$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A^5 = A^4 A = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{k} & 0 & 2^{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{k} & 0 & 2^{k} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^4 \\ 0 & a^5 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^4 \\ 0 & a^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^6 & 6a^5 \\ 0 & a^6 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

$$A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}.$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a^k + ka^k \\ 0 & a^{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}.$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 + x^2 & x \\ x & 1 + x^2 \end{bmatrix}$$

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{bmatrix}.$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$