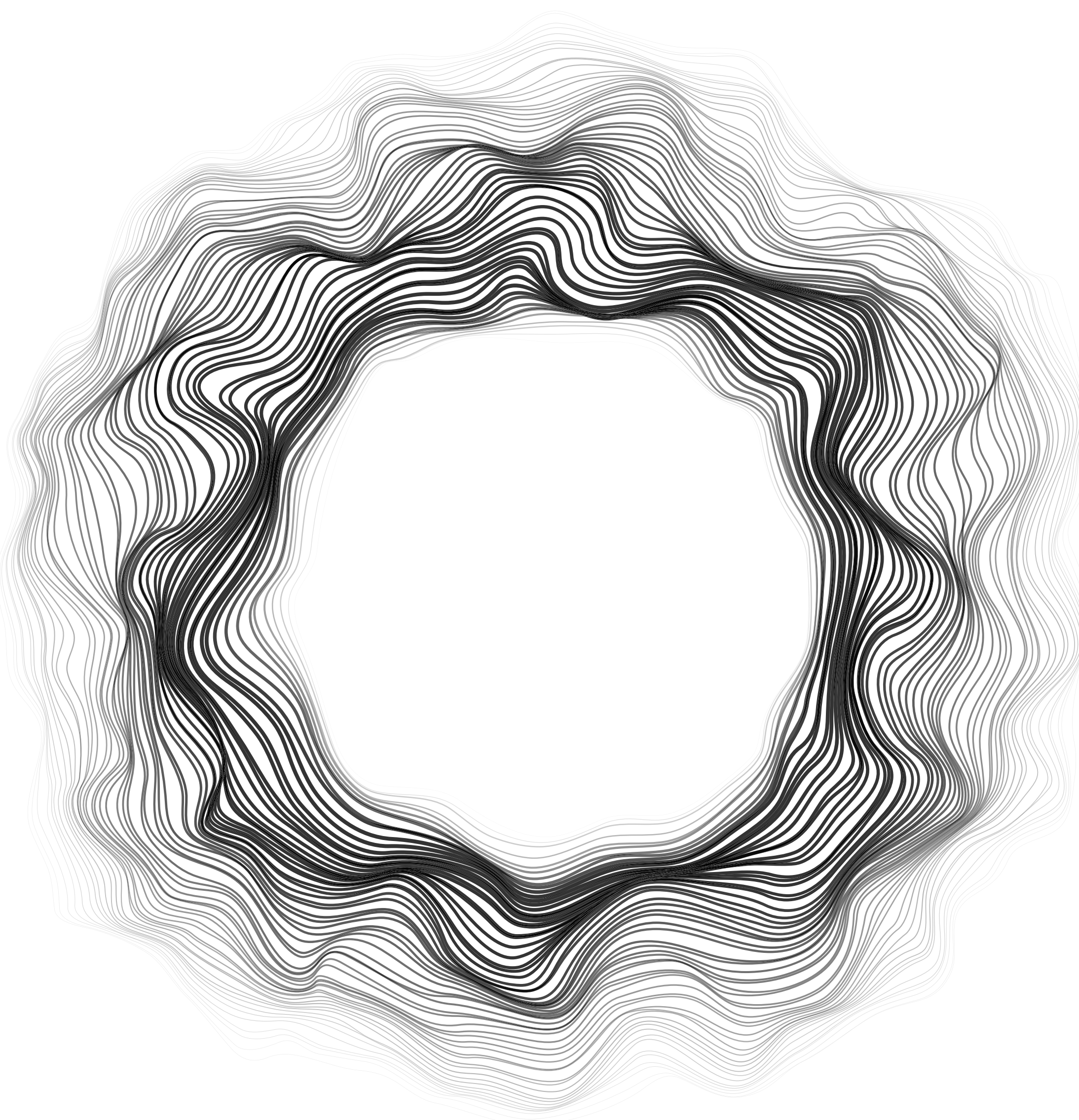
CÁLCULO MULTIVARIABLE

Sabino D. Castro

Antonio M. Mendoza



CÁLCULO III

Cálculo de varias variables

Andrés Sabino Díaz Castro

Profesor de matemáticas de la ESFM

México, 2024

CONTENIDO

PREFACIO

Se recalca que esta obra son notas del curso de Cálculo III, del periodo de 2024/2. Es probable que exista algún error ortográfico o matemático, por lo que se recomienda consultar la bibliografía proporcionada al final de este trabajo. La presente obra consta de todo el contenido que adjudicó el Lic. Andrés Sabino Díaz Castro, quien imparte clases en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) en el Instituto Politécnico Nacional (IPN). Hice el mayor esfuerzo en estructurar el libro a base de proposiciones, ejercicios, notas, etc.; y se agregaron y modificaron algunas definiciones, a fin de lograr una mayor comprensión sin llegar a tener alguna ambigüedad.

Cada capítulo contiene varios ejercicios y demostraciones. Estos son de diversos tipos y pueden ayudar a tener una mejor comprensión del tema. Cabe mencionar que este libro fue mecanografiado por Marco Antonio Molina Mendoza, estudiante de la Escuela Superior de Física y Matemáticas. Si lo deseas o lo requieres, puedes imprimir esta obra, eres libre de hacerlo y no necesitas autorización. Cualquier mención a esta obra es apreciada, pero no requerida. Se sigue trabajando para corregir errores y/o mejorar este trabajo, por lo que está en constante cambio. Se recomienda entrar en **Biblioteca ESFM** para encontrar la versión más actualizada.

Algunos cambios han sido resultado de los comentarios de mis amigos y estudiantes de la Escuela Superior de Física y Matemáticas. Estas son algunas de las muchas mejoras que se han incorporado en esta edición.

- Aspecto estético mejorado: He trabajado arduamente en mejorar el aspecto visual del libro. Se han incorporado nuevas fuentes y estilos para que sea más fácil de leer y asimilar los conceptos.

- Errores ortográficos y matemáticos corregidos: He realizado una revisión minuciosa para garantizar la precisión en todos los aspectos del contenido. Los errores ortográficos y matemáticos se han corregido para ofrecer una experiencia de aprendizaje fluida y confiable.

- Imágenes actualizadas: He renovado todas las imágenes y gráficos del libro para asegurarme de que sean claros, informativos y visualmente atractivos. Las nuevas ilustraciones ayudarán a comprender mejor los conceptos y aplicaciones del álgebra lineal en el mundo real.

- Ejemplos adicionales y ejercicios prácticos: He añadido más ejemplos paso a paso y problemas resueltos para reforzar el entendimiento de los temas discutidos.

Quiero destacar que este libro, disponible en formato PDF, ofrece una funcionalidad adicional a través de tres hipervínculos de gran utilidad.

- Números de páginas: Se ubican en la parte superior derecha e izquierda, dependiendo de si es una página par o impar. Al hacer clic, te redirigirán al índice del libro.
- Nombres de secciones en el encabezado: Se localizan en la parte superior derecha de cada página impar. Al hacer clic, te llevarán al inicio de la respectiva sección
- Nombres de capítulos en el encabezado: Se encuentran en la parte superior izquierda de cada página par. Al hacer clic, te dirigirán al inicio del correspondiente capítulo.

En la elaboración de este libro, he optado por una presentación que refleje la esencia misma de la disciplina: precisión, claridad y elegancia matemática. Con este propósito en mente, he desarrollado una plantilla en LaTeX que resalta la pureza del contenido, utilizando únicamente el contraste entre el blanco y el negro para enfocar la atención en los conceptos fundamentales que exploraremos a lo largo de estas páginas.

La elección de un diseño en blanco y negro no es solo estética, sino una decisión que busca facilitar la comprensión del material para los lectores. Al eliminar cualquier distracción visual que pueda surgir del uso de colores llamativos, me he enfocado en ofrecer una experiencia de lectura que permita una inmersión total en el mundo del Cálculo.

Las ecuaciones, teoremas y demostraciones, que constituyen el núcleo de este texto, se presentan de manera clara y legible, sin interferencias visuales. La tipografía se ha seleccionado con cuidado para garantizar una lectura fluida y agradable, mientras que las figuras y gráficos han sido diseñados con precisión para complementar y reforzar los conceptos expuestos en el texto.

Debo mencionar que las imágenes que se presentan en este libro están hechas con `TikZ`, una herramienta para la producción de gráficos vectoriales. Dichas imágenes son de elaboración propia y son de dominio público.

Entiendo la importancia de la legibilidad tanto en la versión impresa como en la digital, por lo que he dedicado especial atención a la adaptabilidad de mi plantilla. Ya sea en un libro físico o en un documento electrónico, los lectores encontrarán una presentación coherente y accesible que facilitará su inmersión en los temas tratados.

Con una presentación clara y concisa de los temas, busco fomentar la apreciación de la belleza y utilidad de esta rama de las matemáticas. Se aspira a que los lectores adquieran las habilidades y conocimientos necesarios para resolver problemas complejos y se sientan motivados a explorar aplicaciones más avanzadas del cálculo en su futuro académico y profesional.

Marco Antonio Molina Mendoza
México, 16 de febrero de 2024

1

Capítulo

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Contenido

El estudio de las funciones de varias variables constituye un pilar fundamental en el ámbito del Cálculo III, donde se exploran fenómenos matemáticos que implican más de una dimensión. A diferencia del cálculo de una sola variable, donde las funciones dependen únicamente de un parámetro, en el cálculo de varias variables, las funciones pueden depender de dos o más variables independientes. Este capítulo se adentra en la comprensión y análisis de estas funciones, explorando su comportamiento, propiedades y aplicaciones en diversos contextos.

En esencia, una función de varias variables asigna a cada punto en un dominio de dos o más dimensiones un único valor en el espacio real. Este enfoque multifacético permite modelar y comprender una amplia gama de fenómenos físicos, económicos y científicos, desde la trayectoria de un proyectil en el espacio hasta la distribución de temperatura en un sólido tridimensional.

La comprensión de las funciones de varias variables requiere el dominio de conceptos clave, entre ellos, la noción de dominio y rango, continuidad, derivadas parciales, gradientes, y optimización. A través del análisis de estas herramientas matemáticas, los estudiantes desarrollarán una perspicacia profunda sobre cómo las funciones de varias variables se comportan y cómo pueden ser utilizadas para resolver problemas prácticos.

Este capítulo se estructura para guiar al lector desde los conceptos básicos hasta las aplicaciones avanzadas. Comienza con la definición formal de una función de varias variables, examinando su representación gráfica y sus propiedades fundamentales. A medida que avanzamos, exploramos la diferenciabilidad y la integrabilidad de estas funciones, así como las técnicas para encontrar máximos y mínimos locales y absolutos.

1.1. Funciones y su dominio

Definición 1.1.1: Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales $(x,\, y)$ de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x,\, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su rango es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x,\, y) \mid (x,\, y) \in D\}$.

A menudo, escribimos $z = f(x,\, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto $(x,\, y)$. Las variables x y y son variables independientes y z es la variable dependiente [compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una variable].

Una función de dos variables es una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de representar tal función es mediante un diagrama de flechas (véase la figura 1.1), donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy y el rango es un conjunto de números sobre una recta real, que se muestra como un eje z.

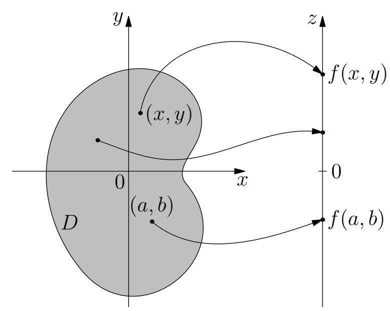


Figura 1.1

Si una función f está dada por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de parejas $(x,\, y)$ para el cual la expresión dada es un número bien definido.

Ejemplo: Para las siguientes funciones, evalúe $f(3,\, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x,\, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ **b)** $f(x,\, y) = x\ln(y^2 - x)$

Solución:

a) Tenemos que
$$f(3,\, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$
La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de f es
$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0,\, x \neq 1\right\}.$$
La desigualdad $x+y+1 \geq 0$, o bien, $y \geq -x-1$, describe los puntos que quedan en o por arriba de la recta $y = -x-1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio. Vea la figura 1.2.

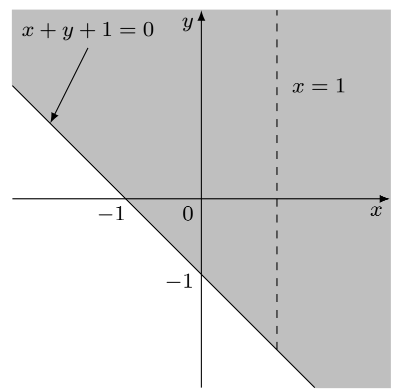


Figura 1.2 Representación geométrica del dominio de $f(x,\, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

b) Tenemos que
$$f(3,\, 2) = 3\ln(2^2 - 3) = 0.$$
Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define solo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es
$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\right\}.$$
Este es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. Vea la figura 1.3.

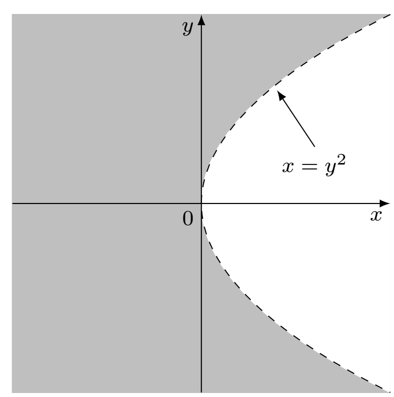


Figura 1.3 Representación geométrica del dominio de $f(x,\, y) = x\ln(y^2 - x)$

Ejemplo: Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ **b)** $f(x,\, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Solución:

a) Siguiendo la misma idea el ejemplo anterior, la expresión para f tiene sentido si la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Así, el dominio de f es

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \geq 0\right\}.$$

La desigualdad $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, o bien, $x^2 + y^2 \geq 1$, describe los puntos que quedan en o fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

b) Puesto que $\ln(x^2 + y^2 - 1)$ se define solo cuando $x^2 + y^2 - 1 > 0$, es decir, $x^2 + y^2 > 1$ el dominio de f es

$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\right\}.$$

Este es el conjunto de puntos que están fuera de la circunferencia sin tomar los puntos que están en $x^2 + y^2 = 1$.

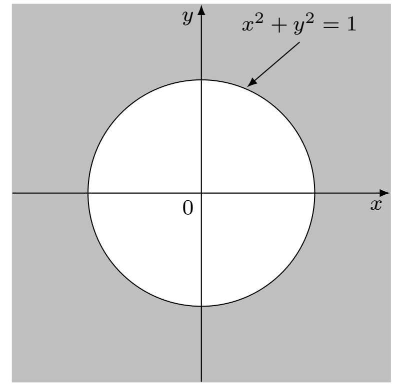


Figura 1.4 Representación geométrica del dominio de $f(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

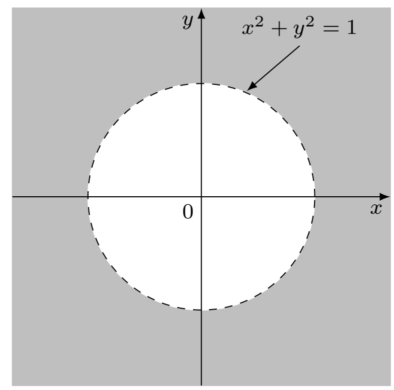


Figura 1.5 Representación geométrica del dominio de $f(x,\, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

1.2. Gráficas de funciones y curvas de nivel

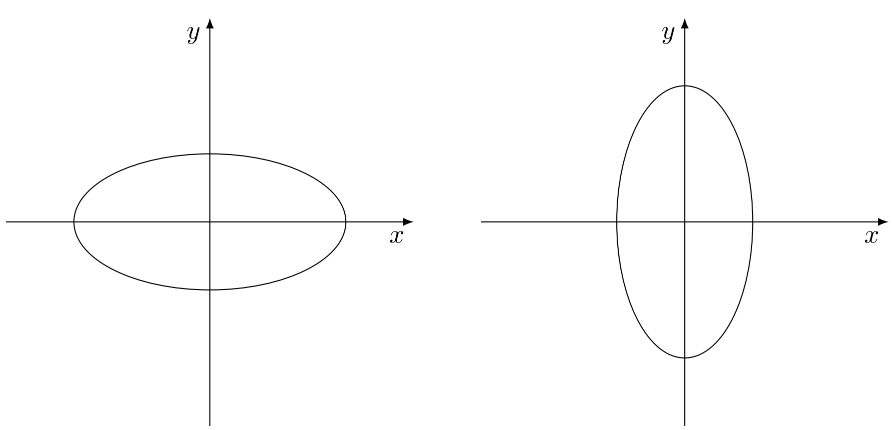
Recordatorio: Es importante destacar que el círculo es un caso particular de la elipse, pues recordemos que la expresión para una circunferencia centrada en el origen está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde r es el radio de dicha circunferencia y es una constante real, mientras que una elipse está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

siendo a y b constantes reales. Generalmente la elipse tiene dos ejes de diferentes longitudes y dos focos distintos, pero el círculo es una forma particular de elipse donde ambos ejes son idénticos y los dos focos coinciden en el centro del círculo. La elipse puede presentarse de dos maneras distintas: horizontalmente o verticalmente. Cuando decimos que una elipse está en posición horizontal, significa que su eje mayor se extiende más en el eje x, mientras que en la posición vertical, el eje mayor se extiende más en el eje y.



(a) Elipse horizontal: Cuando $a > b$

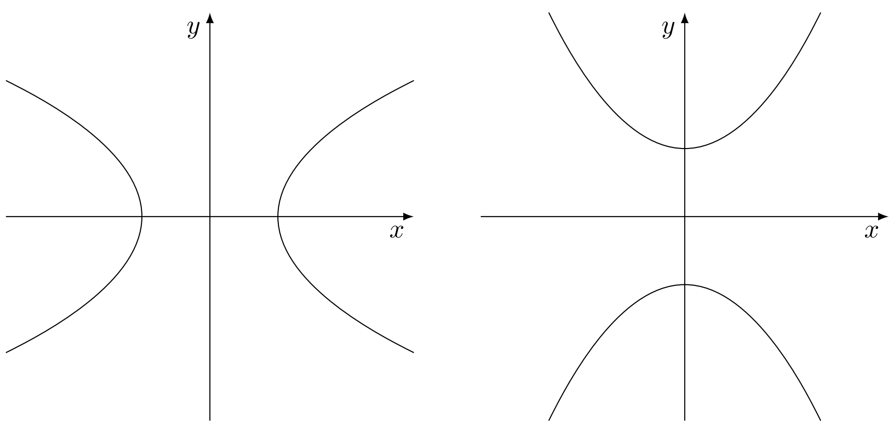
(b) Elipse vertical: Cuando $b > a$

Figura 1.6 Representación de la elipse

La hipérbole es otra cónica, al igual que la elipse. Sin embargo, a diferencia de la elipse que tiene una forma cerrada, la hipérbole es una curva abierta que se extiende hacia el infinito en ambas direcciones. En términos algebraicos, la ecuación de una hipérbole con centro en el origen se expresa como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b son constantes reales. Al igual que la elipse, la hipérbole puede presentarse en dos configuraciones principales: horizontal y vertical. En el caso de una hipérbole horizontal, las ramas principales de la hipérbole se extienden horizontalmente a lo largo del eje x, mientras que en una hipérbole vertical, las ramas principales se extienden verticalmente a lo largo del eje y.



(a) Hipérbole horizontal: Cuando $a > b$

(b) Hipérbole vertical: Cuando $b > a$

Figura 1.7 Representación de la hipérbole

Otro modo de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica

Definición 1.2.1: Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos $(x,\, y,\, z)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $(x,\, y)$ y $z = f(x,\, y)$ está en D.

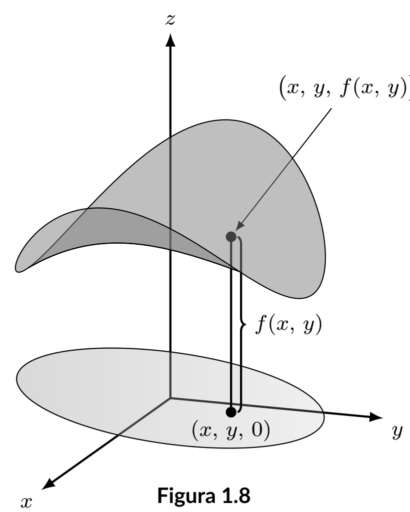


Figura 1.8

Un método para poder graficar funciones de dos funciones es mediante un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar líneas de contorno o curvas de nivel. Las curvas de nivel son líneas imaginarias que se utilizan para representar superficies tridimensionales en dos dimensiones, como mapas topográficos o gráficos de funciones de dos variables. Estas curvas conectan puntos que tienen la misma altura o el mismo valor de la función en el caso de las superficies. Por ejemplo, en un mapa topográfico, las curvas de nivel unen puntos que tienen la misma elevación sobre el nivel del mar. Al observar estas curvas, podemos entender la variación de la elevación o la función en diferentes áreas de la superficie, lo que proporciona una representación visual y comprensible del terreno o de la función en cuestión. Las curvas de nivel son una herramienta poderosa en diversas áreas, desde la cartografía hasta la ingeniería y las ciencias ambientales, facilitando la interpretación y el análisis de datos espaciales y funcionales.

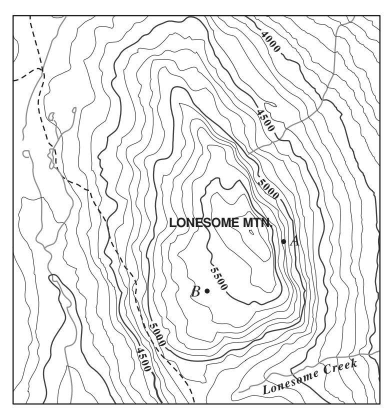


Figura 1.9 Un ejemplo común de las curvas de nivel son los mapas topográficos de regiones montañosas

Definición 1.2.2: Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x,\, y) = k$, donde k es una constante real.

BIBLIOGRAFÍA

Fuente básica

[1] Swokowski, Earl W. “Cálculo con Geometría Analítica”. Grupo Edit 4ta. Edición, 1998.

Fuente de consulta

[2] Larson/Hostetler/Edwars. “Cálculo”, Vol. 2 Mc. Graw Hill, 5a. Edición. 1996.

[3] Zill, Dennis G. “Cálculo con Geometría Analítica”. Grupo Editorial. Iberoamerica. 1985.