

Modèles de localisation et modèles d'interactions spatiales

Juste Raimbault¹

2025-2026

¹LaSTIG, IGN-ENSG-UGE

ENSG
Géomatique

ÉCOLE NATIONALE
DES SCIENCES
GÉOGRAPHIQUES

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles constraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

Processus aléatoire de distribution de points, tel que le nombre de points dans un intervalle est distribué par:

$$N((a, b]) \sim \text{Poisson}(\beta(b - a))$$

et le processus est indépendant dans des intervalles disjoints

Loi de probabilité Poisson(μ):

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

Processus de points dans le plan tel que pour tout fermé borné B de mesure $\lambda(B)$:

1. $N(B) \sim \text{Poisson}(\beta\lambda(B))$
2. indépendant sur des régions disjointes

Propriété : Conditionnellement au nombre de points, sur un intervalle fini W , le processus suit une loi binomiale pour $B \subset W$:

$$\mathbb{P}(N(B) = k | N(W) = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

i.e. les points sont indépendants et distribués uniformément

→ l'intensité est une fonction de $B : \beta(B)$

→ densité de points variable dans l'espace

- Superposition des processus homogènes d'intensité β_1, β_2 est toujours un Poisson d'intensité $\beta_1 + \beta_2$
- Processus marqués (label ou stock aléatoire), utilisé pour filtrer ou faire des clusters (processus de Matern)
- Différentes méthodes d'estimation de la densité
- ... (applications en statistiques avancées)

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles constraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

- modèles simplifiés en économie urbaine pour la localisation des entreprises, ménages
- relative flexibilité analytique : extensions utilisées toujours dans des modèles en économie contemporaine
- Exemples : modèle d'Hoteling, de Salop, d'Alonso

Consommateurs distribués uniformément, localisation de deux points de vente A, B aux coordonnées a, b sur un segment de longueur l , prix de vente p_A, p_B , coût de transport c .

→ point d'indifférence donné par $p_A + cx = p_B + cy$ (x, y portion du segment dans l'aire d'influence, avec $a + x + y + b = l$)

→ expression de (x, y) , puis des profits $\pi_A = p_A(a + x)$ et $\pi_B = p_B(b + y)$

→ maximisation des profits par chaque vendeur donne une expression fermée pour les localisations et les prix

n points de vente localisés à equidistance autour d'un cercle de longueur N , consommateurs uniformes, coût de transport c , prix de revient r

→ prix d'équilibre \bar{p} ? point d'indifférence donne le profit qui est maximisé

→ symétrie : prix identiques $\implies \bar{p} = r + \frac{cl}{n}$

Application et extension : prix des carburants en fonction de la densité de population [Bergeaud and Raimbault, 2020]

Von Thünen (1842): rente foncière et localisation des activités agricoles

Avec R rente foncière, r rendement agricole, p prix du marché, c coût de production, T coût de transport, d distance au marché

$$R = r \cdot (p - c) - r \cdot T \cdot d$$

→ localisation des différentes activités agricoles dans des intervalles de rayon, en fonction de leur rendement et coûts de transport et production

→ cercles concentriques: ville, maraichage, forêt, céréales, élevage

Alonso (1964): théorie de l'équilibre pour la relocalisation des ménages, des entreprises et de l'agriculture

→ reformulation/extension de Von Thünen, avec loyers, coûts de transport des ménages, localisation des ménages et des emplois, type et intensité d'usage du sol

→ équilibre économique et spatial

→ extensions analytiques ou quantitatives appliquées dans la recherche récente en économie urbaine

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

- Introduction

- Modèles basiques

- Modèles constraints

- Maximisation de l'entropie

- Modèles alternatifs

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles constraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

→ **The First Law of geography** (Tobler, 1970) :

“Everything is related to everything else, but near things are more related than distant things”

→ Usage du terme “interaction” implicite avant 1950

→ E. Ullman 1954: *“Geography as spatial interaction”*

→ Concept agrégé, collectif (analyse des échanges entre villes et régions)

→ Formalisation multi-niveaux en cours (approches systèmes complexes)

1. Les interactions concernent tous les domaines de la géographie: Biens et personnes (transport, déplacements); Personnes (migrations); Information, capitaux: géographie économique, géographie culturelle)
2. Les conditions de l'interaction selon Ullman (1954): complémentarité; absence de substituabilité, transférabilité (mobilité, coût de transport)

→ échanges entre personnes, entreprises, groupes sociaux, déplacements localisés; l'interaction est l'action réciproque résultant des échanges entre acteurs localisés

→ échanges entre unités spatiales représentés par des flux; l'interaction spatiale est l'action réciproque entre des objets géographiques

→ du niveau micro (entre éléments, acteurs) au niveau mmacro entre lieux par agrégation

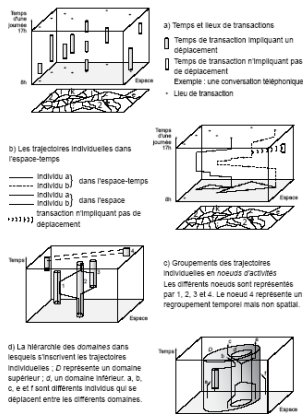
Mobilité : pratique des déplacements par les personnes

- Portée croissante des déplacements en relation avec la vitesse et le coût
- Rythmes : ordinaires et occasionnelles
- Espaces de vie, espace-temps, réseaux de lieux

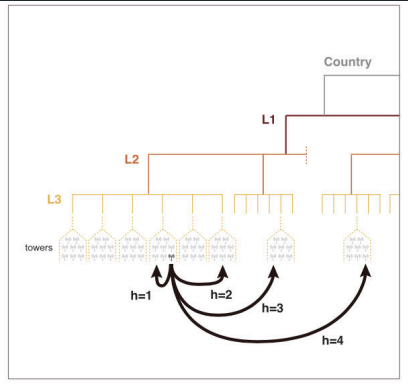
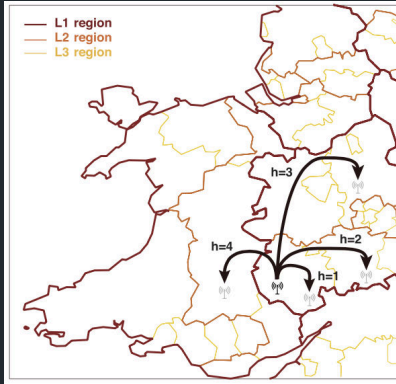
De la mobilité aux flux

- Flux et découpage territorial
- Tableaux d'échanges
- Mesures de la mobilité

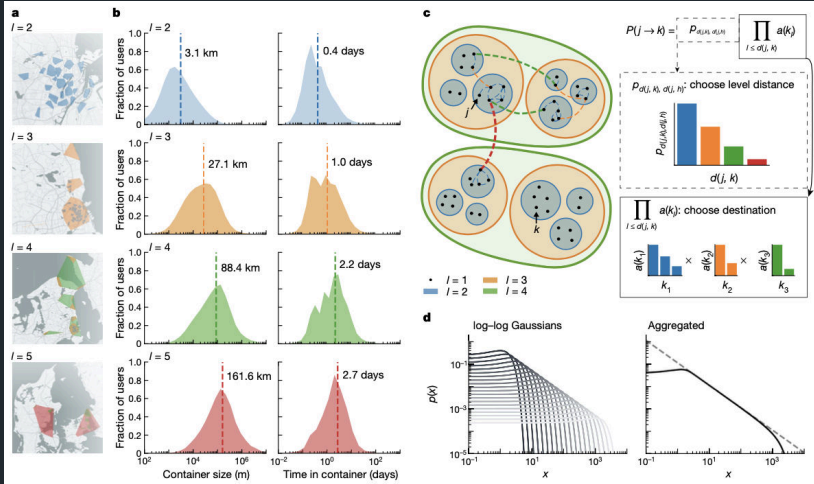
Figure 1.2. Déplacements individuels dans l'espace-temps



La "Time Geography"
introduite par T.
Hägerstrand (1970)
[Pumain and Saint-Julien, 2010]

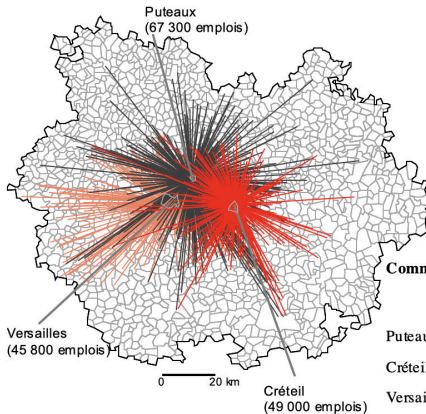


[Grauwin et al., 2017]



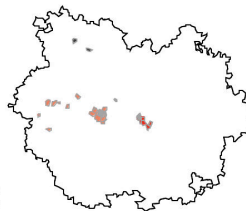
[Alessandretti et al., 2020]

Polarisation brute



© UMR Géographie-cités

Polarisation relative



Communes envoyant au noyau :

+ de 10 actifs + de 10% des actifs
(polarisation brute)(polarisation relative)

Puteaux



Créteil



Versailles



The laws of migration (Ravenstein, 1885 et 1889)

→ recensements 1871/1881

- courtes distances
- lieux d'absorption (villes commerciales/industrielles) vs lieux de dispersion (zones rurales)
- flux et contre-flux d'importance presque égale
- propagation de proche en proche de la migration

Origine du modèle gravitaire :

- G.K. Zipf *The P1P2/D Hypothesis: On the Intercity Movement of Persons*, American Sociological Review, II (December 1946), 677-686.
- J.Q. Stewart (astronome, Princeton) 1947: *The "gravitation" of the geographical drawing power of a college*



- Transports : flux de mobilité
- Démographie : migration
- Economie : commerce international
- Marketing : aires de chalandise
- Réseaux inter-urbains
- ...

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles constraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

- Zones d'émission/attraction en interaction : Iris, communes, régions, pays, zones ad-hoc
- Caractéristiques X_{ik} des zones, comme population (origine) et emploi (destination)
- Flux observés entre zones T_{ij}^{obs}

Avec coût généralisé c_{ij} , friction de la distance β , activités à l'origine O_i et à destination D_j , K constante, les flux sont donnés par

$$T_{ij} = K \cdot O_i \cdot D_j \cdot c_{ij}^{-\beta}$$

Estimation : pour le paramètre β , régression linéaire de $\log(T_{ij}^{obs}/(O_i D_j))$ en fonction du coût c_{ij}

Application : potentiel d'accessibilité (voir séance Réseaux Spatiaux)

En pratique, de multiples facteurs peuvent être pris en compte :

$$\log T_{ij}^{obs} \sim \beta_0 + \sum_k \beta_k \log X_{ik} + \sum_l \beta_l \log X_{jl} + \beta \log f(c_{ij}) + \varepsilon$$

Distribution de ε ?

→ modèle linéaire classique

→ modèle de Poisson: $\log T_{ij}^{obs} \sim \text{Poisson}(\lambda_{ij})$ avec

$$\log \lambda_{ij} = \beta_0 + \sum_k \beta_k \log X_{ik} + \sum_l \beta_l \log X_{jl} + \beta \log f(c_{ij})$$

(estimation avec moindres carrés itérativement re-pondérés, par `glm` dans R)

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles contraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

Contrainte à l'origine ou à la destination : *les flux émis ou reçu doivent être égaux aux flux réels*

Nouvelle formulation :

$$T_{ij} = A_i O_i D_j c_{ij}^{-\beta}$$

tel que $\sum_j T_{ij} = T_i = \sum_j T_{ij}^{obs} = O_i$, ce qui donne

$$T_{ij} = O_i \frac{D_j c_{ij}^{-\beta}}{\sum_k D_k c_{ik}^{-\beta}}$$

Modèle similaire pour la contrainte à la destination

Contrainte à l'origine $\sum_j T_{ij} = O_i$ et à la destination $\sum_i T_{ij} = D_j$ simultanément

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j c_{ij}^{-\beta}$$

avec

$$A_i = 1 / \sum_j B_j D_j c_{ij}^{-\beta}$$

$$B_j = 1 / \sum_i A_i O_i c_{ij}^{-\beta}$$

Estimation : algorithme itératif pour A_i, B_j , ou équivalent à des effets fixes par origine et destination dans les modèles statistiques

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles constraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

[Wilson, 1971] : *lien avec la maximisation de l'entropie*

Pour maximiser la probabilité d'observer la matrice T_{ij} , maximiser l'entropie

$$W = \frac{\prod_{ij} T_{ij}!}{T!}$$

sous contraintes $\sum_j T_{ij} = O_i$, $\sum_i T_{ij} = D_j$ et $\sum T_{ij} c_{ij} = C$ donne

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp(-\beta c_{ij})$$

→ le modèle doublement contraint est le plus probable avec les flux observés

→ dérivation d'un modèle à partir de l'entropie dans des cas plus généraux : multi-modes, multiples profils socio-économiques, ... : généralisation par la théorie

Processus de points spatiaux

Modèles de localisation

Modèles d'interaction spatiale

Introduction

Modèles basiques

Modèles constraints

Maximisation de l'entropie

Modèles alternatifs

[Stouffer, 1940] théorie sociologique basée sur les opportunités dans le voisinage

→ flux entre deux lieux proportionnel aux opportunités à destination mais inversement proportionnel aux opportunités intermédiaires qui captent les individus

→ le rôle de la distance est une conséquence de la distribution des activités

[Simini et al., 2012] modèle sans paramètres dérivé d'un processus de radiation/absorption des navetteurs

$$T_{ij} = T_i \cdot \frac{P_i P_j}{(P_i + s_{ij})(P_i + P_j + s_{ij})}$$

→ meilleure performance que le modèle gravitaire uniquement à certaines échelles et dans certains cas [Masucci et al., 2013]

[Dennett and Wilson, 2013]: migration inter-régionales en Europe

→ contraintes au niveau des pays et des régions

→ utilisation des données de migration interne pour distribuer les flux entrants et sortants dans le pays

Certains jeux de données exhibent un nombre non-négligeable de lien absents

→ modèles avec une composante spécifique pour l'absence de lien




- *Zero-inflated Poisson model* : superposition d'une composante conditionnant le compte de Poisson
- *Hurdle model* : modèle de seuil

Séance d'ouverture : modèle d'interactions spatiales comme
brique de modèles de simulation plus conséquents

- Modèle de transport à quatre étapes
- Modèles Land-use Transport Interaction
- Modèles de dynamiques urbaines sur le temps long
- Modèles de croissance de réseaux
- ...

TP interaction spatiales : estimer des modèles d'interaction spatiale (simple, contraint, Poisson)

Données : réseau Européen de filiales de firmes ; flux domicile-travail en Ile-de-France par modes de transport (EGT 2010)

-  Alessandretti, L., Aslak, U., and Lehmann, S. (2020).
The scales of human mobility.
Nature, 587(7834):402–407.
-  Bergeaud, A. and Raimbault, J. (2020).
An empirical analysis of the spatial variability of fuel prices in the united states.
Transportation Research Part A: Policy and Practice, 132:131–143.
-  Dennett, A. and Wilson, A. (2013).
A multilevel spatial interaction modelling framework for estimating interregional migration in europe.
Environment and Planning A, 45(6):1491–1507.



Grauwin, S., Szell, M., Sobolevsky, S., Hövel, P., Simini, F., Vanhoof, M., Smoreda, Z., Barabási, A.-L., and Ratti, C. (2017).

Identifying and modeling the structural discontinuities of human interactions.

Scientific reports, 7(1):1–11.



Masucci, A. P., Serras, J., Johansson, A., and Batty, M. (2013).

Gravity versus radiation models: On the importance of scale and heterogeneity in commuting flows.

Physical Review E, 88(2):022812.



Mathian, H., Berroir, S., Sanders, L., and Saint-Julien, T. (2004).

Mobilités et polarisations: vers des métropoles polycentriques. Le cas des métropoles francilienne et méditerranéenne.

PhD thesis, MELT; Plan Urbanisme Construction Architecture.



Pumain, D. and Saint-Julien, T. (2010).

Analyse spatiale: les localisations.

Armand Colin.



Simini, F., González, M. C., Maritan, A., and Barabási, A.-L. (2012).

A universal model for mobility and migration patterns.
Nature, 484(7392):96–100.



Stouffer, S. A. (1940).

Intervening opportunities: a theory relating mobility and distance.

American sociological review, 5(6):845–867.



Wilson, A. G. (1971).

A family of spatial interaction models, and associated developments.

Environment and Planning A, 3(1):1–32.