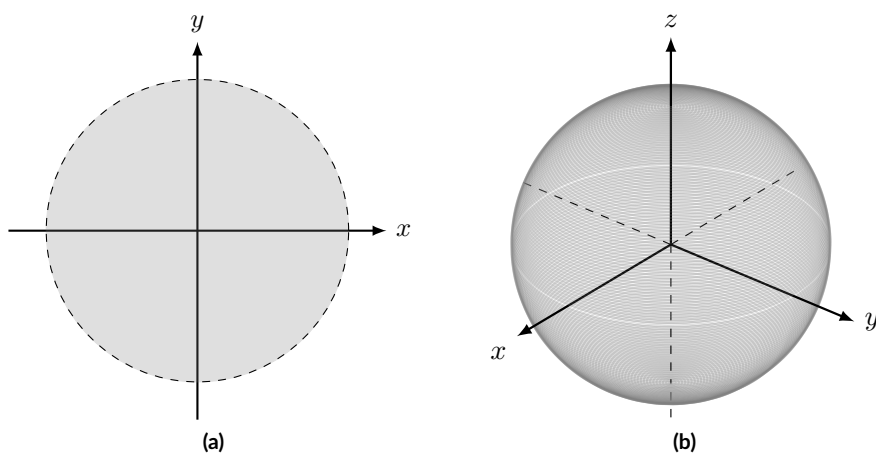


Figura 1.15 Las bolas de radio r con centro en el origen en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 respectivamente

Definición 1.5.1: Con base en lo anterior, dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos bola abierta de radio $r > 0$ con centro en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ como

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\}$$

y definimos la bola cerrada de radio $r > 0$ con centro en $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ como

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r\}$$

En otras palabras, la esfera es la cáscara y la bola es la región que se encuentra dentro de la cáscara. La bola abierta consiste en la región situada dentro de la cáscara sin incluir la cáscara en sí. La bola cerrada está formada por la región contenida dentro de la cáscara y por la cáscara misma.

Así, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, podemos clasificar a todos los puntos de \mathbb{R}^n en términos de su "localización" con respecto a dicho conjunto, en donde por localización nos referimos a algo más profundo que el simple concepto de pertenencia. A fin de precisar esta idea de localización con respecto a un conjunto A , recurriremos a la figura 1.16 en \mathbb{R} .

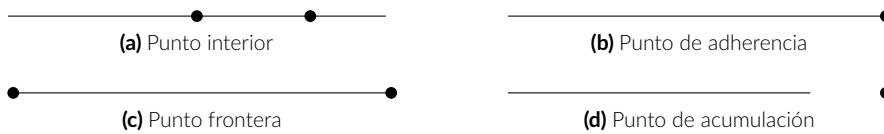


Figura 1.16 Las diferentes localizaciones que puede tener un punto de \mathbb{R}^n con respecto de un conjunto A

- a) Un punto interior en un conjunto es aquel que tiene un entorno (una vecindad) completamente contenido dentro del conjunto. Es decir, si tomas un punto dentro del conjunto, puedes encontrar una pequeña esfera alrededor de ese punto que también está completamente dentro del conjunto.
- b) Un punto de adherencia de un conjunto es aquel alrededor del cual se pueden encontrar puntos del conjunto, dentro de cualquier entorno, incluido el propio punto. En otras palabras, un punto de adherencia puede ser tanto un punto del conjunto como un punto límite del conjunto.
- c) Un punto frontera de un conjunto es aquel que no es ni un punto interior ni un punto exterior del conjunto. Esto significa que cualquier entorno alrededor de un punto frontera contendrá puntos tanto dentro como fuera del conjunto.
- d) Un punto de acumulación de un conjunto es aquel alrededor del cual se pueden encontrar infinitos puntos del conjunto, dentro de cualquier entorno. Es decir, aunque el punto de acumulación en sí mismo no necesariamente pertenece al conjunto, existen puntos del conjunto arbitrariamente cercanos a él.

Observación: Se puede generalizar lo expuesto anteriormente para aplicarlo a un conjunto arbitrario X , en lugar de restringirse únicamente al espacio \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.5.1: Represente la bola siguiente utilizando la métrica d_1 :

$$B_{d_1}((0, 0), 1)$$

Solución: Para trazar la bola anterior en el gráfico, es necesario observar que

$$\begin{aligned} (x, y) \in B_{d_1}((0, 0), 1) &\iff d_1((0, 0), 1) < 1 \\ &\iff \|(x, y) - (0, 0)\|_1 < 1 \\ &\iff \|(x, y)\|_1 < 1 \\ &\iff |x| + |y| < 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la representación gráfica de esta bola está dada por la figura 1.17.

Ejemplo 1.5.2: Represente la bola siguiente utilizando la métrica d_∞ :

$$B_{d_\infty}((0, 0), 1)$$

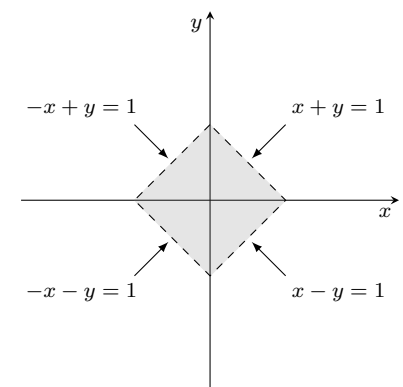


Figura 1.17

Solución: Para trazar la bola anterior en el gráfico, es necesario observar que

$$\begin{aligned}(x, y) \in B_{d_\infty}((0, 0), 1) &\iff d_\infty((0, 0), 1) < 1 \\ &\iff \|(x, y) - (0, 0)\|_\infty < 1 \\ &\iff \|(x, y)\|_\infty < 1 \\ &\iff \max\{|x|, |y|\} < 1\end{aligned}$$

Es difícil graficar la anterior expresión, así que procedamos por casos

- i) Si $\max\{|x|, |y|\} = |y|$, entonces $|x| \leq |y| = 1$; por consiguiente, $y = \pm 1$. Si $y = 1$, entonces $|x| \leq 1$, lo que implica que $-1 \leq x \leq 1$. De manera similar, si $y = -1$, entonces $|x| \leq 1$, lo que implica que $-1 \leq x \leq 1$.
- ii) Si $\max\{|x|, |y|\} = |x|$, entonces $|y| \leq |x| = 1$; por consiguiente, $x = \pm 1$. Si $x = 1$, entonces $|y| \leq 1$, lo que implica que $-1 \leq y \leq 1$. De manera similar, si $x = -1$, entonces $|y| \leq 1$, lo que implica que $-1 \leq y \leq 1$.

Por lo tanto, la representación gráfica de esta bola está dada por la figura 1.18.

Ejemplo 1.5.3: Represente la bola siguiente utilizando la métrica d_2 :

$$B_{d_2}((0, 0), 1)$$

Solución: Para trazar la bola anterior en el gráfico, es necesario observar que

$$\begin{aligned}(x, y) \in B_{d_2}((0, 0), 1) &\iff d_2((0, 0), 1) < 1 \\ &\iff \|(x, y) - (0, 0)\|_2 < 1 \\ &\iff \|(x, y)\|_2 < 1 \\ &\iff \sqrt{x^2 + y^2} < 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, la representación gráfica de esta bola está dada por la figura 1.19.

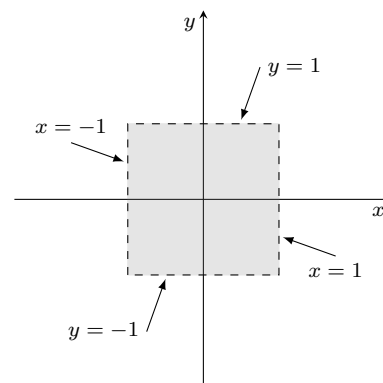


Figura 1.18

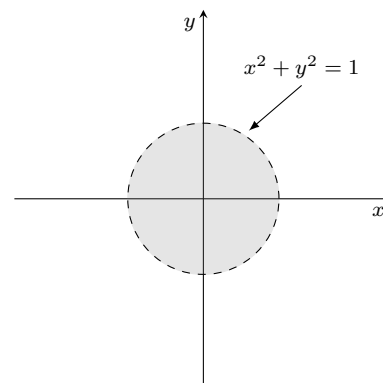
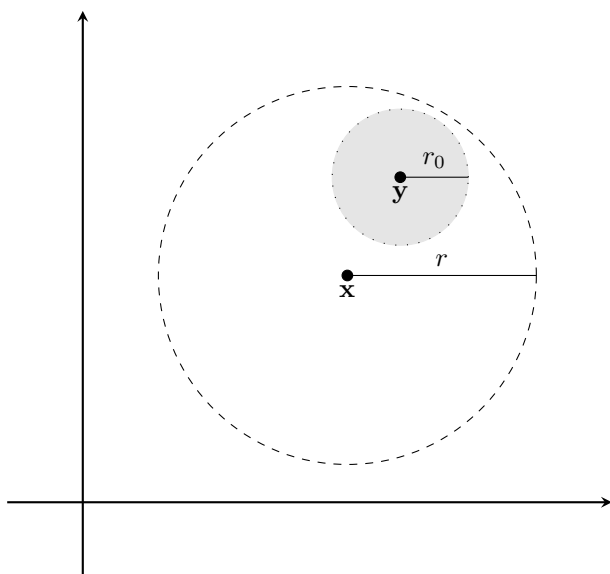


Figura 1.19

1.5.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Observación: Diremos que un conjunto es abierto si para toda $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$, existe $r_0 = \frac{r - d(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2} > 0$ tal que $B(\mathbf{y}, r_0) \subset B(\mathbf{x}, r)$. Geométricamente,



Proposición 1.5.1:

- i. La intersección de dos bolas es un conjunto abierto.
- ii. El conjunto vacío es un conjunto abierto.

Demostración:

- i. Sea $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, r_1) \cap B(\mathbf{y}, r_2)$, entonces $\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, r_1)$ y $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, r_2)$. Así, existe $r_0 > 0$ y $r_0^* > 0$ tal que $B(\mathbf{z}, r_0) \subseteq B(\mathbf{x}, r_1)$ y $B(\mathbf{z}, r_0^*) \subseteq B(\mathbf{y}, r_2)$. Sea $r_0^{**} = \min \{r_0, r_0^*\}$, entonces

$$B(\mathbf{z}, r_0^{**}) \subseteq B(\mathbf{z}, r_0) \quad \text{y} \quad B(\mathbf{z}, r_0^{**}) \subseteq B(\mathbf{z}, r_0^*).$$

Por tanto, $B(\mathbf{z}, r_0^{**}) \subseteq B(\mathbf{x}, r_1) \cap B(\mathbf{y}, r_2)$, por lo que $B(\mathbf{x}, r_1) \cap B(\mathbf{y}, r_2)$ es un conjunto abierto.

- ii. Supongamos que el conjunto vacío \emptyset no es abierto. Entonces, existe un $\mathbf{x} \in \emptyset$ tal que para todo $r > 0$, $B(\mathbf{x}, r) \not\subseteq \emptyset$. En particular, esto implica que existe un $\mathbf{x} \in \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, \emptyset es un conjunto abierto.

BIBLIOGRAFÍA

Fuente básica

- [1] Swokowski, Earl W. "Cálculo con Geometría Analítica". Grupo Edit 4ta. Edición, 1998.

Fuente de consulta

- [2] Larson/Hostetler/Edwards. "Cálculo", Vol. 2 Mc. Graw Hill, 5a. Edición. 1996.
- [3] Zill, Dennis G. "Cálculo con Geometría Analítica". Grupo Editorial. Ibero-america. 1985.

