

TD 1 : Répartitions optimales des ressources

Les optima de Pareto et le coeur de l'économie

A la fin du TD, l'étudiant doit savoir :

- Tracer une boîte d'Edgeworth correctement renseignée et représenter toute allocation dans la boîte y compris celles qui n'utilisent pas toutes les ressources.
- Tracez les cartes d'indifférence dans la boîte : cobb douglas et quasi linéaires. Attention aux quasi-linéaires, les autres préférences sont connues.
- Les propriétés des préférences étudiées : convexité et monotonie font partie des pré-requis.
- Calculer les TMS en unités de bien 2 (pré-requis).
- Calculer les optima de Pareto intérieurs avec les deux types de préférences.
- Savoir repérer à l'aide des TMS les optima sur les bords.
- Comprendre la dominance au sens de Pareto.

Bien respecter les notations du cours : lettre oméga pour les ressources et lettres latines pour les allocations en général. Le bien est en indice et l'individu à l'exposant.

Toujours poser les programmes d'optimisation avec les conditions de premier ordre pour les solutions internes.

Exercice 1 : préférences Cobb-Douglas.

Les préférences de l'agent A sont représentées par la fonction d'utilité : $U^A(x^A) = (x_1^A)^{\frac{1}{2}}(x_2^A)^{\frac{1}{2}}$. L'agent B a des préférences telles que : $U^B(x^B) = (x_1^B)^{\frac{1}{4}}(x_2^B)^{\frac{1}{4}}$. Les dotations de l'économie sont $\omega_1 = 40$, $\omega_2 = 10$.

1. Représentez la carte d'indifférence de l'agent A.
2. Vrai ou faux : Les fonctions d'utilité des deux agents représentent des préférences convexes. Justifiez votre réponse en rappelant la définition de la convexité des préférences.
3. Peut-on dire que les deux agents ont les mêmes préférences ? Pourquoi ?
4. Trouvez l'allocation optimale qui permet à l'agent B d'avoir une utilité au moins égale à 2.
 - Ecrivez le programme d'optimisation.
 - Posez le Lagrangien
 - Donnez les conditions de premier ordre
 - Calculez l'allocation
 - Calculez le niveau d'utilité de A.
5. En déduire l'ensemble des allocations optimales au sens de Pareto. Donnez l'expression de la courbe des optima de Pareto en fonction de x_1^A et son expression en fonction de x_1^B .
6. Représentez la courbe des optima dans une boîte d'Edgeworth.
7. Dans l'espace des utilités (U^A, U^B) , représentez les niveaux d'utilité correspondant à l'ensemble des optima de Pareto.

8. Les agents disposent de dotations initiales formant une allocation $I = (I^A, I^B)$ qui emploie toutes les ressources et qui n'est pas optimale au sens de Pareto. Représentez l'ensemble des allocations préférées ou équivalentes à I^k , pour $k = A, B$ et optimales au sens de Pareto. Appelons cet ensemble, le *coeur* de cette économie.
9. Peut-on appliquer le critère de Pareto pour sélectionner une allocation dans le coeur ?

Exercice 2 : le cas quasi-linéaire

Deux consommateurs (A et B) ont des préférences sur des paniers composés des biens 1 et 2. Elles sont représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$\begin{aligned} U^A(x_1^A, x_2^A) &= \ln x_1^A + x_2^A \\ U^B(x_1^B, x_2^B) &= 2 \ln x_1^B + x_2^B \end{aligned}$$

Les dotations de l'économie sont ω_1 et ω_2 .

1. A quoi reconnaît-on que ces fonctions d'utilité sont quasi-linéaires ?
2. Calculez les optima de Pareto internes.
3. Représentez ces solutions dans la boîte d'Edgeworth.
4. Les allocations telles que $x_1^A \in [0^A, \frac{\omega_1}{3}[$, $x_2^A = 0$, $x_1^B = \omega_1 - x_1^A$ et $x_2^B = \omega_2$ ne sont pas Pareto dominés : montrez-le en comparant les TMS^k en ces points. Est-ce que ce sont des optima de Pareto ?
5. Les allocations telles que $x_1^A \in]\frac{\omega_1}{3}, \omega_1]$ et $x_2^A = \omega_2$ ne sont pas Pareto dominés : montrez-le en comparant les TMS^k en ces points.
6. Finalement, tracez l'ensemble des optima de Pareto.