

MASTER 1 PHYSIQUE

MODÉLISATION NUMÉRIQUE
MÉCANIQUE CÉLESTE



Arthur THALLER, Antoine ROCHER

Avril 2018

Table des matières

1	Introduction	1
2	Méthodes et modélisation d'un système à N corps	2
2.1	Système à 2 corps : Terre-Soleil	2
2.2	Système à N corps	3
2.3	Algorithmes	4
3	Application au système solaire	6
3.1	Orbites	6
3.2	Vitesse de libération	8
3.3	Loi des aires	11
4	Conclusion	13

1 Introduction

La mécanique classique, et en particulier la mécanique newtonienne, offre un cadre théorique excellent pour traiter les mouvements des planètes autour du soleil. Ce succès s'explique par la simplicité de la seconde loi de Newton, reliant l'accélération à la force exercée sur un corps. Pourtant, le problème à plusieurs corps est analytiquement très complexe (et impossible à résoudre au delà de quatre corps).

Ce projet se propose donc de traiter numériquement la dynamique des astres du système solaire. On cherchera à résoudre les équations du mouvement pour un système à N corps et décrire leurs déplacements les uns par rapport aux autres. On se limitera par ailleurs à une description ponctuelle des objets, c'est à dire que la rotation d'un objet sur lui même sera négligée.

Nous commencerons donc par étudier un système simple à 2 corps, le système Terre-Soleil, afin de poser et d'expliquer les bases du problème. Nous étenderons alors le programme à N corps pour obtenir une simulation des orbites des astres du système solaire. On s'intéressera finalement à vérifier les lois de la physique : conservation de l'énergie, loi de Kepler et calcul des vitesses de libération.

2 Méthodes et modélisation d'un système à N corps

Dans cette partie on cherche à expliquer comment résoudre un problème qui paraît à priori assez simple : comment décrire le mouvement de N corps en interaction gravitationnelle ? On cherchera tout d'abord à résoudre les équations du mouvement de Newton pour 2 corps puis nous étendrons les résultats pour N corps.

2.1 Système à 2 corps : Terre-Soleil

On place le soleil au point $O(0, 0, 0)$ et la terre au point $M(x, y, z)$.
On note $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$.

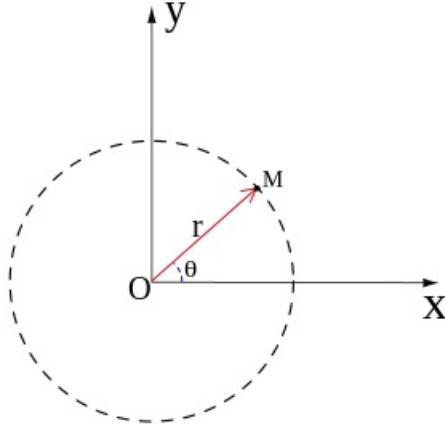


FIGURE 1 – Schéma Terre-Soleil

La Terre subit une force attractive centrale dirigée vers le soleil :

$$F = -G \frac{M_{\odot} m_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

On écrit alors les équations du mouvement grâce à la 2^{ème} loi de Newton :

$$m_{\oplus} \vec{a} = -G \frac{M_{\odot} m_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

où $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ et $\frac{\vec{r}}{r}$ est un vecteur unitaire selon \vec{r} .

On peut simplifier :

$$\vec{a} = -G \frac{M_{\odot}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

Dans ce problème on considère que le soleil est le centre de masse du système ($m_{\oplus} \ll M_{\odot}$) et se trouve au point $O(0,0,0)$. On considère le système dans un plan xy donc la coordonnée z de la terre est nulle.

On obtient donc $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ avec $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$. On trouve chaque coordonnées de \vec{r} en prenant (i.e pour x) $r_x = x_{\oplus} - x_{\odot}$.

Donc on trouve l'accélération en coordonnées cartésiennes $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$.

Avec

$$a_i = -G \frac{M_{\odot}}{r^2} \frac{r_i}{r} = -G \frac{M_{\odot}}{r^2} \frac{x_{i\oplus}}{r} \quad (2)$$

2.2 Système à N corps

Maintenant que nous avons les équations du mouvement pour 2 corps en interaction gravitationnelle, nous allons les étendre à N corps.

Considérons N corps représentés par des points matériels P_i de masse m_i . Le corps k va subir les interactions gravitationnelles de tous les autres corps autour de lui.

On peut donc écrire :

$$m_k a_k = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n -G \frac{m_k m_i}{P_i P_k^2} \frac{\overrightarrow{P_i P_k}}{P_i P_k} \quad N = n + 1 \text{ et } k = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

On note $r_k = P_i P_k$ la distance entre le corps i et k . L'équation (3) devient :

$$a_k = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n -G \frac{m_i}{r_k^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k} \quad N = n + 1 \text{ et } k = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Cette équation représente l'interaction gravitationnelle (accélération) exercée sur le corps k par les N corps du système.

On cherche à résoudre cette équation pour trouver la position du corps k à tout instant. Ce calcul est possible jusqu'à 3 corps, au delà le système d'équations différentielles est impossible à résoudre analytiquement.

Nous allons alors chercher à résoudre ce système par analyse numérique, notamment en utilisant l'algorithme de vitesse de Verlet.

2.3 Algorithmes

Dans cette section, on explique brièvement les algorithmes utilisés dans le programme.

Vitesse de Verlet

Pour effectuer la résolution du problème à N corps par analyse numérique nous utilisons l'algorithme de vitesse de Verlet^[1].

Il nous permet, à un instant t , pour une position (x, y, z) et une vitesse (v_x, v_y, v_z) données, de calculer la vitesse et la position à un instant $t + \Delta t$ grâce au potentiel d'interaction trouvé précédemment.

Le principe de cette algorithme est simple, il considère que la vitesse au prochain demi-intervalle de temps $v(t + \frac{1}{2}\Delta t)$ est :

$$\vec{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{1}{2}\vec{a}(t)\Delta t$$

Avec cette nouvelle vitesse on peut calculer la position $x(t + \Delta t)$:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t)\Delta t$$

La nouvelle accélération $\vec{a}(t + \Delta t)$ est alors calculée en utilisant l'équation (4) avec $\vec{x}(t + \Delta t)$

Enfin la vitesse au prochain intervalle de temps Δt

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t + \frac{1}{2}\Delta t) + \frac{1}{2}\vec{a}(t + \Delta t)\Delta t$$

Le passage par le demi pas permet de "moyenner" la vitesse entre t et $t + \Delta t$ ce qui rajoute une précision dans le calcul.

Vitesse de libération

La vitesse de libération peut être calculée en considérant la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentiel^[2] :

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{\odot}}{r} = h \quad (cste)$$

De ce fait si $h < 0$ l'énergie potentielle domine, r est bornée donc le corps ne peut s'éloigner à l'infini. Au contraire si $h > 0$ l'énergie cinétique domine, le corps peut s'éloigner à l'infini. Le corps va donc s'échapper lorsque l'énergie cinétique est supérieur à l'énergie potentiel. La vitesse de libération est donc $V_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}$.

Dans notre programme, on considère un cas à deux corps, d'un corps en orbite autour d'un autre, typiquement une planète autour du soleil. Afin de simplifier le problème (sans perte de généralité), on se place à une dimension, selon l'axe Ox . La distance selon x est alors le rayon R (et non la projection selon x), et on impose une vitesse initiale à tester.

Le programme s'effectue ensuite, et on affiche l'évolution de la distance en fonction du temps. Si la vitesse renseignée est suffisante pour que l'astre se libère, au bout d'un certain temps la position doit changer linéairement avec le temps, c'est à dire que la vitesse est constante (presque), donc que l'accélération (et l'attraction gravitationnelle) est nulle.

Loi des aires

La loi des aires est la deuxième loi de Kepler : elle affirme que l'aire balayée par un corps en orbite sur un temps T est la même, quelque soit la zone de l'orbite considérée, tant que T est le même.

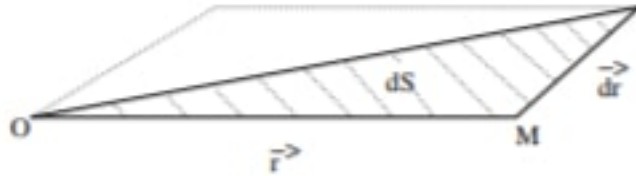


FIGURE 2 – Aire parcouru dS en r et $r + dr$

A chaque itération, l'aire parcourue est $ds = \|\frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{dr}\|$ ^[2]. On somme sur tout les ds parcourues pendant le temps T , on répète sur plusieurs périodes, et on compare les aires parcourues.

3 Application au système solaire

Le programme est donc maintenant prêt : il ne reste plus qu'à l'initialiser. Pour ce faire, on récupère sur le site de la NASA^[3] les positions et vitesses des huit planètes, ainsi que celles du soleil et de Pluton.

3.1 Orbites

En appliquant la formule de l'accélération pour N corps et l'algorithme de vitesse de verlet de notre programme on calcule les positions des astres autour du soleil avec un pas h pendant une période T .

On obtient, sur une période de 250 ans et pour un pas de 86400s (1jour), la figure 3 :

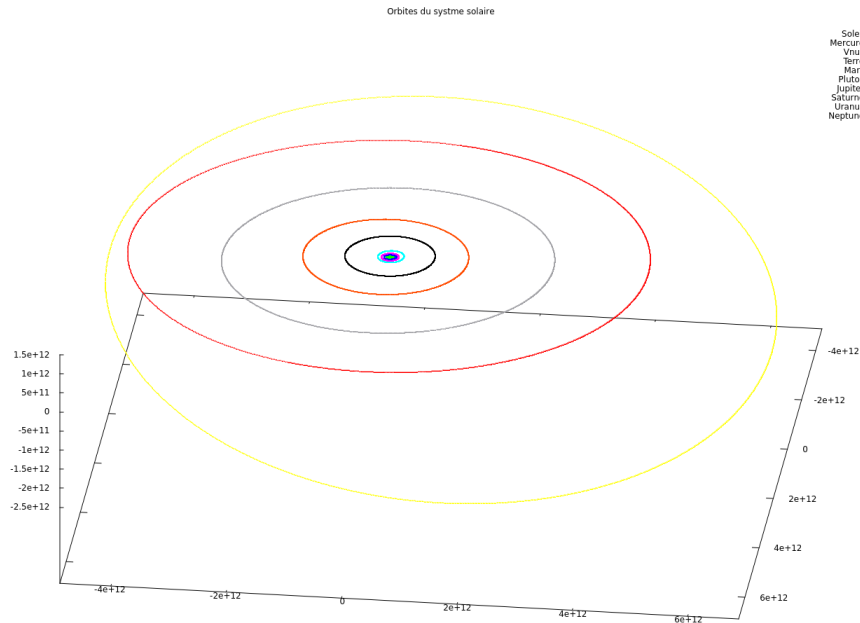


FIGURE 3 – Système solaire sur 250 ans

Les orbites des planètes intérieures sont peu, voir pas du tout, visibles. On note quand même que chaque orbite semble stable et assez "fine", c'est à dire qu'il ne semble pas y avoir de dispersion. On a donc un système solaire stable sur 250 ans. Le système reste même stable (aucune planète ne se libère) un million d'années, avec

3. APPLICATION AU SYSTÈME SOLAIRE

un pas de 10 jours (on remarque que même si les planètes lointaines restent sur leurs orbites, les planètes proches (jusqu'à mars) voient leur orbites "s'épaissir". On peut l'expliquer par le fait que les attractions gravitationnelles des autres planètes peuvent modifier un peu leurs orbites sur une très grande période. De plus, sur un million d'années, les erreurs se répercutent de plus en plus).

Pour montrer que notre système est cohérent, on le lance pendant un temps égal à la période de révolution de Vénus ($T = 224.7 \text{ jours}$), et avec un pas de 60 secondes. On obtient le résultat suivant :

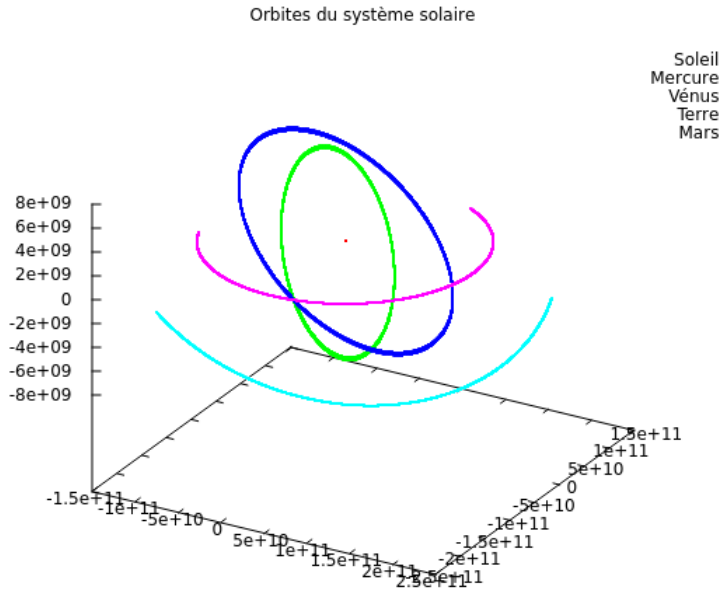


FIGURE 4 – Système solaire sur 224 jours

On observe que les autres planètes n'ont pas encore fini leur orbite, mais que les trajectoires sont bien stables.

Maintenant qu'on a vérifié que les planètes tournent bien autour du soleil, remettons les pieds sur Terre ! La figure 5 donne la trajectoire de Mars vue depuis la Terre :

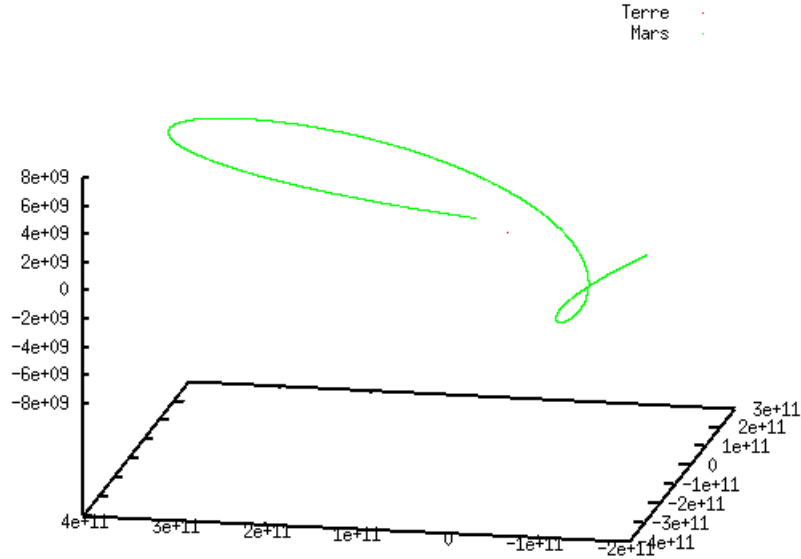


FIGURE 5 – Mouvement rétrograde de Mars

On observe bien le mouvement rétrograde de Mars^[4] que l'on voit depuis la Terre. En effet la Terre, qui est plus proche du Soleil (et qui va donc plus vite que Mars), va "doubler" Mars sur son orbite. Cela donne donc l'impression à un observateur terrestre que Mars recule sur son orbite, comme on peut le voir sur la figure 5.

3.2 Vitesse de libération

On cherche à tester différentes vitesses de libération pour les différentes planètes. Voici les vitesses calculées théoriquement :

Planètes	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
V_{lib} (km/s)	67.7	49	42.11	34.12	18.46	13.6	9.6	7.6

Pour Pluton, sa trajectoire n'étant pas du tout circulaire, il n'est pas justifié de parler d'une vitesse de libération. Cependant, si on demande au programme de vérifier une vitesse, il le fera pour une distance correspondant à la position initiale de Pluton renseignée dans le fichier contenant les positions et vitesses.

3. APPLICATION AU SYSTÈME SOLAIRE

On test les vitesses de libération pour la Terre :

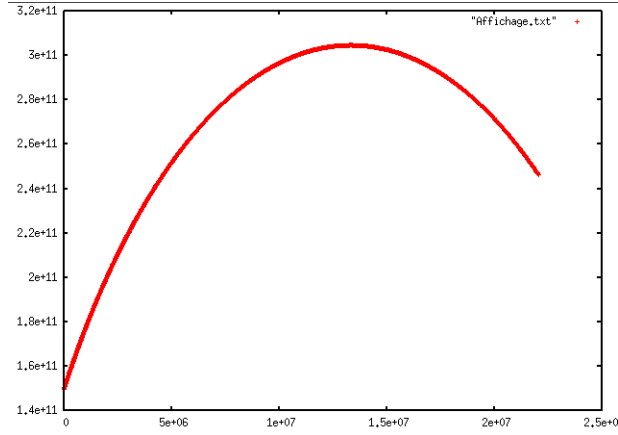


FIGURE 6 – Position de la Terre pendant une période de 0.7 an, pas de 1 seconde avec $V_{lib} = 30000m/s$

Sur la figure 6 on voit bien que la Terre s'éloigne du soleil jusqu'à un certain point ou elle revient et se rapproche du soleil. On vérifie bien que pour une $v_{lib} = 30000m/s$ la terre n'est pas libérée.

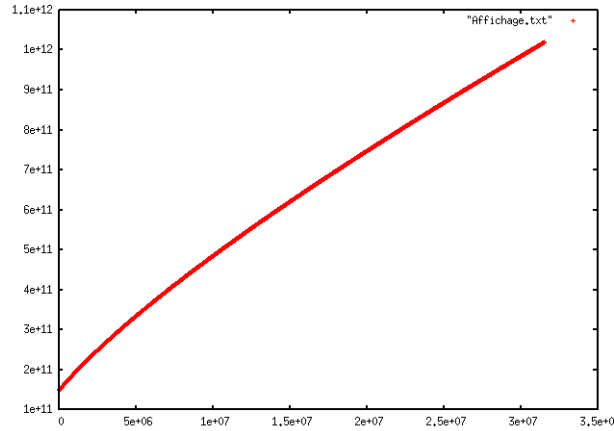


FIGURE 7 – Position de la Terre pendant une période de 1 an, un pas de 1 seconde avec $V_{lib} = 45000m/s$

Ici à l'inverse on se place à $V_{lib} = 45000m/s$ supérieur à la V_{lib} théorique. On voit bien que la Terre s'éloigne de plus en plus du soleil et est donc libérée.

3. APPLICATION AU SYSTÈME SOLAIRE

En utilisant une vitesse inférieure à la vitesse de libération, on s'attend à ce que la planète oscille autour du soleil ; ce n'est pourtant pas ce que donne la figure 8 !

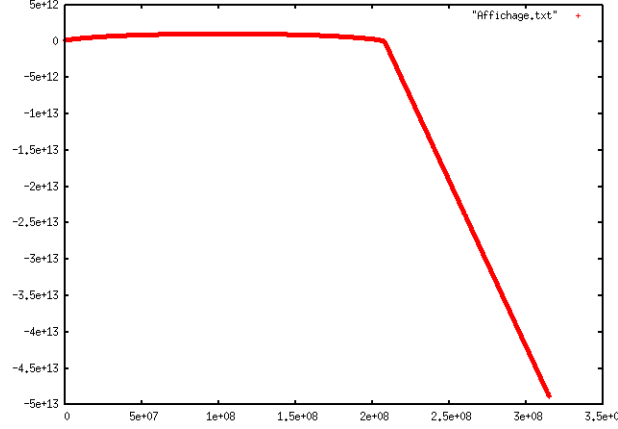


FIGURE 8 – Position de la Terre pendant une période de 10 ans, un pas de 1 seconde et $V_{lib} = 39000m/s$

Il faut en fait se pencher sur ce que fait précisément l'algorithme de calcul des orbites pour comprendre cette trajectoire.

Chaque itération est temporelle et non pas spatiale, c'est à dire qu'on itère toutes les s secondes. Or en se rapprochant trop du soleil, (ce qui est possible car les corps sont supposés ponctuels) l'accélération augmente énormément, ainsi que la vitesse. A une itération $i_{critique}$, l'astre est tout près du soleil, et sa vitesse est gigantesque. A l'itération suivante, il se retrouve essentiellement en $x + v * dt$ plus loin, ce qui correspond à une distance alors bien trop importante et l'attraction du soleil est alors négligeable.

2.07933e+08	9.71371e+09	-148600	-0.939351
2.0794e+08	8.51085e+09	-156832	-1.1628
2.07948e+08	7.23515e+09	-167228	-1.49957
2.07956e+08	5.86514e+09	-181037	-2.05441
2.07964e+08	4.36499e+09	-200881	-3.10563
2.07972e+08	2.66474e+09	-233724	-5.67334
2.0798e+08	5.76038e+08	-310398	-17.5811
2.07988e+08	-1.87617e+09	398005	-1238.15
2.07996e+08	-2.12288e+09	121835	-569.418
2.08004e+08	-2.69441e+09	131958	123.99
2.08011e+08	-2.83512e+09	-262396	274.454
2.08019e+08	-2.91362e+09	243963	227.21
2.08027e+08	-6.15801e+09	-515610	7.23206

FIGURE 9 – Position, vitesse, accélération a chaque itération

La figure 9 donne : numéro de l'itération, position, vitesse, accélération $i_{critique}$ (en fait on enregistre pas toutes les itérations dans un soucis de gain de temps et de place). On a l'effet mentionné avant, sauf que l'astre oscille quelques instants autour du soleil, jusqu'à une itération où il s'approche "trop près", obtenant une vitesse bien trop grande pour que le pas du programme soit suffisant pour traiter effectivement le problème. L'astre est alors éjecté à l'infini ; il ne s'agit en rien d'un effet physique, mais un effet lié à la "quantification" du temps.

3.3 Loi des aires

Si on lance le programme et qu'on veut vérifier la loi des aires, pour la Terre, on obtient la figure suivante :

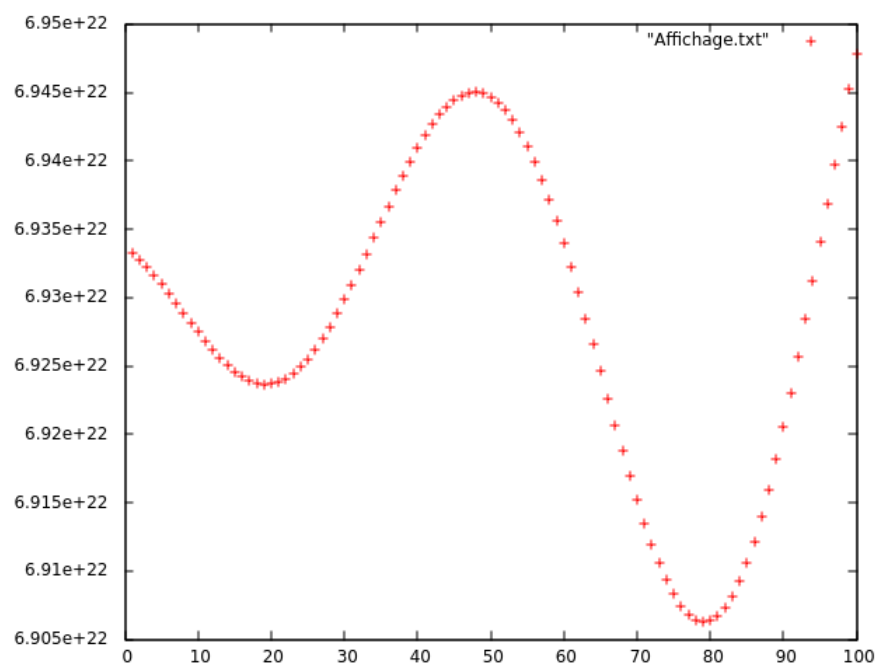


FIGURE 10 – Evolution temporelle de l'aire balayée par la Terre pendant une période de un an sur cent périodes

Il faut comprendre la figure 10 comme l'évolution sur cent périodes de un an, de l'aire balayée pendant un an, par la Terre. La variation relative entre l'aire calculée la plus grande et la plus petite est de 0.7%

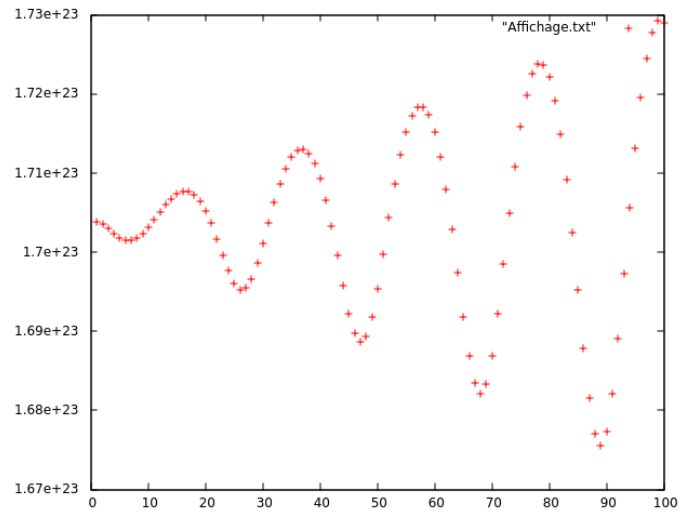


FIGURE 11 – Evolution temporelle de l'aire balayée par Mars pendant une période de 24 mois sur cent périodes

La figure 11 est pour Mars, sur une période de 24 mois, avec un pas de 600 secondes.

On constate donc une tendance à "osciller" de la surface balayée. Il n'est pas étonnant que les erreurs de calcul s'accumulent et augmentent l'erreur totale.

4 Conclusion

Ce programme repose sur quelques approximations, en supposant par exemple les objets ponctuels, et ne s'appuie que sur la mécanique classique. Cependant on sait que le système solaire peut être très bien décrit dans ce cadre (les rotations des objets sur eux même sont fortement négligeables), et le système ne nécessite pas d'intervention relativiste (à l'exception de l'avancée de la périhélie de Mercure).

Les résultats obtenus vont effectivement dans ce sens, : on retrouve les orbites des corps du système solaire, leurs périodes, et on a même pu vérifier la deuxième loi de Kepler, que les vitesses de libération.

Les erreurs ne viennent pas du modèle physique, mais sont plutôt liées au pas, et à l'algorithme. En fait l'algorithme en lui même est assez bon, mais nécessite une puissance de calcul colossal. On pourra alors effectivement améliorer le programme en utilisant un algorithme d'ordre supérieur, comme par exemple une extension de l'algorithme de Runge-Kutta à N équations couplées.

On notera aussi que ce programme n'est pas nécessairement limité à un système solaire. Il est utilisable pour N corps en interaction gravitationnelle, il ne nécessite qu'un jeu de masses, positions et vitesses initiales valides.

Bibliographie

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Verlet_integration#Velocity_Verlet
- [2] http://lal.univ-lille1.fr/m316/cours_m316.pdf
- [3] <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#results>
- [4] https://fr.vikidia.org/wiki/Fichier:Mouvement_rétrograde_de_Mars.gif