Transformadas unitarias $1 - D$

Una señal $1 - D$,

$$\{u(n) : 0 \leq n \leq N - 1\},$$

puede ser representada como el vector $\mathbf{u}$ de tamaño N.
Una transformación unitaria viene dada por:

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u} \Rightarrow v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k,n)u(n), \qquad 0 \leq k \leq N - 1$$

si A es unitaria entonces $A^{-1} = A^{-*t}$

$$\mathbf{u} = A^{*t}\mathbf{v} \Rightarrow u(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{*}(k,n)v(k), \qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

Las columnas de A^{*t} forman los **vectores bases** de la transformación.

$$a_k^* = \{a^*(k,n) : 0 \leq n \leq N-1\}^t$$

Los

$$v(k),\ 0 \leq k \leq N-1$$

dan una representación de la señal original:

$$u(n),\ 0 \leq n \leq N-1.$$

Se utilizan en filtrado, compresión de datos y extracción de características.

Transformadas unitarias $2-D$

Dada una imagen de $N \times N$ (señal $2-D$),

$$\{u(m,n) : 0 \leq m,n \leq N-1\},$$

el par de transformada-antitransformada viene dada por:

$$v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} u(m,n)a_{kl}(m,n), \qquad 0 \leq k,l \leq N-1$$

$$u(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} v(k,l)a_{kl}^{*}(m,n), \qquad 0 \leq m,n \leq N-1$$

donde $a_{kl}(m,n)$ es un conjunto completo ortonormal de funciones bases que cumplen:

Funciones bases en $2-D$

Ortonormalidad:

$$\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{kl}(m,n)a^*_{k'l'}(m,n) = \delta(k-k', l-l')$$

Completitud

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} a_{kl}(m,n)a^*_{kl}(m',n') = \delta(m-m', n-n')$$

Los elementos $v(k,l)$ son los coeficientes de la transformación y

$$\mathbf{v} = \{v(k,l)\}, \qquad 0 \leq k,l \leq N-1$$

es la imagen transformada.

Transformadas unitarias separables

$$a_{kl}(m,n) = a_k(m)b_l(n) = a(k,m)b(l,n)$$

donde:

$\{a_k(m), \quad 0 \leq k \leq N-1\}$ y $\{b_l(n), \quad 0 \leq l \leq N-1\}$
son conjuntos ortogonales completos de vectores bases.

Las propiedades de ortonormalidad y completitud implican que $A = \{a(k,m)\}$ y $B = \{b(l,n)\}$ son matrices unitarias.

$$AA^{*t} = A^t A^* = I$$

$$BB^{*t} = B^t B^* = I$$

considerando $A = B$

$$v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m,n) a(k,m) a(l,n), \qquad \Rightarrow V = AUA^t$$

$$u(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k,l) a^*(k,m) a^*(l,n), \qquad \Rightarrow U = A^{*t} V A^*$$

Imágenes bases

Sea a_k^* la k-ésima columna de A^*. Definimos las matrices:

$$A_{kl}^{*t} = a_k^* a_l^{*t}$$

Producto interno entre dos matrices F y G: Hallar las imágenes bases, la imagen transformada V, y U como combinación lineal de las bases.

$$< F, G >= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) g^*(m,n)$$

entonces podemos escribir:

$$v(k,l) =< U, A_{kl}^{*t} >$$

y la representación de la imagen:

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k,l) A_{kl}^{*t}$$

Imágenes bases

Notar que U es combinación lineal de N^2 matrices:

$$A^{*t}_{kl}, \qquad 0 \leq k, l \leq N-1$$

que se denominan **imágenes bases**.

Ejemplo

Hallar las imágenes bases, la imagen transformada V, y U como combinación lineal de las bases.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{*t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a_0^{*t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1^{*t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$