

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

COSMOLOGIE OBSERVATIONNELLE

Cours de Master
Semestre de Printemps
Année Académique 2015 - 2016

Prof. Jean-Paul KNEIB
Laboratoire d'Astrophysique
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Contacts:

Prof. Jean-Paul KNEIB
Directeur du Laboratoire d'Astrophysique
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Observatoire de Sauverny
CH-1290 Versoix
Switzerland

Tel : +41 22 379 24 73 (Sauverny)

Tel : +41 21 693 04 63 (Lausanne)

Courriel : jean-paul.kneib@epfl.ch

Note: Les notes de ce cours sont basées sur celles
de Georges Meylan (directeur précédent du Laboratoire d'Astrophysique de l'EPFL
et de Yannick Mellier (Institut d'astrophysique de Paris
et de l'Observatoire de Paris, France)

The question of the origin of the Universe,
like the question of the motion of falling bodies,
is one that needs to be answered by the methods of science,
by theory-aided observation
and
observation-governed theory,
but it is not one that we can settle by pure thought or religious authority.

S. Weinberg

1992, in L'Anno Galileiano

Contents

1	Introduction	11
2	L'invention du Big Bang durant le XXième siècle	12
2.1	Les créateurs du Big Bang	13
2.2	L'aube de la gravitation	14
2.3	La relativité restreinte (1905)	15
2.4	L'élaboration de la relativité générale (1907-1916)	15
2.5	Les cosmologies statiques (1917)	17
2.6	Sur la courbure de l'espace	18
2.7	Récession des galaxies et Univers en expansion (1927)	20
2.8	Le rayonnement fossile à 3 K	25
3	Une brève chronologie de la cosmologie du XXième siècle	28
4	Notations et quantités usuelles (système d'unités CGS)	30
5	Quelques échelles	31
6	Contenu et propriétés de l'Univers observable	32
6.1	Propriétés statistiques des galaxies	32
6.1.1	Masse	32
6.1.2	Dimension	33
6.1.3	Fonction de Luminosité	33
6.1.4	Preuve de l'expansion de l'Univers	37
6.1.5	Comptage des galaxies	41
6.1.6	Plan Fondamental et Tully-Fisher	41
6.2	Distribution spatiale et structuration	47
6.2.1	L'Univers local	47
6.2.2	Cartographie de l'Univers lointain	47

6.2.3	Distribution moyenne en redshift des galaxies	52
6.2.4	Caractérisation de la structuration	53
6.3	Propriétés des amas de galaxies	58
6.3.1	Propriétés internes	60
6.3.2	Densité numérique et fonction de corrélation amas-amas	60
6.4	Propriétés du gaz inter-galactique	61
6.5	Propriétés statistiques des quasars	69
6.6	Les fonds de rayonnement	70
6.7	L'âge de l'Univers	73
6.7.1	Nucléocosmochronologie	74
6.7.2	Âge des amas globulaires	75
6.7.3	Temps de refroidissement des naines blanches	76
6.8	Remarque sur le Paradoxe d'Olbers	77
7	Les bases de la cosmologie moderne	80
7.1	Construction des équations d'Einstein	81
7.2	Principe cosmologique	81
7.3	Conséquences du principe cosmologique	85
7.3.1	Loi de Hubble	85
7.3.2	Redshift	86
8	Cosmographie : grandeurs physiques des Univers homogènes et isotropes	88
8.1	Paramètre de décélération	88
8.2	Temps écoulé	88
8.3	Distances et tests cosmologiques classiques	90
8.3.1	Distance lumineuse	91
8.3.2	Distance diamètre angulaire	93
8.3.3	Relation magnitude-redshift	94
8.3.4	Relation Comptage-magnitude	95

8.3.5	“Dimming factor” : effet de brillance de surface	98
8.3.6	K-correction	99
8.3.7	Les tests cosmologiques classiques	101
9	Les modèles d’Univers de Friedmann	102
9.1	Abrégé des composantes non-nulles des tenseurs d’intérêt cosmologique	102
9.1.1	Éléments non-nuls du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$	102
9.1.2	Éléments non-nuls des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$	103
9.1.3	Composantes du tenseur de Ricci ou de courbure $R_{\mu\nu}$	103
9.1.4	Composantes du tenseur d’Einstein $G_{\mu\nu}$	104
9.2	Équations de Friedmann sans constante cosmologique	104
9.2.1	Interprétation Newtonienne des équations de Friedmann	105
9.2.2	Propriétés générales des modèles de Friedmann	107
9.3	Cas du modèle Einstein-de Sitter : $\Omega = 1$	110
9.3.1	Cas du modèle dominé par le rayonnement : $\omega = 1/3$	111
9.3.2	Cas du modèle dominé par la matière (poussière) : $\omega = 0$	112
9.4	Cas des modèles courbes : $\Omega \neq 1$	112
10	Description des 3 modèles standards	113
10.1	Cas des modèles dominés par la matière (poussière) $\omega = 0$	113
10.1.1	Modèle euclidien : $k = 0, \Omega = 1, q = 1/2$	113
10.1.2	Modèle elliptique ou sphérique (fermé) $k = 1, \Omega > 1, q > 1/2$	113
10.1.3	Modèle hyperbolique (ouvert) $k = -1, \Omega < 1, 0 < q < 1/2$	115
10.2	Cas des modèles dominés par le rayonnement (radiatifs) $\omega = 1/3$	116
11	Modèles avec une composante d’énergie sombre	117
11.1	Modèles à constante cosmologique	117
11.2	Cas général des modèles à courbure nulle	119
12	Analyse rétrospective de quelques faits observationnels	123

12.1	Expression de la distance angulaire des modèles de Friedmann	123
12.2	L'horizon	123
12.2.1	L'horizon “particule”	124
12.2.2	L'horizon ”événement”	124
12.2.3	Le problème de l'horizon	124
12.3	Le problème de la latitude	126
12.4	Comptage en fonction du redshift	126
12.5	Profondeur optique	128
12.6	Évolution du spectre du corps noir cosmologique	130
12.7	L'effet Sunyaev-Zeldovich (SZ)	131
13	Mesure des paramètres cosmologiques	134
13.1	Mesure de H_0	135
13.2	De la mesure du rapport M/L à Ω_m	136
13.2.1	Galaxies	138
13.2.2	Groupes de galaxies	138
13.2.3	Amas de galaxies	138
13.2.4	Les mouvements à grande échelle des galaxies	155
13.2.5	En résumé	158
13.3	Mesure du couple Ω_m, Ω_Λ	160
13.3.1	Les supernovae de type Ia	160
13.3.2	La fraction des quasars amplifiés	161
13.3.3	Les arcs gravitationnels	163
13.3.4	Les effets de distorsion gravitationnelle cosmologique	163
13.3.5	Contrainte des anisotropies du fond diffus cosmologique	165
13.4	Synthèse	168
13.5	La matière sombre	175
13.5.1	Nécessité d'introduire une composante de matière exotique	175

13.5.2 Les candidats possibles de matière sombre	176
14 Histoire thermique de l’Univers	182
14.1 Transition matière-rayonnement	182
14.2 Découplage et recombinaison	184
14.3 Nucléosynthèse primordiale des éléments légers	187
14.4 Comparaison avec les observations	190
14.5 Contrainte sur la fraction de baryons	192
15 Les nouveaux instruments de la cosmologie	193
16 Annexes	196
16.1 Annexe A : Projection de la fonction de corrélation	196
16.2 Annexe B : Théorème du viriel	198
16.3 Annexe C : La sphère isotherme singulière	200
16.4 Annexe D : Angle de déflexion et densité de matière	206
16.5 Annexe E : Notions sur les tenseurs	210
16.5.1 Vecteurs contravariants	210
16.5.2 Vecteurs covariants	210
16.5.3 Tenseurs	211
16.6 Annexe F : Formulaire aide-mémoire	217

Bibliographie

Compte tenu de la diversité d'origine et d'objectif des étudiants suivant ce cours, les références bibliographiques suivantes couvrent un domaine assez vaste en niveau et en contenu.

- L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark Energy : Theory and Observations*, CUP, 2010.
- J. Binney, M. Merrifield, *Galactic Astronomy*, PUP, 1998.
- J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, PUP, 1987.
- P. Coles, F. Lucchin, *Cosmology, The origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley, 2002.
- F. Combes et al., *Galaxies et cosmologie*, InterEditions/CNRS 1991.
- S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003.
- M. Lachièze-Rey, *Initiation à la cosmologie*, Masson 2004.
- M. S. Longair, *Galaxy Formation*, Springer Verlag, 2008.
- J. Merleau-Ponty, *Cosmologies du XXième siècle*, Gallimard, 1965.
- C. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973.
- T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, CUP, 1993.
- T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics Volume III : Galaxies and Cosmology*, CUP, 2002.
- J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, CUP, 1999.
- P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, PUP, 1993.
- P. J. E. Peebles, *Large-Scale Structures of the Universe*, PUP, 1980.
- W. Rindler, *Relativity : Special, General and Cosmological*, OUP, 2003.
- P. Schneider, *Extragalactic Astronomy and Cosmology*, Springer Verlag, 2006
- P. Schneider, C. Kochanek, J. Wambsganss, *Gravitational Lensing : Strong, Weak, and Micro*, Springer Verlag, 2006
- H. Stephani, *General Relativity*, CUP, 1996.
- S. Webb, *Measuring the Universe*, Springer Verlag, 2001.
- S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972.
- S. Weinberg, *Cosmology*, OUP, 2008.

1 Introduction

La cosmologie a pour objet l'étude de la formation et de l'évolution de l'Univers et de ses constituants (galaxies, étoiles et atomes) pour en expliquer l'origine, la structure actuelle et son avenir. C'est un champ extraordinairement vaste, parfois spéculatif, qui couvre des domaines très divers de la physique. Le tableau présenté dans la Figure 4 tente d'en dégager schématiquement quelques grandes orientations actuelles.

Les objectifs de la cosmologie la placent dans une situation assez inconfortable puisque, par nature, ses préoccupations peuvent la conduire bien au-delà de la science. Mais dans ce cours, nous n'aborderons que les terrains plus solides de la “cosmologie physique” qui cherche à progresser selon les règles et les méthodes des sciences physiques, entre autres par la confrontation entre théorie et observations.

La cosmologie physique s'appuie sur une théorie de la gravitation, la relativité générale, tout en adoptant le principe cosmologique. Il existe des faits observationnels bien établis, lesquels représentent trois véritables contraintes observationnelles supportant le paradigme actuel du Big Bang : (i) l'expansion de l'Univers, (ii) le rayonnement cosmologique fossile et (iii) la nucléosynthèse primordiale. Le modèle du Big Bang est un des plus remarquables succès de la cosmologie physique du XXI^e siècle. Même s'il est important de conserver à l'esprit que des cosmologies alternatives sont proposées, il faut bien avouer qu'aucune n'est en mesure d'expliquer de façon aussi simple la plupart des phénomènes observés dans l'Univers. C'est pour cette raison, et aussi parce que sa connaissance constitue une étape préalable incontournable à des recherches cosmologiques plus spéculatives, que ce cours se concentre sur cette cosmologie standard.

Ces notes constituent le cours *Astrophysique IV : Cosmologie observationnelle* correspondant au niveau master de quatrième année. Il est utile pour ce cours, mais pas indispensable, d'avoir suivi les autres cours d'astrophysique offerts au niveau bachelor, à savoir *Astrophysique I : Introduction à l'astrophysique* et *Astrophysique II : Bases physiques de l'astrophysique*, de deuxième et troisième années, respectivement. Il existe une totale synergie entre le présent cours et celui du semestre d'automne de quatrième année *Astrophysique III : Dynamique stellaire et galactique*.

L'exposé insiste plus particulièrement sur la situation actuelle des données observationnelles, des modèles d'Univers et des tests observationnels permettant de rejeter ou d'accepter des modèles cosmologiques.

Ces notes empruntent fréquemment des illustrations et des commentaires provenant d'ouvrages et d'articles de la littérature astrophysique. Dans cette version, encore préliminaire, beaucoup de références sont omises. C'est une des raisons pour lesquelles il vous est recommandé de ne pas diffuser ce cours.

2 L'invention du Big Bang durant le XXième siècle

La cosmologie en ce début de XXI ème siècle repose sur des bases établies durant les siècles précédents. Cette brève revue historique de la théorie du Big Bang s'inspire en partie du livre de J.-P. Luminet intitulé “L'invention du big bang” paru en 2004 au Seuil dans la collection poche Points Sciences.

Le Soleil, la Lune et les planètes sont connus depuis les temps les plus anciens, par contre l'étude scientifique de leur mouvement au sens moderne n'a commencé qu'au XVI ème siècle. Les révolutions scientifiques sont rares. Voir le livre de l'épistémologue Thomas Kuhn (1922-1996) *The structure of scientific revolutions* (1962). Il y a révolution scientifique lorsqu'une théorie consacrée par le temps et l'expérience est rejetée au profit d'une nouvelle théorie. Dans le domaine de la cosmologie, la physique n'a connu que trois révolutions scientifiques, toutes trois très récentes :

- la révolution copernico-galiléenne (1543 et 1610)
- la révolution newtonienne (1687 et 1704)
- la révolution relativiste (1905 et 1916)

Quelques uns parmi les principaux contributeurs, tant observateurs que théoriciens, sont :

- **Nicolas Copernic (1473-1543)** publie son *De revolutionibus orbium coelestis* en 1543, dans lequel il remplace la Terre par le Soleil comme centre du monde.
- **Tycho Brahé (1546-1601)** publie en 1598-1602 *Astronomiae instauratae progymnasmata* qui décrit l'observation de la supernova de 1572, laquelle jette un doute sur le dogme aristotélicien de l'immuabilité des étoiles fixes. Sur une période de 20 ans, il mesure les positions du Soleil, de la Lune et de 777 étoiles, avec une précision dix fois meilleure que tout ce qui précède.
- **Giordano Bruno (1548-1600)**, philosophe italien, publie en 1582 une pièce de théâtre intitulée *Le chandelier* dans laquelle il expose certaines de ses idées. Il est condamné à mort et brûlé sur un bûcher par l'Inquisition pour avoir affirmé l'infinité de l'espace et la pluralité des mondes habités.
- **Johannes Kepler (1571-1630)** publie en 1609 *Astronomia nova* dans laquelle, ayant analysé (1601-1609) les positions des planètes mesurées par Tycho Brahé, il abandonne le mythe de la perfection circulaire des orbites planétaires pour les décrire en termes d'ellipses.
- **Galileo Galilei (1564-1642)** publie en 1610 *Sidereus Nuncius* où il décrit, entre autres, l'imperfection de la Lune, constellée de cratères, et du Soleil, couvert de taches, ainsi que la découverte de quatre satellites autour de Jupiter.
- **Isaac Newton (1642-1727)** publie en 1687 *De philosophiae naturalis principia mathematica* - *Principes mathématiques de philosophie naturelle*, et *Optics* en 1704.
- **Albert Einstein (1879-1955)** publie en 1905 la relativité restreinte et en 1916 la relativité générale.

Petite digression sur la qualité des sources d'informations. Voici deux versions différentes de l'enterrement de Kepler, dont la mort survient à Regensburg, lors d'un voyage :

(i) *Johannes Kepler* : *Life and Letters* par Carola Baumgardt, avec une introduction d'Albert Einstein (1951). "He died there, after a short illness, on November 15, 1630. [...] The Reichstag, assembled in Regensburg in 1630, was far too busy with problems which seemed unfortunately more important, primarily the enforcement of the abdication of Wallenstein as the commander in chief of the Imperial Army. However, the funeral procession of the great astronomer was attended by many members of this illustrious Imperial Diet in Regensburg."

(ii) *Johannes Kepler* : *Le visionnaire de Prague* par Henriette Chardak (2004). "Kepler meurt le 15 novembre 1630. Le 19, ce véritable défenseur de Copernic est enterré à la sauvette, comme un chien, dans la fosse commune, au cimetière Saint-Pierre, hors de la ville. Personne n'accompagne sa dépouille. L'aubergiste ne connaît pas le nom du défunt. Deux mois plus tard, il le trouvera écrit à côté d'un médaillon sur un livre de son ancien propriétaire. Suzanne apprend la mort de son époux à la fin du mois de janvier."

Ces deux descriptions du même enterrement sont pour le moins divergentes. Qui croire ? La plus récente ? Elles illustrent l'importance de la qualité des sources d'information.

2.1 Les créateurs du Big Bang

Trois idées maîtresses sont à l'origine de la cosmologie relativiste :

- l'expansion de l'Univers
- son origine singulière
- l'existence d'un rayonnement fossile, mémoire de cette origine.

Ces développements sont l'oeuvre de trois théoriciens aux intuitions géniales :

- un russe : **Alexandre Friedmann (1888-1925)**, qui publie son premier papier dans le domaine en 1922 ;
- un belge : **Georges Lemaître (1894-1966)**, qui publie son premier papier en 1927 ;
- un américano-russe : **Georges Gamow (1904-1968)**, qui publie son premier papier en 1948.

Ce sont là les trois véritables pères du Big Bang.

Une des anomalies de l'histoire des sciences récente attribue les concepts d'Univers en expansion et de Big Bang à d'autres scientifiques, certes prestigieux, tels que :

- Edwin Hubble (1889-1953) qui en 1929 a confirmé observationnellement la relation linéaire entre décalage spectral vers le rouge (rétablie théoriquement et observationnellement par Lemaître en 1927). Hubble n'a pas découvert ce décalage spectral systématique (dont la primeur revient à Vesto Slipher 1875-1969), ni immédiatement accepté l'interprétation relativiste de ces observations, c'est-à-dire l'expansion de l'espace en lieu et place d'un mouvement réel des galaxies.

- Albert Einstein (1879-1955) qui invente la théorie de la relativité, mais rejette pendant plus de dix ans l'idée d'un Univers évolutif et cesse de travailler dans le domaine dès lors que les évidences observationnelles l'obligent à s'amender.

L'anonymat quasi complet de Friedmann et de Lemaître auprès du grand public est une chose. La sous-estimation de leurs contributions scientifiques dans la communauté des physiciens, voire dans celles des astrophysiciens et des cosmologistes, en est une autre, très surprenante si l'on songe que les concepts que Friedmann et Lemaître ont promulgués resteront parmi les accomplissements les plus remarquables de la science du XXI^e siècle.

Les contributions respectives de ces différents scientifiques ayant participé à l'élaboration du nouveau paradigme cosmologique se répartissent ainsi :

- Einstein a créé la théorie de la relativité générale et écrit les équations gouvernant les propriétés physico-géométriques de l'Univers.
- Friedmann a découvert les solutions non statiques de ces équations, décrivant la variation temporelle de l'espace et entrevu son possible commencement dans une singularité.
- Lemaître a relié l'expansion théorique de l'espace au mouvement observé des galaxies, jeté les bases physiques du Big Bang et anticipé le rôle fondamental joué par la mécanique quantique et l'énergie du vide.
- Gamow a montré comment les éléments légers se sont formés dans l'Univers chaud des origines et prédit l'existence d'un rayonnement fossile à une température d'environ 3 K.
- Hubble a prouvé la nature extragalactique des nébuleuses spirales et confirmé expérimentalement la loi de proportionnalité entre leur vitesse de récession et leur distance, prédicta et mesurée auparavant par Lemaître.

2.2 L'aube de la gravitation

Tous les travaux de la cosmologie moderne n'auraient pas vu le jour sans l'élaboration préalable de la relativité générale qui est une théorie de la gravitation. L'interaction gravitationnelle gouverne en effet la structure de l'Univers à l'échelle astronomique, mais son interprétation a considérablement varié au cours de l'histoire.

Aristote (383-322 B.C.), philosophe grec, disciple de Platon et éducateur d'Alexandre le Grand, affirme qu'une force ne peut s'appliquer que par contact, la force à distance étant, selon lui, impossible. Son influence prépondérante bloque la compréhension des phénomènes de gravitation pendant deux millénaires (voir le peu de respect que lui tient Molière dans *Le Médecin Malgré Lui* (1666) dans lequel il écrit "... ce benêt d'Aristote ...").

Le nouveau système du monde héliocentrique, proposé par Copernic en 1543, fait office de catalyseur. Ce dernier ne répond pas à la question "Qu'est-ce qui meut les planètes?", mais les lois des mouvements planétaires découvertes par Kepler et celles régissant la chute des corps décrites par Galileo fixent un nouveau cadre propice à l'élaboration d'une théorie cohérente de la gravitation. Celle-ci voit le jour en 1687 sous la plume d'Isaac Newton, avec le nom d'*attraction universelle* (*De philosophiae naturalis principia mathematica - Principes mathématiques de philosophie naturelle*, 1687).

La théorie de l'attraction universelle n'est réellement acceptée qu'après avoir connu des confirmations expérimentales, portant notamment sur la forme du globe terrestre, en 1736 par Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), la prédiction par Edmund Halley (1656-1742) du retour pour 1759 de la comète de Halley et la découverte en 1846 de la planète Neptune par le calcul des perturbations newtoniennes en 1845 de John Adams (1819-1892) et en 1846 de Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877).

2.3 La relativité restreinte (1905)

Dans des travaux publiés en 1892 et 1895, Hendrik Lorentz (1853-1928) met en évidence la variation des intervalles de temps et d'espace avec la vitesse du référentiel et donne les formules de transformation entre deux référentiels à vitesse relative uniforme, formules qui permettront le développement de la relativité restreinte. Il conjecture aussi que la gravitation peut être attribuée à une interaction non pas instantanée, mais se propageant à la vitesse de la lumière.

Dans un article de juin 1905, soumis quelques jours avant celui d'Einstein sur le même sujet, Henri Poincaré (1854-1912) pose le principe de la relativité restreinte : tous les référentiels à vitesse relative uniforme sont équivalents, la forme des lois physiques étant invariante sous les transformations de Lorentz. Notant toutefois que la loi de gravitation newtonienne ne satisfait pas à ce critère, il propose l'existence d'ondes gravitationnelles voyageant à la vitesse de la lumière, mais ne développe pas de théorie particulière sur le sujet.

2.4 L'élaboration de la relativité générale (1907-1916)

En 1907, Einstein reprend le problème de la gravitation posé par Poincaré. Comment la gravitation newtonienne doit-elle être modifiée de façon à être compatible avec la relativité restreinte ? Il soupçonne que le principe d'équivalence, c'est-à-dire, l'égalité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle constatée expérimentalement, doit jouer un rôle clé dans la gravitation. Lui vient alors ce qu'il appellera plus tard "l'idée la plus heureuse de mon existence , à savoir qu'un observateur tombant en chute libre ne ressentirait aucun champ gravitationnel ; en d'autres termes, l'équivalence physique complète entre un champ gravitationnel et un système de référence convenablement accéléré. Cette hypothèse permet de généraliser le principe de relativité au cas du mouvement uniformément accéléré, et fait ressortir que le postulat de base de la relativité restreinte est trop étroit : pour d'écrire la gravitation, il faut également envisager l'équivalence entre tous les référentiels en accélération relative uniforme, se traduisant par l'indépendance de la forme des lois physiques par rapport à certaines transformations non linéaires des coordonnées dans un espace à quatre dimensions.

En vertu du principe d'équivalence, toutes les formes d'énergie doivent être influencées par la gravitation, y compris la lumière. En 1911, l'astronome allemand Erwin Finlay Freundlich (1885-1964) convainc Einstein de l'importance des observations astronomiques pour tester les théories gravitationnelles, notamment la déflexion de la lumière dans un champ gravitationnel. Einstein n'avait précédemment songé qu'à des expériences terrestres, laissant peu de chances à des résultats mesurables en raison de la faiblesse du champ gravitationnel mis en jeu.

En 1912, Einstein réalise combien les fondements de la géométrie revêtent une importance physique fondamentale et, dès lors, change d'état d'esprit au sujet des mathématiques qu'il avait jusque-là quelque peu négligées. Einstein demande à son ami Marcel Grossman (1878-1936) de lui expliquer les développements mathématiques récents sur les espaces courbes obtenus par :

- Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)
- Gregorio Ricci (1853-1925)
- Tullio Levi-Civita (1873-1941)

Les achèvements mathématiques des italiens fertilisent la profonde intuition physique d'Einstein. Grossman fournit à Einstein le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, qui deviendra l'outil géométrique de base de la future théorie de la relativité générale.

Le 18 novembre 1915, Einstein se rend compte que sa théorie explique naturellement et totalement l'avance du périhélie de la planète Mercure. La précession mesurée, de 574 secondes d'arc par siècle, n'est que partiellement expliquée par l'action des autres planètes dans le cadre de la gravitation newtonienne. Les 43 secondes d'arc par siècle restantes s'expliquent avec précision dans le cadre de sa nouvelle théorie gravitationnelle. Einstein montre également que son calcul de la déflexion de la lumière publié dans son travail de 1911 est faux d'un facteur 2. La valeur correcte de la déflexion au limbe solaire est de 1.74 secondes d'arc.

Le 25 novembre 1915, Einstein soumet son article fondamental "Les équations du champ de la gravitation fixant la forme correcte de la relativité générale. Le 20 novembre 1915, David Hilbert (1862-1943), qu'Einstein a rencontré en juin de la même année à Göttingen, a lui aussi soumis son article "Grundlagen der Physik", fournissant les équations correctes de la gravitation et apporte à la relativité des contributions importantes ne se trouvant pas dans le travail d'Einstein.

En 1916, Karl Schwarzschild (1873-1916) découvre une solution mathématique exacte des équations, correspondant au champ gravitationnel créé par un corps sphérique massif. Cette étude, purement théorique, sera la pierre angulaire de la compréhension des étoiles à neutrons, des pulsars et des trous noirs.

En 1916, Einstein publie un article expliquant les fondements de la relativité générale en termes plus aisément compréhensibles. La vérification expérimentale organisée par Arthur S. Eddington (1882-1944) lors de l'éclipse totale de soleil de 1919, confirme les prédictions de la relativité générale et ouvre le chemin théorique à la cosmologie.

2.5 Les cosmologies statiques (1917)

L'ère de la cosmologie relativiste commence en 1917 avec l'article d'Einstein "Considérations cosmologiques sur la théorie de la relativité générale" publant une solution des équations du champ applicable à l'Univers tout entier. Le lien entre la gravitation et les propriétés structurelles de l'Univers est l'une des plus brillantes idées d'Einstein, mais la genèse de cette idée remonte à une époque antérieure, à une publication posthume datant de 1867 de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

La croyance en un Univers statique (c'est-à-dire dans lequel la distance relative entre deux points ne varie pas au cours du temps) ne paraît pas devoir être mise en doute. Aussi Einstein adopte-t-il tout naturellement l'hypothèse d'un Univers homogène, rempli de matière sans pression, de densité constante dans l'espace et dans le temps.

Une distribution de matière uniforme dans l'espace implique une courbure uniforme. La partie spatiale de l'Univers d'Einstein a une courbure positive, partout la même : c'est donc un espace à géométrie sphérique.

Le modèle d'Einstein a deux mérites :

- (i) il démontre l'efficacité technique de la relativité générale pour aborder le problème cosmologique
- (ii) il ébauche la croyance en un Univers infini en proposant un espace fini mais sans limites.

Einstein a osé toucher à l'espace, mais pas au temps : son Univers est constitué de matière sans mouvement. Il est néanmoins troublé par le résultat newtonien selon lequel un tel équilibre est instable à la moindre perturbation.

Dans une lettre au révérend Richard Bentley (1662-1742), datée de 1692, Newton avait noté que, si la distribution de matière dans l'Univers occupait un volume fini au sein d'un espace infini, la matière située à l'extérieur de ce volume serait, par la gravité, attirée par la matière à l'intérieur, et en conséquence tomberait au centre de l'espace entier pour former une grande masse sphérique. Ainsi la théorie de la gravitation universelle impliquait que la matière devait se distribuer dans l'espace infini.

L'existence de solutions non statiques effleure Einstein, puisqu'il écrit : "Le caractère courbe de l'espace varie dans le temps et l'espace en fonction de la distribution de la matière". Il n'abandonne pas pour autant l'hypothèse d'un Univers statique, puisqu'il pense que les observations l'exigent. Par conséquent, il n'a pas d'autre choix que de modifier la formulation originale en introduisant une constante cosmologique.

Avec cet article inaugural de la cosmologie moderne, Einstein a conscience de s'aventurer en terrain nouveau. Il prend en effet le contre-pied de la philosophie positiviste illustrée par l'affirmation d'Emmanuel Kant (1724-1804) : "Aucune observation ne saurait confirmer la thèse de la cosmologie rationnelle, dont l'objet dépasse toute expérience possible". Au contraire, Einstein écrit : "La question de savoir si le monde est spatialement fini ou non me paraît être une question qui a un sens en géométrie pratique. Il ne me semble même pas exclu que l'astronomie trouve une réponse à cette question dans un avenir relativement proche".

La même année 1917, Willem de Sitter (1872-1934) découvre une seconde solution cosmologique

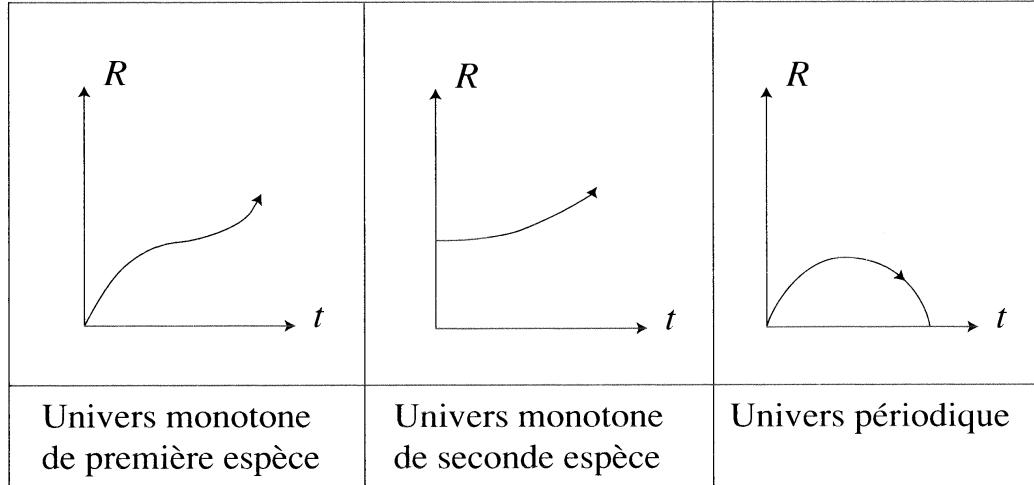


Figure 1: Les trois familles de modèles publiés par Friedmann en 1922.

des équations de la relativité générale, la présence possible d'une constante cosmologique dans les équations du champ peut être envisagée indépendamment du modèle statique spécifique d'Einstein. Ce modèle se distingue de celui d'Einstein par le fait qu'il ne contient pas de matière.

Dans un post-scriptum, de Sitter déduit que la fréquence des vibrations lumineuses diminue quand la distance à l'origine des coordonnées augmente. En conséquence, les raies spectrales des étoiles lointaines doivent être systématiquement décalées vers le rouge ! De Sitter fait même allusion à de "maigres" indices observationnels suggérant qu'un tel effet aurait été détecté. La référence concerne notamment les résultats préliminaires présentés en 1915 par l'astronome américain Vesto Slipher (1875-1969), lequel fait état de 15 nébuleuses avec vitesses radiales mesurées, dont onze sont positives. De Sitter écrit : "Si, cependant, l'observation future confirme le fait que les nébuleuses spirales ont des vitesses radiales systématiquement positives, cela serait certainement une indication qu'il faut adopter l'hypothèse B (la sienne) de préférence à l'hypothèse A (celle d'Einstein)".

2.6 Sur la courbure de l'espace

Alexandre Friedmann (1888-1925) publie en 1922 un papier fondateur de la cosmologie non statique, en franchissant le pas qu'Einstein n'avait pas été prêt à faire : si l'on abandonne l'hypothèse d'un Univers statique, le problème cosmologique relativiste comporte une infinité de solutions dans lesquelles la métrique varie en fonction du temps. Friedmann discute le cas d'un Univers homogène et isotrope, c'est-à-dire avec une densité de matière constante dans l'espace. La relation entre distribution de matière et courbure stipulée par les équations d'Einstein, impose que la courbure de l'Univers soit uniforme (constante en chaque point de l'espace à un instant donné). Si le rayon de courbure est indépendant du temps, les seules solutions sont les Univers statiques d'Einstein et de de Sitter. Si $R(t)$ dépend de la variable temporelle, il y a une infinité de modèles non statiques, en expansion monotone ou en oscillation périodique selon la valeur choisie pour la constante cosmologique Λ . Voir la Figure 1.

$0 < \Lambda_{crit} < \Lambda \implies$ le rayon de courbure de l'Univers croît de façon monotone à partir d'une valeur initiale nulle : R varie de zéro à l'infini.

$0 < \Lambda < \Lambda_{crit} \implies$ le rayon de courbure de l'Univers croît de façon monotone à partir d'une valeur initiale non nulle : R varie de R_0 à l'infini.

$\Lambda < 0$ le rayon de courbure varie entre 0 et une valeur finie, présentant des ères alternées d'expansion et de contraction : R varie entre zéro et un maximum. Appelé " Univers-phénix " par Eddington (1929).

Avec son article de 1922, Friedmann introduit une révolution scientifique de même ampleur que la révolution copernicienne. Dans la cosmologie pré-copernicienne, l'espace était centré sur un lieu très particulier, la Terre. Dans la cosmologie pré-friedmannienne, le déroulement temporel de l'Univers était réduit à un cas très particulier, l'état statique. La cosmologie friedmannienne introduit de façon irréversible l'historicité de l'Univers comme espace-temps, avec l'idée d'un commencement.

Mais la communauté scientifique des années 1920 n'est pas préparée à recevoir ces faits curieux, comme les qualifie Friedmann dans son livre de vulgarisation de 1923. Incrédule, Einstein critique le travail de Friedmann en publant, en 1922, une note de recherche dans laquelle il prétend que Friedmann a commis une erreur. En fait, Einstein reconnaît assez rapidement dans une seconde note de 1923 que c'est lui qui a commis une erreur !

L'intérêt de l'ouvrage de vulgarisation de Friedmann publié en 1923 à l'intention des philosophes réside en quatre points :

- (i) l'exposé axiomatique des problèmes de l'espace, du temps et de la gravitation ;
- (ii) la discussion de la tentative d'unification géométrique de la gravitation et de l'électromagnétisme, due à Hermann Weyl (1885-1955) ;
- (iii) l'affirmation selon laquelle la "création de l'Univers apparaît naturellement comme solution des équations du champ gravitationnel" ;
- (iv) les remarques sur l'indétermination topologique de la relativité générale, qui ne fournit aucune indication directe sur la finitude ou pas de l'Univers.

Friedmann pose pour la première fois le problème du début et de la fin de l'Univers en termes scientifiques. Il ajoute : "Ceci n'est pas sans rappeler certaines conceptions mythologiques des hindous relatives aux cycles d'existence ; on pourrait également parler d'une création du monde à partir de rien. Mais tout ceci ne doit être pris qu'à titre de curiosité et ne peut être prouvé au moyen d'observations astronomiques encore insuffisantes." Chez les hindous, chaque cycle de l'Univers est un kalpa, ou jour de Brahmâ, qui dure 4.32 milliards d'années, du même ordre que l'âge de l'Univers (13-14 milliards d'années) de la cosmologie moderne.

En 1924, Friedmann publie son deuxième article cosmologique fondamental intitulé "Sur la possibilité d'un Univers à courbure négative constante". Lemaître retrouve indépendamment ces résultats. Quelques années plus tard, Howard Robertson (1929) et Arthur Walker (1936) rassemblent les trois possibilités (de courbures constantes négatives, nulles ou positives) en une seule équation formelle, dont l'élément de métrique correspondant s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1)$$

où k est la constante de courbure. Ces modèles d'Univers spatialement homogènes et isotropes sont depuis appelés *modèles de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, en abrégé FLRW.

Contrairement à Friedmann, qui ne vient à l'astronomie qu'en 1921-1922, soit seulement environ trois ans avant sa mort, Georges Lemaître (1894-1966) lui fut étroitement lié tout au long de sa longue vie. Contrairement à Friedmann, Lemaître ressentira toujours l'absolue nécessité de confronter les faits d'observation et la théorie.

C'est après avoir participé dans l'artillerie belge au premier conflit mondial, à la fin duquel il reçoit l'une des plus hautes distinctions militaires, que Lemaître choisit sa double vocation scientifique et religieuse : il sera prêtre puis abbé. "Il y avait deux voies pour parvenir à la vérité et j'ai décidé de les emprunter toutes les deux" , dira-t-il plus tard.

L'oeuvre cosmologique de Lemaître s'est construite en deux phases. Dans un premier temps, il trouve indépendamment de Friedmann que les équations d'Einstein admettent des solutions cosmologiques non statiques. Simultanément, il prend en compte les observations américaines sur les vitesses des galaxies, auxquelles il donne un sens physique en les interprétant comme les indices d'un Univers en expansion.

Dans un second temps, Lemaître ose une hypothèse encore plus audacieuse, qui est en partie un prolongement logique de la théorie de l'Univers en expansion. Si l'Univers est aujourd'hui en expansion, il a dû être beaucoup plus dense dans le passé. L'Univers a donc été condensé, voilà bien longtemps, en un "atome primitif" dont les fonctionnements successifs l'ont façonné tel qu'il est maintenant. Revue et corrigée au fil du temps, cette conception est devenue la théorie du Big Bang.

2.7 Récession des galaxies et Univers en expansion (1927)

Les nébuleuses étaient cataloguées bien que leur vraie nature demeura incertaine. Charles Messier (1730-1817) compile entre 1771 et 1784 un catalogue de 107 objets. William Herschel (1738-1822) observe le ciel boréal et publie en 1786 un catalogue de 1000 nouveaux amas d'étoiles et nébuleuses. Son fils John Herschel (1792-1871) observe les cieux boréal et austral et publie en 1864 le General Catalogue of Galaxies, avec 5079 objets. John Dreyer (1852-1926) publie une extension, le New General Catalogue of nebulae and clusters of stars, qui avec son Index Catalogue, contient environ 15'000 objets.

Au début des années 1920, très peu d'astronomes acceptent l'idée de l'existence des galaxies extérieures à la nôtre, l'hypothèse des Univers-îles, émise par Emmanuel Kant (1724-1804) en 1755, ayant été battue en brèche par la découverte de nébuleuses gazeuses intragalactiques par Williams Huggins en 1864.

A Washington a lieu en 1920 *Le Grand Débat* entre Heber Curtis, qui soutient l'existence des nébuleuses extragalactiques, et Harlow Shapley, qui soutient l'existence des nébuleuses intragalactiques. Cette réunion ne permet aucune conclusion.

Tout change avec la découverte de Céphéides par Edwin Hubble dans trois nébuleuses :

- 1925 ApJ 62 409 "NGC 6822, a remote stellar system"
- 1926 ApJ 63 236 "A spiral nebula as a stellar system : Messier 33"
- 1929 ApJ 69 103 "A spiral nebula as a stellar system : Messier 31"

Le travail de Hubble concernant NGC 6822 est lu par le secrétaire général de l'AAS, le 1er janvier 1925 à un meeting d'astronomes à Washington, lequel conclut que "cela confirme la théorie des Univers-îles".

Egalement en 1925, Lemaître publie ses premiers résultats cosmologiques notables. Dans le premier article, Lemaître obtient explicitement la métrique pour un espace de courbure nulle. Dans le deuxième article, il déduit que la relation vitesse-distance dans l'Univers de de Sitter est linéaire. C'est la première fois que la constante cosmologique se voit attribuer le rôle d'une force de répulsion cosmique (lorsqu'elle est positive) obligeant les lignes d'Univers des particules à se s'éparer au cours du temps.

Reste à faire le lien entre les vitesses réelles des objets cosmiques. Depuis 1912, Vesto Slipher et Harlow Shapley avaient entrepris un programme systématique de mesures des vitesses des nébuleuses spirales : en 1921 sur 41 nébuleuses mesurées, 36 présentent un décalage vers le rouge, pouvant s'interpréter comme un mouvement systématique de récession. Grâce à son passage au MIT, Lemaître connaît ces résultats préliminaires alors que Friedmann les ignore complètement.

En 1927, Lemaître publie son article fondamental "Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques . Comme son titre l'annonce clairement, il relie l'expansion de l'Univers découlant des solutions cosmologiques de la relativité générale avec les observations sur la vitesse de fuite des nébuleuses extragalactiques.

Comme Friedmann, Lemaître trouve que le rayon de courbure $R(t)$ augmente indéfiniment avec le temps et il obtient des équations différentielles pour R presque identiques à celles de Friedman (Figure 2). La différence majeure réside en ce que Lemaître suppose la conservation de l'énergie et inclut la pression de radiation en même temps que le terme de densité de matière. Lemaître montre ainsi l'importance de cette pression de radiation dans les premiers stades de l'expansion cosmique. Il s'avèrera plus tard, dans le cadre des modèles du Big Bang, que l'approximation de pression de radiation nulle n'est valable que pour les temps postérieurs au Big Bang de 400'000 ans environ.

Dans son article en 1927, Lemaître énonce ainsi clairement la relation de proportionnalité entre la vitesse de récession et la distance, cette loi que Hubble publiera deux ans plus tard en 1929 avec des chiffres pratiquement identiques. La relation appelée maintenant *Loi de Hubble* devrait donc être *Loi de Lemaître - Hubble*. Il est vrai que, dans la version anglaise de l'article de Lemaître, le calcul de cette loi de proportionnalité n'a pas été traduit ! Lemaître a prédit ce que Hubble a patiemment redécouvert empiriquement, et admis avec beaucoup de réticence !

Il n'y a pourtant pas d'autre explication cohérente que l'expansion de l'espace pour rendre compte des observations astronomiques et Einstein lui-même finit par l'accepter. Mais au moment où Eddington et Einstein rejoignent Lemaître dans sa vision d'un Univers dynamique, ce dernier est déjà allé plus loin : l'Univers a commencé son expansion à partir d'un état singulier, qu'il nomme

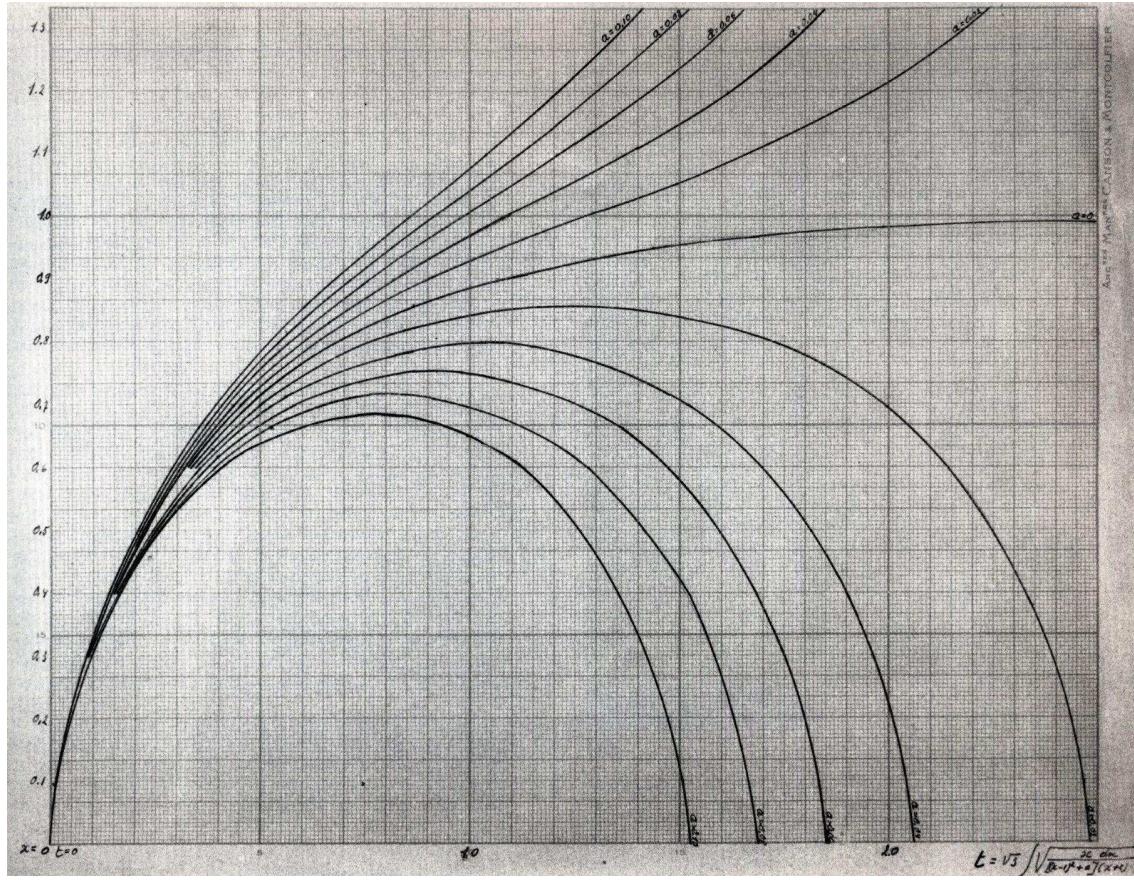


Figure 2: Diagramme des modèles d’Univers dessinés par Lemaître mais jamais publiés de son vivant.

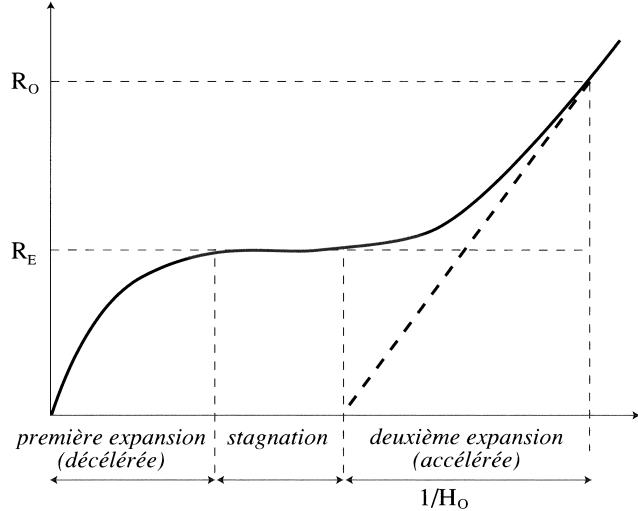


Figure 3: Les trois phases de l’expansion de l’Univers selon Lemaître.

”atome primitif . Lemaître écrit : ”We may speak of this event as of a beginning. I do not say a creation”.

Le modèle de Lemaître divise l’évolution de l’Univers en trois phases distinctes (Figs. 2 et 3) :

La première phase est une expansion de type explosif, issue de la désintégration radioactive d’un atome-Univers.

La deuxième phase correspond à un quasi-équilibre entre la densité de matière et la constante cosmologique durant une période de stagnation. Les effets attractifs de la gravitation étant prépondérants à petite échelle, c’est au cours de cette phase que se forment les fluctuations de densité, lesquelles se condensent ultérieurement pour donner naissance aux grandes structures de l’Univers, avec ses étoiles groupées en galaxies et ses galaxies en amas.

La formation des condensations locales dérange les conditions d’équilibre ce qui rend prééminente la constante cosmologique et déclenche la reprise de l’expansion. C’est la troisième phase, celle que nous observons aujourd’hui.

La plus originale de ces trois phases est la première, car elle pose la question de l’origine singulière de l’Univers. Le raisonnement de Lemaître s’appuie sur la volonté d’utiliser les nouvelles connaissances de la physique atomique et de lier les nébuleuses aux atomes : ”Une cosmogonie vraiment complète devrait expliquer les atomes comme les soleils”. ”Nous pouvons concevoir que l’espace a commencé avec ”l’atome primitif et que le commencement de l’espace a marqué le commencement du temps”. La conception que Lemaître se faisait de la singularité initiale n’a jamais reposé sur une confusion scientifco-religieuse, mais sur une conception naturelle de l’origine, s’opposant à une création naturelle.

Eddington écrit en 1931, Nature 127 447, ”Philosophiquement la notion de commencement de l’ordre présent de la Nature me répugne, refusant ainsi pour des raisons philosophiques de remonter le fil de l’expansion vers le passé et aboutir à la notion de singularité.

Lemaître lui répond la même année 1931, Nature 127 706, par un article intitulé : "The beginning of the World from the point of view of quantum theory" qui est sans conteste l'une des contributions les plus remarquables de toute l'histoire des sciences.

La nouveauté radicale introduite par Lemaître consiste donc à lier la structure de l'Univers à grande échelle à la nature intime des atomes, autrement dit à lier la physique de l'infiniment grand à celle de l'infiniment petit. Lemaître utilise le terme "quantum unique" et non celui "d'atome primitif". Il prend bien garde de souligner qu'à ce stade, les lois de la physique telles que nous les connaissons n'ont plus de sens.

Lemaître était convaincu que la science et la théologie traitent de deux mondes séparés, et que la cosmologie scientifique du Big Bang ne confirme ni ne réfute la notion chrétienne de la création du monde par Dieu.

* * * *

"Quand la lumière fut ..."

Tome I : Les cosmogonies anciennes 1922 ; Tome II : Les cosmogonies anciennes 1923

Louis Maillard, Les Presses Universitaires de France, 1922-1923

Chronologie dans le Premier chapitre de la Genèse : apparitions de 1) la lumière 2) les océans et continents 3) la végétation 4) les planètes et étoiles 5) les animaux 6) l'homme et la femme

Chronologie dans le Deuxième chapitre de la Genèse : apparitions de 1) la terre et les cieux 2) l'homme 3) la végétation 4) la femme

Ces deux premiers chapitres de la Genèse donnent ainsi deux chronologies complètement différentes de la création du monde. Deux façons différentes et irréconciliables, qui ne sont que la conséquence de compilation de textes de différentes origines.

* * * *

Dans des articles publiés en 1933 et 1934, Lemaître semble être le premier à calculer l'énergie du vide et à lui associer une pression négative pour interpréter la constante cosmologique.

Ce n'est qu'en 1967 que le physicien soviétique Yacov Zeldovich (1914-1987) montrera qu'à la lumière de la théorie quantique des champs, l'incorporation de Λ dans le tenseur énergie-impulsion peut être non pas seulement formelle, mais physiquement justifiée. La profondeur de vue et l'antériorité de Lemaître sur le problème de la constante cosmologique restent malheureusement ignorées de la plupart des historiens.

Par ailleurs, Lemaître suggère que l'Univers actuel devrait baigner dans un bain de radiation d'équilibre, c'est-à-dire de corps noir, à une température égale à celle de l'hydrogène liquide, qui est de 20 K. Peut-on en déduire que Lemaître anticipe l'existence d'un rayonnement de fond, résidu de l'explosion de "l'atome primitif" ? Lemaître devance-t-il le calcul qui rendra Gamow célèbre ?

2.8 Le rayonnement fossile à 3 K

Quoique Lemaître ait posé les fondations de la cosmologie évolutionniste, avec ses travaux échelonnés entre 1927 et 1934, le véritable lancement de la théorie du Big Bang se produit seulement en 1948 avec le modèle d'Univers radiatif chaud développé par George Gamow (1904-1968) et ses collaborateurs. Lemaître avait imaginé que l'Univers du début devait être très dense. Gamow et ses collaborateurs enrichissent considérablement l'hypothèse de Lemaître en y ajoutant la notion de température : l'Univers primordial devait être également très chaud. Ce nouveau paramètre de température est le vrai trait d'union entre la cosmologie et la physique des particules à haute énergie, discipline qui marchent aujourd'hui de pair et dont Lemaître avait entrevu l'association dès 1931.

Dès 1942, Gamow est intrigué par le modèle émergent de la génération d'énergie dans les étoiles. En 1946, il propose une théorie complète de l'origine des éléments : selon lui, tous les éléments de l'Univers ont été produits durant les premières phases extrêmement chaudes de l'Univers en expansion.

En 1948, le papier $\alpha\beta\gamma$ (Alpher, Bethe, Gamow) discute le fait que le processus de nucléosynthèse primordiale s'arrête à la formation des éléments les plus légers (deutérium, hélium, lithium) et ne produit pas le carbone ni les autres éléments lourds, ce qui réduit leur espoir d'expliquer l'origine de tous les éléments chimiques par l'Univers chaud du début.

Alpher et Herman en 1948, dans un papier dans Nature 162 774, franchissent un pas décisif pour la cosmologie moderne. Poursuivant les travaux de Gamow, ils calculent que, à une époque plus tardive que celle de la nucléosynthèse, lorsque l'Univers s'est refroidi à quelques milliers de degrés, il est brusquement devenu transparent et a laissé échapper sa première lumière. Ils prédisent que cette température résiduelle devrait être perçue aujourd'hui sous la forme d'un rayonnement de "corps noir" refroidi par l'expansion à la température de 5 K !

Quoi qu'il en soit, le début des années 1950 est défavorable aux partisans du Big Bang, car l'âge théorique de l'Univers est encore révisé à la baisse. Le modèle stationnaire, avec création continue de matière, est alors au sommet de sa popularité.

Le débat entre les deux écoles d'astrophysiciens nucléaires, celle conduite par Alpher et Gamow militant pour la création de tous les éléments dans l'Univers primordial, et celle conduite par Fred Hoyle (1915-2001) militant pour la création de tous les éléments dans le cœur des étoiles dans le cadre d'un Univers stationnaire, est facilement tranché par Hoyle et Tayler. En 1964, ils reconnaissent que la formation de l'hélium est un problème insurmontable pour le modèle de l'état stationnaire ("The mystery of the cosmic helium abundance 1964, Nature 203 1108).

On sait aujourd'hui que seuls les isotopes les plus légers – hydrogène, deutérium, hélium, lithium – ont pu se former dans l'Univers chaud des origines selon le processus envisagé par Gamow ; les éléments plus lourds comme le carbone, l'azote, l'oxygène, etc... se sont formés à une époque beaucoup plus récente, dans le cœur des étoiles où les conditions de température et de densité nécessaires à la fusion de l'hélium sont réunies suffisamment longtemps.

Au milieu des années 1960, Robert Dicke, James Peebles et David Wilkinson, théoriciens à Princeton, reprennent le concept d'*Univers-phénix* de Lemaître dans lequel l'espace en expansion-contraction, au lieu d'être infiniment écrasé dans un Big Crunch, passe par un rayon minimum

avant de rebondir pour un nouveau cycle. Ils calculent qu'un tel "rebond chaud engendrerait un rayonnement de corps noir mesurable aujourd'hui à la température de 10 K.

C'est alors qu'ils apprennent qu'un rayonnement de ce type vient d'être détecté par deux ingénieurs de Bell Laboratories. Arno Penzias et Robert Wilson, avec un radiomètre consacré à l'astronomie, ont observé en 1965 un bruit de fond plus élevé que prévu à une longueur d'onde de 7,35 cm correspondant à un excès de température de 3,5 K. Pour cette découverte involontaire et expliquée par d'autres scientifiques, Penzias et Wilson ont obtenu le prix Nobel de physique en 1978.

Observateurs et théoriciens publient leurs résultats respectifs dans le numéro de juillet 1965 de l'Astrophysical Journal. Aucun d'eux ne mentionne les prédictions d'Alpher, Herman et Gamow et encore moins celles de Lemaître ! Ce dernier n'apprendra la découverte du rayonnement fossile que quelques jours avant sa mort en 1966.

L'hypothèse de "l'atome primitif devenait enfin, sous le nom plus médiatique de Big Bang, une théorie physique à part entière. La détection du rayonnement fossile a pratiquement signé l'arrêt de mort du modèle d'Univers stationnaire de Hoyle.

$$\text{Satellite COBE} \implies T = 2.725 \pm 0.002 \text{ K}$$

Au début des années 1990, les données recueillies par le satellite Cosmic Background Explorer (COBE) en ondes millimétriques permettant de fixer la température du rayonnement cosmologique avec une grande précision ($2.725 \pm 0.002 \text{ K}$) et décelent pour la première fois les variations infimes de température ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) d'une région à l'autre du ciel, liées à des fluctuations de densité marquant l'origine de toutes les structures astronomiques visibles de nos jours. Les chefs du projet COBE, John Mather et George Smoot, ont obtenu le prix Nobel de physique en 2006 pour la mesure précise de la température et pour la détection des très faibles anisotropies caractérisant ce rayonnement de corps noir.

Dans le cas d'un Univers avec densité critique $\Omega_0 = 1$, le contraste en densité $\Delta = \delta\rho/\rho$ croît avec le temps t comme $\Delta \propto t^{2/3}$. Les implications de ce résultat sont que les fluctuations, dont la structure à grande échelle de l'Univers s'est formée, ne peuvent pas avoir grossi à partir de perturbations infinitésimamente petites. Si des perturbations à une échelle physique particulière sont suivies en remontant dans le passé, on trouve qu'à un grand décalage vers le rouge, l'échelle de la perturbation est égale à l'échelle de l'horizon qui est $r \approx ct$, où t est l'âge de l'Univers. Il a été démontré que pour former des structures aux échelles des galaxies et des amas de galaxies, les perturbations en densité à l'échelle de l'horizon doivent avoir une amplitude $\Delta = \delta\rho/\rho \approx 10^{-4}$ afin de garantir la formation des galaxies observées actuellement.

Enfin, en 2003, 2006, 2008 et 2012, par la publication de quatre séries de papiers analysant respectivement la première année, les trois, cinq, et neuf premières années d'observations du satellite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), la cosmologie observationnelle est entrée dans une période de renouveau expérimental en fournissant des observations de très grande qualité du spectre de puissance des fluctuations en températures (anisotropies), permettant pour la première fois la réjection de certains modèles d'inflation.

THEORIE GRAVITATION THEORIES GRANDE-UNIFIEES
PRINCIPE COSMOLOGIQUE

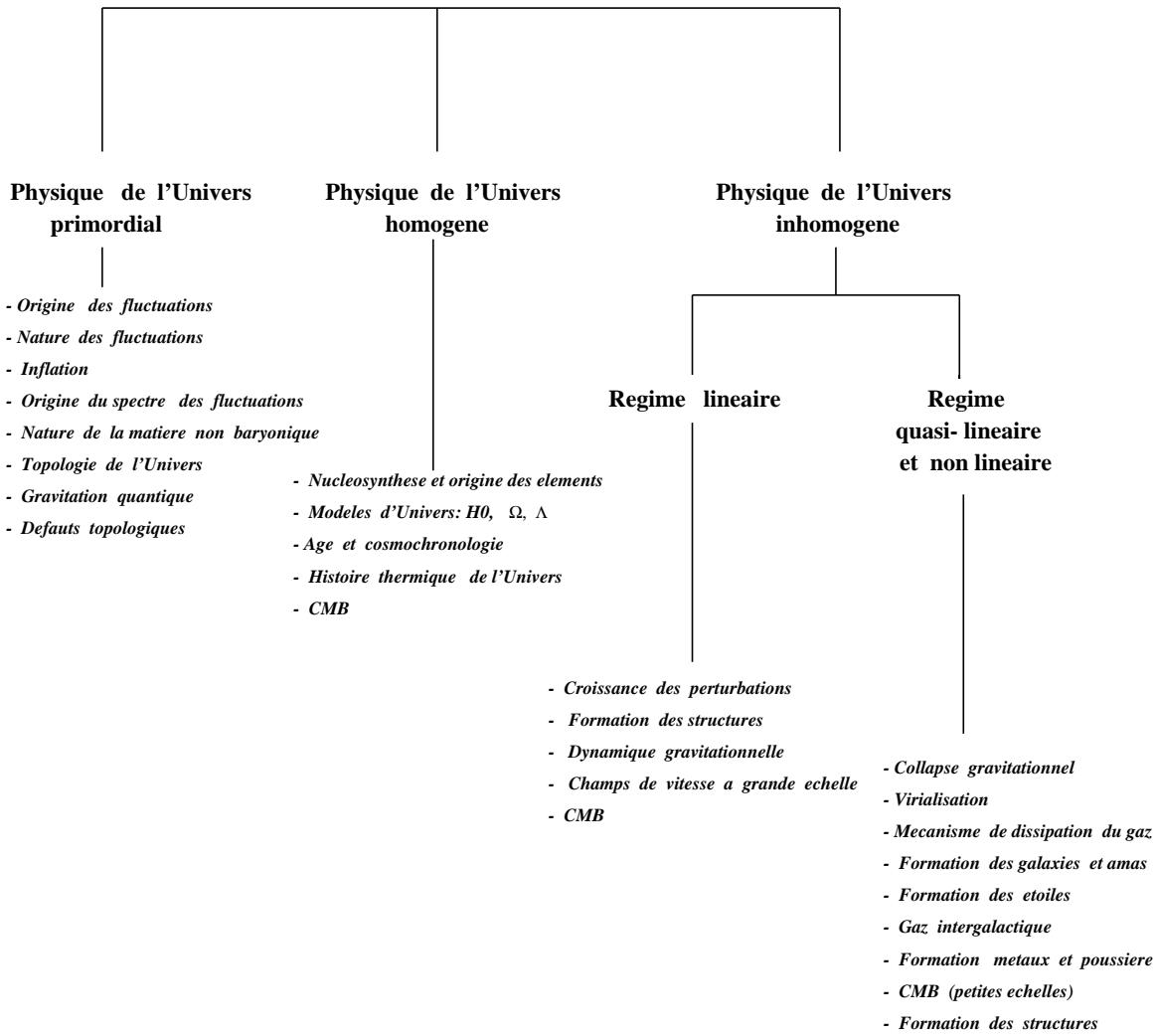


Figure 4: Tableau schématique des grandes thématiques de la cosmologie actuelle. Les séparations sont seulement indicatives pour tenter d'en dégager les grands axes. Mais chacune de ces thématiques est fortement imbriquée avec les autres et il ne faut surtout pas considérer cette illustration comme une structuration figée reflétant une représentation unique de la cosmologie.

3 Une brève chronologie de la cosmologie du XXI^e siècle

- **1915** Einstein. Théorie de la relativité générale.
- **1920** Le *Grand Débat* entre Shapley (les nébuleuses spirales sont des nuages galactiques) et Curtis (les nébuleuses spirales sont des objets extragalactiques comme notre Galaxie). Preuve de la nature extragalactique des galaxies.
- **1922** Modèles de Friedmann. Première intuition du Big Bang.
- **1927** Modèles de Lemaître. Modèle de l'atome primordial.
- **1928-1929** Robertson, Hubble. Preuve observationnelle de l'expansion de l'Univers.
- **1933** Zwicky. Analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma. Naissance du problème de la masse manquante ou de la *matière sombre*.
- **1940** Gamov. Suggestion de la nucléosynthèse des éléments dans l'Univers chaud. Prédiction d'un rayonnement résiduel fossile.
- **1940** Alpher & Herman. Premiers calculs de nucléosynthèse primordiale.
- **1948** Bondi, Gold, Hoyle. Modèle stationnaire.
- **1963** Découverte du premier quasar.
- **1965** Penzias & Wilson. Découverte du rayonnement cosmologique à $T = 2.7$ K.
- **1965** Test de Gunn Peterson : l'Univers est fortement ionisé.
- **Années 1970** Origine des galaxies et des structures : quand , où , comment ?
- **Années 1970** Modèles isothermes (bottom-up) et adiabatiques (top-down) en confrontation.
- **Années 1970** Découverte de la forêt Lyman- α
- **1971** Première suggestion que les amas de galaxies sont baignés par un gaz chaud étendu (démonstration qu'il s'agit de rayonnement de freinage en 1986).
- **1981** Mise en évidence observationnelle des courbes de rotation plates des galaxies spirales. Évidence de halo de *matière noire ou sombre (dark matter)* ?
- **Années 1980** Echec des modèles de formation des structures avec matière baryonique seule. Naissance des modèles avec matière non-baryonique : Hot Dark Matter (HDM, s'apparente aux modèles top-down) et Cold Dark Matter (CDM, s'apparente aux modèles bottom-up).
- **1981** Guth. Théorie de l'inflation. Apporte un cadre théorique expliquant les problèmes de la “atitude” de l'Univers et de l'Horizon. Prédit le spectre des fluctuations primordiales en température et densité.
- **1985** Arcs gravitationnels. Preuve directe que les amas de galaxies sont fortement dominés par leur contenu en matière sombre.

- **1986** Le *Center for Astrophysics* (CfA) redshift survey : mise en évidence de la structuration tri-dimensionnelle des galaxies. Elles se trouvent disposées sur les parois de gigantesques bulles dont l'intérieur semble vide de matière lumineuse.
- **1988** Comptage ultra-profound des galaxies, excès de galaxies bleues.
- **Années 1990-2000** : Expériences de micro-lensing gravitationnelle MACHO et EROS pour la détection de candidats matière sombre formés d'objets compacts dans le halo de notre Galaxie. Les résultats après 10 ans montrent qu'il s'agit d'une composante sous dominante, voire négligeable de notre halo galactique.
- **1990-1992** COBE : spectre de corps noir du rayonnement fossile. $T = 2.725 \text{ K}$. Carte des fluctuations de température du rayonnement cosmologique. Observations compatible avec une origine purement gravitationnelle, un spectre de puissance des fluctuations invariant d'échelle et des structures engendrées par un champ de fluctuations de densité gaussien.
- **1996** Découverte du fond diffus infrarouge.
- **1997-1999** Diagramme magnitude-distance des supernovae de type Ia. Preuve que l'expansion de l'Univers est accéléré. Compte tenu des connaissances actuelles, la constante cosmologique est vraisemblablement non nulle. Emergence du concept d'énergie sombre (dark energy).
- **1995-2000** Le Hubble Key programme : $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Freedman et al. 2001).
- **1997-2003** Le relevé spectroscopique *2-degree Field* (2dF) et le relevé photométrique et spectroscopique *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS).
- **2000** BOOMERANG et MAXIMA : mise en évidence du premier pic (dit pic acoustique) du spectre des fluctuations de température du rayonnement cosmologique qui démontre que notre Univers est vraisemblablement plat.
- **2000-2002** Premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique. Premières déterminations de Ω_m et σ_8 .
- **2000-2002** Mesure du spectre de puissance et du facteur de biais aux grandes échelles avec les relevés spectroscopiques 2dF et SDSS.
- **2000-2002** Mise en évidence de l'oscillation des neutrinos prouvant la masse non-nulle des neutrinos (du moins, la somme totale des masses).
- **2003-2012** WMAP : carte haute résolution des anisotropies du fond diffus cosmologique. Détermination précise d'une série de paramètres cosmologiques et validation du modèle du Big Bang standard composé de matière sombre froide (dark matter) et dominé par une composante d'énergie sombre (dark energy). Indices que les premières étoiles se sont formées très tôt, peut être à $z = 20$. Premières réjections de certains scénarios d'inflation.
- **2013** Planck : carte haute résolution des anisotropies de température et de polarisation du fond diffus cosmologique. Confirmation des résultats de WMAP et du modèle du Big Bang. Confirmation d'anomalies à grandes échelles.

4 Notations et quantités usuelles (système d'unités CGS)

- c = vitesse de la lumière dans le vide (2.998×10^{10} cm sec $^{-1}$),
- G = constante de la gravitation (6.67×10^{-8} cm 3 g $^{-1}$ sec $^{-2}$),
- \hbar = constante de Planck (1.05×10^{-27} erg sec),
- L_{\odot} = 1 luminosité solaire (4×10^{33} erg sec $^{-1}$),
- M_{\odot} = 1 masse solaire (2×10^{33} g),
- $h = 1$ si $H_0 = 100$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$,
- $1 \text{ Jy} = 1 \text{ Jansky} = 10^{-23}$ erg cm $^{-2}$ sec $^{-1}$ Hz $^{-1}$,
- Domaine radio : $\lambda = 30$ cm - 10 m,
- Domaine micro-onde et submillimétrique : $\lambda = 0.02$ cm - 30 cm,
- Domaine infrarouge : $\lambda = 0.01$ cm - 8000 Å,
- Domaine visible et UV : $\lambda = 8000$ Å - 100 Å,
- Domaine X et γ : $\lambda = 0.003$ Å - 100 Å,
- $1 \text{ keV} = 1.16 \times 10^7$ K,
- $1' = 1$ minute d'arc,
- $1' = 180 h^{-1}$ kpc à $z = 0.3$ si $\Omega_m = 0.3$ et $\Omega_{\Lambda} = 0$.

5 Quelques échelles

- $1 \text{ UA} = 1.496 \cdot 10^{13} \text{ cm} = 499 \text{ secondes lumière.}$
- $1 \text{ pc} = 3.086 \cdot 10^{18} \text{ cm} = 206'265 \text{ UA} = 3.27 \text{ annéeslumière.}$
- $1 \text{ Megaparsec (Mpc)} = 3.086 \cdot 10^{24} \text{ cm.}$
- Masse des galaxies $10^6 - 10^{13} \text{ M}_\odot$.
- Masse des amas de galaxies $\approx 10^{14} - 10^{15} \text{ M}_\odot$.
- Dimension d'un amas de galaxies $1 - 5 \text{ Mpc.}$
- Temps de traversée d'un amas par une galaxie $\approx 10^9 \text{ ans.}$
- Dimension d'un superamas $10 - 30 \text{ Mpc.}$
- Diamètre des structures en "bulles" $\approx 50 \text{ Mpc.}$
- Epaisseur des structures en "bulles" $\approx 5 \text{ Mpc.}$
- Constante de Hubble : $H_0 = 70 \pm 15 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.
- Dimension de l'Univers (distance de Hubble) : $3000 h^{-1} \text{ Mpc.}$
- Temps de Hubble : $H_0^{-1} = 9.8 \times 10^9 h^{-1} \text{ ans.}$
- Densité de l'Univers : $\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29} \Omega h^2 \text{ g cm}^{-3} = 1.05 \cdot 10^4 \Omega h^2 \text{ eV cm}^{-3}$.

6 Contenu et propriétés de l'Univers observable

Avant de présenter les bases de la cosmologie physique, il est intéressant de préciser les propriétés les plus immédiates de l'Univers observable. Cette description préliminaire permet de dresser notre cadre général. On y reviendra fréquemment dans la suite du cours pour interpréter ces propriétés dans un cadre théorique plus précis, notamment lorsque nous aurons discuté les modèles d'Univers et le modèle du Big Bang.

L'Univers est composé pour l'essentiel de neutrinos, de photons, de matière baryonique et (peut être) non-baryonique appelée matière sombre (Dark Matter) et peut être d'une composante d'énergie sombre (Dark Energy). Son contenu matériel nous est révélé pour l'essentiel par la lumière (dans son sens le plus général : des photons émis dans tout le domaine spectral des ondes électromagnétiques).

Au cours des vingt dernières années notre perception de la composition et de la structuration de l'Univers a été profondément modifiée. La construction des télescopes géants de 8 à 10 mètres de diamètre, le développement rapide de l'astronomie spatiale et des nouveaux détecteurs ultrasensibles, combinés à la possibilité de cartographier d'immenses volumes d'Univers sont les facteurs à l'origine de ces progrès.

Donc, pour faire court, le cosmologiste observateur voit un Univers composé de galaxies, de quasars, de gaz, de matière sombre d'un bain de photons. Ce sont ces observables qui forment la représentation immédiate de l'Univers et l'ébauche du tableau que nous devons reconstituer.

6.1 Propriétés statistiques des galaxies

D'un point de vue cosmologique les galaxies peuvent être perçues comme

- des points (des particules) échantillonnant les grandes structures de l'Univers et qui témoignent des processus de formation des structures, ou bien
- comme des objets lumineux qui nous racontent l'histoire de la formation des étoiles, des processus très énergétiques internes, et des mécanismes de formation des galaxies.

Les galaxies sont donc les objets privilégiés des cosmologistes dans leur étude de l'Univers.

Ce cours ne discute que de leurs propriétés globales, le lecteur est renvoyé aux cours de bachelor et master sur les galaxies et noyaux actifs pour les détails concernant leur source d'énergie, leur morphologie, leur dynamique et leur évolution. Voir également la bibliographie.

6.1.1 Masse

Les masses des galaxies varient de 10^6 (galaxies naines) à $10^{13} M_\odot$ (galaxies géantes d'amas de galaxies). Les analyses dynamiques des galaxies, par les courbes de rotation des galaxies spirales ou par la dynamique des étoiles des galaxies elliptiques (voir cours *Dynamique stellaire et galactique*), montrent que les galaxies sont dominées par un contenu invisible, appelé génériquement la matière

sombre (dark matter). La nature et la quantité de cette matière sombre sont encore indéterminées. La fraction de matière totale est estimée en calculant le rapport *masse-sur-luminosité* de la galaxie rapporté à celui du Soleil (mais noté cependant : M/L). Pour les galaxies, $3 < M/L < 100$, avec une valeur médiane de l'ordre de 10-30. Des rapports M/L de 100 ont été mesurés dans des galaxies elliptiques ou des galaxies à coquilles. Mais les estimateurs sont parfois incertains et ces valeurs demandent une confirmation par des méthodes indépendantes.

6.1.2 Dimension

Les dimensions des galaxies sont aussi très dispersées. Celles évaluées par la distribution des étoiles varient de 5 et 500 kpc, mais les valeurs typiques sont de l'ordre de 10 kpc. Certaines galaxies géantes d'amas de galaxies, dites galaxies cD, atteignent 100 kpc. La galaxie centrale de l'amas de galaxies Abell 2029 est à ce jour la plus grande galaxie connue (500 kpc). Les dimensions des halos des galaxies, qui pourraient être composés de matière baryonique de très faible luminosité et/ou de matière sombre non-baryonique, sont inconnues. Leur extension pourrait atteindre 100 kpc, voire plus.

6.1.3 Fonction de Luminosité

On caractérise la distribution en luminosité des galaxies par la *fonction de luminosité*. Elle traduit la densité de lumière provenant des galaxies. La fonction de luminosité différentielle donne le nombre de galaxies de luminosité entre L et $L + dL$. Les observations des galaxies indiquent que la fonction de luminosité globale, Φ , qui intègre les contributions de tous les types morphologiques de galaxies, est bien représentée par une loi empirique, appelée *fonction de Schechter* (1976) :

$$dn(L) = \Phi(L)dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) \frac{dL}{L^*}, \quad (2)$$

avec :

$$\frac{L}{L^*} = 10^{0.4(M^* - M)}, \quad (3)$$

où Φ^* est une densité volumique caractéristique de galaxies, L^* une luminosité caractéristique, et M^* la magnitude correspondante. Elles traduisent l'inflexion de la fonction de la luminosité. Enfin α est une pente typique qui caractérise l'allure de la distribution aux faibles luminosités et donc la contribution des galaxies faibles à la quantité de lumière et de matière de l'Univers.

Les paramètres sont mesurés à partir des cartographies photométriques du ciel et des relevés spectroscopiques qui permettent de calibrer la densité volumique de galaxies et de lumière. Les valeurs les plus récentes du catalogue anglo-australien 2-degree Field 2dF (Croton et al. 2004, astro-ph/0407537) portant sur un échantillon de 221'000 galaxies donnent, pour $\Omega_0 = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ et $H_0 = 100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$:

- $M^* = -19.65 \pm 0.02$, $\alpha = -1.05 \pm 0.02$, $\Phi^* = 0.0202 \pm 0.0002 h^3 \text{ Mpc}^{-3}$,

alors que le relevé américain du *Sloan Digital Sky Survey*, ou SDSS (Blanton et al. 2003, ApJ, 592, 819) portant sur 145'000 galaxies sont légèrement différents :

- $M^* = -20.44 \pm 0.01$, $\alpha = -1.05 \pm 0.01$, $\Phi^* = 0.0149 \pm 0.0004 h^3 \text{ Mpc}^{-3}$.

Ces différences sont des effets de couleur, le 2dF étant basé sur une photométrie des galaxies en bande B alors que le SDSS est en bande r (voir Fig. 5). Les fonctions de luminosité du relevé 2dF sont représentées sur la Figure 6 par type morphologique.

On peut calculer le nombre de galaxies par unité de volume dont la luminosité est supérieure à une limite L_{min} :

$$N(L > L_{min}) = \int_{L_{min}}^{\infty} \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^{\alpha} \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) \frac{dL}{L^*} \quad (4)$$

$$= \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^{\alpha} e^{-y} dy \quad (5)$$

$$= \Phi^* \Gamma \left(1 + \alpha; \frac{L_{min}}{L^*} \right), \quad (6)$$

où $\Gamma(a; y)$ est la fonction Gamma incomplète.

La densité numérique de galaxies intégrée sur la totalité des luminosités est donc :

$$n_{gal} = \Phi^* \Gamma(1 + \alpha) \quad (7)$$

et nous donne immédiatement un ordre de grandeur de la contribution des galaxies à la densité de matière de l'Univers :

$$\rho_{gal} \approx \Phi^* \Gamma(1 + \alpha) h^3 \text{Mpc}^{-3} \times \langle M_g \rangle \approx 10^{-31} h^3 \text{ gcm}^{-3}, \quad (8)$$

où $\langle M_g \rangle \approx 10^{11} \text{ M}_\odot$ est la masse moyenne d'une galaxie de l'échantillon.

On peut également déterminer la densité de luminosité :

$$\rho_L(L > L_{min}) = \int_0^{\infty} n(L) L dL \quad (9)$$

$$= L^* \Phi^* \int_{L_{min}}^{\infty} \frac{L}{L^*} \left(\frac{L}{L^*} \right)^{\alpha} \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) \frac{dL}{L^*} \quad (10)$$

$$= L^* \Phi^* \int_{y_{min}}^{\infty} y^{(1+\alpha)} e^{-y} dy \quad (11)$$

$$= L^* \Phi^* \Gamma \left(2 + \alpha; \frac{L_{min}}{L^*} \right). \quad (12)$$

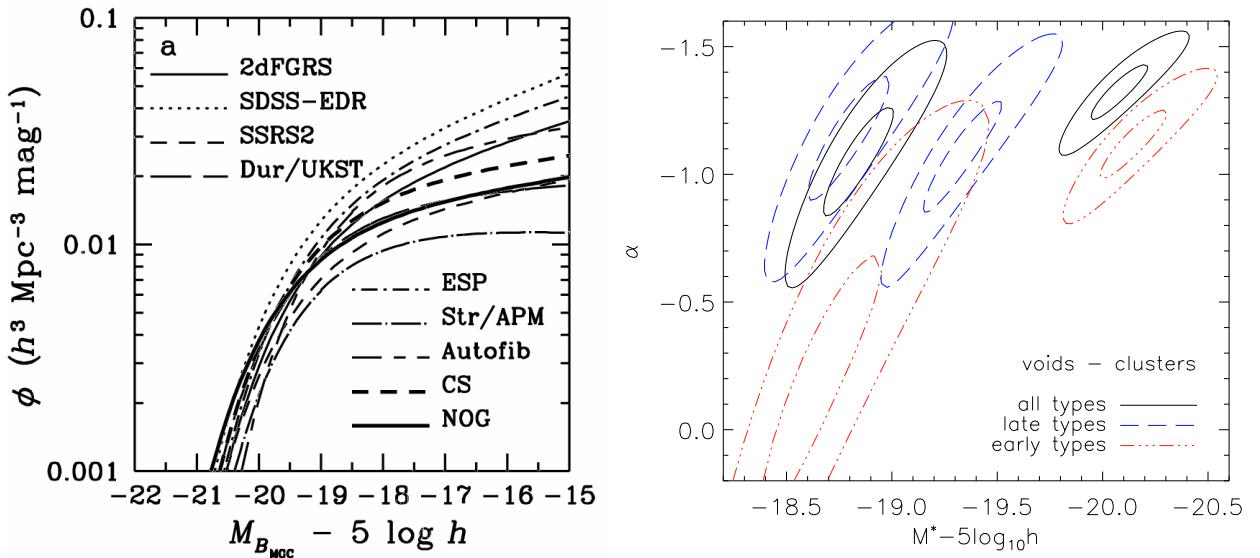


Figure 5: Diversité et dispersion de la fonction de luminosité des galaxies. A gauche : fonction de luminosité globale des galaxies obtenue par une série de relevés photométriques. L'allure générale des fonctions de luminosité est identique, mais on constate une importante dispersion des paramètres. Pour l'essentiel, cette diversité reflète les incertitudes dans l'inter-calibration photométriques des catalogues et dans les erreurs de comptages des galaxies brillantes qui forment une population en faible nombre et donc difficile à évaluer avec précision. D'après Liske et al. 2003, MNRAS 344, 307. A droite : estimations de la pente et de la normalisation des fonctions de luminosité du relevé 2dF en fonction du type de galaxies et de la densité locale (pour une couleur donnée les zones sous-denses sont les contours à gauche, celles sur-denses sont à droite). Les contours sont les incertitudes des ajustements à 1- et 2- σ . On voit clairement que les propriétés des galaxies dépendent à la fois de leur type et de l'environnement. Ces différences traduisent les effets combinés de l'histoire de la formation des grandes structures, l'histoire de l'évolution stellaire et l'histoire des collisions et fusions des halos galactiques. D'après Croton et al. 2004, astro-ph/0407537.

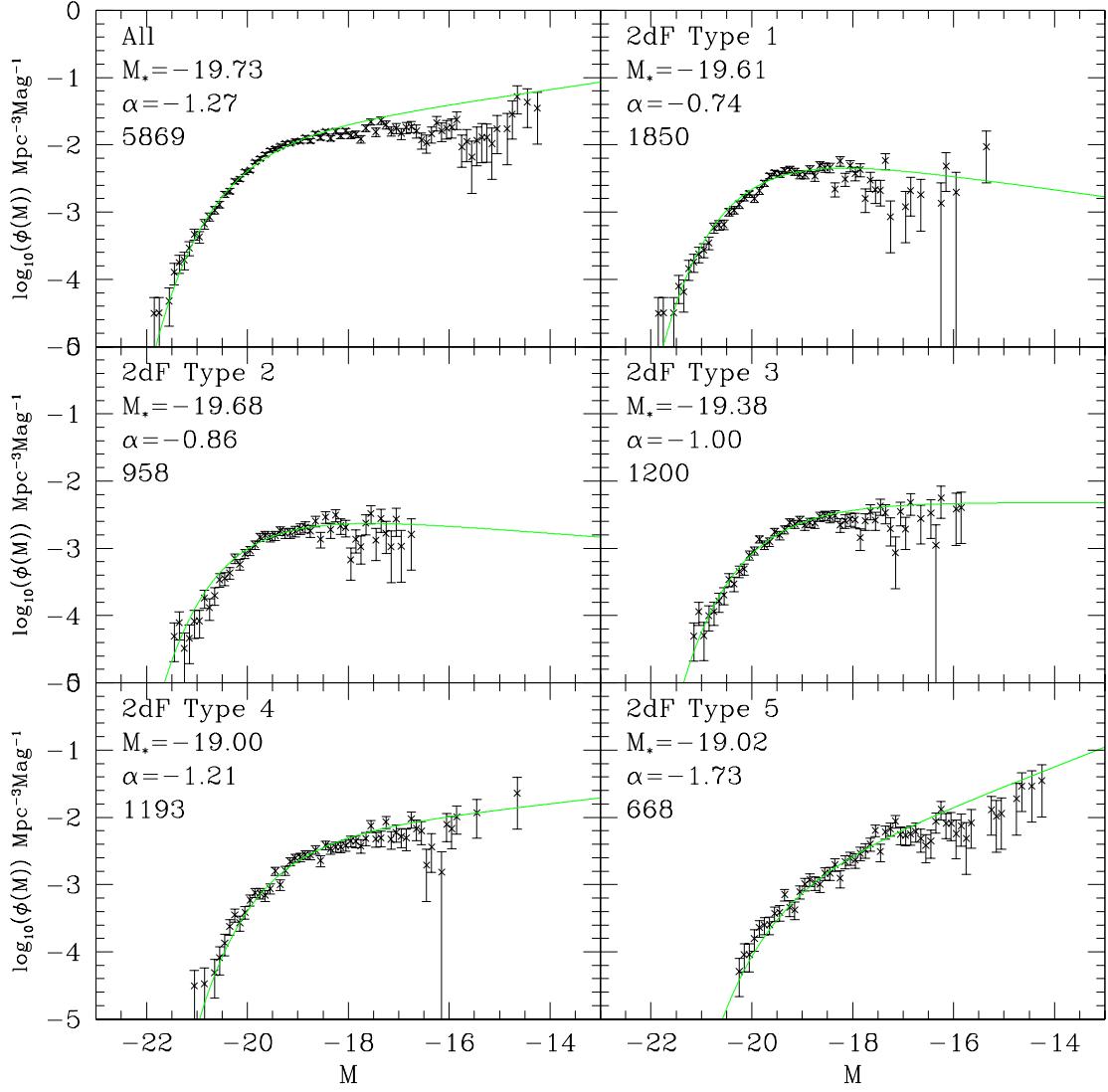


Figure 6: Mesure et ajustement de la fonction de luminosité différentielle des galaxies du relevé 2dF. Les galaxies ont été cataloguées en 5 ensembles selon leurs propriétés spectrales qui reflètent leur contenu en étoiles (âge, métallicité) et en poussières. Les paramètres des fonctions de luminosité sont légèrement différents des valeurs données dans le texte car ces figures correspondent à des données de 1999 portant sur un échantillon plus petit. D'après Folkes et al 1999, MNRAS 308, 459.

Donc la densité de luminosité totale est :

$$\rho_L = L^* \Phi^* \Gamma(2 + \alpha). \quad (13)$$

Pour fixer les idées, une compilation des relevés spectroscopiques conduit aux valeurs typiques suivantes :

$$\rho_L = 2.0 \pm 0.2 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3}, \quad (14)$$

le 2dF conduisant plutôt à (Croton et al. 2004, astro-ph/0407537) :

$$\rho_L = 2.10 \pm 0.08 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3}, \quad (15)$$

et le SDSS à (Blanton et al. 2003, ApJ, 592, 819) :

$$\rho_L = 1.84 \pm 0.04 \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3}. \quad (16)$$

Comme le montre la Figure 5, il existe une incertitude significative sur les valeurs des trois paramètres caractérisant la fonction de luminosité des galaxies. Ces incertitudes sont à la fois intrinsèques aux propriétés des galaxies et dues aux erreurs de mesure.

6.1.4 Preuve de l'expansion de l'Univers

Après Lemaître en 1927, c'est Hubble qui annonce en 1929, de façon définitive, la relation entre le décalage spectral et la distance des galaxies (Robertson avait constaté dès 1928 que les données de Slipher et Hubble montraient une relation entre distance et décalage spectral). Cette relation s'interprète comme la preuve la plus tangible de l'expansion de l'Univers.

La caractérisation de la loi d'expansion est simple dans son principe. On mesure les vitesses radiales des galaxies à partir de données spectroscopiques. Le décalage vers le rouge observé des raies d'émission et/ou d'absorption est ainsi mesuré directement :

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (17)$$

où λ_{obs} est la longueur d'onde d'une raie observée sur le spectre et λ_{em} la longueur d'onde vraie de la raie. On en tire donc la vitesse radiale d'une galaxie de l'Univers proche :

$$v = cz, \quad (18)$$

où c est la vitesse de la lumière.

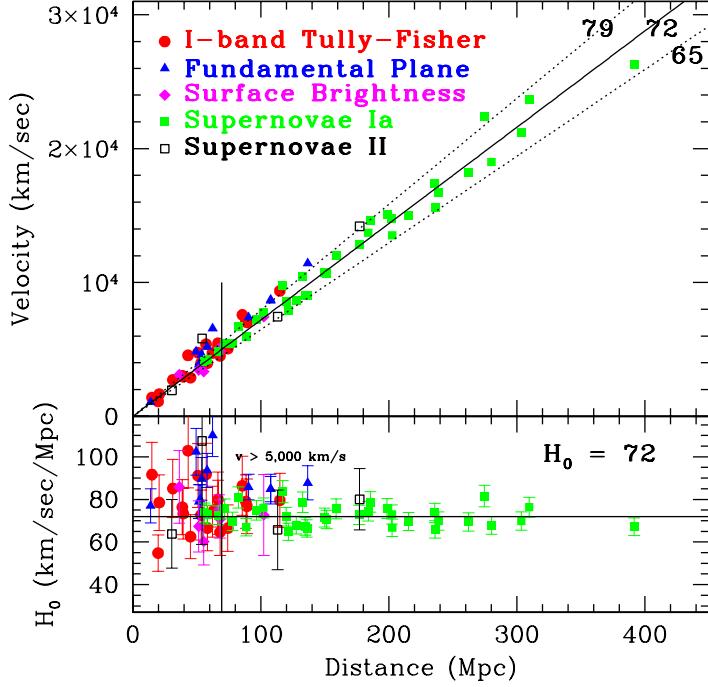


Figure 7: Loi de Hubble mise en évidence sur un échantillon de supernovae. L'écart à la linéarité est faible et la validité de l'expansion est vérifiée sur des échelles cosmologiques. La pente de la droite, qui exprime le taux d'expansion, est la valeur de la constante de Hubble H_0 . D'après Freedman et al. 2001, ApJ, 553, 47.

On peut mesurer la distance D des galaxies par diverses méthodes (voir l'échelle des distances extragalactiques dans le cours *Introduction à l'astrophysique*). Par exemple, en utilisant la relation Période-Luminosité-Couleur des étoiles variables appelées Céphéides.

Hubble a montré que cette loi s'exprimait simplement sous la forme :

$$v = H_0 \times D . \quad (19)$$

H_0 est la constante de Hubble. C'est la *Loi de Hubble*. La Figure 7 montre la remarquable linéarité observée, même sur des distances de l'ordre du Gigaparsec.

Le décalage spectral affectant les fréquences, l'expansion se manifeste aussi sous la forme d'une dilatation temporelle des événements. L'analyse de la dilatation des courbes de luminosité des supernovae permet en particulier de vérifier cette interprétation avec précision (voir Figure 8).

Une façon alternative de mettre en évidence l'expansion consiste à exprimer la magnitude apparente d'une galaxie en fonction du décalage spectral (redshift). La magnitude apparente m est :

$$m = -2.5\log(F) + C, \quad (20)$$

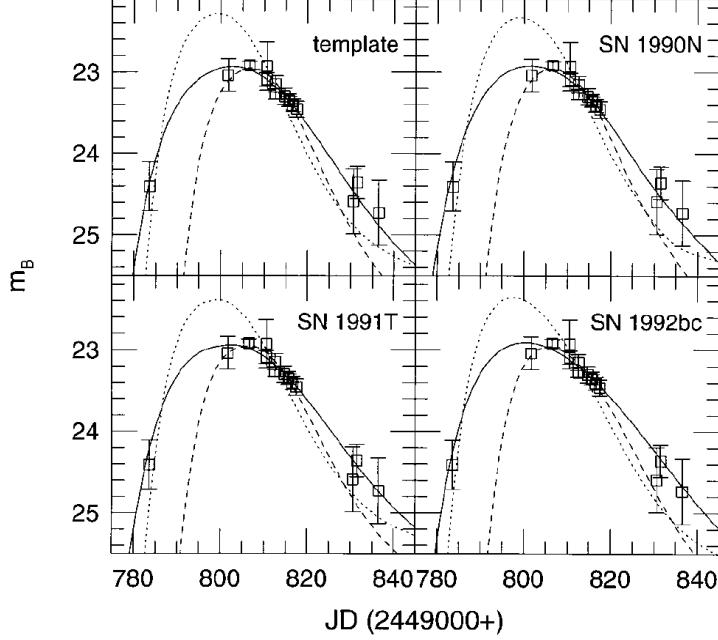


Figure 8: Dilatation de la courbe de lumière d'une supernovae SNIa sous l'effet de l'expansion. Les points de mesure photométriques proviennent d'une SNIa à un redshift de $z = 0.479$. Les lignes pointillées correspondent aux courbes de lumière de quatre SNIa proches dont les courbes de lumière ont été ajoutées en ne prenant pas en compte l'expansion. Les lignes continues correspondent aux mêmes SNIa mais en prenant en compte la dilation temporelle produite par l'expansion. D'après Leibundgut et al. 1996, ApJ, 466, L21.

où C est une constante et F la densité de flux de la galaxie. F est reliée à sa luminosité absolue, L , à sa distance, D , et donc au décalage spectral (voir Equations (18 et 19) par :

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L}{4\pi} \frac{H_0^2}{c^2 z^2}, \quad (21)$$

Si l'on observe un type particulier d'objet dont la propriété est d'avoir la même luminosité absolue, quelle que soit la distance, alors L est une constante bien connue et la loi de Hubble implique une relation linéaire entre le logarithme du décalage spectral z et la magnitude apparente :

$$m = 5 \times \log [z] + C'. \quad (22)$$

Cette méthode permet de construire des *diagrammes de Hubble* (voir Figure 9) à partir d'échantillons de galaxies distantes pour lesquelles on a de fortes présomptions que leur luminosité est constante. C'est par exemple le cas des galaxies les plus brillantes des amas de galaxies ou de certaines radiosources.

Enfin, il est possible d'établir l'expansion en mesurant directement l'évolution de la température fond diffus cosmologique avec le redshift. L'expansion adiabatique de l'Univers décroît progressivement la température du corps noir suivant la loi simple :

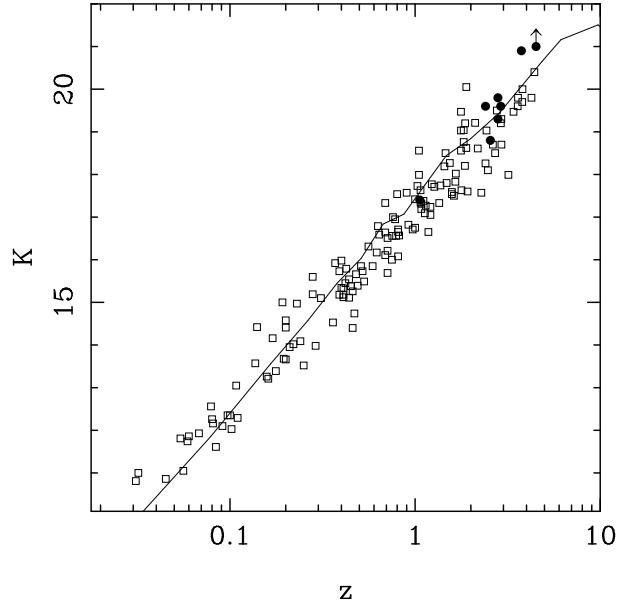


Figure 9: Diagramme de Hubble de radio-galaxies des échantillons 3CR et 6CR et d'un échantillon de radio-galaxies de grand redshift. En abscisse est porté le logarithme de z en ordonnée les magnitudes apparentes en bande K (la bande K est un intervalle spectral centré sur $2.2 \mu\text{m}$ qui est utilisé pour les filtres à bandes passantes larges). La *Loi de Hubble* est donc remarquablement bien suivie, même sur des échelles de l'ordre de 3 Gpc. D'après Dunlop 2002, astro-ph/0203183.

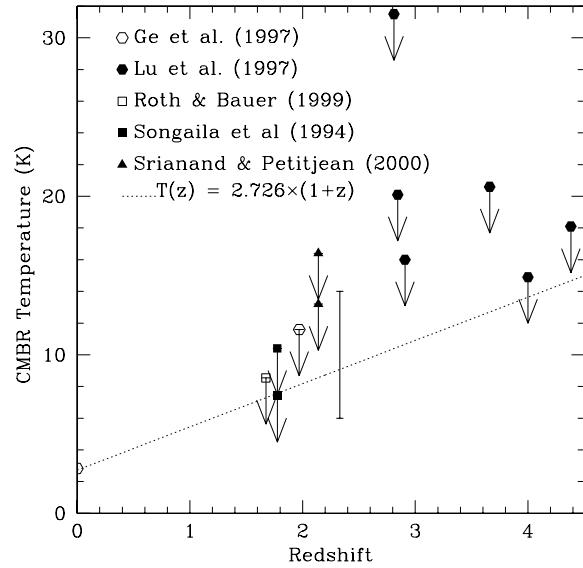


Figure 10: Mise en évidence de l'expansion de l'Univers par la mesure du taux d'accroissement de la température du corps noir en fonction du redshift. Le point de Srianand, Petitjean, Ledoux (2000, Nature, 408, 931) place pour la première fois une valeur solide à un redshift de 2.3. La température attendue par la loi de l'expansion, égale à 9 K se situe entre 6 K et 14 K. Il y a accord entre la théorie et les observations.

$$T(z) = T_0 \times (1 + z), \quad (23)$$

où T_0 est sa température actuelle. La Figure 10 montre les mesures actuelles, notamment la plus récente (Srianand, Petitjean, Ledoux 2000, Nature, 408, 931) qui constitue la mesure la plus convaincante d'un accroissement de température suivant la loi attendue.

6.1.5 Comptage des galaxies

Les comptages de galaxies consistent à évaluer la densité de galaxies projetées sur le ciel par intervalle de magnitude. Ils indiquent le nombre de galaxies dans l'Univers. Mais c'est aussi une donnée très importante pour contraindre les modèles d'Univers. Deux types d'information y sont contenus : le volume d'Univers sondé en projection et les effets d'évolution des galaxies qui affectent leur luminosité apparente dans chaque filtre d'observation.

La pente des comptages est par définition :

$$\alpha = \frac{d\log N}{dm}, \quad (24)$$

et varie d'un filtre à l'autre et selon la profondeur. Elle a tendance à décroître vers les faibles magnitudes. Pour les objets faibles la pente α vaut approximativement :

- 0.50 en U ($U > 25$; Hogg et al. 1997, MNRAS 288, 404),
- 0.25 en B ($B > 25$; Smail et al. 1995, ApJ 449, L105),
- 0.28 en V ($V > 24.5$; Smail et al. 1995 ApJ 449, L105)),
- 0.32 en R ($R > 21$; Smail et al. 1995 ApJ 449, L105)
- 0.27 en I ($I > 20$; Smail et al. 1995 ApJ 449, L105),
- 0.36 en J ($J > 21$; Saracco et al. 1999, A&A 349, 751) et
- 0.38 en K ($K > 19$; Saracco et al. 1999, A&A 349, 751).

Comme on le voit sur les Figures 11, 12 et 13, au-delà de magnitude visible 25, la densité de galaxies dépasse 10^5 galaxies deg $^{-2}$.

6.1.6 Plan Fondamental et Tully-Fisher

Les galaxies elliptiques (resp. spirales) présentent certaines propriétés physiques qui permettent de construire des relations simples entre leur profil de luminosité et leur dispersion des vitesses (resp. vitesse de rotation). Ces relations jouent un rôle essentiel dans la mesure des vitesses individuelles des galaxies qui sont indispensables pour décrire les mouvements à grande échelle des galaxies.

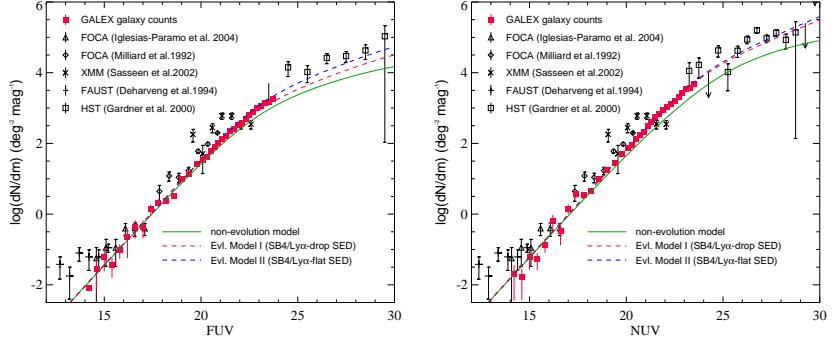


Figure 11: Comptage des galaxies dans les filtres du domaine UV obtenues avec le satellite UV Galex (bandes spectrales des filtres FUV = 1530 Å et NUV = 2310 Å). En abscisse, les magnitudes apparentes ; en ordonnée, le nombre de galaxies par degré-carrés et intervalle de magnitude. D'après Xu et al. 2004, astro-ph/0411317.

Pour les elliptiques, il existe une corrélation entre la luminosité, L , la brillance de surface centrale, I_0 , et la dispersion des vitesses centrale des étoiles, σ_0 qui place les galaxies sur un *Plan Fondamental* :

$$L \propto I_0^{-0.7} \sigma_0^3 . \quad (25)$$

Cette relation est une signature de l'état dynamique des galaxies elliptiques et montre que ces galaxies doivent avoir des rapports M/L stables et peu sensibles à leur masse dynamique. En effet, en vertu du théorème du viriel (voir Annexe B), on a :

$$\sigma_0^2 \propto \frac{M}{r_0} , \quad (26)$$

où M est la masse de la galaxie et r_0 une échelle caractéristique.

Supposons que le rapport M/L varie peu et selon une loi simple de type :

$$\frac{M}{L} \propto M^\alpha . \quad (27)$$

Alors, comme :

$$L \propto I_0 r_0^2 , \quad (28)$$

on s'attend à une loi du type :

$$L \propto I_0^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \sigma_0^{-4\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \quad (29)$$

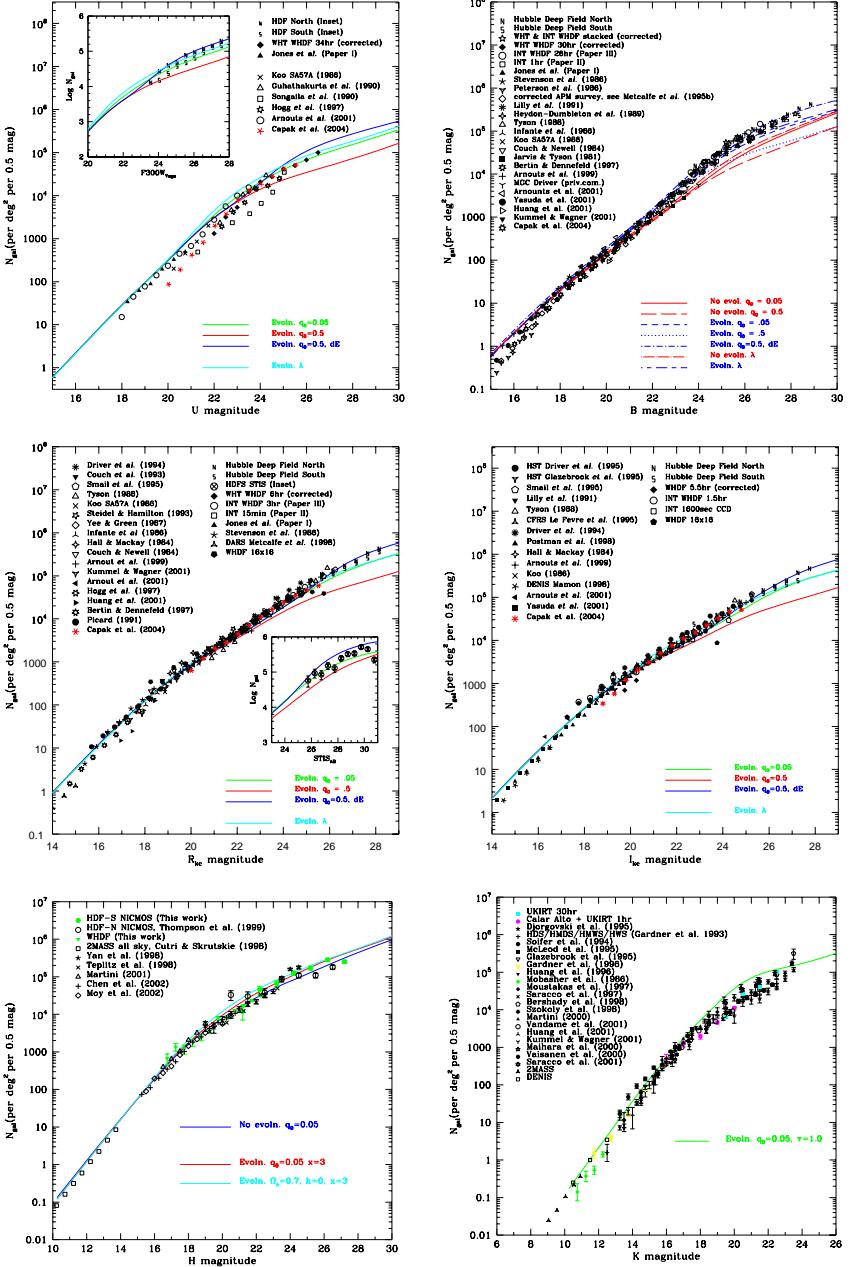


Figure 12: Comptage des galaxies dans les filtres du domaine allant de l'UV proche à l'infrarouge proche (bandes spectrales des filtres U à K, respectivement 360 nm (U), 450 nm (B), 720 nm (R), 820 nm (I), 1.7 μm (H), 2.2 μm (K)). Les mesures sont déduites d'observations très profondes faites sur différents télescopes au sol (WHT, CTIO, NOAO, CFHT, VLT, Keck, 2MASS, DENIS) ou dans l'espace (HST). D'après les compilations de N. Metcalfe 2003.

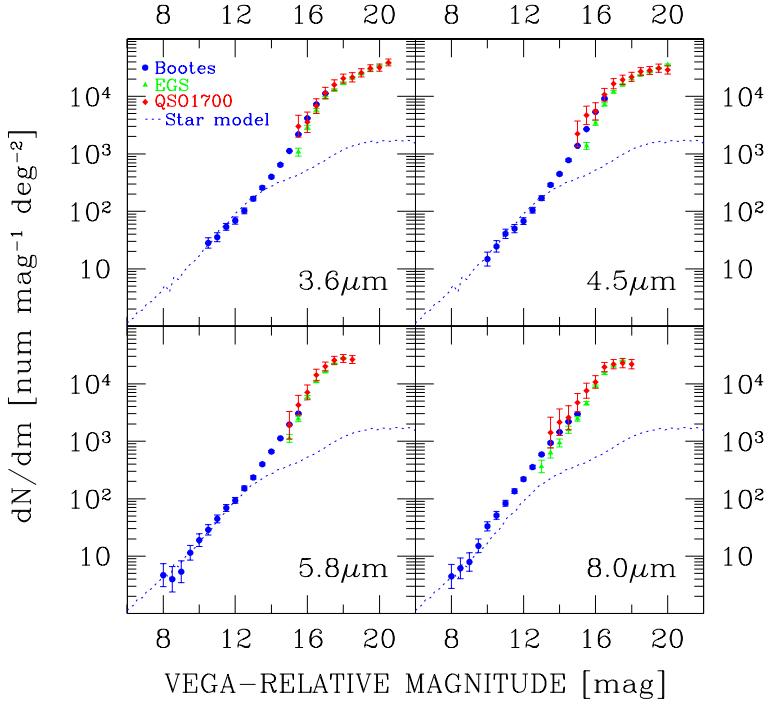


Figure 13: Comptage des galaxies dans les filtres du domaine infrarouge lointain obtenu avec le satellite Spitzer (bandes spectrales de 3.5 à 8 μm). D'après Fazio et al. 2004, ApJS 154, 39.

qui est proche de la loi observée si $\alpha \approx 0.25$.

L'existence d'un plan fondamental implique une relation simple entre le diamètre isophotal, D_n , et la dispersion des vitesses. Le diamètre isophotal est la dimension mesurée du diamètre d'un objet jusqu'à une isophote limite donnée. Cette relation D_n vs. σ_0 , proposée par Dressler (1987, ApJ, 317, 1) :

$$D_n \propto \sigma_0^{1.4} \quad (30)$$

s'interprète aisément.

En effet, on peut calculer la brillance de surface moyenne d'une galaxie elliptique en supposant qu'elles présentent toutes un profil de luminosité identique de la forme $I(R) = I_e f(R/R_e)$. Dans ce cas

$$I_n = \frac{2\pi I_e \int_0^{D_h/2} R f(R/R_e) \, dR}{\pi D_n^2 / 4} \quad (31)$$

Empiriquement, la loi est de la forme $f(x) \approx x^{-1.2}$. On peut donc intégrer l'équation précédente, ce qui conduit à une relation simple entre D_n et R_e :

$$D_n \propto R_e I_e^{0.8} . \quad (32)$$

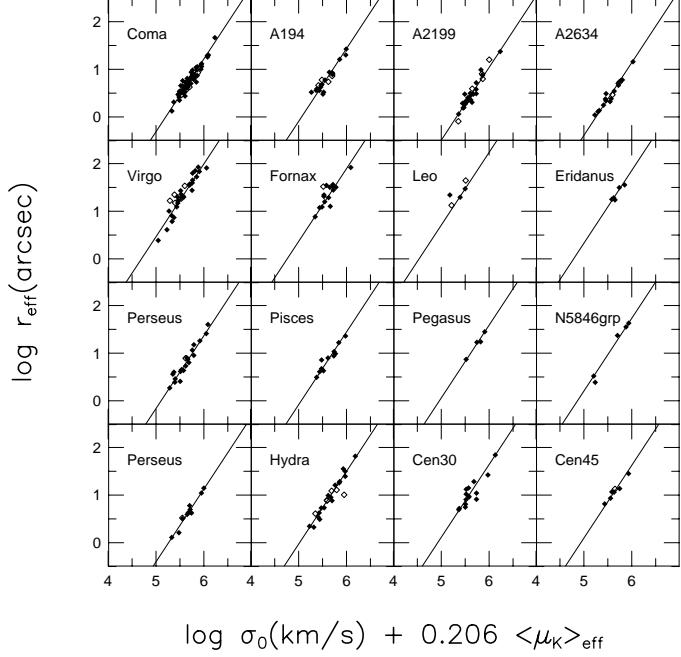


Figure 14: Détermination des paramètres du plan fondamental. En abscisse sont portées des combinaisons de la dispersion des vitesses centrale σ_0 avec la brillance de surface μ_K en bande K et en ordonnée le rayon effectif R_e (une échelle caractéristique des galaxies). L'échantillon porte sur des galaxies elliptiques de 15 amas de galaxies proches, ce qui permet de s'affranchir des biais possibles associés à la mesure de distance : pour chaque courbe, les galaxies sont toutes à la même distance.

L'existence du plan fondamental permet alors de remplacer R_e par σ_0

$$D_n \propto \sigma_0^{1.4} I_e^{0.07}. \quad (33)$$

La très faible dépendance avec I_e explique la relation D_n vs. σ_0 .

Il existe une relation qui permet de localiser les galaxies elliptiques dans ce plan fondamental, c'est la relation de Faber-Jackson (Faber, S. M., Jackson R. E., 1973, ApJ, 179, 731) :

$$L \propto \sigma_0^\alpha \quad (34)$$

où $\alpha \approx 3 - 4$. L'origine de cette relation n'est pas totalement identifiée ; elle provient vraisemblablement des mécanismes d'effondrement hiérarchique des structures.

Une relation formelle analogue existe pour les galaxies spirales. Elle est connue sous le nom de relation de Tully-Fisher (Tully, R. B., Fisher, J. R., 1977, A&A, 54, 661) :

$$L \propto V_r^\alpha, \quad (35)$$

où V_r est la vitesse de rotation, mesurée à grande distance (de façon à mesurer la vitesse de rotation

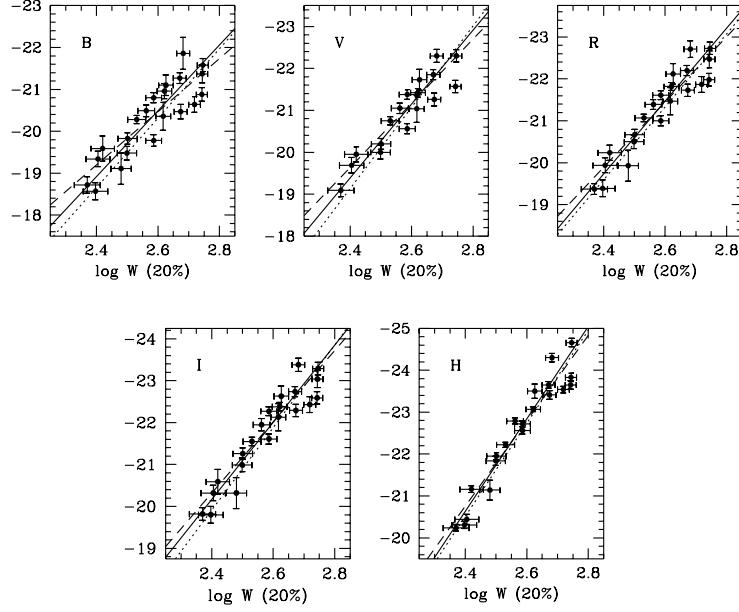


Figure 15: Luminosité absolue en fonction de la vitesse de rotation d'un échantillon de galaxies spirales. Les figures montrent la relation de Tully-Fisher pour une luminosité mesurée dans 5 filtres différents. C'est pour la bande infrarouge H centrée sur 1.6 micron que la relation est la moins dispersée, parce que les effets d'extinction par les poussières sont minimes. En revanche, la bande B est fortement atténuée ce qui explique la grande dispersion.

maximale englobant la contribution de toute la masse). L'indice α vaut environ 3 – 4. Il est très proche de 4 lorsque les observations de calibration sont en infrarouge.

L'origine de la relation de Tully-Fisher n'est pas vraiment comprise. Si l'on admet que le rapport M/L des spirales est constant le long du disque, alors on peut construire une relation de ce type. En effet, pour une particule du disque à la distance R du centre et tournant avec la galaxie à la vitesse V_r , de l'équilibre des forces centrifuge et centripète, on a :

$$m \frac{V_r^2}{R} = \frac{GM}{R^2} m . \quad (36)$$

Si l'on suppose que le rapport M/L est constant sur le disque, avec $L = kM$, et si l'on suppose que la brillance de surface μ du disque est constante, alors la luminosité totale, $L = \mu\pi R^2 = kM$, et donc :

$$L \propto V_r^4 . \quad (37)$$

Cependant, on sait que la brillance de surface n'est pas constante et que le rapport M/L varie aussi.

Même s'il est encore difficile d'expliquer la relation de Tully-Fisher, son impact est considérable car c'est un indicateur de distance qui contribue à la fois à la représentation tri-dimensionnelle de l'Univers, à la modélisation des champs de vitesse à grande échelle des galaxies et à la calibration d'indicateurs de distances cosmologiques.

6.2 Distribution spatiale et structuration

La distribution spatiale des galaxies est déterminée à partir des relevés spectroscopiques. Ils donnent accès à la distance des galaxies par (i) la mesure du décalage spectral et (ii) l'utilisation de la *Loi de Hubble*.

6.2.1 L'Univers local

La distribution spatiale des galaxies permet de faire le lien avec la structuration à grande échelle de l'Univers visible.

La forte hétérogénéité des galaxies de notre voisinage est évidente aux toutes petites échelles. Notre galaxie (la Galaxie) appartient à un système dynamiquement lié, le Groupe Local, qui contient une cinquantaine de galaxies visibles dont deux systèmes dominants :

- La Voie Lactée et ses galaxies voisines dont le Grand Nuage de Magellan, le Petit Nuage de Magellan. Un certain nombre de galaxies naines font partie de ce sous-système, notamment la galaxie elliptique naine du Sagittaire (SagDEG=Sagittarius Dwarf Elliptical Galaxy) et d'autres galaxies naines des constellations de la Grande Ourse, du Dragon et du Sextan.
- M31, située à environ 900 kpc de la Voie Lactée, et ses galaxies satellites M32 et M110, ainsi que NGC 147, NGC 185 et d'autres galaxies faibles. La grande galaxie M33 est le troisième objet le plus brillant du Groupe Local mais ne semble pas constituer une sous-structure indépendante bien identifiée, comme pour M31 ou la Galaxie.

La dimension du Groupe Local est de l'ordre de 1 Mpc (voir Figure 16). Il est lui-même un petit élément du Superamas Local qui est dominé par l'amas de galaxies Virgo et qui contient aussi les amas Pegasus, Pisces, Cancer, Perseus et Coma Berenices. Le Superamas Local s'étend sur environ 50 Mpc (voir Figures 17 et 18) et contient environ 50'000 galaxies visibles.

6.2.2 Cartographie de l'Univers lointain

Au-delà, les cartographies du ciel montrent une structure filamentaire fortement hétérogène. La Figure 19 donne les histogrammes des galaxies en fonction du redshift. La structuration des galaxies est bien visible par les pics prononcés de l'histogramme, pour des valeurs de redshift très différentes d'une ligne de visée à l'autre. La Figure 20 est une cartographie photométrique infrarouge du ciel en 3 bandes (J, H et K) des galaxies. Ce relevé porte le nom de 2MASS (Two Micron All Sky Survey) et montre clairement la structuration des galaxies et la différence marquée des propriétés des zones vides et pleines de galaxies.

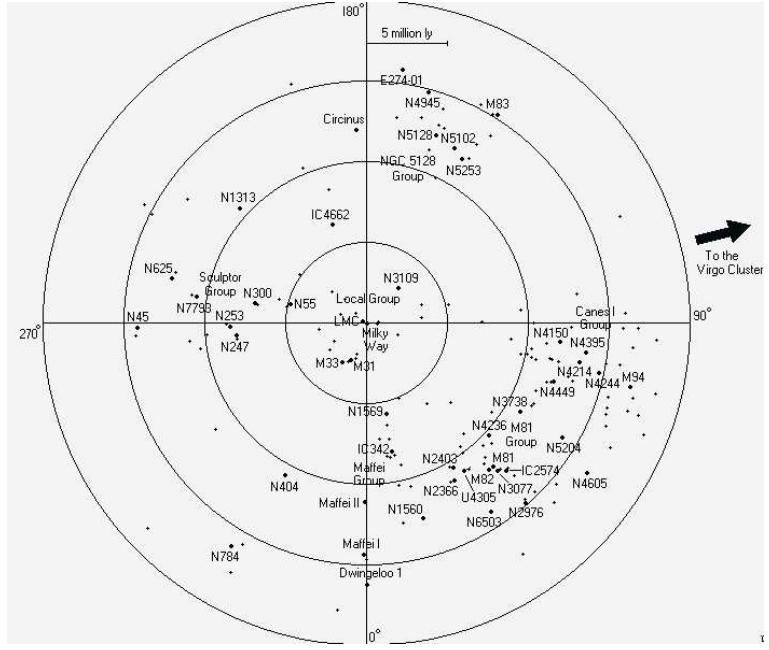


Figure 16: Distribution des galaxies les plus proches de notre Galaxie.

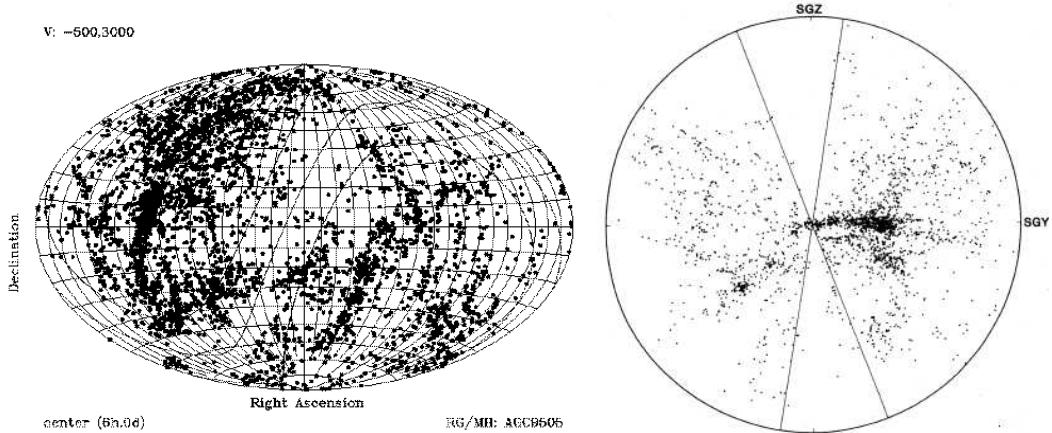


Figure 17: Le SuperAmas Local : à gauche, carte du Superamas Local projeté sur le ciel. Chaque point représente une galaxie dont la vitesse de récession est inférieure à 3000 km s^{-1} (soit une distance d'environ 50 Mpc). Les lignes tracées sur cette carte montrent la position du plan de la Galaxie. On voit clairement une asymétrie dans la distribution des points. Elle reflète le fait que notre Groupe Local est situé au bord du Superamas Local et donc, lorsqu'on regarde vers le centre du superamas on voit bien plus de galaxies que dans la direction opposée. La distribution des galaxies du Superamas Local est à peu près centrée sur l'amas de galaxie Virgo. On voit que cette distribution forme un filament et donc notre Superamas Local forme une structure aplatie, le plan supergalactique. L'image de droite l'illustre parfaitement. Le plan supergalactique est représenté avec 2175 galaxies positionnées en coordonnées supergalactiques (SGX, SGY) dans un cercle de 50 Mpc. Le centre est la position de la Voie Lactée qui apparaît indiscutablement décentrée. Les deux cônes verticaux montrent la position de la zone d'extinction produite par les poussières de notre Galaxie (*zone of avoidance*).

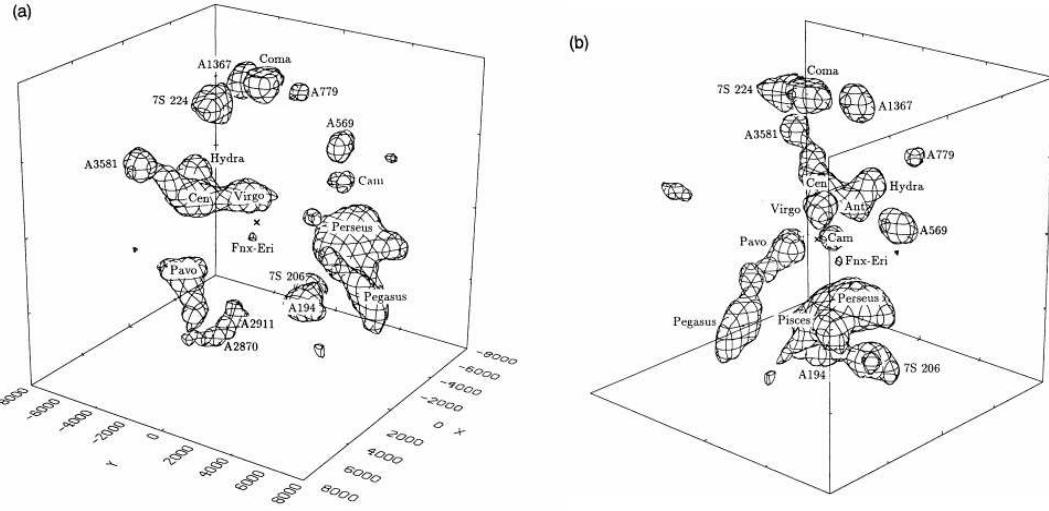


Figure 18: Représentation tri-dimensionnelle vue sous deux angles différents du voisinage de la Galaxie constituant le Superamas Local. Les mailles illustrent les zones à forte densité de galaxies. On remarque la grande hétérogénéité de notre environnement, notamment les immenses vides qui dominent le volume. D'après Hudson 1993, MNRAS, 265, 43.

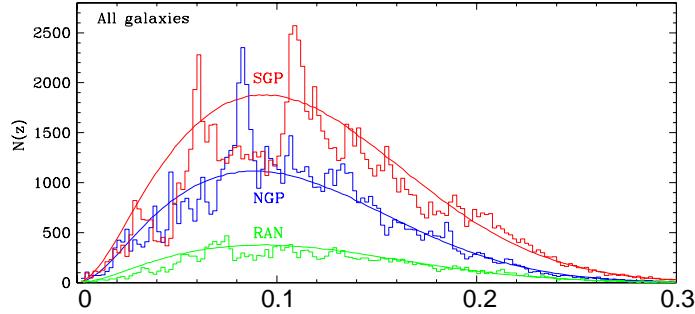


Figure 19: Distribution en redshift des galaxies en fonction de la limite en flux (en profondeur) des catalogues. Les deux histogrammes bleu et rouge donnent la distribution des galaxies du relevé 2dF (220'000 galaxies), qui est basé sur le relevé photométrique APM et qui atteint la profondeur $b_J = 22$. La courbe verte (RAN) indique la distribution attendue d'une population répartie aléatoirement dans un volume d'Univers et observée selon les mêmes critères de sélection. Les courbes rouges et bleues sont les distributions observées selon les directions des Pôles Galactiques Nord (NGP) et Sud (SGP). La structuration des galaxies est bien visible par les pics prononcés de l'histogramme. D'après Cole et al. 2005, astro-ph/0501174.

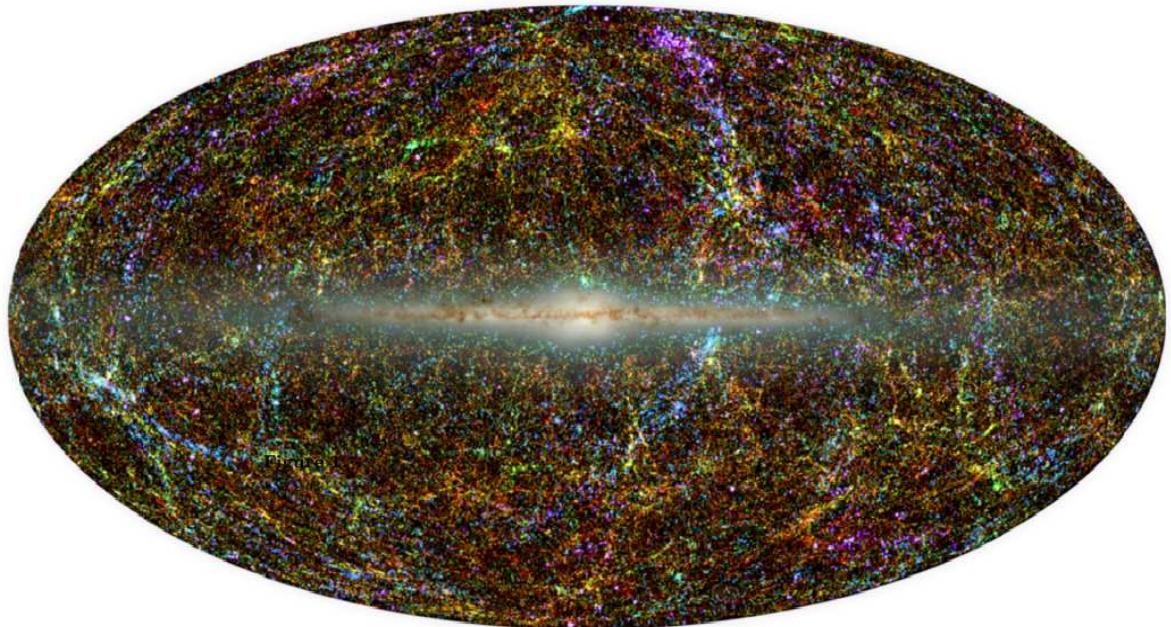


Figure 20: Image en 3 couleurs de la distribution des galaxies du relevé infrarouge 2MASS. Cette cartographie bi-dimensionnelle est construite avec 1.6 millions de galaxies observées à $1.2 \mu\text{m}$ (bande J), $1.6 \mu\text{m}$ (bande H) et $2.2 \mu\text{m}$ (bande K). Elle montre que la distribution projetée des galaxies est fortement hétérogène, filamentaire et contrastée. Les zones les plus denses localisent les amas de galaxies les plus riches. Les couleurs illustrent la profondeur : les galaxies bleues sont les plus proches ($z < 0.01$), les vertes sont à des distances intermédiaires ($0.01 < z < 0.04$) et les rouges sont les plus lointaines ($0.04 < z < 0.1$). La projection est dans le système de coordonnées galactiques. La structure brillante horizontale est l'image du plan de la Galaxie avec, au centre, son bulbe. D'après Jarrett 2004, PASA 21, 396.

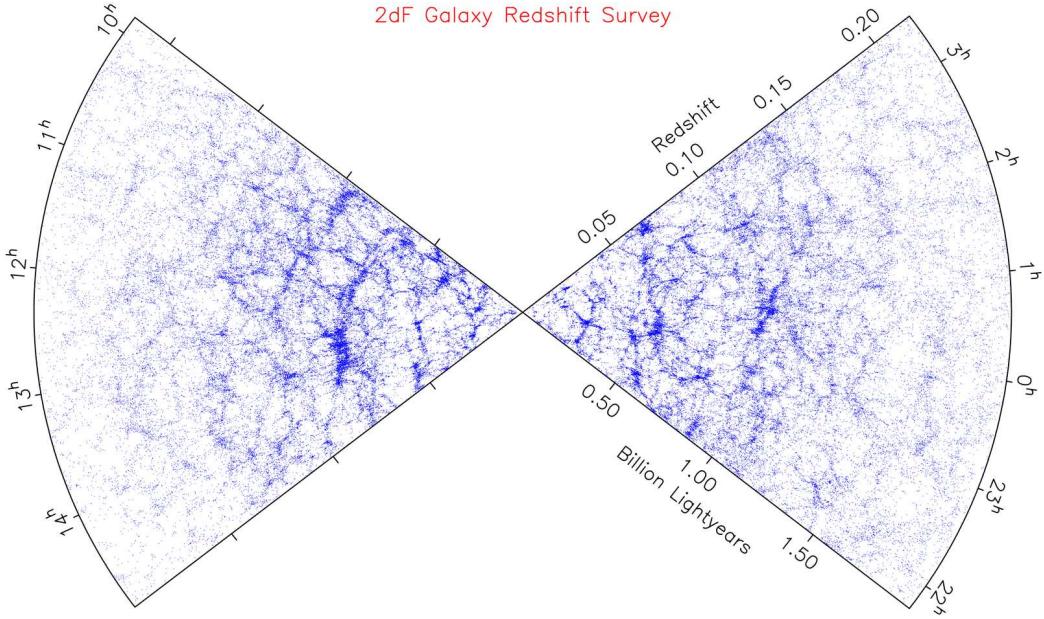


Figure 21: La distribution des galaxies du catalogue final 2dF présentée par un diagramme en cône. L’observateur est à l’intersection des deux cônes (sommet) et les objets sont vus selon leur position le long de la ligne de visée. Ce relevé est construit à partir de la mesure de redshift de 250’000 galaxies. La structuration est visible, mais le contraste s’atténue sensiblement sur des échelles dépassant 100 Mpc. On s’approche d’une distribution uniforme. On remarque par ailleurs qu’aucune anisotropie n’est visible : aucun sous-cône visible sélectionné dans cet échantillon ne semble différent des autres.

On peut aller encore plus loin. Le relevé spectroscopique le plus récent du 2dF, et qui n'est pas encore achevé, atteint des distances 5 fois plus élevées que le Las Campanas Redshift Survey (LCRS). La Figure 21 révèle la distribution des galaxies sur des échelles cosmologiques (le Gpc). Cette image spectaculaire montre que la structuration persiste même à grande distance, mais que le contraste diminue très sensiblement au-delà des échelles dépassant 100 Mpc. Il est cependant prématûr d'en conclure fermement que la distribution à très grande échelle des galaxies est homogène car le relevé est encore trop partiel et morcelé. En revanche, il est clair que la distribution des galaxies selon les lignes de visée est isotrope.

Les relevés spectroscopiques qui décrivent la structure spatiale de l’Univers montrent qu'il est pour l'essentiel vide de matière lumineuse. Les galaxies s'y distribuent suivant une topologie analogue à celle d'une structure en bulles (ou à celle d'une structure en éponge) dont elles occupent les parois, alors que le reste de l'espace ne montre aucune composante visible. Cette architecture est bien visible sur la Figure 21 du relevé 2dF. La dimension des bulles est de l'ordre de 50 Mpc, les “parois” ne dépassant pas 5 Mpc. C'est une distribution étonnante, mais qui est bien reproduite par les simulations numériques. L'effet de la gravitation dans le mécanisme de structuration est prépondérant.

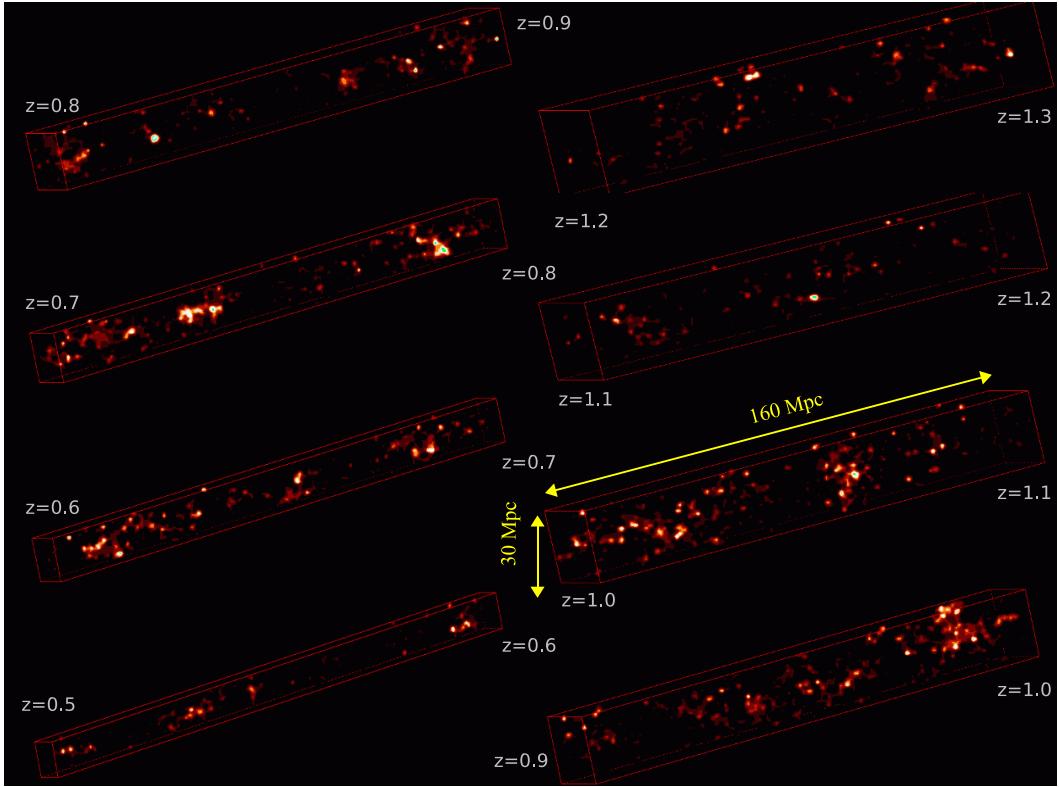


Figure 22: Distribution lissée, par tranche de redshift, des galaxies du relevé spectroscopique VIMOS/VVDS. Le VIMOS/VVDS explore des volumes d’Univers jusqu’à des redshifts de $z = 5$ pour sonder l’évolution des propriétés statistiques des galaxies : fonction de luminosité, structuration, populations stellaires, composition chimique et morphologie. Le VIMOS/VVDS sur le VLT et le DEEP2 sur GEMINI sont les deux relevés spectroscopiques profonds en cours. Ils portent respectivement sur environ 50’000 à 100’000 galaxies. D’après Marinoni et al., 2005, A&A, 442, 801.

Au-delà, les relevés spectroscopiques ne peuvent plus couvrir des champs couvrant d’immense fraction du ciel. Par contre, ils ont vocation à sonder l’Univers profond dans des cônes couvrant l’intervalle $0.0 < z < 5$ pour sonder l’histoire des galaxies. Le relevé VIMOS/VVDS (Figures 22 et 23) montrent la structuration des galaxies dans ce domaine de redshift. D’un point de vue de la compréhension des mécanismes de formation des structures, ce qui est important c’est de mesurer l’évolution de la structuration des galaxies et comment cette évolution dépend des types de galaxies (galaxies spirales, galaxies elliptiques, AGNs).

6.2.3 Distribution moyenne en redshift des galaxies

Grâce aux grands relevés spectroscopiques, on peut construire l’histogramme de la distribution en redshift des galaxies (Figures 19 et 23). Cette distribution montre des propriétés moyennes des galaxies : redshift moyen, largeur de la distribution, caractéristique de la queue de distribution des galaxies à très grands redshifts. C’est donc une description globale et assez grossière, à l’opposé des cartes bi- et tri-dimensionnelles qui révèlent la structuration en fonction de l’échelle angulaire (Figures 18 et 21).

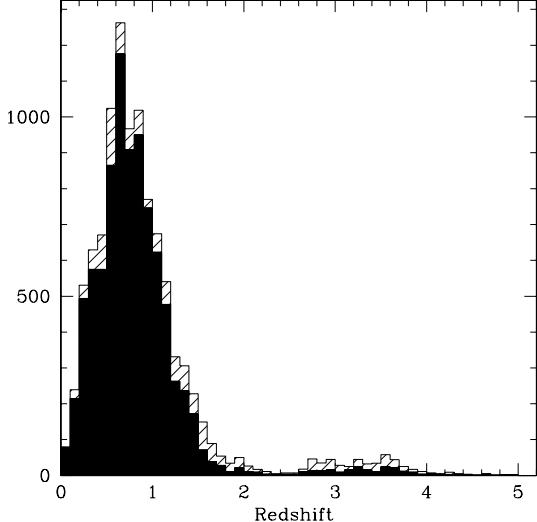


Figure 23: Distribution en redshift d'un échantillon de 11'000 galaxies jusqu'à la profondeur $I_{AB} = 24$ du relevé VIMOS/VVDS. D'après cet histogramme, le redshift moyen de ces galaxies est $z = 0.90$ et le redshift médian $z = 0.76$. D'après Le Fèvre et al. 2004, astro-ph/0409133.

La distribution dépend de la profondeur du relevé car plus il est profond plus on voit de galaxies faibles révélant à la fois des galaxies lointaines et des galaxies proches, mais intrinsèquement faibles (Figures 22 et 23). Comme ces galaxies n'ont pas nécessairement la même répartition spatiale que les galaxies *normales* ou proches, on s'attend à des modulations en fonction de la profondeur du relevé. Ces modulations ont donc un intérêt pour étudier les populations de galaxies et leur évolution en fonction du redshift.

Le relevé spectroscopique VIMOS/VVDS permet d'établir la distribution moyenne des galaxies jusqu'à une profondeur $I_{AB} = 24.5$ (Marinoni et al., 2005, A&A, 442, 801). Une façon pratique de la représenter est par un modèle simple de la forme :

$$n(z) = \frac{\beta}{z_s \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\beta}\right)} \left(\frac{z}{z_s}\right)^\alpha \exp\left[-\left(\frac{z}{z_s}\right)^\beta\right], \quad (38)$$

Pour le relevé VIMOS/VVDS, van Waerbeke et al. 2005 (A&A 429, 75) trouvent $\alpha = 2$, $\beta = 1.2$ et $z_s = 0.44$. Dans ce cas, le redshift moyen est $\bar{z}_s \approx 2.1$ $z_s = 0.92$ et le redshift médian $z_m \approx 1.9$ $z_s = 0.84$.

6.2.4 Caractérisation de la structuration

Sous l'effet de la gravitation, les galaxies tendent à se regrouper. Cette tendance (en anglais, le *clustering*) modifie progressivement la distribution à grande échelle de la matière. La description de ses propriétés actuelles (voir par exemple la Figure 24) permet d'établir un diagnostic sur l'histoire et les mécanismes de la formation des structures et sur la nature de la matière sombre.

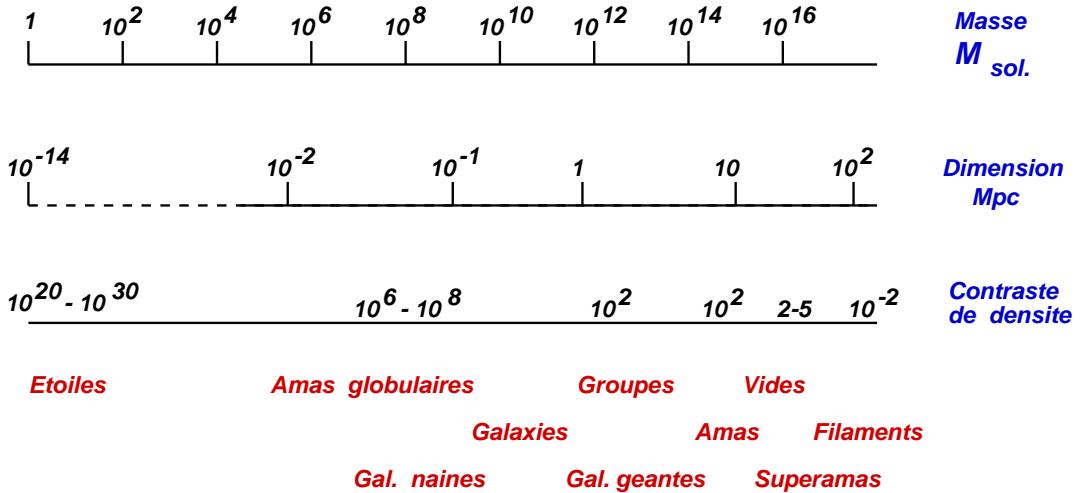


Figure 24: Tableau synthétique des échelles caractéristiques des structures constituant l’Univers visible.

On admet que la cartographie de la distribution des galaxies permet en principe de caractériser la topologie des structures. C’est une hypothèse dont la validité est discutable car les relations physiques entre galaxies et matière ne sont pas établies solidement.

Le tout premier estimateur statistique décrivant les propriétés de la distribution des galaxies est la fonction d’auto-corrélation, ou plus précisément la *fonction de corrélation à 2 points*. Elle décrit l’excès de probabilité de trouver une galaxie à une distance r d’une galaxie sélectionnée au hasard dans le champ d’observation, par rapport à une distribution aléatoire uniforme. C’est donc aussi la probabilité de trouver simultanément une galaxie dans un élément de volume dV_1 et une autre galaxie dans un élément de volume disjoint dV_2 et séparé d’une distance r de dV_1 . Dans le cas d’une distribution de Poisson, cette probabilité est :

$$dP = \bar{n}^2 dV_1 dV_2 , \quad (39)$$

où \bar{n} est la densité numérique moyenne de galaxies. Si la distribution n’est pas Poissonienne, cette probabilité s’écrit :

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] dV_1 dV_2 . \quad (40)$$

ξ est la corrélation entre ces points. Si $\xi > 0$, les points sont corrélés, et ξ exprime la tendance au regroupement des galaxies. Inversement, si $\xi < 0$, il y a anti-corrélation.

Pour un Univers homogène :

$$\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (41)$$

et pour un Univers isotrope :

$$\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \xi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \xi(r). \quad (42)$$

La fonction de corrélation à deux points des galaxies doit en principe contenir une information sur le champ de matière. Pour un champ de densité continu $\rho(\mathbf{r})$:

$$\xi(r) = \frac{\langle (\rho(\mathbf{u}) - \bar{\rho})(\rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) - \bar{\rho}) \rangle}{\bar{\rho}^2}, \quad (43)$$

où $\bar{\rho}^2$ est la densité moyenne dans une boîte de volume V . En supposant que les galaxies ont en moyenne toute la même masse $\langle M_g \rangle$ on a donc :

$$dP = \bar{n}^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2 = \frac{\langle \rho(\mathbf{x}_1) dV_1 \rho(\mathbf{x}_2) dV_2 \rangle}{\langle M_g \rangle^2}, \quad (44)$$

ce qui signifie que la fonction de corrélation à deux points donne directement la fonction d'auto-corrélation de la distribution de matière. Dans cette hypothèse, la fonction de corrélation à deux points des galaxies permet de reconstruire le spectre de puissance du champ de densité.

Soit $\delta(\mathbf{x})$ l'excès de masse au point \mathbf{x} :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}; \quad (45)$$

la fonction de corrélation s'écrit :

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (46)$$

On peut décomposer ce champ de densité dans l'espace de Fourier :

$$\begin{cases} \hat{\delta}(\mathbf{k}) &= \int \delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ \delta(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \end{cases} \quad (47)$$

Comme δ est réel, $\delta^* = \delta$ et la fonction de corrélation s'écrit :

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \langle \delta^*(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (48)$$

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \langle \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{r})} d^3\mathbf{k}' \right) \rangle \quad (49)$$

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \langle (2\pi)^{-6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \langle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \hat{\delta}^*(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \rangle \quad (50)$$

Or :

$$\langle \hat{\delta}(\mathbf{k}) \hat{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_\delta(\mathbf{k}) \quad (51)$$

et donc :

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} P_\delta(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (52)$$

par conséquent la fonction de corrélation $\xi_\delta(\mathbf{r})$ est la T.F. inverse du spectre de puissance $P_\delta(\mathbf{k})$ des fluctuations en densité :

$$P_\delta(\mathbf{k}) = \int \xi_\delta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} . \quad (53)$$

Exemple : cas d'un Univers isotrope :

$$\xi_\delta(\mathbf{r}) = \xi_\delta(r) \quad (54)$$

$$P_\delta(\mathbf{k}) = P_\delta(k) \quad (55)$$

$$\xi_\delta(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 P_\delta(k) dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta e^{ik r \cos\theta} d\theta \quad (56)$$

Soit :

$$\begin{cases} \xi_\delta(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int k^2 P_\delta(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk \\ P_\delta(k) = 4\pi \int r^2 \xi_\delta(r) \frac{\sin(kr)}{kr} dr \end{cases} \quad (57)$$

La fonction de corrélation à deux points est donc directement la transformée de Fourier du spectre de puissance $P(k)$. Mais l'intérêt immédiat vient du fait que la variance d'une distribution est directement reliée à la fonction de corrélation à deux points en $\mathbf{x} = 0$:

$$\langle N^2 \rangle = \xi(0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k) \quad (58)$$

et donc le spectre de puissance décrit comment la variance est répartie suivant les fréquences spatiales. Il se trouve qu'elles caractérisent complètement les propriétés d'un champ aléatoire gaussien.

Les catalogues de galaxies qui fournissent une mesure de la variance de la distribution des galaxies peuvent donc potentiellement caractériser le spectre de puissance de la matière associée. C'est la raison pour laquelle les mesures de ces deux quantités font partie des activités principales des relevés cosmologiques. Il reste cependant à vérifier que les propriétés statistiques des galaxies qui sont tracées par leur émission stellaire conduisent bien à une information directe sur les propriétés du champ de matière. C'est une des questions fondamentales de la cosmologie actuelle. La difficulté d'établir la relation entre les galaxies (ou la lumière) et la matière est masquée par la relation simple qui est choisie pour caractériser ce lien, grâce à un paramètre, le *biais* b , qui est le rapport du contraste de densité numérique de galaxies au contraste de densité de matière :

$$b = \left(\frac{\delta n}{\delta \rho} \right) . \quad (59)$$

En pratique, la fonction de corrélation est calculée en mesurant l'excès local du nombre de paires de galaxies par rapport à une distribution aléatoire :

$$\xi(r) = \frac{N_{obs}(r)}{N_{alea}(r)} - 1 , \quad (60)$$

où les N_i sont des nombres de paires contenues dans le catalogue observé et dans un catalogue fictif de galaxies distribuées aléatoirement dans un volume $r \pm \delta r/2$.

L'étude statistique des catalogues montre que la fonction de corrélation des galaxies est bien représentée par une loi de puissance :

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} . \quad (61)$$

Sur des échelles inférieures à $10 h^{-1}$ Mpc, $\gamma = 1.8$ et $r_0 = 5h^{-1}$ Mpc. Au-delà de $10 h^{-1}$ Mpc, la fonction de corrélation s'effondre rapidement. Cette loi d'échelle est fondamentale pour construire des modèles de formation de structures.

En pratique, les données immédiates des catalogues du ciel portent sur les propriétés projetées. Pour examiner le regroupement des galaxies dans ces catalogues, on utilise la fonction de corrélation angulaire, $\omega(\theta)$, qui est définie naturellement par simple analogie :

$$dP = \bar{N}^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 , \quad (62)$$

où $d\Omega_i$ sont les éléments d'angle solide de deux régions disjointes. On peut montrer que si la fonction de corrélation $\xi(r)$ est une loi de puissance d'indice $\gamma > 0$, alors la fonction de corrélation angulaire est aussi une loi de puissance d'indice $1 - \gamma$. Plus précisément, si :

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad (63)$$

alors, pour des petits angles θ , $\omega(\theta)$ s'écrit (voir Annexe A) :

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^\gamma \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{1}{[\int_0^\infty u^2\Phi(u)du]^2} \right] \int_0^\infty u^{5-\gamma}\Phi^2(u)du , \quad (64)$$

où :

$$u = \frac{r}{D} , \quad (65)$$

avec D caractérisant la profondeur du relevé et Φ étant la *Fonction de sélection* des galaxies. Cette fonction exprime les propriétés du relevé et les caractéristiques du catalogue de galaxies sélectionnées pour la mesure. Par exemple, pour un relevé limité en flux jusqu'à f_{lim} , les galaxies de luminosité L visibles sont dans une sphère de rayon limite :

$$D = \left(\frac{L}{4\pi f_{lim}}\right)^{1/2} . \quad (66)$$

Dans le cas d'un catalogue parfaitement homogène dont les galaxies auraient toute la même luminosité L alors :

$$\Phi = 1 \text{ pour } r < D \quad (67)$$

$$= 0 \text{ pour } r > D . \quad (68)$$

$$(69)$$

Cette expression montre que la fonction de corrélation angulaire décroît lorsque le relevé est de plus en plus profond. C'est donc un pur effet de dilution du signal par effet de projection.

La Figure 25 montre la forme de la fonction de corrélation angulaire de l'APM (Automated Plate Machine) et la fonction de corrélation spatiale du relevé Point Source Catalogue redshift survey (PSCz) établi à partir du catalogue de galaxies du satellite infrarouge IRAS. La Figure 26 montre la fonction de corrélation tridimensionnelle du *SDSS* mesurée à partir de redshifts photométriques.

6.3 Propriétés des amas de galaxies

Les amas de galaxies sont les systèmes dynamiques les plus massifs et les plus étendus qui présentent des propriétés de systèmes autogravitants (partiellement) relaxés. Il faut rappeler que les amas de galaxies ne contiennent qu'environ 10 % de la masse baryonique dans l'Univers, ce qui veut dire

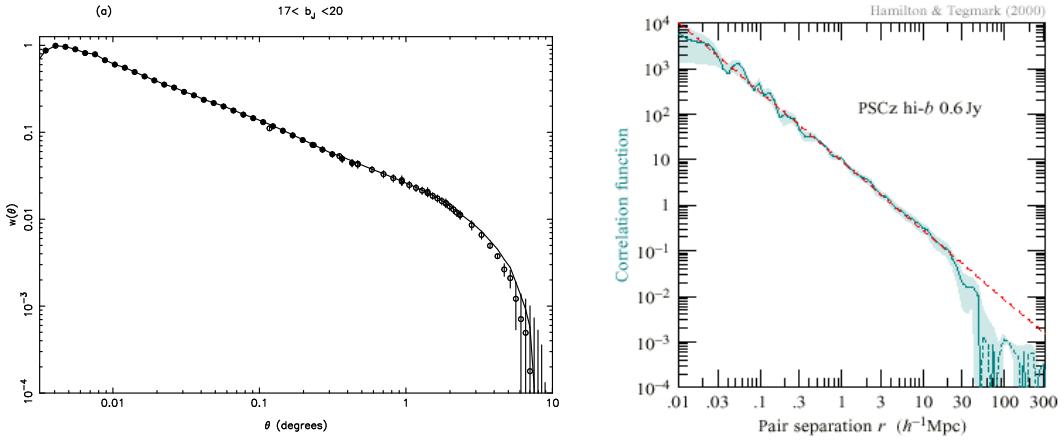


Figure 25: A gauche, fonction de corrélation angulaire du relevé photométrique APM montrant le regroupement des galaxies de la carte bi-dimensionnelle de la Figure 20. L’analyse porte sur deux millions de galaxies projetées sur le ciel. D’après Maddox et al. 1990, MNRAS 242, 43. A droite, la fonction de corrélation tri-dimensionnelle du relevés PSCz qui porte sur 15’400 galaxies avec un décalage spectral mesuré. D’après Sutherland et al. 1999, MNRAS 308, 289.

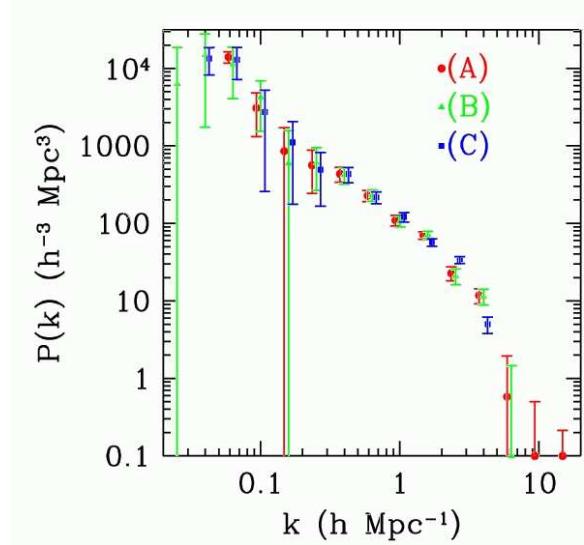


Figure 26: La fonction de corrélation tridimensionnelle du SDSS mesurée à partir de redshifts photométriques de 1.5 millions de galaxies permet de reconstruire avec une précision inégalée le spectre de puissance des galaxies. Cette figure remarquable préfigure les résultats futurs de ce relevé qui porteront sur 100 millions de redshifts photométriques de deux millions de galaxies. D’après Dodelson et al. 2002, ApJ 572, 140.

qu'environ 90 % de cette masse baryonique se trouve en dehors des galaxies. Au-delà, aucune des structures dynamiques connues n'est encore parvenue à cette phase avancée d'évolution dynamique. Cette particularité place les amas de galaxies dans une position centrale. Plus précisément, les amas de galaxies sont les blocs de la structuration à grande échelle de l'Univers qui ont conservé la mémoire de l'histoire de leur formation et de leur évolution au sein des grandes structures. C'est la raison pour laquelle ce sont des objets essentiels en cosmologie. En fait, les simulations numériques montrent que le nombre et l'état d'évolution des amas de galaxies varient fortement avec le décalage spectral (donc avec le temps). Ces propriétés peuvent donc être utilisées pour confronter les scénarios cosmologiques aux observations.

6.3.1 Propriétés internes

Les amas de galaxies (voir le cours *Dynamique stellaire et galactique*) ont des dimensions caractéristiques de 1 à 10 Mpc. Ils sont composés de galaxies (typiquement de l'ordre du millier, voire 10'000, ce nombre dépendant fortement de la fraction de galaxies naines qui est mal connue), de gaz inter-galactique ionisé confiné dans l'amas et dont la température est d'environ 10^8 K, ainsi que de matière sombre.

Les amas présentent en général des morphologies complexes et sont constitués de sous-systèmes, vraisemblablement en forte interaction ou en cours de fusion. Ce sont des indications que les amas de galaxies sont des systèmes dynamiquement jeunes. C'est bien ce que révèlent les grands relevés tridimensionnels des galaxies qui permettent de placer les amas dans cette gigantesque architecture à l'intersection de filaments et/ou des bulles (voir Figure 27). Progressivement, les galaxies périphériques plongent dans le puits de potentiel central en suivant d'immenses flots de galaxies. Cette représentation, qui est aussi bien visible dans les simulations numériques (Figure 28), montre que les zones externes des amas ne constituent pas des systèmes isolés et ne sont pas sphériques. Leur modélisation est donc particulièrement complexe.

6.3.2 Densité numérique et fonction de corrélation amas-amas

De la même façon que pour les galaxies, on peut tenter de mesurer le regroupement des amas de galaxies par la fonction de corrélation amas-amas. Techniquement, c'est cependant beaucoup plus difficile car le nombre d'amas est considérablement plus faible que le nombre de galaxies.

Pour évaluer la densité d'amas de galaxies, il faut préciser la profondeur des catalogues car c'est ce paramètre qui définit le volume couvert (voir par exemple la Figure 29). Ainsi jusqu'à la magnitude apparente $I = 24$, les estimations à partir des catalogues actuels donnent 15 amas par degrés carrés. Le ciel couvrant environ 40'000 degré-carrés, de l'ordre de 5×10^5 à 1×10^6 amas couvrent le ciel jusqu'à ces magnitudes. A cette profondeur, on atteint les amas de galaxies jusqu'à $z = 1$ et par conséquent la densité d'amas de galaxies est de l'ordre de $10^{-5} h^3 \text{ Mpc}^{-3}$. A titre de comparaison, à cette profondeur il y a dans le ciel environ 10^{10} galaxies.

Il n'existe pas pour le moment de grands catalogues d'amas de galaxies rigoureusement construits permettant de produire des analyses statistiques robustes. La mesure de la fonction de corrélation amas-amas est donc actuellement incertaine. L'arrivée de nouveaux grands échantillons, produits par les relevés SDSS et le satellite XMM notamment, devrait permettre un formidable

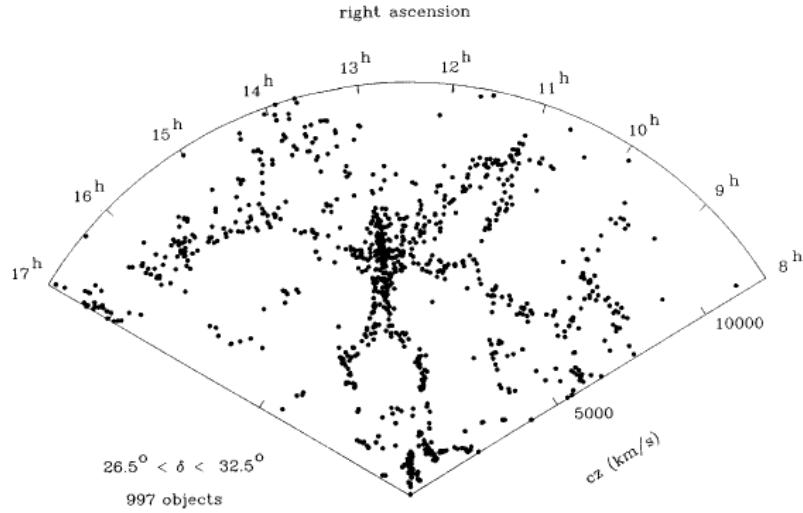


Figure 27: Image de la distribution des galaxies du catalogue spectroscopique du Center for Astrophysics (CfA). Comme les autres diagrammes en cône, l'observateur est au sommet et les objets sont vus selon leur disposition le long de la ligne de visée (en profondeur). On voit nettement des régions vides (les “bulles”) et la disposition remarquable des galaxies (points noirs) avec, au centre, un étirement surprenant le long de la ligne de visée. Il s’agit de l’amas de galaxies Coma ($z = 0.023$), un archétype de la classe des amas riches. L’allongement est un effet de la dispersion des vitesses des galaxies de l’amas qui affecte localement le redshift des galaxies, engendré par l’expansion, d’une composante additionnelle produite par la vitesse individuelle de chaque galaxie dans le potentiel gravitationnel créé par l’amas de galaxies. Comme Coma, tous les amas les plus riches et massifs de l’Univers semblent localisés à l’intersection des “bulles”. D’après de Lapparent, Geller & Huchra 1986, ApJ 302, L1.

bond en avant dans ce domaine.

Avec les données actuelles, il semble que la fonction de corrélation amas-amas, ξ_{cc} suive une loi identique à celle des galaxies (voir Figure 30) :

$$\xi_{cc}(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1.8}, \quad (70)$$

avec $r_0 = 24h^{-1}$ Mpc. Cette loi est bien suivie entre les échelles de 3 à 100 Mpc. Mais il faut insister sur le fait que les catalogues ne contiennent que quelques centaines d’amas de galaxies.

6.4 Propriétés du gaz inter-galactique

L’analyse du gaz inter-galactique est un moyen de comprendre l’histoire des baryons dans l’Univers et d’explorer les scénarios possibles à l’origine de l’effondrement des baryons et de la formation des étoiles dans les galaxies. C’est un problème difficile et qui est aujourd’hui à la pointe des recherches en cosmologie et astrophysique extra-galactique.

Nous avons déjà évoqué l’existence d’un gaz chaud dans les amas de galaxies. Nous savons, par

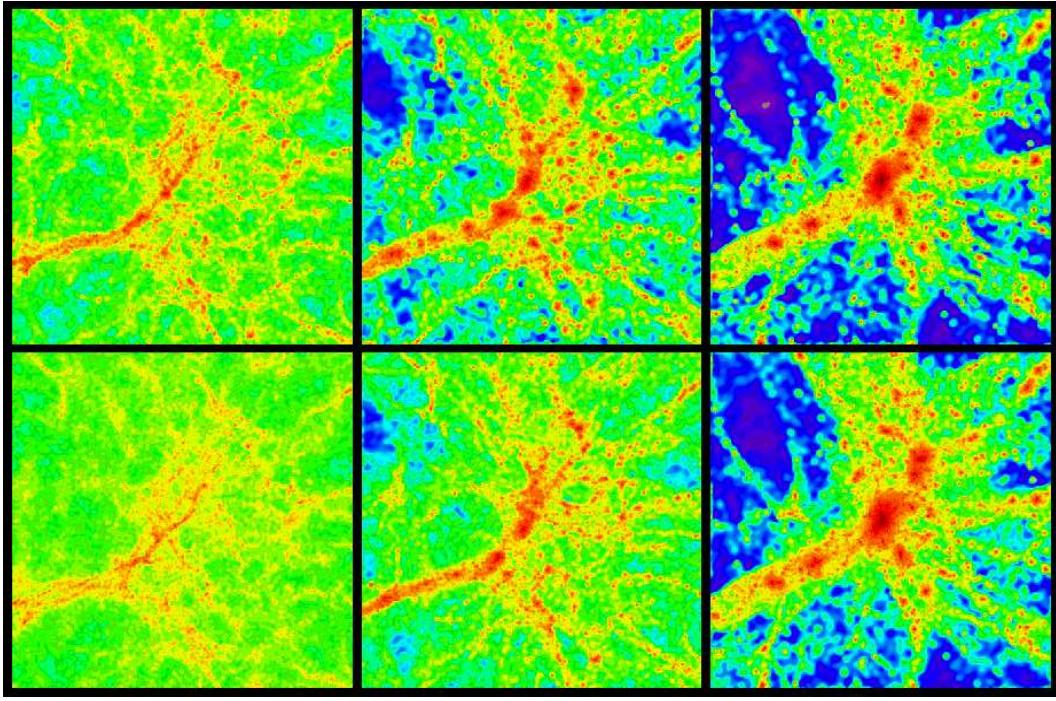


Figure 28: Simulations numériques représentant la formation d'un amas de galaxies. En bas, un scénario cosmologique d'Univers dominé par de la matière sombre froide avec $\Omega_m = 1$; $\Omega_\Lambda = 0$. En haut, un modèle de matière froide dans un Univers avec constante cosmologique non-nulle, $\Omega = 0.3$; $\Omega_\Lambda = 0.7$. Le temps progresse de gauche à droite pour les valeurs de $z = 2, 1, 0$, respectivement. Mais les boîtes sont de dimension différente ($21 \times 21 \times 8 \text{ Mpc}^3$ à gauche contre $35 \times 35 \times 13 \text{ Mpc}^3$ à droite). Ces deux scénarios montrent une grande différence dans l'état d'évolution de l'amas en fonction du décalage spectral. D'après Kauffmann, Colberg, Diaferio, White, 1999, MNRAS, 303, 188.

les raies d'émission du gaz, que l'abondance en métaux du gaz intra-amas égale environ la moitié de la valeur solaire. On explique cette composition par un enrichissement venant directement des éjectas des supernovae des galaxies de l'amas. Une fraction du gaz est vraisemblablement d'origine primordiale et est confinée depuis la formation de l'amas dans son puits de potentiel.

Il existe aussi du gaz inter-galactique qui n'est pas confiné dans des systèmes autogravitants. Sa présence est révélée dans les spectres des quasars à grand redshift qui montre une multitude de raies d'absorption très étroites (quelques km s^{-1}) de largeur en-deçà de la raie Ly- α ($\lambda 1216 \text{ \AA}$). Ces raies sont produites par les nuages absorbants situés le long de la ligne de visée à tous les redshifts. Le nombre impressionnant des raies visibles sur la Figure 31 démontre qu'il existe des nuages en très grand nombre dans le milieu inter-galactique. Ces nuages constituent les éléments de ce que l'on appelle la *forêt Lyman- α* , notée *FLy*. Les densités de colonne (c'est-à-dire la densité de matériau projetée sur la ligne de visée) des nuages de la forêt Lyman- α sont de l'ordre de $10^{13} - 10^{15} \text{ cm}^{-2}$. Potentiellement il s'agit d'un énorme réservoir de baryons (voir Figure 33) et il est donc crucial de comprendre la quantité de gaz qu'ils contiennent, comment ils se distribuent dans l'espace, comment la fraction de gaz des nuages évolue avec le temps et quel est leur couplage avec la formation des galaxies. Par ailleurs, pour la compréhension des mécanismes de structuration de l'Univers, ces nuages présentent l'avantage d'être des traceurs des grandes structures plus simples que les galaxies. En effet, comme il s'agit du gaz d'hydrogène extra-galactique, ils ont été moins

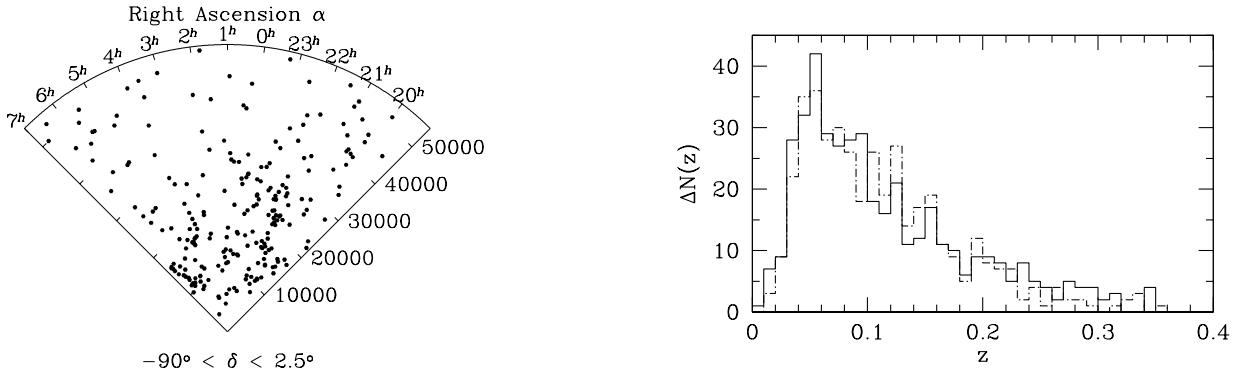


Figure 29: Distributions spatiale et en redshift des amas de galaxies de l'échantillon REFLEX (ROSAT ESO Flux-Limited). Il est composé de 452 amas de galaxies détectés par le satellite ROSAT dans la bande d'énergie (0.1-2.4) keV et dont le flux dépasse 3×10^{-12} erg s $^{-1}$ cm $^{-2}$. La courbe de droite en continu donne leur distribution en redshift. D'après Schuecker et al. 2001, A&A 368, 86.

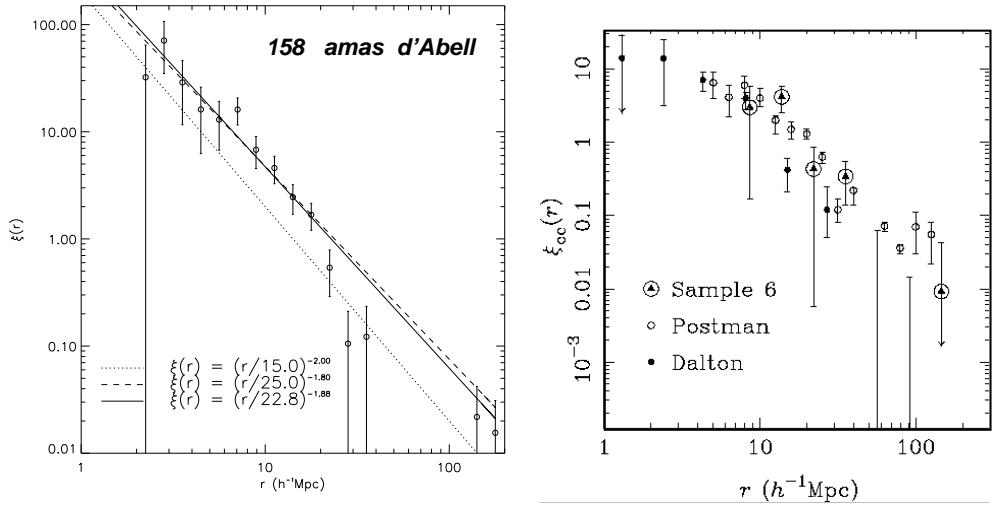


Figure 30: Fonction de corrélation tri-dimensionnelle amas-amas : A gauche, un échantillon limité en volume de 158 amas du catalogue d'Abell. Les 3 droites représentent les ajustements de fonction en loi de puissance. D'après Miller et al. 1999, ApJ 523, 492. A droite, fonction de corrélation tri-dimensionnelle amas-amas des trois échantillons différents d'amas de galaxies. Les résultats semblent stables en dépit de la disparité des catalogues et du petit nombre d'amas contenu dans chaque relevé.

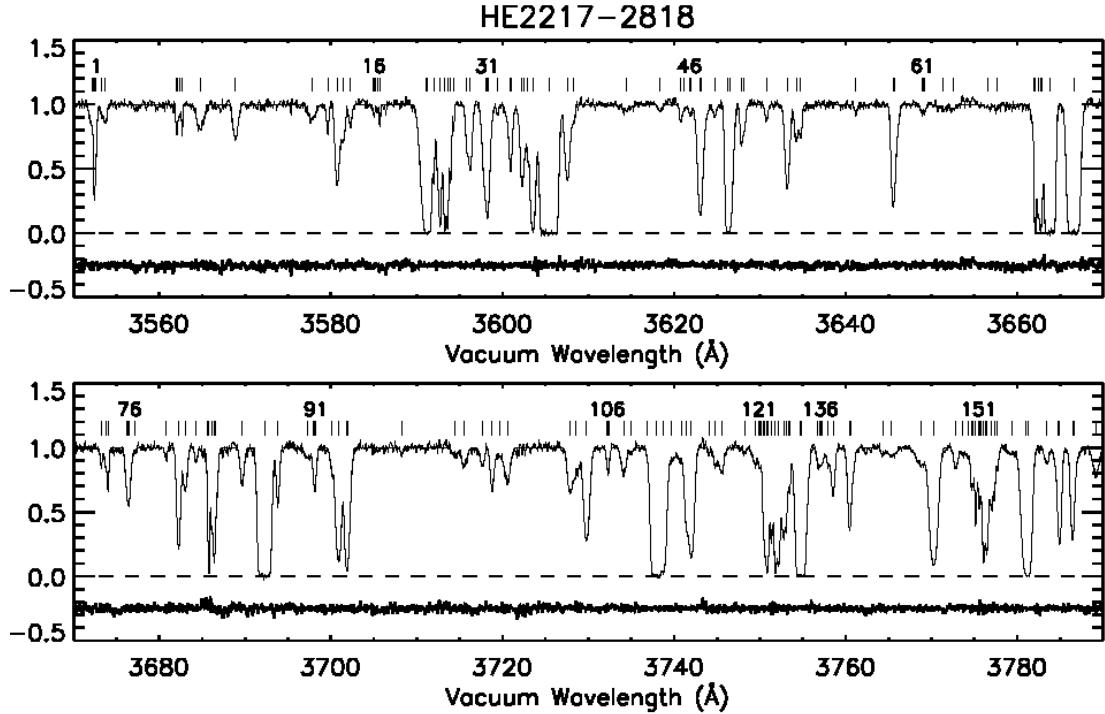


Figure 31: Spectre haute résolution obtenu avec le spectrographe UVES du VLT ($R = 45'000$) du quasar HE2217-2818. Les raies d'absorption sont les nuages de la forêt Ly- α . Les traits verticaux indiquent la positions des nuages absorbants situés le long des deux lignes de visée. Le spectre a été superposé avec un ajustement de profil de Voigt. Le résidu est montré en bas de chaque panneau. D'après Kim et al. 2001, A&A 373, 757.

affectés que les galaxies par les mécanismes complexes conduisant à la formation d'étoiles et donc par les effets de biais qui relient la lumière à la matière.

La distribution en densité de colonne des nuages est très dispersée. Les cas extrêmes sont les systèmes amortis, appellés *Damped Lyman- α* et notés *DLA*, dont les raies saturées par la quantité d'hydrogène montrent qu'ils atteignent des densités de colonne de 10^{20} - 10^{22} cm $^{-2}$ (voir Figure 32). Les observations montrent que le nombre de nuages absorbants par intervalle de décalage spectral évolue selon la loi empirique :

$$\frac{dN}{dz} \propto (1+z)^{2.3} \quad (71)$$

ce qui, compte tenu de l'accroissement de densité en fonction du décalage spectral, donne la loi d'évolution :

$$n_{comobile} \propto (1+z)^\gamma \quad (72)$$

où $\gamma > 1$ et dépend des paramètres cosmologiques. Dans tous les cas, les nuages étaient donc plus nombreux et/ou avaient une plus grande section efficace à grand décalage spectral.

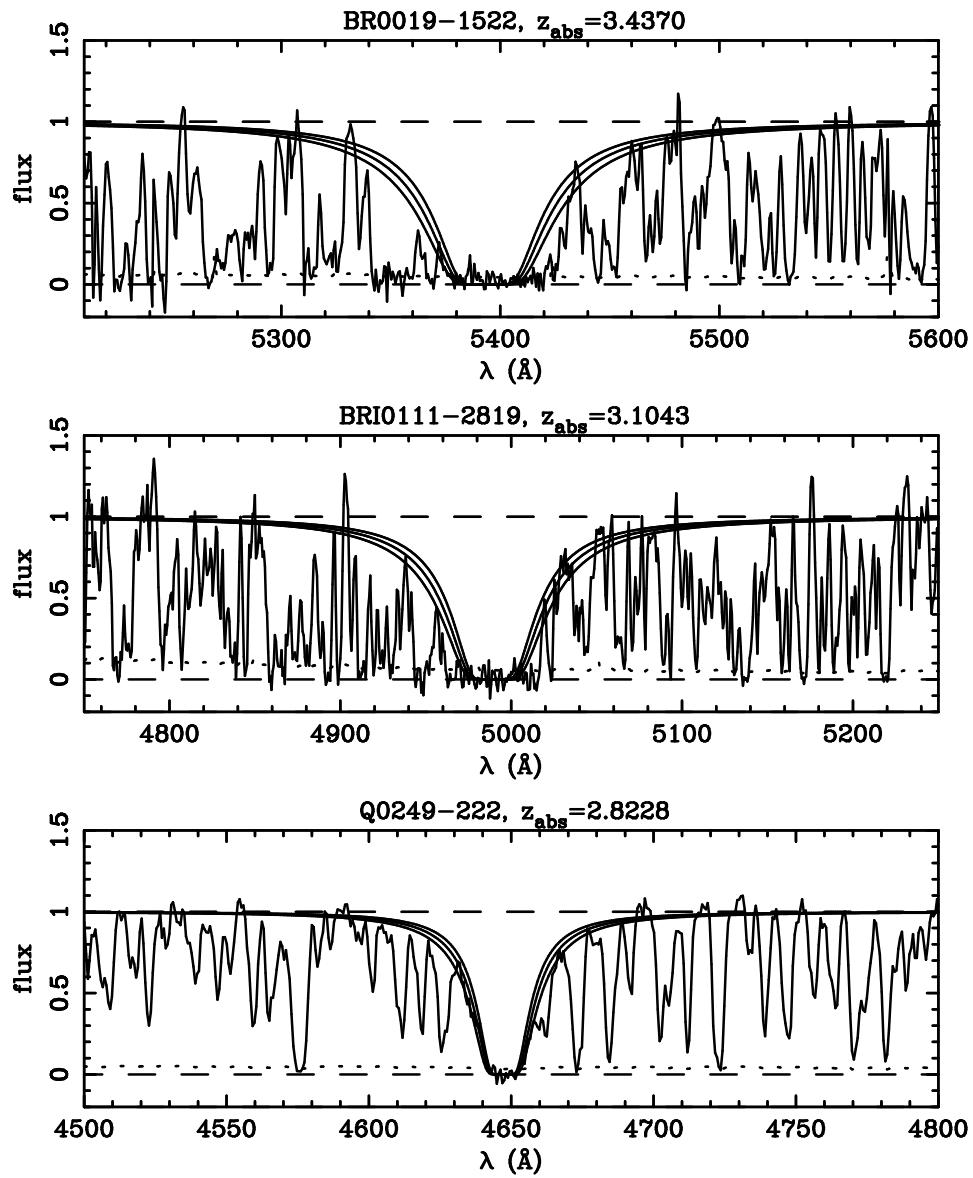


Figure 32: Spectres de quasars montrant des raies d'absorption saturées produites par les systèmes à grande densité de colonne. D'après Storrie-Lombardi et Wolfe 2000, ApJ 543, 552.

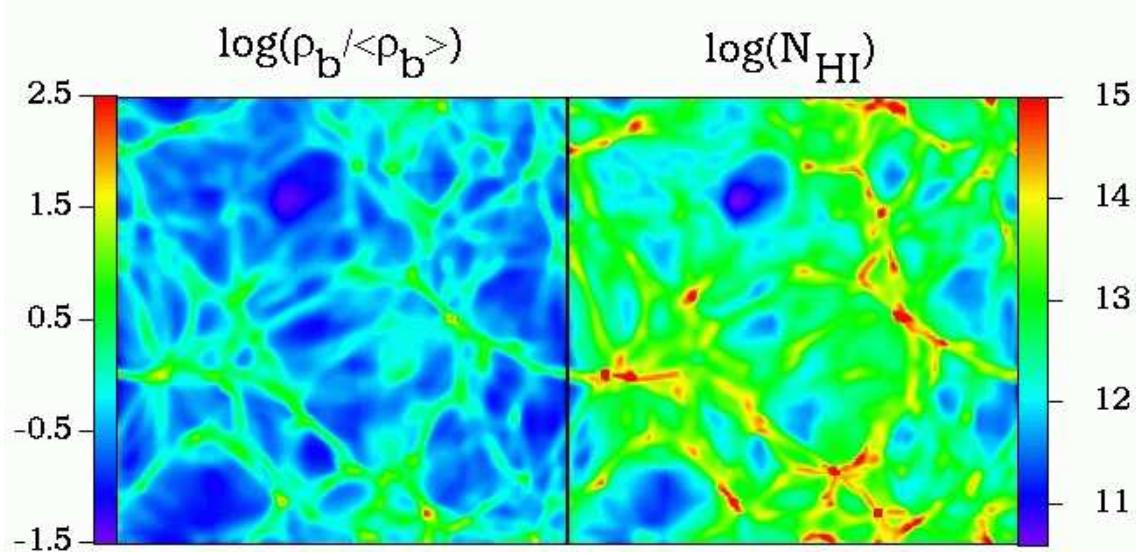


Figure 33: Corrélation entre l'excès de baryon dans les nuages et la densité de colonne de gaz HI. D'après Zhang, Meiksin, Anninos et Norman 1998, ApJ 495, 63.

La dimension de ces nuages dans la direction perpendiculaire à la ligne de visée est estimée en étudiant les raies d'absorption dans les champs à quasars multiples, en corrélant la distribution des nuages Lyman- α dans les spectres de chaque quasar. Les résultats sont très dispersés (entre 5 et 300 kpc !). Cependant il semble que les nuages de la forêt Lyman- α possèdent les propriétés communes suivantes. Ils sont :

- de grande dimension (≈ 100 kpc),
- plutôt aplatis,
- ne présentent pas d'évolution de dimension avec le temps,
- sont corrélés sur des échelles de 1 Mpc.

La représentation donnée par les observations et les simulations numériques est illustrée sur la Figure 33. Les nuages Lyman- α constituent un tissu filamentaire (peut être de nappes minces) qui suit la distribution de matière et dont les intersections sont les lieux de formation de galaxies.

La mesure de l'abondance de l'hydrogène et des métaux dans ces nuages est essentielle pour comprendre l'histoire de la formation stellaire dans l'Univers. C'est techniquement difficile car ces nuages sont ionisés par le flux lumineux des quasars et des galaxies en formation. On peut montrer que la masse de ces systèmes est de l'ordre de :

$$M_{FLy} \approx 1.2 \times 10^3 \left(\frac{L}{10 \text{ kpc}} \right)^2 h^{-2} M_\odot , \quad (73)$$

et :

$$M_{DLA} \approx 10^{10} \left(\frac{L}{300 \text{ kpc}} \right)^2 h^{-2} M_\odot , \quad (74)$$

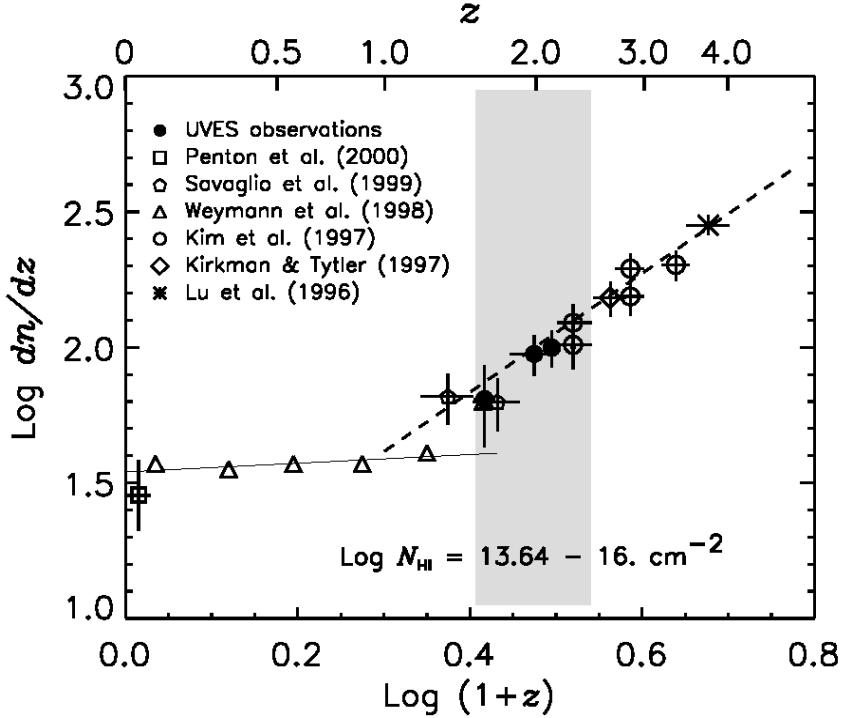


Figure 34: Une compilation des données montrant l'évolution de la densité numérique de nuages Ly- α en fonction du redshift pour les systèmes dont la densité de colonne $\Sigma_0 > 10^{14} \text{ cm}^{-2}$. Jusqu'à $z \sim 1.6$ la pente $\gamma \approx 0.16$, alors qu'une montée abrupte est observée pour $z > 1.6$. La pente moyenne atteint $\gamma \approx 2.2$. D'après Kim et al. 2001, A&A 373, 757.

où FLy se rapporte à la forêt de Lyman- α et DLA aux systèmes amortis. Pour évaluer la masse totale incluse dans ces systèmes, on ajuste le nombre de raies par intervalle de redshift avec une loi du type :

$$\frac{dN}{dz} = B (1 + z)^\gamma . \quad (75)$$

Pour les nuages de densité de colonne $\Sigma_0 > 10^{14} \text{ cm}^{-2}$, une très forte évolution est observée au-delà de $z \sim 1.5$. Comme le montre la Figure 34, $\gamma \approx 2.2$ et $B \approx 9.0$. La fraction de baryons observée dans ces systèmes est compatible avec l'hypothèse que plus de 90 % des baryons résident dans la forêt Ly- α à $1.5 < z < 4$.

La distance propre entre deux nuages de la forêt Ly- α est donc :

$$D_{FLy} = \frac{cdt}{dzdN} \approx 0.6 \Omega^{-1/2} h^{-1} Mpc \quad (76)$$

De la même façon, pour les systèmes amortis la distance propre inter-nuage est :

$$D_{DLA} \approx 300 \Omega^{-1/2} h^{-1} Mpc . \quad (77)$$

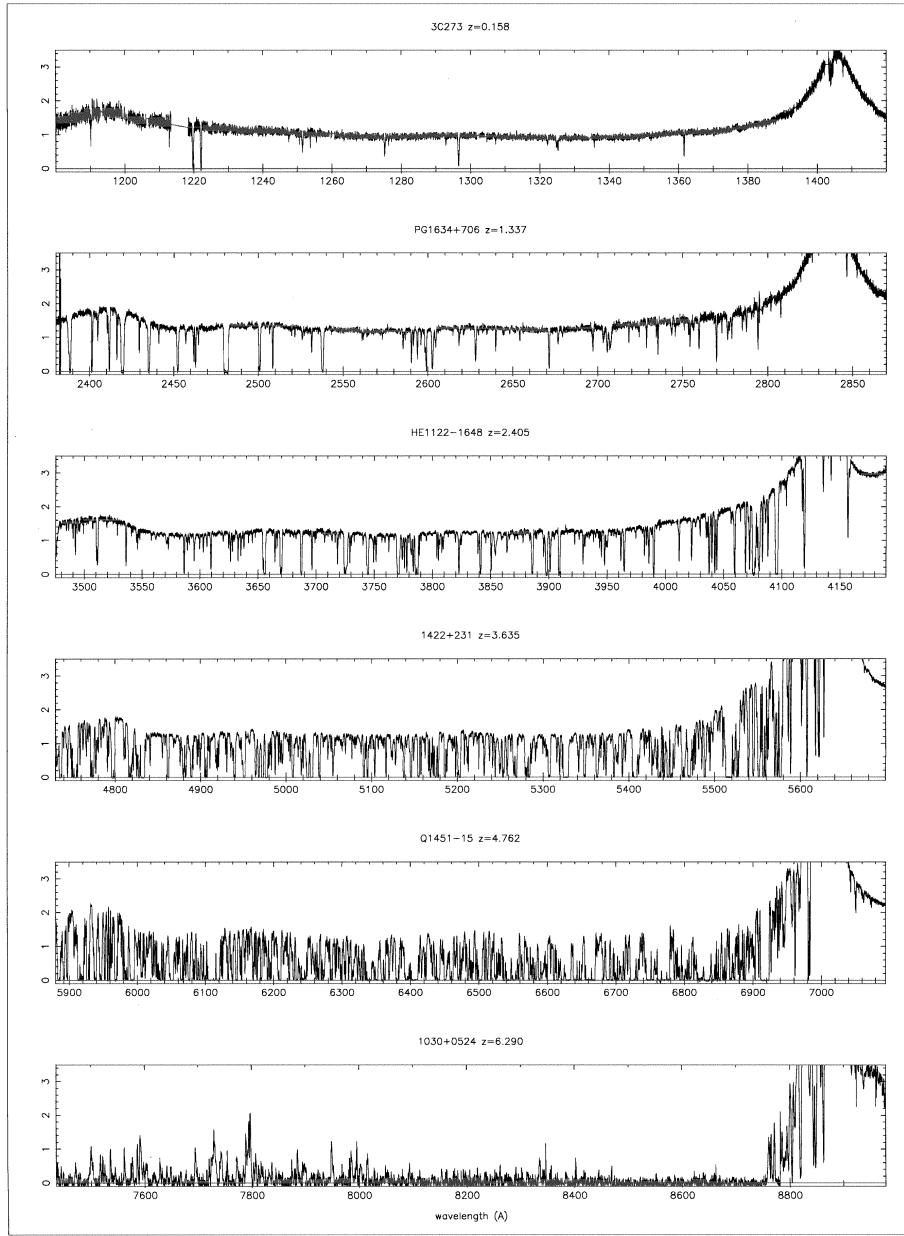


Figure 35: Spectres de 6 quasars aux redshifts allant de $z = 0.158$ à $z = 6.290$. Ils illustrent l'accroissement de l'absorption engendrée par le gaz neutre le long de la ligne de visée. Les spectres des quasars aux plus grands redshifts montrent la dépression, dite de Gunn-Peterson, due à l'absorptions complète de la lumière aux longueurs d'ondes plus courtes que celle de la raie Lyman- α ($\lambda 1216 \text{ \AA}$) de l'hydrogène atomique. Ce phénomène implique que la période de re-ionisation qui a commencé à environ $z \sim 20$ doit avoir continué jusqu'à $z \sim 6$.

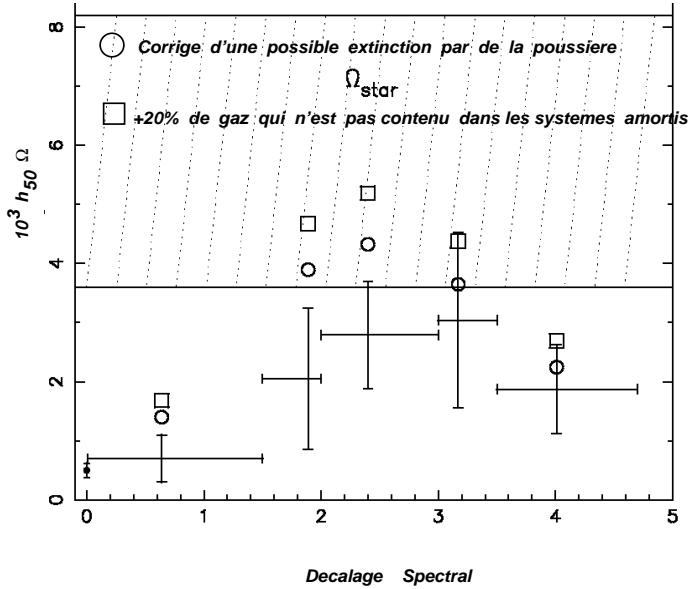


Figure 36: Mesure de l’abondance d’hydrogène dans les nuages inter-galactiques en fonction du décalage spectral.

On peut montrer alors qu’à grand redshift ($2 < z < 3$), la contribution à la masse d’hydrogène des systèmes amortis est très grande et devient équivalente à celle des galaxies. Par contre, à $z = 0$ cette contribution est dix fois plus faible (voir Figures 36 et 35). La diminution semble progressive avec le décalage spectral. Ce sont des indications très fortes que ces grands nuages sont des précurseurs de nos galaxies actuelles.

6.5 Propriétés statistiques des quasars

Aucune des propriétés internes des quasars n’est discutée ici (voir pour cela le cours *Introduction à l’astrophysique*).

Notre connaissance des propriétés de regroupement des quasars est encore limitée car la taille des catalogues est sans commune mesure avec celle des galaxies. Le premier catalogue vraiment imposant est en cours de constitution avec le relevé 2dF. La Figure 37 et ses 23'338 quasars est déjà une révolution en soi qui présage d’importants bouleversements dans notre connaissance des quasars et de l’Univers à grande échelle. Il suffit pour s’en convaincre de considérer la profondeur de l’échantillon par rapport à tous les relevés de galaxies discutés auparavant.

Il semble que les quasars aient tendance à se regrouper, au moins sur des échelles $< 10 h^{-1} \text{Mpc}$, avec une échelle $r_0 = 6h^{-1} \text{ Mpc}$. L’existence des structures cohérentes de quasars sur des échelles de l’ordre de $100 h^{-1} \text{ Mpc}$ a été longtemps un objet de discussion. Il faut néanmoins souligner que le relevé de quasars du 2dF ne montre aucune structuration à très grande échelle. Ce catalogue montre qu’au delà de 100 Mpc, l’Univers devient homogène et isotrope.

La densité de quasars semble atteindre un pic à $z = 2$ puis décroît fortement. À $z = 4$ elle est 3 fois plus faible qu’à $z = 2$. Ce déclin est observé dans les échantillons optiques et radios. Cependant, le nombre de quasars de décalage spectral ≈ 4 est très faible et il est encore prématûré de donner

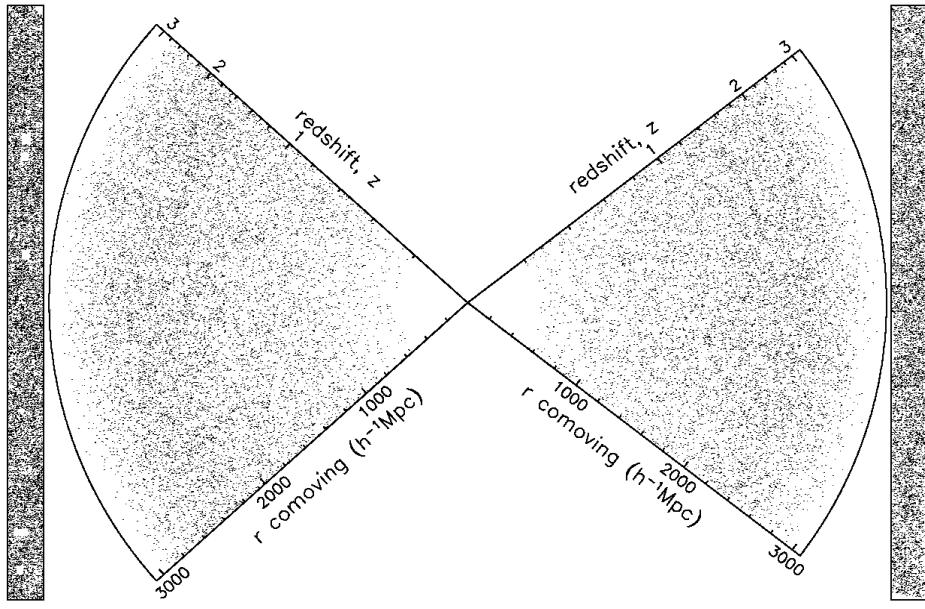


Figure 37: Distribution des 23'338 quasars du relevé final 2dFQSO. C'est à ce jour le plus grand relevé de quasars jamais construit. Aucune structuration n'est visible. Les petites bandes latérales verticales représentent la disposition de chaque quasar projetée sur le plan du ciel. D'après Croton et al. 2005, MNRAS 356, 415.

des valeurs quantitatives précises. Le 2dF et le SDSS, qui ont déjà trouvé un grand nombre de quasars à grand décalage spectral, devraient très vite apporter des informations nouvelles à ce sujet.

6.6 Les fonds de rayonnement

Si la matière représente une contribution importante au contenu de l'Univers, ce n'est pourtant qu'une petite fraction vis-à-vis des photons. Les observations radio, infrarouge, visible, UV, X et gamma montrent qu'il existe dans toutes ces longueurs d'onde un fond diffus de photons qui s'ajoute aux contributions individuelles des objets identifiés dans le ciel. Cela ne signifie pas nécessairement qu'il s'agit d'une composante intrinsèquement diffuse car une fraction peut provenir d'objets non résolus. Il est important de souligner que tous ces fonds de rayonnement sont isotropes. Les composantes anisotropes produites par la Galaxie ou le mouvement de la Galaxie vis à vis du fond diffus cosmologique (qui crée une composante dipolaire dans la distribution de température du fond à cause du redshift) ont été soustraites au préalable.

Les principales contributions aux fond de rayonnement sont les suivantes :

1. La contribution dominante est le rayonnement fossile détecté involontairement en 1965 par Penzias et Wilson. Il a été très vite interprété dans un contexte cosmologique. Nous y reviendrons. Le rayonnement fossile constitue plus de 90 % de la densité d'énergie sous

forme radiative de l’Univers. Les résultats spectaculaires des satellites *COBE* et *WMAP* sont connus de tous (voir, e.g., Figure 38). Dans une première étape, quelques semaines après son lancement, le satellite *COBE* a permis de démontrer que ce rayonnement suit un spectre de distribution d’énergie remarquablement identique à celui d’un corps noir de température (voir Figures 38 et 39) :

$$T_0 = 2.725 \pm 0.002 \text{ K} . \quad (78)$$

On peut donc calculer la contribution actuelle du fond diffus à la densité d’énergie de l’Univers, exprimée en terme de densité de masse :

$$\rho_{CMB} c^2 = c^2 \int_0^\infty u_r(\nu) d\nu = c^2 \int_0^\infty \frac{8\pi h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T_\nu}\right) - 1} d\nu = \sigma T^4 \quad (79)$$

$$\rho_{CMB}(t_0) = \frac{\sigma T_0^4}{c^2} = 4.8 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3} , \quad (80)$$

où $\sigma = \pi^2 k_B^4 / (15c^3 \hbar^3) = 7.5 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ est la constante de Stefan (voir le cours *Bases physiques de l’astrophysique*).

On peut calculer aussi la densité numérique de photons :

$$n_{CMB} = \int \frac{\rho_\gamma(\nu)}{h\nu} d\nu \approx 0.4 \frac{\sigma}{k_B} T^3 = 20.4 T^3 , \quad (81)$$

ce qui signifie que la densité numérique actuelle de photons du CMB est égale à :

$$n_{CMB}(t_0) = 413 \text{ photons cm}^{-3} \quad (82)$$

Nous reparlerons de ce rayonnement à plusieurs reprises dans ce cours.

2. Il existe une composante diffuse dans le domaine radio (voir Figure 39). Outre l’émission des galaxies sous forme de rayonnement de freinage (Bremsstrahlung) du gaz ionisé des régions HII à 10^4 K, les radio-sources contribuent à ce rayonnement.

Le gaz atomique, notamment la raie d’émission à 21 cm, est une source potentielle particulièrement intéressante à très grand redshift. Il n’a pas encore été détecté mais comme les grandes structures proviennent de l’effondrement de ces nuages, on espère pouvoir le détecter un jour. C’est un des objectifs scientifiques du grand radiotélescope GMRT (Giant Metrewave Radio Telescope) en Inde.

3. L’autre source intense de rayonnement provient des galaxies, depuis le domaine du proche UV, puis l’optique et l’infrarouge proche (voir Figure 39). Son origine est principalement le rayonnement stellaire. On sait que la densité des galaxies faibles atteint 200 objets par minute d’arc carré. Ce sont elles qui contribuent à cette composante diffuse.

Une forte contribution a été détectée aussi hors du plan galactique dans l’infrarouge lointain et le submillimétrique. Elle est produite par la poussière des galaxies très lointaines.

4. Le rayonnement X est une composante importante (voir Figure 39), qui est composée de 3 sortes de sources. La composante “X-mou” est émise par les radio-galaxies et les quasars, la seconde est le gaz chaud intra-amas, la dernière provient des galaxies de Seyfert.

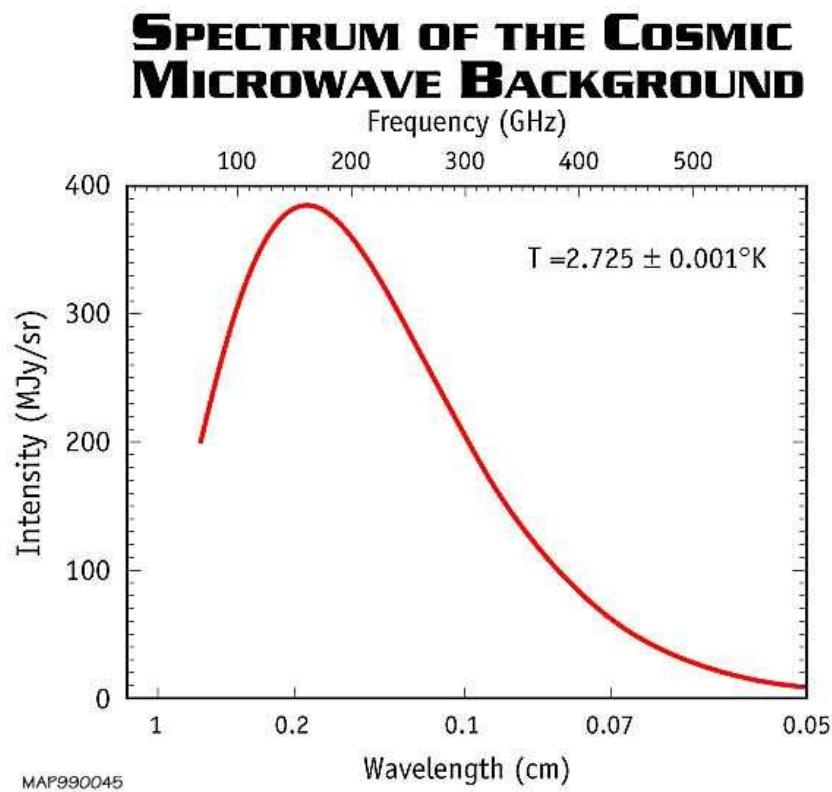


Figure 38: Spectre du rayonnement micro-onde cosmologique mesuré par *COBE*. La comparaison des points de mesure est faite avec un spectre de corps noir à 2.725 K.

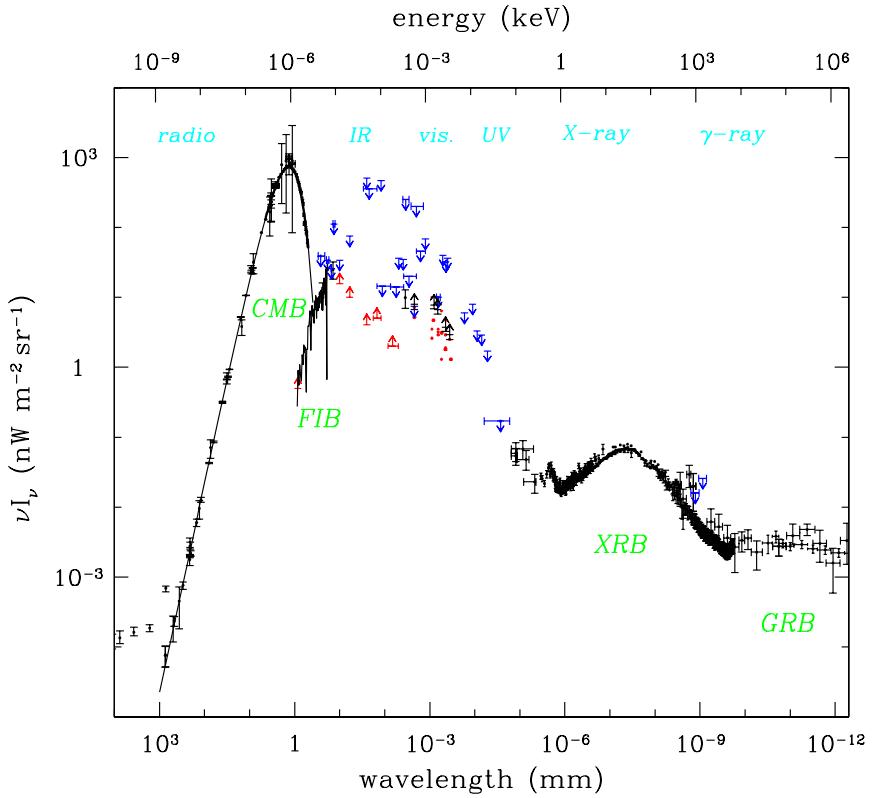


Figure 39: Compilation des observations des fonds de rayonnement à différentes longueurs d’ondes. Le fond de rayonnement cosmologique micro-onde domine nettement la densité de rayonnement de l’Univers. Puis viennent ensuite les contributions infrarouge lointain et visible. D’après Halpern & Scott 1999, ASP Conf. Ser. 181, p. 283.

5. Les sources gamma (voir Figure 39). Elles comprennent notamment les sursauts gamma (Gamma-Ray-Bursts, notés GRBs), phénomènes durant de quelques millisecondes à quelques centaines de secondes, dont la fréquence de détection est d’aujourd’hui d’environ un par jour. Leur origine cosmologique a été démontrée en 1997 lorsque la première mesure de redshift donna $z = 0.835$. L’origine pourrait être la coalescence de deux objets compacts ou bien la manifestation d’une “hypernova” (ou collapstar) qui correspond à un effondrement d’une étoile extrêmement massive en trou noir. Le reste de l’émission provient de quasars et de radio-sources (voir Figure 39).

6.7 L’âge de l’Univers

Un certain nombre de contraintes permettent de fixer l’âge ou une limite inférieure à l’âge de l’Univers. Toutes ces méthodes montrent qu’il se situe entre 10 et 20 milliards d’années. Cependant,

les incertitudes demeurent grandes.

6.7.1 Nucléocosmochronologie

Le moyen le plus robuste a été initialement proposé par Hoyle et Fowler en 1960. Il consiste à utiliser la *nucléocosmochronologie* qui détermine l'âge de l'Univers à partir de l'abondance des éléments radioactifs à longue période.

La plupart des noyaux radioactifs de cette catégorie ont été créés par des réactions nucléaires rapides. Ces processus se déroulent principalement dans les supernovae, pendant la phase d'explosion. Donc, étant donné que les supernovae ont pour origine les étoiles massives dont la durée de vie est très courte ($\approx 10^7$ ans), la nucléocosmochronologie permet en principe de déterminer le moment où les étoiles et les galaxies se sont formées.

La nucléocosmochronologie présente l'avantage de pouvoir construire l'histoire de la Terre, du Système Solaire ou de la Galaxie à partir d'échantillons de météorites retrouvées sur Terre. C'est le cas par exemple avec les isotopes d'uranium et de plomb qui permettent de fixer l'âge du Système Solaire, t_s .

L'isotope ^{235}U (uranium) se transforme en ^{207}Pb (plomb) avec un temps de décroissance $\tau_{235} = 10^9$ ans ; l'isotope ^{238}U se transforme en ^{206}Pb avec un temps de décroissance $\tau_{238} = 6.3 \times 10^9$ ans. On a donc :

$$^{235}\text{U}_i + ^{207}\text{Pb}_i = ^{235}\text{U}_0 + ^{207}\text{Pb}_0 = ^{235}\text{U}_0 \exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] + ^{207}\text{Pb}_i , \quad (83)$$

où l'indice “ i ” indique le temps initial et l'indice “ 0 ” l'époque actuelle. De même :

$$^{238}\text{U}_i + ^{206}\text{Pb}_i = ^{238}\text{U}_0 + ^{206}\text{Pb}_0 = ^{238}\text{U}_0 \exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] + ^{206}\text{Pb}_i . \quad (84)$$

Par ailleurs, comme ^{204}Pb n'a pas de progéniteur, $^{204}\text{Pb}_i = ^{204}\text{Pb}_0$. Les rapports d'abondance avec ^{204}Pb sont donc :

$$R_{207} = \frac{^{207}\text{Pb}_0}{^{204}\text{Pb}_0} = \frac{^{207}\text{Pb}_i}{^{204}\text{Pb}_0} + \frac{^{235}\text{U}_0}{^{204}\text{Pb}_0} \left[\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] - 1 \right] , \quad (85)$$

et :

$$R_{206} = \frac{^{206}\text{Pb}_0}{^{204}\text{Pb}_0} = \frac{^{206}\text{Pb}_i}{^{204}\text{Pb}_0} + \frac{^{238}\text{U}_0}{^{204}\text{Pb}_0} \left[\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] - 1 \right] . \quad (86)$$

En mesurant R_{207} et R_{206} dans deux météorites, $m1$ et $m2$, on peut mesurer t_s :

$$\frac{R_{207,m1} - R_{207,m2}}{R_{206,m1} - R_{206,m2}} = \left(\frac{^{235}U_0}{^{238}U_0} \right) \frac{\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{235}}\right] - 1}{\exp\left[\frac{t_s}{\tau_{238}}\right] - 1}. \quad (87)$$

On trouve alors, pour le Système Solaire :

$$t_s = 4.6 \times 10^9 \text{ ans}. \quad (88)$$

Après la formation de la Galaxie, les noyaux radioactifs à longue période se transforment lentement pour atteindre des quantités négligeables au temps T . Entre cette date et le moment de la formation du Système Solaire, il s'écoule une courte période Δ qui s'appelle la période d'isolation. L'âge de la Galaxie est donc :

$$t_G = T + \Delta + t_s. \quad (89)$$

On peut mesurer T et Δ par des méthodes analogues à celle décrite pour t_s . Les noyaux radioactifs à courte durée de vie, comme le ^{129}I (iode) et le ^{244}Pu (plutonium) fixent Δ entre 1 et 2×10^8 ans. Les noyaux à longue durée de vie comme le ^{232}Th (thorium) - ^{238}U (uranium) ou le ^{187}Os (osmium) - ^{187}Re (rhenium) permettent de contraindre l'âge de notre Galaxie de la même façon que pour le Système Solaire. On trouve finalement :

$$t_G \approx (0.6 - 2) \times 10^{10} \text{ ans}. \quad (90)$$

6.7.2 Âge des amas globulaires

L'utilisation des amas globulaires est simple dans son principe. La méthode consiste à établir le diagramme couleur-magnitude (DCM) des étoiles d'un amas globulaire qui est une représentation du diagramme Hertzsprung-Russell (HR) (voir cours *Introduction à l'astrophysique*). Ce diagramme (voir Figure 40) qui illustre l'histoire de la population stellaire de l'amas montre des caractéristiques qui fixent son âge. En particulier la position du décrochage des étoiles de la séquence principale (*turn-off point*) vers la branche des géantes rouges indique la masse des étoiles qui sont en forte évolution et donne un âge relativement précis (voir Figure 41). On peut de cette façon ajuster la totalité du diagramme à des tracés d'évolution stellaire, les *isochrones*. Ces tracés donnent in fine l'âge de l'amas globulaire.

La Figure 42 présente l'histogramme de la distribution des âges possibles de 17 amas globulaires. Il semble acquis qu'il existe une dispersion réelle des âges des amas globulaires, de quelques milliards d'années ($2 - 3 \times 10^9$ ans). Les incertitudes de cette méthode proviennent des modèles d'évolution stellaire et de l'influence de certains paramètres comme la métallicité. Pour le moment, on peut dire que l'âge des amas globulaires, t_{glo} , se trouve dans la fourchette :

$$10.5 \times 10^9 < t_{glo} < 13.5 \times 10^9 \text{ ans}. \quad (91)$$

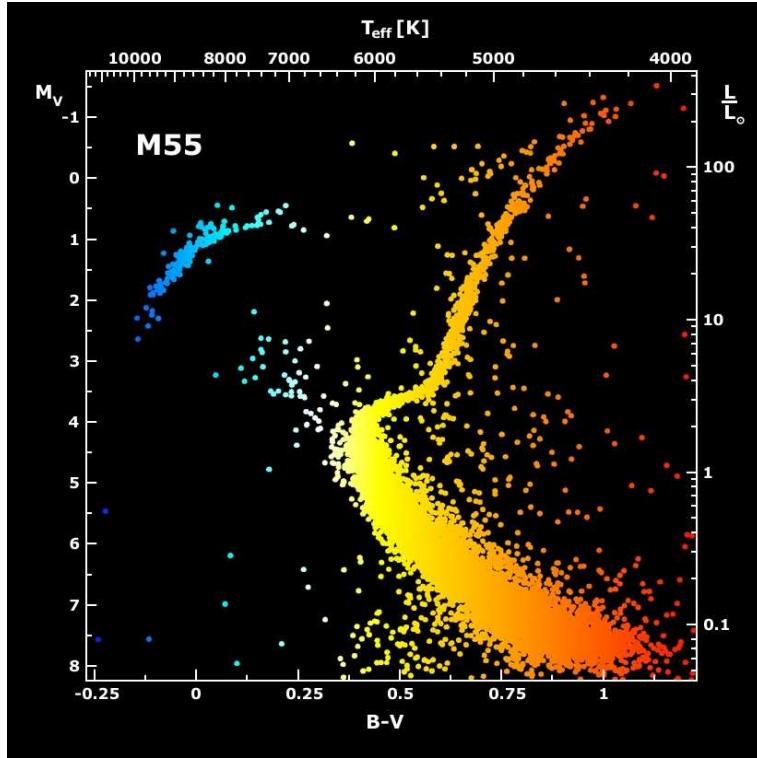


Figure 40: Diagramme couleur-magnitude de l'amas globulaire M55. On remarque très clairement les différentes séquences : la séquence principale (en bas à droite), le turn-off (au milieu), la séquence des blue stragglers (continuation de la séquence principale en-dessus du turn-off), les séquences des sous-géantes et des géantes (en haut à droite), et la branche horizontale (en haut à gauche).

6.7.3 Temps de refroidissement des naines blanches

La séquence d'évolution finale des naines blanches semble relativement simple à déterminer car on n'attend pas de changement de leur structure pendant la phase ultime de refroidissement. Cette propriété, qui résulte du fait que l'équation d'état d'un gaz dégénéré ne dépend pas de sa température, conduit à une relation simple entre la luminosité absolue de la naine blanche en fonction du temps, la masse demeurant constante :

$$L_{NB} \propto M_{NB} t^{-1.5}. \quad (92)$$

On attend donc une coupure assez brusque de la fonction de luminosité des naines blanches qui permet de déterminer leur âge.

Cette méthode a été appliquée sur certains amas globulaires (Figure 43) et aux étoiles du disque de notre galaxie. Pour le disque de la Galaxie, on trouve :

$$t_{Gal} = 9.3 \pm 2.0 \times 10^9 \text{ ans}. \quad (93)$$

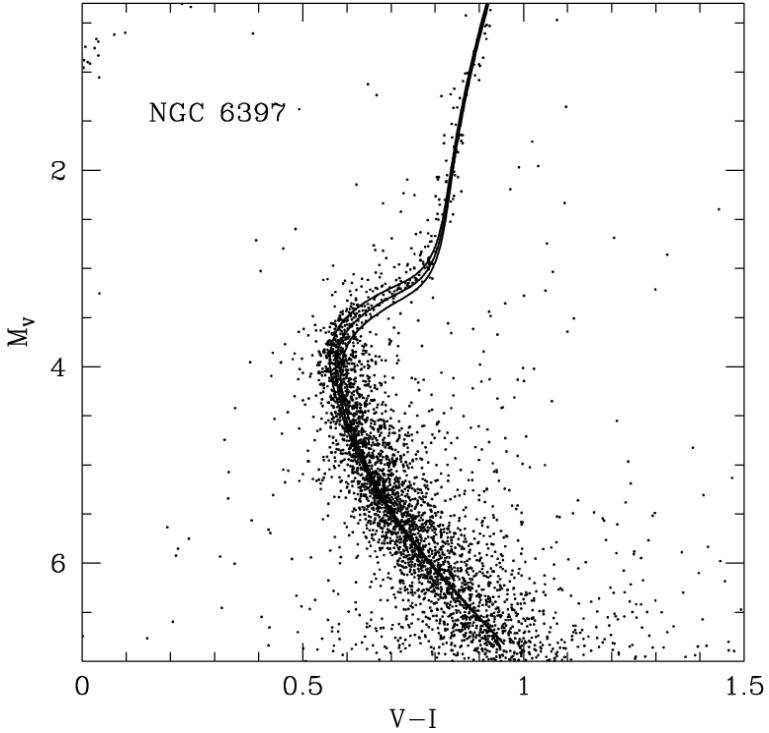


Figure 41: Partie du diagramme couleur-magnitude de l'amas globulaire NGC 6397 montrant le haut de la séquence principale, le turn-off et la séquence des sous-géantes. Le turn-off, point de rebroussement, montre les étoiles qui s'échappent de la séquence principale, ce qui fixe relativement bien l'âge du système. Les trois lignes représentent trois isochrones correspondant à trois métallicités légèrement différentes. On obtient alors trois âges possibles : 12, 15 ou 18 milliards d'années.

6.8 Remarque sur le Paradoxe d'Olbers

Le paradoxe d'Olbers exprime une idée simple : *pourquoi le ciel est-il noir la nuit ?* La première approche mathématique de ce paradoxe est due à Edmund Halley en 1720. De très grands progrès ont été effectués par Jean-Philippe Loys de Cheseaux (oui, près de Lausanne!) en 1744. Enfin, en 1823, Heinrich Olbers reprend le problème, mais avec moins de pénétration que Loys de Cheseaux. Le problème est le suivant : supposons que l'on distribue uniformément dans l'Univers des sources ponctuelles dont la luminosité absolue, L , est identique pour toutes. Le flux apparent reçu de chaque source par un observateur situé à la distance r de la source est $L/(4\pi r^2)$. Si n est la densité numérique des sources, alors le flux total reçu, pour un Univers euclidien et statique serait :

$$L_{tot} = \int_0^\infty 4\pi r^2 n \frac{L}{4\pi r^2} dr , \quad (94)$$

qui diverge à l'infini si la densité n est constante. Le ciel ne devrait donc pas être noir, mais au contraire très brillant. On pourrait imaginer que des poussières soient la source d'une forte extinction, mais celles-ci doivent ré-émettre ce rayonnement en infra-rouge. Le ciel devrait alors être très brillant au basses longueur d'onde, ce qui n'est pas observé.

L'argument contre ce paradoxe est l'âge fini de l'Univers. Il signifie en effet que l'Univers n'a

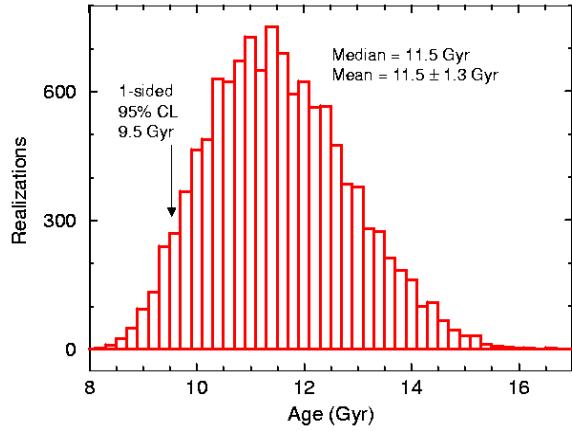


Figure 42: Histogramme de la distribution des âges possibles de 17 amas globulaires. La distribution échantillonne plusieurs modèles d'évolution stellaire ce qui explique le grand nombre de réalisations. L'histogramme illustre bien la diversité des âges possibles suivant le modèle d'évolution stellaire considéré.

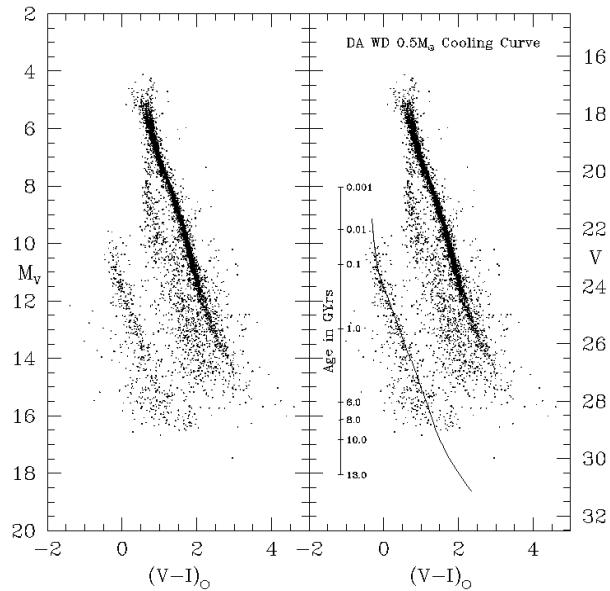


Figure 43: Diagramme couleur-magnitude de l'amas globulaire M4 tracé à partir d'observations du HST. La figure de droite montre la séquence de refroidissement. Elle présente une coupure brusque pour $t = 9 \times 10^9$ ans.

pas pu produire une densité de sources infinie pour produire cette énergie.

Le fond du problème est cependant plus subtil et trouve son origine dans l'expansion de l'Univers. En particulier, l'argument des sources ponctuelles élude le fait que ces sources sont des apports d'énergie qui ionisent le milieu externe et qui provoquent donc un rayonnement par diffusion du milieu ionisé. Ce rayonnement est estimé par sa brillance de surface (car maintenant il ne s'agit plus d'un objet ponctuel mais d'un objet étendu, voire du ciel tout entier). Or la brillance de surface est indépendante de la distance. Donc si l'Univers était fortement ionisé dans le passé, nous devrions être baignés dans ce rayonnement. Ce rayonnement nous pensons qu'il a du exister si le modèle du Big Bang est valide. Le paradoxe d'Olbers exprimé sous cette forme prend une autre dimension. Mais il a une réponse : l'expansion de l'Univers qui refroidit progressivement et qui décale vers le rouge le rayonnement. Son résidu à 2.7 K existe bien, même s'il n'est plus émis dans le domaine visible.

7 Les bases de la cosmologie moderne

La cosmologie physique moderne repose sur :

- une théorie de la gravitation, la relativité générale,
- un certain nombre de postulats qui permettent d'établir des relations théoriques simples entre la courbure de l'Univers et son contenu en matière-énergie : les équations d'Einstein,
- un principe décrivant l'Univers lui-même : le principe cosmologique. C'est ce principe qui permet de définir la métrique de l'Univers et donc de construire des grandeurs associées aux observations.

Ce n'est pas l'objet de ce cours de présenter la relativité générale. Pour ceux que cela intéresse, voir les références bibliographiques.

En relativité restreinte, l'intervalle entre deux événements situés en (ct, x, y, z) et $(ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz)$ est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (95)$$

L'élément ds est invariant par changement de coordonnées. Le chemin parcouru par les photons est simplement défini par $ds = 0$, et celui de toutes particules de matière est tel que $\int_{chemin} ds$ est stationnaire. En l'absence de forces extérieures, les particules suivent une ligne droite.

La relativité générale ne considère plus la gravitation comme une force, mais comme une propriété de l'espace-temps. Celui-ci n'est plus nécessairement plat, mais peut être éventuellement courbé, notamment sous l'action de la gravité. Pour en rendre compte, l'intervalle entre deux événements est défini de façon plus générale sous la forme (nous adoptons la convention d'Einstein où tous les indices répétés signifient une sommation sur l'indice) :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (96)$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique (voir Annexe E), $x^0 = ct$, et x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées d'espace.

Le chemin d'une particule libre est une géodésique définie de la façon suivante :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (97)$$

Les $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sont les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right], \quad (98)$$

et :

$$g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad (\text{avec } g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4) \quad \text{symbole de Kronecker} \quad (99)$$

7.1 Construction des équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont établies à partir de postulats supplémentaires à ceux de la relativité générale et qui sont donc indépendants du principe d'équivalence. En particulier, Einstein souhaitait :

1. établir une relation entre la matière-énergie et la métrique,
2. faire de l'impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ un *tenseur* qui ne contienne que les dérivées premières et secondes de $g_{\mu\nu}$,
3. que sa dérivée covariante soit nulle,
4. qu'aux limites (à définir), $T^\lambda_\mu ; \nu = 0$ se réduise à l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$.

Le moyen le plus simple de satisfaire la condition (4) consiste à construire des équations linéaires en les dérivées secondes de la métrique.

Le tenseur de Riemann-Christoffel, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, et le tenseur d'Einstein, $G_{\mu\nu}$, (voir références bibliographiques) permettent de répondre parfaitement aux postulats d'Einstein. En effet, $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ est le seul tenseur que l'on peut construire à partir des dérivées secondes du tenseur métrique. De plus, le tenseur d'Einstein contient bien les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$ et respecte bien la propriété $G^\lambda_\mu ; \nu = 0$ pour que la dérivée covariante du tenseur impulsion-énergie soit nulle. Einstein a donc postulé la forme de son équation fondamentale :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (100)$$

Le terme $8\pi G/c^4$ garantit qu'aux limites des champs faibles on retrouve bien l'équation de Poisson. On peut noter que, comme $g^\lambda_\mu ; \nu = 0$, on a bien $T^\lambda_\mu ; \nu = 0$.

En fait la forme la plus générale contient une constante additionnelle, la fameuse *constante cosmologique* Λ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (101)$$

7.2 Principe cosmologique

La cosmologie moderne est basée sur l'idée que l'homme n'a pas de position privilégiée et donc que l'Univers doit être partout le même. C'est le *Principe Copernicien*. Ce principe est en fait relié au *Principe Cosmologique* qui postule que :

- Il existe un temps universel. Dans ce cas, l'espace-temps peut toujours être décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle. On peut toujours écrire la métrique sous la forme :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad (102)$$

où dl^2 représente la composante spatiale de la métrique. La coordonnée t est le temps mesuré, c'est-à-dire le temps propre d'un observateur dont la ligne d'Univers est orthogonale aux coordonnées spatiales. Pour un photon, on a par définition $c^2 dt^2 = dl^2$ d'où $ds^2 = 0$. La lumière nous provenant d'une étoile située à 1000 années-lumière atteint nos yeux après 1000 ans de voyage, ayant parcouru d'énormes intervalles dans l'espace et dans le temps, mais l'intervalle dans l'espace-temps est lui égal à zéro.

- La composante spatiale de l'Univers est homogène et isotrope. On peut alors démontrer que dl^2 peut se mettre sous la forme :

$$dl^2 = B(r, t) dx^2 \quad (103)$$

avec :

$$B(r, t) = R^2(t) F(r) \quad (104)$$

où le coefficient de similitude, R , appelé *facteur d'échelle*, ne dépend que du temps. En effet, considérons par exemple un triangle semblable observé aux temps t et t' (voir Figure 44). En vertu du principe d'homogénéité et d'isotropie, le coefficient de similitude doit être indépendant du triangle choisi et de la position du triangle dans l'espace.

Une conséquence immédiate est que les coefficients $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique doivent avoir la même forme à tout instant, à un facteur conforme près, indépendant du temps.

Par ailleurs, il est possible de démontrer que les sections spatiales sont des hyper-surfaces à courbure constante. L'expression la plus générale pour $F(r)$ est :

$$F(r)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \quad \text{avec } k = -1, 0, 1 \quad (105)$$

La seule métrique satisfaisant le principe cosmologique est la métrique suivante, dite de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (106)$$

Alternativement, avec $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$:

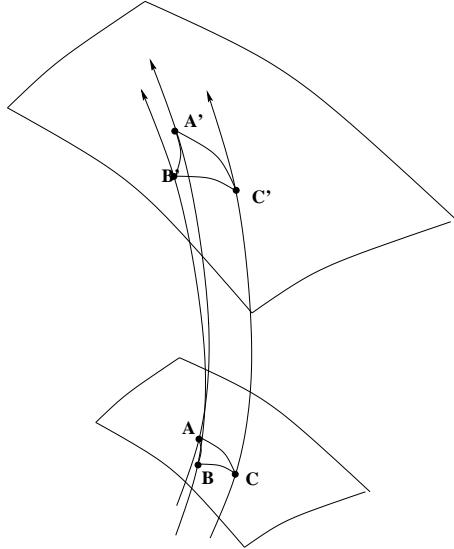


Figure 44: Évolution temporelle d'un triangle sur une hyper-surface $t = Cte$ pour deux coordonnées de temps t et t' . Les deux triangles sont homologues. Les lignes d'Univers sont orthogonales aux hyper-surfaces. Elles ne se croisent donc jamais, ce qui permet de définir un temps universel.

$$\left\{ \begin{array}{ll} k = 0 & dl^2 = R^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ k = 1 & dl^2 = R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) \quad 0 \leq \chi \leq \pi \\ k = -1 & dl^2 = R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = R^2(t) (d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\Omega^2) \quad 0 \leq \chi \leq \infty \end{array} \right. \quad (107)$$

Ces trois solutions génériques sont illustrées sur la Figure 45. Les trois modèles portent les noms suivants : espace hyperbolique ouvert ($k = -1$), espace euclidien plat ouvert ($k = 0$) et espace sphérique fermé ($k = 1$).

A partir de ces solutions on peut calculer le volume correspondant (implicitement $R = R(t)$) :

$$V = R^3(t) \int_0^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (108)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_{k=0} = & \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \\ V_{k=1} = & \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \left[\frac{3 \arcsin(r)}{r^3} - \frac{3 (1 - r^2)^{1/2}}{r^2} \right] \\ V_{k=-1} = & \frac{4\pi(Rr)^3}{3} \left[\frac{3 (1 + r^2)^{1/2}}{r^2} - \frac{3 \text{argsh}(r)}{r^3} \right] \end{array} \right. \quad (109)$$

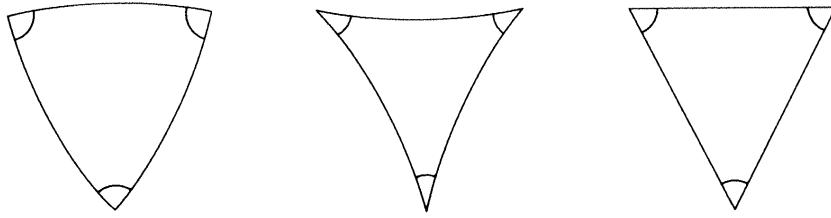


Figure 45: Les triangles dans trois modèles d'espace à géométries différentes : espace sphérique fermé ($k = 1$) avec somme des angles supérieure à 180° , espace hyperbolique ouvert ($k = -1$) avec somme des angles inférieure à 180° et espace euclidien plat ouvert ($k = 0$) avec somme des angles égale à 180° .

L'hypothèse d'un Univers isotrope a une base observationnelle relativement solide. Le rayonnement cosmologique résiduel (CMB) est remarquablement isotrope. Même les fluctuations de températures sont uniformément distribuées dans le ciel, et dans tous les cas elles ne dépassent pas des amplitudes de l'ordre de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$. La distribution des galaxies et des quasars (voir par exemple les Figures 21 et 37) et des radiosources est également remarquablement isotrope.

Les évidences concernant l'homogénéité sont moins nombreuses. La distribution des quasars du récent relevé 2dF (Figure 37) est cependant convaincante. Des données identiques sur les radiosources montrent aussi cette homogénéité et la cartographie à très grande échelle des galaxies du relevé 2dF donne des premiers indices que sur des échelles supérieures à 200 Mpc la distribution est homogène.

On a donc de fortes présomptions qui confortent un des principes essentiels de la cosmologie physique moderne. Il faut cependant noter que l'hypothèse d'un Univers *partout* isotrope (Principe copernicien) implique qu'il est nécessairement homogène. Ceci est illustré sur la Figure 46. L'idée exprimée par le principe copernicien utilisée conjointement avec les évidences observationnelles d'isotropie de l'Univers consolident l'hypothèse qu'il est aussi homogène.

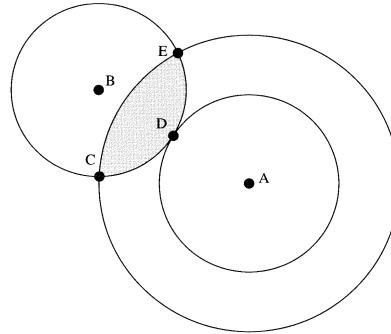


Figure 46: Une justification simple de Peacock (voir dans les références bibliographiques son livre p. 66) qu'un Univers partout isotrope implique qu'il est homogène. Pour l'observateur placé au point B, l'isotropie implique que les points C, D et E possèdent la même densité. Dans ce cas, comme l'observateur B n'est pas privilégié, il doit en être de même pour l'observateur placé au point A. En construisant des sphères de rayon croissant centrées en A, l'aire en gris représente une région homogène qui croît en taille. En utilisant des cercles de plus en plus grands, on montre donc que l'Univers est nécessairement homogène.

Il existe un principe cosmologique fort qui ajoute que l’Univers est immuable dans le temps. C’est en particulier un principe de base des modèles d’Univers statique. Cependant l’hypothèse d’un Univers statique est en contradiction avec certains faits observationnels, comme le paradoxe d’Olbers ou la forme du spectre de corps noir du rayonnement cosmologique fossile. En effet, l’existence de ce rayonnement n’a pas de sens dans le cadre des modèles statiques, sauf s’il est produit par d’hypothétiques poussières. Le spectre prédict dans cette hypothèse n’a pas la forme observée par le satellite COBE. Par la suite nous admettrons le principe cosmologique sans l’hypothèse d’un temps immuable.

7.3 Conséquences du principe cosmologique

7.3.1 Loi de Hubble

La *distance propre*, d_{pr} , d’un point P par rapport à un point P_0 , que l’on prend à l’origine d’un système de coordonnées polaires, est la distance parcourue par un photon (cdt), soit :

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{R(t)dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t)f(r) \quad (110)$$

où $f(r) = \arcsin(r)$, r , $\text{argsh}(r)$ pour $k = +1, 0, -1$, respectivement.

On peut comparer la distance propre au temps t à celle au temps t_0 :

$$d_{pr}(t) = R(t)f(r) \quad ; \quad d_{pr}(t_0) = R(t_0)f(r) \quad (111)$$

et donc :

$$d_{pr}(t_0) = \frac{R(t_0)}{R(t)} d_{pr}(t) \quad (112)$$

Ainsi, la distance propre change avec le temps. Les objets possèdent donc une vitesse radiale :

$$v_r = \frac{d(d_{pr}(t))}{dt} = \dot{R}(t)f(r) = \dot{R}(t)\frac{d_{pr}}{R(t)} = H(t)d_{pr}. \quad (113)$$

C’est la fameuse *loi de Hubble*. La quantité :

$$\dot{R}(t)/R(t) = H(t) \quad (114)$$

est appelée le *paramètre de Hubble* $H(t)$. Elle est appelée *constante de Hubble* $H_0 = H(t_0)$ si évaluée au temps présent.

Cette loi apparaît comme une conséquence directe du principe cosmologique. Comme les figures doivent évoluer de façon similaires (par exemple un triangle), la loi d'expansion (ou de contraction) est nécessairement donnée par la loi de Hubble.

7.3.2 Redshift

Par définition, le décalage spectral vers le rouge (redshift) z s'exprime en fonction de la longueur d'onde observée au point O au temps t_0 et de la longueur d'onde émise au temps t_e sous la forme :

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (115)$$

Comme un photon a pour caractéristique $ds^2 = 0$, en observant le long de la direction radiale r on a donc :

$$0 = ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} . \quad (116)$$

Si une onde est émise par une galaxie au temps t_e , on l'observe au temps t_0 donné par :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = f(r) , \quad (117)$$

où $f(r) = \arcsin(r)$, r , $\text{argsh}(r)$ pour $k = +1, 0, -1$, respectivement.

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} . \quad (118)$$

Soient deux maxima consécutifs de l'onde, l'un émis à t_e et reçu à t_0 et l'autre émis à $t_e + \delta t_e$ et reçu à $t_0 + \delta t_0$. On a :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} \quad (119)$$

soit :

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \Phi(t_0 + \delta t_0) - \Phi(t_e + \delta t_e) - \Phi(t_0) + \Phi(t_e) = \Phi'(t_0)\delta t_0 - \Phi'(t_e)\delta t_e = 0 , \quad (120)$$

où Φ' est la dérivée de Φ , et par conséquent :

$$\frac{\delta t_e}{R(t_e)} - \frac{\delta t_0}{R(t_0)} = 0 . \quad (121)$$

C'est en particulier vrai pour $\delta t = 1/\nu$, où ν est la fréquence de l'onde. Il est donc immédiat que $\nu_e R(t_e) = \nu_0 R(t_0)$, et donc :

$$\frac{R(t_e)}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{\lambda_0} \quad (122)$$

Le redshift exprime donc le rapport des facteurs d'échelle en deux temps donnés :

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)} \quad (123)$$

L'existence du décalage spectral cosmologique est, comme la loi de Hubble, une conséquence directe du principe cosmologique. Dans notre Univers en expansion, le décalage spectral cosmologique est vers le rouge, correspondant à un redshift, mais si notre Univers était en contraction, le décalage spectral cosmologique serait vers le bleu, correspondant à un blueshift.

8 Cosmographie : grandeurs physiques des Univers homogènes et isotropes

8.1 Paramètre de décélération

Le paramètre de Hubble mesure le taux d'expansion à un temps t , mais il varie en fonction du temps selon une loi qui dépend du contenu de l'Univers. En effet :

$$R(t) = R(t_0) + (t - t_0) \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)_{t=t_0} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \left(\frac{d^2R(t)}{dt^2} \right)_{t=t_0} + \dots \quad (124)$$

Ecrivons :

$$\left(\frac{dR(t)}{dt} \right)_{t=t_0} = R_0 \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)_{t=t_0} \quad (125)$$

où $R_0 = R(t_0)$. On a donc, en notant $H_0 = H(t_0)$:

$$\frac{d^2R(t)}{dt^2} = R_0 \left(\frac{d \left(\frac{\dot{R}(t)}{R_0} \right)}{dt} \right) = R_0 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t)}{R_0} \left(\frac{R_0}{\dot{R}(t_0)} \right)^2 = R_0 H_0^2 \frac{\ddot{R}(t) R_0}{\dot{R}(t_0)^2} \quad (126)$$

on a donc :

$$R(t) = R_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right] \quad (127)$$

où la quantité :

$$q_0 = - \frac{\ddot{R}(t_0) R_0}{\dot{R}(t_0)^2} \quad (128)$$

est appelée le *paramètre de décélération*.

8.2 Temps écoulé

Connaissant l'expression du redshift, on peut calculer $1 + z$ et $(t_0 - t)$, le temps écoulé depuis t , pour des petits $H_0(t - t_0)$:

$$1 + z = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{1}{\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots \right]} \quad (129)$$

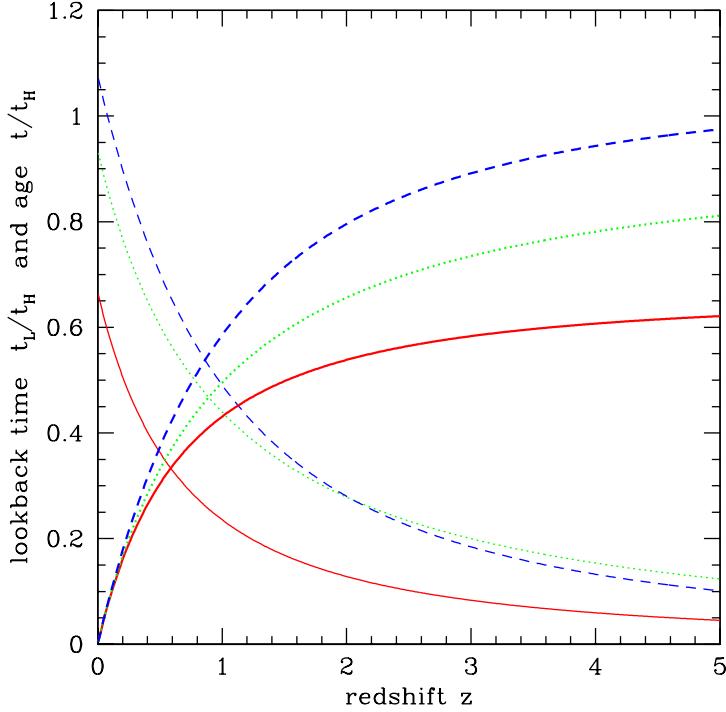


Figure 47: Déterminations des échelles de temps en fonction des paramètres cosmologiques. En traits fins (décroissants), l'âge de l'Univers, en traits épais (croissants), le temps écoulé. Les traits continus rouges sont pour $(\Omega_m = 1.0; \Omega_\Lambda = 0.0)$, les traits pointillés verts sont pour $(\Omega_m = 0.05; \Omega_\Lambda = 0.0)$, les traits hachurés bleus sont pour $(\Omega_m = 0.2; \Omega_\Lambda = 0.8)$. L'unité est le temps de Hubble, $t_H = 9.8 \times 10^9 h^{-1}$ ans.

que l'on développe sous la forme $(1 + u)^{-1}$ avec $u = \left(H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}H_0^2q_0(t - t_0)^2 + \dots \right)$ en conservant tous les termes jusqu'à l'ordre $H_0^2(t - t_0)^2$. On en déduit :

$$1 + z = 1 + H_0(t_0 - t) + H_0^2(t_0 - t)^2 \left[1 + \frac{q_0}{2} \right] + \dots \quad (130)$$

On peut inverser cette expression et déduire le temps écoulé entre le redshift z et le temps présent (voir Figure 47) :

$$t(0) - t(z) = t_0 - t = \frac{-H_0 + H_0 \sqrt{1 + 4z \left(1 + \frac{q_0}{2} \right)}}{2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2} \quad (131)$$

d'où :

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \left[z - z^2 \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) + \dots \right] = f_t(H_0, q_0, z) \quad (132)$$

8.3 Distances et tests cosmologiques classiques

Les distances utilisées en cosmologie sont définies en fonction des grandeurs physiques auxquelles elles sont associées. Il existe quatre définitions de distances importantes du point de vue de la cosmologie physique :

1. **La distance propre** d_{pr} est par définition la distance physique $d(z_1; z_2)$ entre deux redshifts $z_1 < z_2$. Elle est mesurée par le temps de traversée des photons de z_1 à z_2 . C'est donc par définition :

$$d_{pr} = -c \, dt = -c \frac{dR}{\dot{R}} . \quad (133)$$

2. **La distance comobile** d_{com} est par définition la distance sur l'hyper-surface $t = t_0$ entre la source et l'observateur comobile avec l'expansion. C'est donc la distance entre les coordonnées comobiles de la source au redshift z_1 et de l'observateur au redshift z_2 :

$$d_{com} = -c \frac{dt}{R} = -c \frac{dR}{R \dot{R}} . \quad (134)$$

3. **La distance lumineuse** d_L est par définition la distance telle que :

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (135)$$

où l et L sont respectivement les luminosités apparente et absolue de la source observée.

4. **La distance diamètre-angulaire** d_A est par définition l'angle θ sous-tendu par une source de dimension propre D telle que :

$$d_A = \frac{D}{\theta} \quad (136)$$

On peut facilement exprimer la coordonnée comobile r en fonction de H_0 , q_0 et z . En effet :

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \approx r + \mathcal{O}(r^3) \quad (137)$$

Donc au premier ordre :

$$\frac{c}{R_0} \int_{t_e}^{t_0} (1+z)dt = r \quad (138)$$

D'après l'expression de $1+z$ donnée (voir Equation (130)), on a :

$$\frac{c}{R_0} \left[(t_0 - t) + \frac{H_0}{2} (t_0 - t)^2 + \dots \right] = r \quad (139)$$

et compte tenu de l'expression de $(t_0 - t)$ donnée par l'Equation (132), on a finalement :

$$r = \frac{c}{R_0 H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) + \dots \right] = f_r (H_0, q_0, z) \quad (140)$$

8.3.1 Distance lumineuse

La distance lumineuse d_L est définie pour préserver la loi de diminution de la luminosité en fonction de la distance telle qu'elle est définie pour un Univers euclidien :

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (141)$$

où L est la luminosité absolue, c'est-à-dire la puissance émise à la coordonnée comobile r au temps t , et l est le flux reçu par l'observateur à $t = t_0$. La distance lumineuse dépend fortement de la distance comobile et du redshift. En effet, soit un observateur O situé à la coordonnée $r = 0$ et qui reçoit au temps t_0 des photons d'une source située à la coordonnée r_1 .

1. Si la source a une luminosité absolue L , elle émet une énergie $L dt_1$ pendant l'intervalle dt_1 .
2. Cette énergie sera distribuée sur une sphère d'aire $4\pi R_0^2 r_1^2$, mais sera maintenant reçue pendant un intervalle de temps dt_0 plus long :

$$dt_0 = \frac{R_0}{R(t_1)} dt_1 \quad (142)$$

3. Et la densité de flux (qui s'exprime en $\text{erg cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$) est aussi affectée par le décalage vers le rouge d'une quantité $R_0/R(t_1)$.

Par conséquent :

$$4\pi R_0^2 r_1^2 dt_0 l = L dt_1 \frac{1}{1+z} \quad (143)$$

soit :

$$l = \frac{L}{4\pi R_0^2 r_1^2} \frac{1}{(1+z)^2}. \quad (144)$$

Compte tenu de la définition de la distance lumineuse, on a donc :

$$d_L(z) = R_0 r (1+z) = \frac{R_0^2}{R(t)} r \quad (145)$$

Plus précisément, soit $S(\nu_0)$, la *densité de flux de la source*, c'est-à-dire l'énergie reçue par unité de temps, par unité de surface et par unité de fréquence. Soit $N(\nu_1)$, le nombre de photons émis d'énergie $h\nu_1$ dans la bande de fréquence $\Delta\nu_1$ pendant le temps Δt_1 . La luminosité de la source dans la bande ν_1 est donc :

$$L(\nu_1) = \frac{N(\nu_1) h\nu_1}{\Delta t_1 \Delta\nu_1} \quad (146)$$

Supposons que l'énergie reçue de la source soit captée par un collecteur couvrant une aire $\pi\Delta l^2/4$ et que cette aire corresponde à un angle solide d'émission de $\Delta\Omega/4\pi$. L'énergie reçue pendant une durée Δt_0 est donc :

$$S(\nu_0) = \frac{N(\nu_1) \left(\frac{\Delta\Omega}{4\pi} \right)}{\Delta t_0 \Delta\nu_0 \left(\frac{\pi\Delta l^2}{4} \right)} h\nu_0 \quad (147)$$

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_1) \Delta t_1 \Delta\nu_1}{h\nu_1} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{h\nu_0}{\Delta t_0 \Delta\nu_0 \left(\frac{\pi\Delta l^2}{4} \right)} \quad (148)$$

Or :

$$\Delta t_0 \Delta\nu_0 \text{ et } \Delta t_1 \Delta\nu_1 = 1 \quad (149)$$

et par ailleurs, si la source se trouve à une distance propre radiale $D = rR(t_0)$, on a :

$$\Delta l = D\Delta\theta \text{ et } \Delta\Omega = \frac{\pi}{4}\Delta\theta^2 \quad (150)$$

Donc :

$$S(\nu_0) = L(\nu_1) \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{1}{4\pi D^2} = \frac{L(\nu_1)}{4\pi D^2(1+z)} \quad (151)$$

On peut maintenant estimer la luminosité bolométrique :

$$L_{Bol} = L(\nu_1) \Delta\nu_1 = 4\pi D^2(1+z) S(\nu_0) \Delta\nu_1 \quad (152)$$

Soit :

$$L_{Bol} = 4\pi D^2(1+z)^2 S(\nu_0) \Delta\nu_0 = 4\pi D^2(1+z)^2 S_{Bol} \quad (153)$$

et donc :

$$S_{Bol} = \frac{L_{Bol}}{4\pi D^2(1+z)^2} = \frac{L_{Bol}}{4\pi D_L^2} \quad (154)$$

avec $D = rR(t_0)$. Il est intéressant de remarquer que l'on peut aussi écrire :

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_0)}{4\pi D_L^2} \left[\frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right] \quad (155)$$

Dans ce cas, pour une densité de flux monochromatique, le terme :

$$-2.5 \log_{10} \left[\frac{L(\nu_1)}{L(\nu_0)} (1+z) \right] \quad (156)$$

est appelé K -correction.

————— Fin du petit addendum ————

En poursuivant avec les développements au premier ordre de la coordonnée comobile r en fonction de z (voir Equation (140)) on a :

$$d_L = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] = f_{d_L}(H_0, q_0, z) \quad (157)$$

La Figure 48 montre le comportement de la distance lumineuse en fonction du redshift.

8.3.2 Distance diamètre angulaire

A l'instar de la distance lumineuse, la distance diamètre angulaire est construite pour préserver les propriétés de l'espace euclidien pour la variation angulaire d'un objet en fonction de la distance à l'observateur. Elle convertit donc une séparation angulaire observée d'un objet en une dimension physique transverse.

Soit D_{pr} le *diamètre propre* d'une source placée en r au temps t . Si $\Delta\theta$ est l'angle sous-tendu par D_{pr} , alors $D_{pr} = R(t)r\Delta\theta$. Par définition, la distance diamètre angulaire est :

$$d_A = \frac{D_{pr}}{\Delta\theta} = R(t)r \quad (158)$$

La relation entre la distance angulaire et la distance lumineuse est donc :

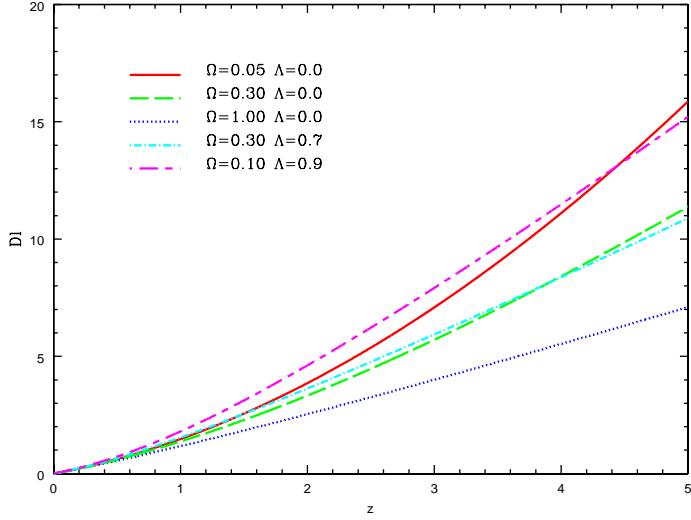


Figure 48: Évolution de la distance lumineuse d_L en fonction du décalage spectral pour 5 modèles cosmologiques différents. L’unité de distance est le rayon de Hubble, $c/H_0 = 3 h^{-1}$ Gpc.

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} \quad (159)$$

La distance diamètre angulaire possède la propriété remarquable de ne pas croître indéfiniment avec le décalage spectral et de diminuer au-delà de $z \approx 1 - 2$ (voir Figure 49). Ainsi, pour certaines cosmologies, les objets les plus lointains ont une dimension angulaire plus grande que les objets proches. Ainsi, pour une cosmologie sans constante cosmologique, l’angle sous-tendu, θ , par un objet dont la dimension est D_{pr} est donc :

$$\theta = \left(\frac{D_{pr} H_0}{c} \right) \frac{q_0^2 (1+z)^2}{q_0 z + (q_0 - 1) (\sqrt{1+2q_0 z} - 1)} = f_\theta (H_0, q_0, z) \quad (160)$$

8.3.3 Relation magnitude-redshift

Par définition le module de distance est la différence entre la magnitude apparente, m , et la magnitude absolue, M d’un objet. Il s’exprime en fonction de la distance lumineuse :

$$m - M = -5 + 5 \log(d_L) \quad (161)$$

où d_L est en parsec. Comme on connaît la relation entre d_L et r on peut donc exprimer le module de distance en fonction de z et q_0 . Dans le cas général, on peut montrer que dans une cosmologie avec une constante cosmologique nulle, la distance lumineuse est donnée par la *relation de Mattig* et le module de distance s’écrit (pour une constante cosmologique nulle) :

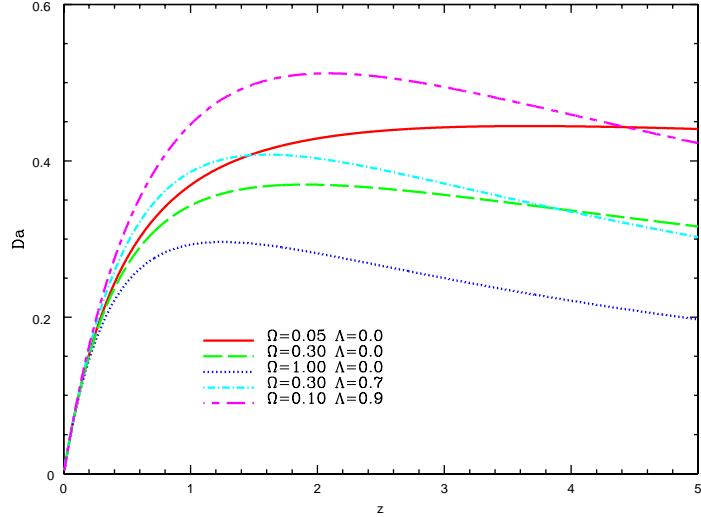


Figure 49: Évolution de la distance diamètre angulaire d_A en fonction du décalage spectral pour les mêmes modèles cosmologiques que la Figure 48. Pour la plupart, la distance décroît au-delà d'un redshift de 1, ce qui signifie que l'objet a une dimension angulaire apparente qui croît. Distance diamètre angulaire en fonction du décalage spectral pour 5 modèles cosmologiques. L'unité des distance est le rayon de Hubble, $c/H_0 = 3 h^{-1}$ Gpc.

$$m - M = -5 - 5 \log H_0 + 5 \log \left[\frac{1}{q_0^2} \left[q_0 z + (q_0 - 1) \left[\sqrt{2q_0 z + 1} - 1 \right] \right] \right]. \quad (162)$$

Pour des petits z , on peut utiliser l'équation (157) et dans ce cas :

$$m - M = -5 + 5 \log \left[\frac{10^6 c z}{H_0} \right] + 5 \log \left[1 + \frac{1}{2} (1 - q_0) z \right]. \quad (163)$$

Le terme 10^6 provient de la transformation des megaparsecs (cz/H_0) en parsecs. On a donc $m - M = f(H_0, q_0, z)$ avec :

$$m - M = 25 - 5 \log \left[H_0 (\text{km sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1}) \right] + 5 \log \left[cz (\text{km sec}^{-1}) \right] + 1.086(1 - q_0)z + \dots \quad (164)$$

On remarque que la magnitude apparente est sensible au paramètre de décélération q_0 . On peut donc en principe construire des diagrammes $m(z)$ pour évaluer la valeur de ce paramètre cosmologique.

8.3.4 Relation Comptage-magnitude

On peut déterminer comment varie le nombre $N(> l)$ de sources de luminosité apparente supérieure à l en fonction de l . Pour un Univers euclidien, si toutes les galaxies ont même luminosité absolue

L et si les objets sont distribués uniformément avec une densité n_0 on a simplement :

$$N(l) = \frac{4}{3}\pi n_0 d_L^3 \quad (165)$$

Comme :

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (166)$$

on a :

$$N(l) \propto l^{-3/2} . \quad (167)$$

Puisque la magnitude apparente est donnée par une expression de la forme $m = -2.5\log l + K$, on a donc une relation linéaire simple entre la densité numérique de galaxies et la magnitude apparente :

$$\log N(l) = 0.6m + K' \quad (168)$$

soit :

$$\alpha = \frac{d \log N(l)}{dm} = 0.6 \quad (169)$$

qui peut être comparée directement aux observations (voir Section 6.1.5, Figures 11, 12 et 13). C'est une propriété caractéristique des modèles euclidiens. En fait, on peut démontrer qu'elle reste exacte lorsque les galaxies n'ont pas toute la même luminosité absolue. La pente des comptages des galaxies permet donc, en principe, de tester si notre Univers est localement euclidien.

Dans le cas plus général, on a :

$$N(l) = 4\pi \int_0^r n [t(r')] R [t(r')]^3 \frac{r'^2}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' \quad (170)$$

où $t(r')$ est le temps auquel une source placée en r' a émis un signal qui arrive maintenant à l'observateur à t_0 .

Si les galaxies ne sont ni créées ni détruites pendant l'intervalle $t(r) < t < t_0$, alors $nR^3 = n_0R_0^3$ et donc :

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \int_0^r \frac{r'^2}{\sqrt{1 - kr'^2}} dr' \quad (171)$$

En développant en série de Taylor, on a, au premier ordre :

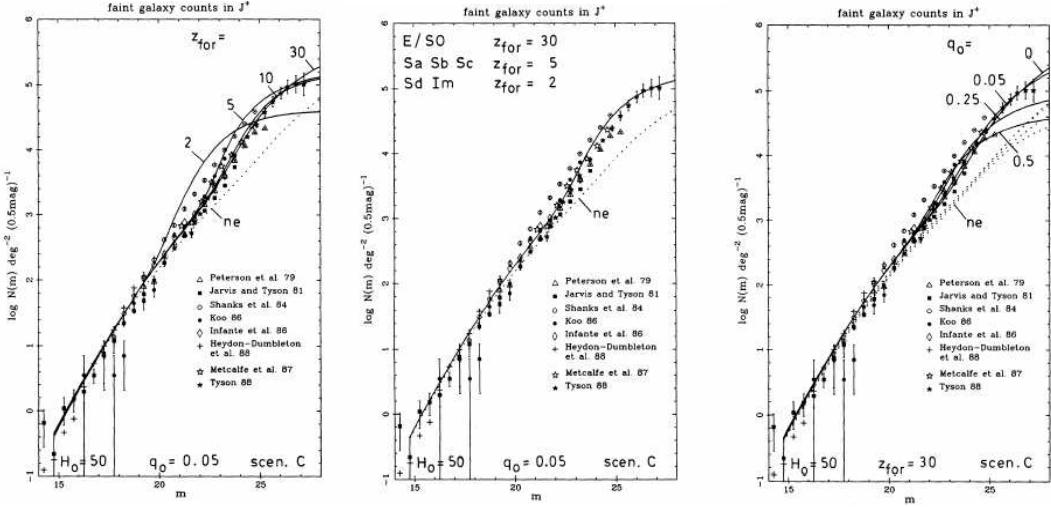


Figure 50: Comptage de galaxies par intervalle de magnitude. Les points sont les mesures obtenues par différentes observations. Les lignes continues représentent des scénarios d’Univers avec évolution et les lignes pointillées les mêmes modèles sans évolution. De gauche à droite : effet du redshift de formation, effet du flux UV, effet de q_0 . Les modèles présentés ne parviennent pas à reproduire correctement les comptages. Les effets cosmologiques et les effets d’évolution stellaire se combinent. La complexité des phénomènes conduit à une dégénérescence qu’il est difficile de lever, ce qui limite l’intérêt de ce type d’observation pour tester les modèles d’Univers. D’après Guideroni et Rocca-Volmerange 1990, A&A 227, 362.

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \left[\frac{r^3}{3} + \frac{1}{10} kr^5 + \dots \right] \quad (172)$$

En utilisant l’expression de r (Equation (140)) on obtient :

$$N(l) = 4\pi n_0 R_0^3 \frac{r^3}{3} \left[1 + \frac{3}{10} kr^2 \right] \approx 4\pi n_0 R_0^3 z^3 \left[1 + \frac{z}{2} (1 + q_0) \right]^3 \quad (173)$$

soit :

$$\log N(l) = 3\log z - 0.651(1 + q_0)z + K' = f(q_0, z) \quad (174)$$

qui permet donc en principe de déterminer q_0 à partir des comptages des galaxies (voir Figure 50).

8.3.5 “Dimming factor” : effet de brillance de surface

Considérons la brillance de surface d'une source dans un Univers sans expansion. Soit B_{int} sa brillance de surface intrinsèque. On suppose par simplicité qu'elle est uniforme (constante avec λ) et correspond à la brillance de surface bolométrique. B_{int} est la puissance émise par une source par unité de surface et unité d'angle solide. La luminosité intrinsèque L d'une section de la source d'aire S est $L_{int} = 2\pi S B_{int}$.

Soit un pinceau d'angle solide Ω d'une source à la distance euclidienne d , on a :

$$L = 2\pi B_{int} S = 2\pi B_{int} \Omega d^2 . \quad (175)$$

Le flux sera :

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (176)$$

et donc :

$$\frac{f}{\Omega} = B_{int} \quad (177)$$

Ainsi donc, le flux mesuré par l'observateur est constant et vaut ΩB_{int} quelle que soit la distance de l'objet. C'est une propriété particulière des Univers sans expansion : la luminosité apparente décroît comme $1/d^2$ alors que l'angle solide couvre une aire de la source qui croît comme d^2 . Les deux effets se compensent donc exactement.

Dans le cas d'un Univers en expansion ce n'est plus vrai. En effet, on a :

$$L = 2\pi B_{int} \Omega d_A^2 = 2\pi f d_L^2 \quad (178)$$

car il faut effectivement prendre d'une part la distance luminosité pour exprimer le flux et d'autre part la distance angulaire pour exprimer l'aire de la source couverte. On a dans ce cas :

$$B_{obs} = \frac{f}{\Omega} = B_{int} \left(\frac{d_A}{d_L} \right)^2 \quad (179)$$

et il est immédiat que :

$$B_{obs} = \frac{B_{int}}{(1+z)^4}. \quad (180)$$

C'est le “dimming factor” ou facteur d'atténuation cosmologique. Cet effet a été utilisé comme un test cosmologique (test de Tolman). Il a un effet très important sur la visibilité des galaxies à très grands redshifts.

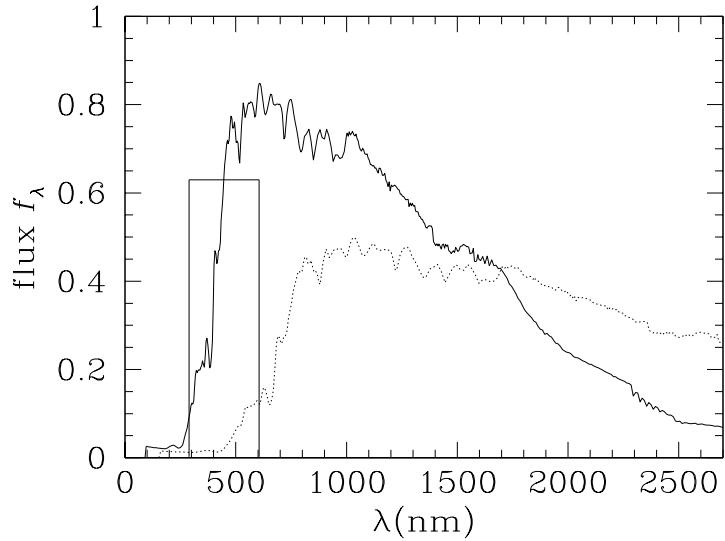


Figure 51: Évolution de la distribution spectrale d'énergie d'une galaxie en fonction du redshift. Le spectre en trait plein et celui en pointillé représentent la même galaxie à $z = 0$ (trait plein) et à $z = 0.7$ (trait pointillé). Le décalage spectral du flux est nettement visible. Le rectangle noir représente la position et la transmission d'un filtre fictif. Il est clair que le filtre ne voit pas le même domaine spectral et que la comparaison du flux dans ce filtre n'a de sens qu'après avoir corrigé de l'effet du décalage spectral, ce qui implique de connaître le spectre intrinsèque de l'objet.

8.3.6 K-correction

L'évaluation, dans un filtre donné, des magnitudes d'une galaxie à un redshift $z > 0$ et d'une galaxie à un redshift $z = 0$, ainsi que la comparaison de ces magnitudes doivent tenir compte du décalage spectral du flux. Il est donc nécessaire de calibrer préalablement le flux de la galaxie au redshift $z > 0$. Cette correction qui porte le nom de *K-correction* est un pur problème observationnel associé au fait que l'on n'observe qu'à travers un filtre de bande passante finie. La luminosité bolométrique a donc une K-correction nulle.

Pour un filtre F son expression est :

$$K_F(t_e, z) = 2.5 \log(1 + z) - 2.5 \log \left[\frac{\left[\int_0^{\infty} E_e \left(t_e, \frac{\lambda}{1+z} \right) T_F(\lambda) d\lambda \right]}{\left[\int_0^{\infty} E_e(t_e, \lambda) T_F(\lambda) d\lambda \right]} \right] \quad (181)$$

où T_F est la transmission du filtre F et E_e est le flux émis par la source. La correction est illustrée sur la Figure 51 et se comprend simplement en supposant un spectre de galaxies plat. Dans ce cas, le flux reçu dans le filtre à un redshift z et centré sur la longueur d'onde λ_0 est donc émis par la source à la longueur d'onde $\lambda_0/(1+z)$. D'où le premier terme de la K-correction. Par ailleurs, le spectre est dilaté par l'expansion et donc l'énergie reçue dans tout le filtre provient en fait d'un intervalle spectral contracté de $(1+z)$. D'où l'expression de l'émission au dénominateur du second terme.

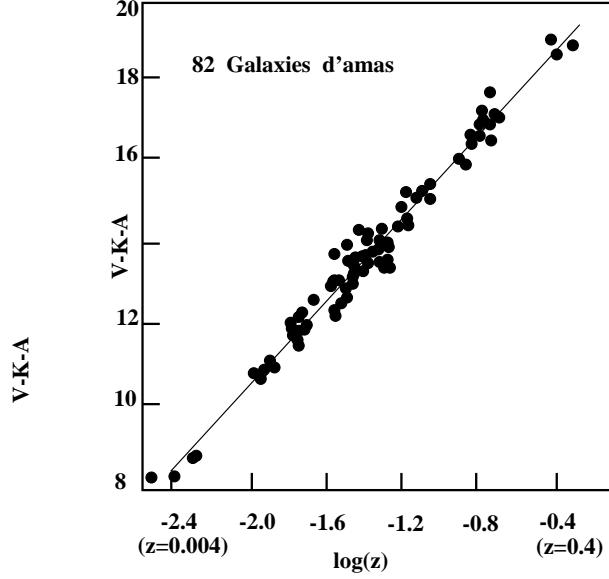


Figure 52: Test classique : évolution de la magnitude des galaxies en fonction du redshift (c'est un diagramme de Hubble, donc). Il s'agit de 82 galaxies d'amas dont la magnitude est corrigée de la K-correction. Le domaine de redshift est trop faible pour que des effets cosmologiques ou d'évolution soient visibles.

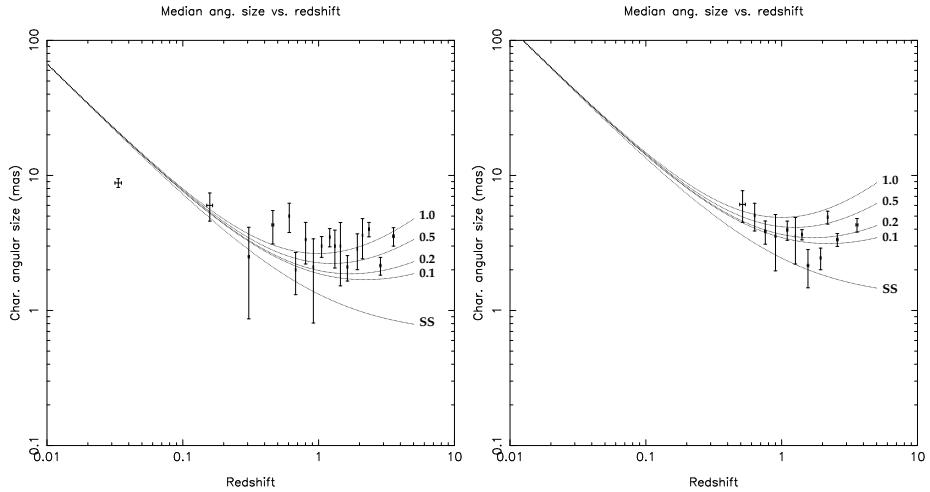


Figure 53: Test classique : évolution du diamètre angulaire d'un échantillon de radio-galaxies compactes (droite) et étendues (gauche) en fonction du redshift. Les effets cosmologiques commencent à devenir sensible à partir de $z = 0.5$. Les courbes continues sont des prédictions de certains modèles cosmologiques, ayant tous $\Omega_\Lambda = 0$. SS indique le modèle statique (Steady State). On voit qu'il difficile de séparer les trois valeurs du paramètre d'accélération $q_0 = 1.0, 0.5, 0.0$ montrés sur la figure. Cependant, cette figure permet de rejeter tout modèle avec $q_0 \gg 1$, ce qui est déjà une information importante. D'après Kellermann et al. 1999, A&A 342, 378.

8.3.7 Les tests cosmologiques classiques

Les expressions des distances, volumes, magnitudes et comptages vues précédemment ont servi de base pour l'interprétation des premiers relevés observationnels cosmologiques. Au cours des années 1960-1970 sont apparus les premiers “tests classiques” utilisant les propriétés décrites dans les sections précédentes. Ils avaient pour objectifs de mesurer le paramètre q_0 ou le paramètre de densité Ω_0 :

1. relation décalage spectral-magnitude apparente (voir Figure 52),
2. relation volume-comptage des galaxies,
3. âge des galaxies lointaines,
4. relation décalage spectral-diamètre apparent (voir Figure 53),
5. relation brillance de surface-redshift (test de Tolman ; test de l'expansion),
6. conservation du nombre de galaxies (test de Loh et Spillar).

Ces tests n'ont en fait rien donné de significatif pour une raison qui nous semble aujourd’hui évidente : à cause des évolutions stellaire et dynamique, les galaxies évoluent en nombre, en taille et en luminosité. Ces effets sont au moins aussi importants que les effets cosmologiques.

9 Les modèles d'Univers de Friedmann

Le principe cosmologique implique que la métrique de l'espace-temps est celle de Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (182)$$

Les composantes temporelles et spatiales sont donc :

$$x^0 = ct ; \quad x^1 = r ; \quad x^2 = \theta ; \quad x^3 = \phi \quad (183)$$

et on peut donc calculer toutes les composantes des tenseurs métriques, de Ricci, d'Einstein et les symboles de Christoffel. Ces éléments sont indispensables pour établir les équations de Friedmann.

9.1 Abrégé des composantes non-nulles des tenseurs d'intérêt cosmologique

Dans les quatre sous-sections suivantes, on donne les composantes non nulles de ces tenseurs. Ces sous-sections n'ont pour but que de vous montrer comment on parvient aux équations de Friedmann et de servir de guide pour ceux d'entre vous qui souhaiteraient calculer tous ces coefficients. Voir Annexe E et Exercices pour plus de détails.

9.1.1 Éléments non-nuls du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$

$$\begin{cases} g_{00} = 1 & g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2} \\ g_{22} = -R^2(t)r^2 & g_{33} = -R^2(t)r^2 \sin^2 \theta \\ g^{00} = 1 & g^{11} = -\frac{1 - kr^2}{R^2(t)} \\ g^{22} = -\frac{1}{R^2(t)r^2} & g^{33} = -\frac{1}{R^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (184)$$

et :

$$(-g)^{1/2} = \frac{R^2(t)r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (185)$$

On utilise la relation : $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$.

9.1.2 Éléments non-nuls des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

On part des relations suivantes :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) ; \quad (186)$$

où $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ et sachant que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \\ \Gamma_{11}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)}{c(1-kr^2)} \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)r^2}{c} \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{R(t)\dot{R}(t)r^2 \sin^2\theta}{c} \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2) \\ \Gamma_{33}^1 = -r(1-kr^2) \sin^2\theta \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta \quad \Gamma_{23}^3 = \cot\theta \end{array} \right. \quad (187)$$

9.1.3 Composantes du tenseur de Ricci ou de courbure $R_{\mu\nu}$

On utilise la définition :

$$R_{\mu\nu} = \left(\partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \right) (-1) , \quad (188)$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0^0 = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = g^{00} R_{00} \\ R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{2\dot{R}(t)^2 + 2kc^2}{R(t)^2} \right) \end{array} \right. \quad (189)$$

D'où l'on déduit la courbure scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$:

$$R = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} \right) \quad (190)$$

9.1.4 Composantes du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$

Définies par $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = R_1^1 - \frac{1}{2}R + \Lambda = -\frac{1}{c^2} \left(2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} \right) + \Lambda \\ G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}R + \Lambda = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{R}(t)^2 + kc^2}{R(t)^2} \right) + \Lambda \end{cases} \quad (191)$$

9.2 Équations de Friedmann sans constante cosmologique

A partir des éléments résumés ci-dessus et de l'équation d'Einstein, on retrouve les équations de Friedmann :

$$\begin{cases} 2\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{c^2}T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2}T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2}T_3^3 & (a) \\ \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2}T_0^0 & (b) \end{cases} \quad (192)$$

Il reste à déterminer les composantes du tenseur impulsions-énergie. Tout d'abord, pour des raisons de symétrie conformément à l'hypothèse d'isotropie, ce tenseur doit avoir tous les éléments non-diagonaux nuls.

Dans le cas le plus simple, d'un fluide parfait, on peut montrer que ce tenseur s'exprime uniquement à partir de la densité d'énergie, ρ , et de la pression, p , du fluide. C'est une matrice diagonale de composantes :

$$g_{jk}T^{ik} = T_j^i = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (193)$$

Pour des raisons de clarté nous écrirons désormais $R(t) = R$, $\dot{R}(t) = \dot{R}$ et $\ddot{R}(t) = \ddot{R}$. Sachant que :

$$\frac{d}{dt} \left[R \left(\dot{R}^2 + kc^2 \right) \right] = \dot{R} \left[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R} \right] \quad (194)$$

et que d'après l'Equation (192-a) et l'Equation (193) :

$$[\dot{R}^2 + kc^2 + 2R\ddot{R}] = -\frac{8\pi G}{c^2}R^2 p \quad (195)$$

alors :

$$\frac{1}{\dot{R}} \frac{d}{dt} [R(\dot{R}^2 + kc^2)] = -\frac{8\pi G}{c^2}R^2 p \quad (196)$$

et d'après l'Equation (192-b) :

$$(\dot{R}^2 + kc^2) = \frac{8\pi G}{3c^2}R^2 \rho c^2 \quad (197)$$

on a donc :

$$\frac{1}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left[\frac{8\pi G}{3c^2}R^3 \rho c^2 \right] = -\frac{8\pi G}{c^2}R^2 p \quad (198)$$

$$\frac{d}{dt} [8\pi G R^3 \rho] = \dots = -3\dot{R} \frac{8\pi G}{c^2} R^2 p \quad (199)$$

d'où l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{d}{dR} [\rho c^2 R^3] + 3pR^2 = 0 \quad (200)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho c^2 R^3) + p \frac{d}{dt} R^3 = 0 \quad (201)$$

$$d(\rho c^2 R^3) + pdR^3 = 0 \quad (202)$$

Le sens de cette équation est relativement simple : $d[\rho c^2 R^3]$ exprime une variation d'énergie totale. $3pR^2 dR$ exprime un travail. Par conséquent l'équation (200) exprime la variation d'énergie pendant l'expansion adiabatique de l'Univers. Il faut noter que c'est une conséquence directe des lois de conservation contenues implicitement dans les équations d'Einstein.

9.2.1 Interprétation Newtonienne des équations de Friedmann

La signification physique des équations de Friedmann est relativement simple si l'on tente d'en fournir une vision Newtonienne classique.

Considérons une sphère de rayon l , de masse totale m dont la distribution de matière soit homogène, isotrope et de densité ρ . L'accélération subie par une masse unité située à une distance l du centre de la sphère est :

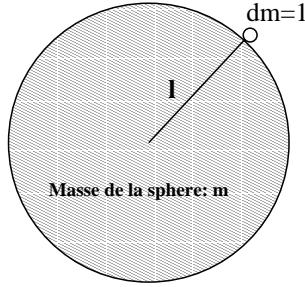


Figure 54: Sphère de masse totale m de densité homogène et isotrope. On s'intéresse à l'accélération de l'élément de masse unité dm .

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{Gm}{l^2} = -\frac{G}{l^2} \frac{4}{3}\pi l^3 \rho \quad (203)$$

En multipliant cette équation par $dl/dt = \dot{l}$ on trouve immédiatement que :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{l}^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{Gm}{l} \right) \quad (204)$$

et donc par intégration :

$$\frac{1}{2} \dot{l}^2 = \frac{Gm}{l} + C \quad (205)$$

qui exprime la conservation de l'énergie par unité de masse, la constante C devant être proportionnelle à l'énergie totale.

Par ailleurs, le principe cosmologique conduit à la loi d'échelle :

$$\frac{l}{R} = \frac{l_0}{R_0} \implies l = l_0 \frac{R}{R_0} \quad (206)$$

En substituant dans l'Equation (205) on trouve :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} \dot{R} \right)^2 = G \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{l_0}{R_0} R \right)^2 + C \quad (207)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{R}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 \quad (208)$$

avec :

$$C = -\frac{K}{2} \left(\frac{l_0}{R_0} c \right)^2 \quad (209)$$

qui est la forme des équations de Friedmann. Il est clair que l'on peut toujours définir l_0 pour que la constante K prenne les valeurs $-1, 0, 1$. Pour $K = 1$, $C < 1$ et l'énergie totale est négative. Un effondrement de la sphère est possible. Pour $K = -1$, $C > 1$ et l'expansion ne peut pas être stoppée. Enfin pour $K = 0$, l'énergie totale est nulle, on atteint exactement la vitesse d'évasion. L'expansion s'arrête pour $t \rightarrow \infty$.

9.2.2 Propriétés générales des modèles de Friedmann

Les équations de Friedmann en fonction des paramètres cosmologiques Prenons le cas d'un fluide parfait que l'on peut décrire par une équation d'état de la forme $p = \omega \rho c^2$ avec $0 \leq \omega \leq 1$. Le cas $\omega = 1/3$ correspond à un Univers dominé par le rayonnement. Celui $\omega = 0$ est un Univers à pression nulle, appelé "Univers poussiére", dominé par la matière, dans lequel les interactions entre particules sont seulement gravitationnelles. Il décrit les propriétés du fluide actuel dominé par la matière et la gravitation.

Dans ce cas, en utilisant les équations (192-b et 195) on peut écrire les équations de Friedmann sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 & (b) \end{cases} \quad (210)$$

En divisant l'équation (210-b) par R_0^2 on obtient :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (211)$$

On définit :

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (212)$$

qui est la densité critique de l'Univers aujourd'hui. On peut calculer sa valeur en fonction de H_0 :

$$\rho_{0c} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{gcm}^{-3} = 1.1 \times 10^4 h^2 \text{eVcm}^{-3} \quad (213)$$

Avec ce nouveau paramètre, l'Equation (211) devient :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \rho \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (214)$$

L'équation (214) est valide quel que soit t et en particulier pour $t = t_0$. Elle s'écrit alors :

$$\left(\frac{\dot{R}_0}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}}\rho_0 \left(\frac{R_0}{R_0}\right)^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (215)$$

soit :

$$H_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}\right] = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (216)$$

En égalisant les membres de droite des équations (211) et (216) on obtient finalement :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad (217)$$

où on définit le paramètre de densité :

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \quad (218)$$

Évolution de la densité en fonction du redshift Supposons que $p = \omega\rho c^2$ et ω constant au cours du temps. Comme (voir l'Equation (200)) :

$$d(\rho R^3) = -\frac{3p}{c^2} R^2 dR \quad (219)$$

on a donc :

$$R^3 d\rho + 3R^2 \rho dR = -3\rho\omega R^2 dR \quad (220)$$

soit :

$$d[\rho R^{3(1+\omega)}] = 0 \implies \rho R^{3(1+\omega)} = Cte = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)} \quad (221)$$

Ainsi :

- pour un Univers “poussière” dominé par la matière, $\omega = 0$, on a :

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3, \quad (222)$$

soit : $\rho = \rho_0(1+z)^3$,

- et pour un *Univers dominé par le rayonnement*, $\omega = 1/3$, on a :

$$\rho R^4 = \rho_0 R_0^4 , \quad (223)$$

soit : $\rho = \rho_0(1+z)^4$.

Dans le cadre d'un Univers en expansion qui serait passé par une phase chaude dominée par le rayonnement, il est donc inéluctable que l'on assiste à une transition vers une phase dominée par la matière (poussière), puisque la densité de photons décroît plus vite que celle de la matière.

Existence d'une singularité : Big Bang Les modèles d'Univers avec $-1/3 \leq \omega \leq 1$ possède une singularité à $t = 0$ où la densité diverge. En effet, compte tenu de (221) on a :

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} . \quad (224)$$

Par ailleurs, on peut transformer l'Equation (217) et la mettre sous la forme :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \rho \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0) , \quad (225)$$

soit, en utilisant (224) :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1 - \Omega_0) , \quad (226)$$

et donc, on peut décrire l'évolution du paramètre de Hubble :

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} + (1 - \Omega_0) \right] \quad (227)$$

Supposons qu'à $t = t_0$ l'Univers soit en expansion : $\dot{R} > 0$. D'après l'Equation (210-a) $\ddot{R} < 0$ quel que soit t si $\rho + 3p/c^2 > 0$, c'est-à-dire $1 + 3\omega > 0$ (car $\rho > 0$!).

$R(t)$ est donc convexe, et $R/\dot{R} = 1/H$ est une échelle de temps caractéristique. Le Big Bang est donc inévitable dans tous les modèles d'Univers homogènes et isotropes constitués de fluides d'équation d'état $p = \omega \rho c^2$ avec $\omega > -1/3$ (voir Figure 55).

Il faut bien souligner que le Big Bang n'est pas dû à un effet de pression mais aux conditions initiales décrivant un Univers homogène et isotrope.

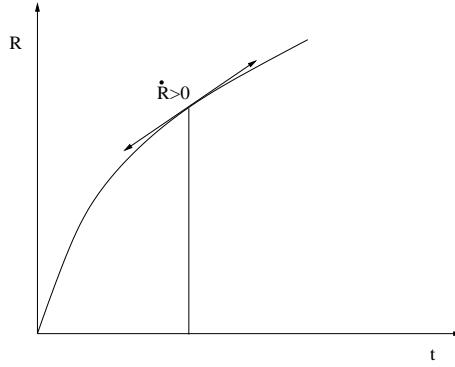


Figure 55: Illustration de la singularité initiale inévitable dans le cas des fluides considérés dans ce cours pour les Univers homogènes et isotropes.

9.3 Cas du modèle Einstein-de Sitter : $\Omega = 1$

Pour $\Omega = 1$, l'Equation (227) se réduit à :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1+3\omega} = H_0^2 (1+z)^{1+3\omega}; \quad (228)$$

soit :

$$R^{\frac{1+3\omega}{2}} \dot{R} = H_0 R_0 R_0^{\frac{1+3\omega}{2}} \quad (229)$$

donc :

$$R^{\frac{3}{2}(1+\omega)-1} \dot{R} = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{d}{dt} \left[R^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \right] = H_0 R_0^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \quad (230)$$

qui s'intègre immédiatement. L'évolution temporelle du facteur d'expansion est donc :

$$R(t) = \left[\frac{3H_0(1+\omega)}{2} \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}} R_0 t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (231)$$

où :

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\omega)H_0} \quad (232)$$

Connaissant l'évolution de $R(t)$ et sachant que $\rho R^{3(1+\omega)} = \rho_0 R_0^{3(1+\omega)}$ on peut déterminer l'évolution de tous les paramètres du modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t) = \frac{2}{3(1+\omega)t} = H_0 \frac{t_0}{t} = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}(1+\omega)} \\ q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{1+3\omega}{2} = q_0 \\ \rho = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G (1+\omega)^2 t^2} \\ \rho_{0c} t_0^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} t_0^2 = \frac{1}{6\pi G (1+\omega)^2} \end{array} \right. \quad (233)$$

Il est important de remarquer la différence entre les deux cas ci-dessous car ce sont les deux modèles de référence en cosmologie. Les comportements de la croissance du facteur d'expansion illustrent bien les deux grandes époques de l'évolution de notre Univers.

9.3.1 Cas du modèle dominé par le rayonnement : $\omega = 1/3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \\ t = t_0 (1+z)^{-2} \\ H = \frac{1}{2t} = H_0 (1+z)^2 \\ q_0 = 1 \\ t_{0c} = t_0 = \frac{1}{2H_0} \end{array} \right. \quad (234)$$

9.3.2 Cas du modèle dominé par la matière (poussière) : $\omega = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \\ R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \\ t = t_0 (1+z)^{-3/2} \\ H = \frac{2}{3t} = H_0 (1+z)^{3/2} \\ q_0 = \frac{1}{2} \\ t_{0c} = t_0 = \frac{2}{3H_0} \end{array} \right. \quad (235)$$

9.4 Cas des modèles courbes : $\Omega \neq 1$

Exprimons l'Equation (227) en fonction du redshift :

$$H(t)^2 = H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_0 (1+z)^{(1+3\omega)} + (1-\Omega_0) \right]. \quad (236)$$

Il existe donc un intervalle de temps (période) durant lequel le terme $1 - \Omega_0$ peut être négligé. Elle correspond au cas où :

$$\frac{R_0}{R} = 1+z \gg \left| \frac{1}{\Omega_0} - 1 \right|^{\frac{1}{1+3\omega}} = \frac{R_0}{R^*} = 1+z^* \quad (237)$$

et donc pendant la période initiale $0 \leq R \leq R^*$ le comportement de l'Univers est décrit par une évolution relativement simple de $H(t)$:

$$H^2 \approx H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(1+\omega)} = H_0^2 \Omega_0 (1+z)^{3(1+\omega)} \quad (238)$$

Ce comportement est tout à fait analogue au cas Einstein-de Sitter en substituant $H_0 \Omega_0$ à H_0 . Voir l'Equation (233). Par conséquent pendant la phase initiale d'expansion, tous ces modèles ont un comportement identique. Voir Figure 56.

10 Description des 3 modèles standards

10.1 Cas des modèles dominés par la matière (poussière) $\omega = 0$

L'Equation (227) peut s'écrire simplement :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right) + 1 - \Omega_0 \right] \quad (239)$$

Posons $x = R/R_0$:

$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}} \quad (240)$$

En prenant comme conditions initiales $t = 0$, $R(t = 0) = 0$, on a donc :

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}} \quad (241)$$

L'âge de l'Univers est donc :

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}} \quad (242)$$

Ce qui signifie que pour $\Omega > 0$, $t < 1/H_0$.

10.1.1 Modèle euclidien : $k = 0$, $\Omega = 1$, $q = 1/2$

On a $\Omega = 1$, i.e., $\rho = \rho_c$ (densité critique) et donc de l'Equation (241) on a :

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \sqrt{x} dx \quad (243)$$

L'âge de l'Univers est $t_0 = 2/(3H_0)$, soit approximativement 10^{10} ans.

10.1.2 Modèle elliptique ou sphérique (fermé) $k = 1$, $\Omega > 1$, $q > 1/2$

On a $\Omega > 1$, $\rho_0 > \rho_c$.

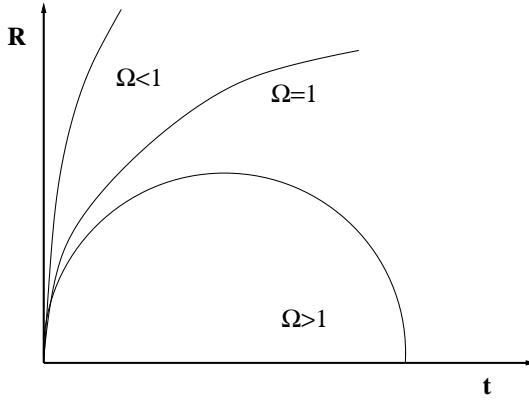


Figure 56: Évolution du facteur d'échelle pour les trois types de modèles d'Univers. A l'origine les trois modèles fusionnent ce qui conduit à un comportement identique à $t = 0$.

Posons :

$$1 - \cos\theta = 2 \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} x \quad ; \quad \sin\theta d\theta = 2 \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} dx \quad (244)$$

De l'Equation (241) on a :

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\Omega_0 - 1) \left[-1 + \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)x} \right]}} \quad (245)$$

et donc :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \left[-1 + \frac{2}{1 - \cos\theta} \right]^{-1/2} \sin\theta d\theta \quad (246)$$

Avec $u = -\cos\theta$, on obtient :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} du \quad (247)$$

soit :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\arcsin \left[u - \sqrt{1-u^2} \right] \right] \quad (248)$$

D'où les expressions de t et du facteur d'expansion x :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} [\theta - \sin\theta] \quad (249)$$

$$x = \frac{R}{R_0} = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} [1 - \cos\theta] \quad (250)$$

qui est la courbe paramétrique d'une cycloïde. Voir Figure 56. Les points caractéristiques sont :

$$\theta = 0 \rightarrow R = 0 \quad (251)$$

$$\theta = \pi \rightarrow R = R_{max} = R_0 \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad \text{pour} \quad t_{max} = \frac{\pi \Omega_0}{2H_0 (\Omega_0 - 1)^{3/2}} \quad (252)$$

$$\theta = 2\pi \rightarrow R = 0 \quad \text{pour} \quad t = 2t_{max} \quad (253)$$

L'âge de l'Univers est alors :

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\arccos \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_0} (\Omega_0 - 1)^{1/2} \right] < \frac{2}{3H_0} \quad (254)$$

A titre d'exemple, pour $\Omega = 2$ et $H_0 = 100$ on a $t_0 \approx 6 \times 10^9$ ans et le maximum d'expansion se produit à :

$$t_{max} \approx 3.2 \times 10^{10} \text{ ans} . \quad (255)$$

10.1.3 Modèle hyperbolique (ouvert) $k = -1$, $\Omega < 1$, $0 < q < 1/2$

On a $\Omega < 1$, $\rho_0 < \rho_c$. On établit les mêmes équations que précédemment en substituant $i\varphi = \theta$ à θ . On trouve alors :

$$t = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} [\operatorname{sh}\varphi - \varphi] \quad (256)$$

et :

$$R = \frac{R_0}{2} \frac{\Omega_o}{(1 - \Omega_0)} [\operatorname{ch}\varphi - 1] \quad (257)$$

et l'âge de l'Univers s'écrit donc :

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{(1 - \Omega_0)} \left[1 - \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{1/2}} \operatorname{argch} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) \right] > \frac{2}{3H_0} \quad (258)$$

10.2 Cas des modèles dominés par le rayonnement (radiatifs) $\omega = 1/3$

Dans ce cas, de l'Equation (227), on a :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_r \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 + (1 - \Omega_r) \right] \quad (259)$$

où $\Omega_r = \Omega$ pendant la période radiative.

Il faut noter que le terme (R_0/R) est maintenant au carré. Dans ce cas, on a :

$$R = R_0 \left(2H_0 \Omega_r^{1/2} t \right)^{1/2} \left[1 + \frac{1 - \Omega_r}{2\Omega_r^{1/2}} H_0 t \right]^{1/2} \quad (260)$$

11 Modèles avec une composante d'énergie sombre

11.1 Modèles à constante cosmologique

L'introduction de la constante cosmologique dans les équations d'Einstein ajoute un terme supplémentaire dans les équations de Friedmann (210-a,b) :

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 & (b) \end{cases} \quad (261)$$

On peut d'ores et déjà prédire ses effets potentiels sur le facteur d'expansion en remarquant qu'elle s'apparente, dans l'Equation (262), à un terme de pression négative . En effet, on peut formuler les équations précédentes de la façon suivante :

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\rho + \frac{3}{c^2} \left(p - \frac{\Lambda c^4}{12\pi G} \right) \right] R & (a) \\ \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \right) R^2 & (b) \end{cases} \quad (262)$$

Pour certaines valeurs de Λ on doit donc s'attendre à une expansion renforcée, même pour des modèles d'Univers à densité de matière sous-critique.

On utilise plutôt la constante cosmologique réduite qui intervient dans le terme de courbure :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} . \quad (263)$$

On constate immédiatement que Ω_Λ est la racine carré de l'inverse d'une longueur. L'échelle caractéristique est fixée naturellement pour :

$$\Omega_\Lambda \approx 1 \implies L \approx \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{c}{H_0} \approx 1.7 h^{-1} Gpc . \quad (264)$$

Cette distance fixe l'échelle à partir de laquelle la densité d'énergie du vide devrait contribuer de façon significative à la géométrie de l'espace-temps. La courbure de l'Univers est donc constituée d'un terme de plus :

$$\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \quad (265)$$

avec :

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 R^2} \quad \Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad (266)$$

et le paramètre de décélération d'un Univers à pression nulle devient :

$$q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda . \quad (267)$$

L'introduction d'une constante cosmologique affecte la dynamique de l'Univers. En particulier l'évolution du facteur d'échelle s'écrit :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2 \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda \right] , \quad (268)$$

où le paramètre de densité $\Omega_m = \Omega(t=0)$ est maintenant clairement identifié comme la contribution matérielle à la courbure de l'Univers. En effectuant les changements de variable $([R(t); \dot{R}(t)] \rightarrow [z; t])$ on peut exprimer le temps écoulé entre z et $z=0$:

$$t(0) - t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{1+z} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda}} \quad (269)$$

d'où l'on déduit l'expression de $H(z)$:

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda} . \quad (270)$$

qui montre comment l'âge de l'Univers dépend de la constante cosmologique. De la même façon, la coordonnée radiale de la métrique peut être calculée :

$$r(z) = \text{sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z \left[(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda \right]^{-1/2} dz \right] \quad (271)$$

ou, en posant l'intégrale égale à $\chi(z)$:

$$r(z) = \text{sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \chi(z) \right] , \quad (272)$$

avec :

$$\begin{cases} \text{sinn}(x) = \text{sh}(x) & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda > 0 \\ \text{sinn}(x) = x & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda = 0 \\ \text{sinn}(x) = \sin(x) & \text{si } 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda < 0 \end{cases} \quad (273)$$

Le volume $V(z)$ est alors :

$$V(z) = \frac{1}{2H_0^3} \left[\frac{\operatorname{sinn} [2|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}] \chi(z)}{|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} - \chi(z) \right] \quad (274)$$

Les distances angulaire et luminosité sont donc aussi modifiées :

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 |1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2}} \operatorname{sinn} \left[|1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z [(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz \right] \quad (275)$$

On s'attend donc à des prédictions différentes des modèles standards (sans constante cosmologique) sur tous les observables : magnitudes apparentes, comptages de galaxies, évolution de la fraction d'amas de galaxies, champs de vitesse à grande échelle, fluctuations des anisotropies du fond diffus cosmologique. La Figure 57 illustre la multitude de modèles qu'engendre l'introduction ou non d'une constante cosmologique.

11.2 Cas général des modèles à courbure nulle

Pour un fluide composé de plusieurs composantes de densité ρ_i , on peut écrire en toute généralité :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{R^2} . \quad (276)$$

Dans le cas d'un Univers plat, $k = 0$:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{H_0^2}{\rho_{0c}} \sum_i \rho_i , \quad (277)$$

où ρ_{0c} est la densité critique au temps $t = t_0$. Or, d'après l'équation d'état d'un fluide parfait, on sait que pour chaque composante i du gaz on a :

$$\rho_i = \rho_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)} . \quad (278)$$

Ainsi, les composantes sont toutes caractérisées par une équation d'état $\omega = p/\rho$. La Table 1 liste quelques unes de ces composantes.

L'évolution de $H(t)$ est alors :

$$\left(\frac{H(z)}{H_0} \right)^2 = \sum_i \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}} (1+z)^{3(1+\omega_i)} \quad (279)$$

donc :

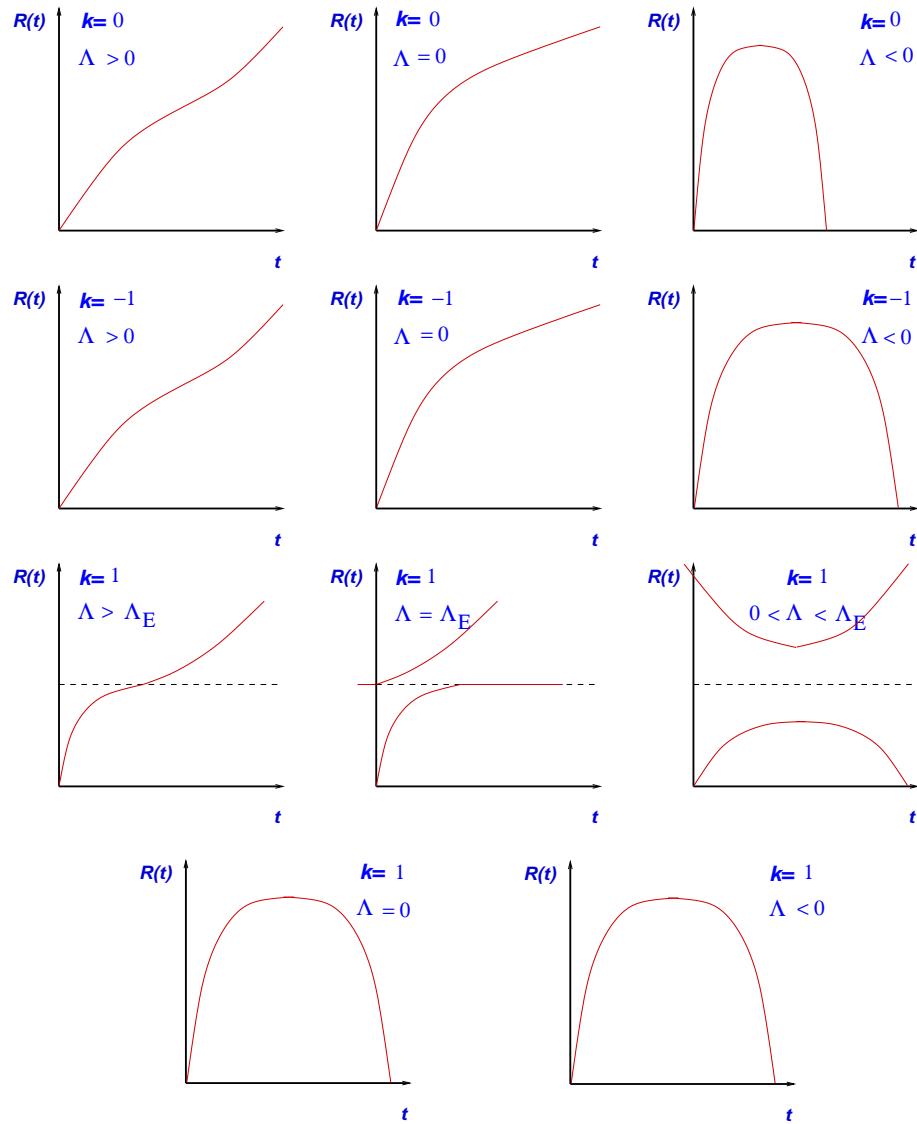


Figure 57: Tableau récapitulatif des modèles cosmologiques homogènes et isotropes en fonction de la valeur de la courbure, k et de la constante cosmologique, Λ (Ω_Λ). Λ_E correspond à la valeur critique d'Einstein permettant de construire un Univers statique.

Composante	Equation d'état	$(\rho + 3p/c^2)$	ρ
Matière non relativiste	$p = 0$	> 0	$\rho \propto R^{-3}$
Matière relativiste (γ, ν)	$p = \frac{1}{3}\rho c^2$	> 0	$\rho \propto R^{-4}$
Vide	$p = -\rho c^2$	< 0	$\rho \propto Cte$
Murs de domaine	$p = -\frac{2}{3}\rho c^2$	< 0	$\rho \propto R^{-1}$
Cordes cosmiques	$p = -\frac{1}{3}\rho c^2$	$= 0$	$\rho \propto R^{-2}$
Milieu avec $v_{son} = c$	$p = \rho c^2$	> 0	$\rho \propto R^{-6}$

Table 1: Equation d'état suivant la composante matière-énergie considérée

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)} . \quad (280)$$

et donc la dynamique de l'Univers peut être exprimée en fonction de $H(z)$ et des contributions à la densité de la matière (m), des photons (γ) (éventuellement des neutrinos) et d'une composante homogène sans fluctuation (X) :

$$\left(\frac{H(z)}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_{0\gamma} (1+z)^4 + \Omega_{0X} (1+z)^{3(1+\omega_X)} . \quad (281)$$

De même, on peut donner l'expression générale du paramètre de décélération. D'après les équations d'Einstein on a :

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_m + \sum_i \frac{3p_i}{c^2}\right) \quad (282)$$

L'équation d'état permet de distinguer 3 régimes :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \begin{cases} < 0 & \text{si } p/\rho c^2 > -1/3 \text{ gravitation attractive} \\ = 0 & \text{si } p/\rho c^2 = -1/3 \text{ gravitation nulle} \\ > 0 & \text{si } p/\rho c^2 < -1/3 \text{ gravitation répulsive} \end{cases} \quad (283)$$

De la même façon que pour $H(z)$ on peut exprimer la dérivée seconde de R en fonction du redshift et des diverses contributions à la densité :

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{H_0^2}{2\rho_{0c}} \left(\rho_m + \sum_i 3\omega_i \rho_i\right) \quad (284)$$

soit :

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\frac{H_0^2}{2} \left(\Omega_{0m} (1+z)^3 + 3 \sum_i \omega_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}\right). \quad (285)$$

Le paramètre de décélération actuel est donc :

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} = \left[\frac{\Omega_{0m}}{2} + \frac{3}{2} \sum_i \omega_i \Omega_{0i}\right] \quad (286)$$

et à un redshift quelconque il vaut :

$$q(z) = -\frac{\ddot{R}}{RH(z)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{0m} (1+z)^3 + 3 \sum_i \omega_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}{\Omega_{0m} (1+z)^3 + \sum_i \Omega_{0i} (1+z)^{3(1+\omega_i)}}. \quad (287)$$

L'accélération de l'Univers est donc contrôlée par le signe des ω_i du numérateur.

Le temps écoulé est déduit immédiatement sachant que $R = R_0/(1+z)$, avec $\dot{R} = dR/dt$:

$$t(z) = \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z') H(z')} \quad (288)$$

12 Analyse rétrospective de quelques faits observationnels

12.1 Expression de la distance angulaire des modèles de Friedmann

On peut maintenant étendre les calculs détaillés en Section 8 dans l'approximation des petits z , mais cette fois pour toute valeur de z et pour les trois cosmologies standards en explicitant le rôle de Ω_0 . La coordonnée radiale $r(t)$ est donnée par :

$$f(r) = \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{cdR}{R\dot{R}} . \quad (289)$$

En substituant aux termes R_i l'expression $R_0(1+z_i)^{-1}$ et à \dot{R} les expressions calculées avec les équations précédentes, notamment l'Equation (227), on trouve :

$$f(r) = \frac{c}{R_0 H_0} \int_{\frac{1}{(1+z)}}^1 \left[1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x} \right]^{1/2} \frac{dx}{x} \quad (290)$$

soit :

$$r = \frac{c}{H_0 R_0 \Omega_0^2 (1+z)} \left[2\Omega_0 z + (2\Omega_0 - 4) \left(\sqrt{1 + \Omega_0 z} - 1 \right) \right] \quad (291)$$

d'où l'on déduit la distance angulaire :

$$d_A = R_0 r(z) (1+z)^{-1} = \frac{c}{H_0} \frac{r(z)}{(1+z)} \quad (292)$$

$$d_A(z) = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2 (1+z)^2} \left[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) \left(\sqrt{1 + \Omega_0 z} - 1 \right) \right] . \quad (293)$$

Il est facile de retrouver les expressions (136-140) pour les petits z à partir de ces calculs. On peut noter aussi que lorsque $z \gg 1$ on a :

$$d_A(z) \approx \frac{2c}{H_0 \Omega_0 z} . \quad (294)$$

12.2 L'horizon

L'âge fini de l'Univers et la vitesse finie de la lumière, impliquent qu'il existe une distance maximale parcourue par un photon depuis l'origine de l'Univers jusqu'à un temps t . Cette distance est appelée *l'horizon* ; c'est une quantité très importante puisqu'elle définit en particulier la taille de l'Univers observable. En fait, on différencie deux types d'horizon : l'horizon “particule” et l'horizon “événement”.

12.2.1 L'horizon “particule”

Cet horizon définit la distance propre limite contenant l'univers observable. Pour cela on calcule la coordonnée radial r_H correspondant à un redshift $z \rightarrow \infty$. La distance propre limite est donc :

$$R_H = R_0 \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (295)$$

A titre d'exemple, pour un Univers sans constante cosmologique :

$$\begin{cases} R_H = 2 \frac{c}{H_0} & k = 0 \ (\Omega_0 = 1) \\ R_H = 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \arcsin \left(\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right)^{1/2} & k = 1 \ (\Omega_0 > 1) \\ R_H = 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \operatorname{argsh} \left(\frac{1 - \Omega_0}{\Omega_0} \right)^{1/2} & k = -1 \ (\Omega_0 < 1) \end{cases} \quad (296)$$

L'existence d'une valeur finie de R_H , appelé *rayon de l'horizon*, exprime le fait que l'Univers a effectivement un horizon “particule”. Tous phénomènes de distance radiale $r_{max} > r_H$ est inobservable à nous aujourd'hui.

12.2.2 L'horizon ”événement”

Alors que l'horizon particule détermine quels événements du passé nous sont aujourd'hui accessibles, l'horizon ”événement” détermine si un événement qui se produit en un point de l'Univers aujourd'hui (disons en $r = r_1$, $t = t_0$) nous sera un jour accessible dans le futur (disons en $r = 0$ $t = t_L$). Pour un photon se propageant depuis $t = t_0$ on a donc :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (297)$$

Il se trouve que l'intégrale de gauche peut converger pour $t_1 \rightarrow \infty$. Pour cette limite cela signifie qu'il existe une distance radiale limite $r_1 = r_H$. En d'autres termes, on ne peut jamais avoir $r_1 > r_H$ et donc tout événement se produisant en $r_1 > r_H$ ne sera *jamais* visible pour un observateur en $r = 0$. Cette limite est appelée l'horizon ”événement”. Cet horizon dépend de la façon dont se déroule l'expansion (dépend donc du modèle considéré) et n'existe pas nécessairement.

12.2.3 Le problème de l'horizon

Le *problème de l'horizon* peut s'exprimer ainsi. A la surface de dernière diffusion (voir la Section 14 sur l'histoire thermique de l'Univers), la taille de l'horizon correspond à celle attendue à $z = 1000$ dans un Univers dominé par le rayonnement. On peut facilement la calculer pour tous les modèles d'Univers et en déduire aussi la dimension angulaire dans le ciel, θ_H :

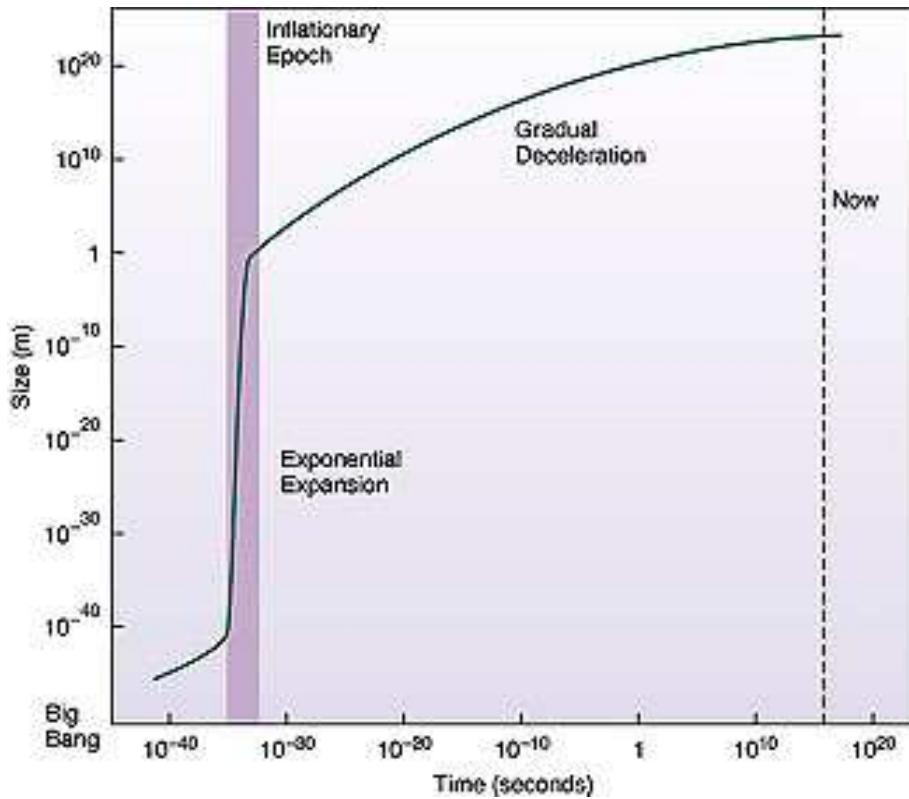


Figure 58: Représentation schématique de l’énorme expansion de l’Univers durant la période dite d’inflation. Alan Guth fut le premier à réaliser en 1980 que l’énergie du vide a existé dans un état de pression négative qui a induit une accélération phénoménale de l’expansion de l’Univers, qui résoud trois problèmes importants de la cosmologie: (i) la rareté des monopôles, (ii) le problème de la platitude de la géométrie de l’Univers, (iii) le problème de l’horizon et de la causalité. Tout modèle d’Univers qui expérimente une forte accélération de son expansion est connu par le nom de modèle “inflationnaire” ou avec “inflation”.

$$\theta_H = \frac{d_H(t)}{d_A} \quad (298)$$

où d_A vaut $\frac{2c}{zH_0\Omega_0}$ (cas où $\Omega z \gg 1$). On a donc :

$$\theta_H = 1.8 \Omega_0^{1/2} \text{deg.} \quad (299)$$

Par conséquent on ne peut pas avoir d’événements ayant des liens causaux sur des échelles angulaires supérieures à 2 degrés. Le problème est donc de comprendre pourquoi le fond diffus cosmologique est isotrope sur tout le ciel et que les fluctuations n’excèdent nulle part des variations relatives de température supérieures à 10^{-5} .

Ce problème est résolu dans les *modèles d’inflation* qui proposent une phase d’expansion exponentielle de l’univers, pendant une fraction de seconde, durant les phases primordiales de l’Univers. Voir Figure 58.

12.3 Le problème de la platitude

Connaissant la relation entre Ω et H , on peut exprimer l'évolution temporelle de Ω . D'une part :

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \quad (300)$$

et d'autre part :

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda} \quad (301)$$

Prenons par exemple le cas d'un modèle avec $[k=0 ; \Omega_\Lambda > 0]$. Il est facile de montrer à partir de (300) et (301) que :

$$\Omega = \frac{\Omega_0 (1+z)^3}{\Omega_0 (1+z)^3 + 1 - \Omega_0} \quad (302)$$

Par conséquent, Ω était nécessairement très proche de l'unité à grand redshift. La Figure 59 illustre clairement le problème: avec une valeur de Ω étant actuellement de l'ordre de 0.1 ; Ω ; 2.0, il a fallu que, une seconde après le Big Bang, Ω ne diffère pas de plus de 10^{-15} . Il s'agit là d'un ajustement incroyablement précis.

En inversant l'Equation (302), on peut se rendre compte à quel point c'est critique : si $\Omega = 0.998$ à $z = 1500$, alors $\Omega_0 = 1.5 \times 10^{-7}$, ce qui est évidemment totalement irréaliste. De même, si $\Omega > 1$ à $z = 1500$, alors $\Omega_0 < 0$!

Ce constat, qui n'est pas particulier aux modèles d'Univers à courbure nulle et constante cosmologique, exprime le *problème de la platitude* : pourquoi la valeur actuelle de Ω était-elle si proche de l'unité ?

12.4 Comptage en fonction du redshift

Soit dN le nombre de galaxies dans un volume dV :

$$dN = n(z)dV, \quad (303)$$

où $n(z)$ est la densité comobile. Si l'on suppose que le nombre de galaxies est conservé, alors $n(z) = n_0 (1+z)^3$. Le nombre de galaxies observées dans l'intervalle de redshift dz , dans un angle solide $\delta\Omega$ est donc :

$$\frac{dN}{dz} = n(z) d_A^2 \frac{dl \delta\Omega}{dz}. \quad (304)$$

Or :

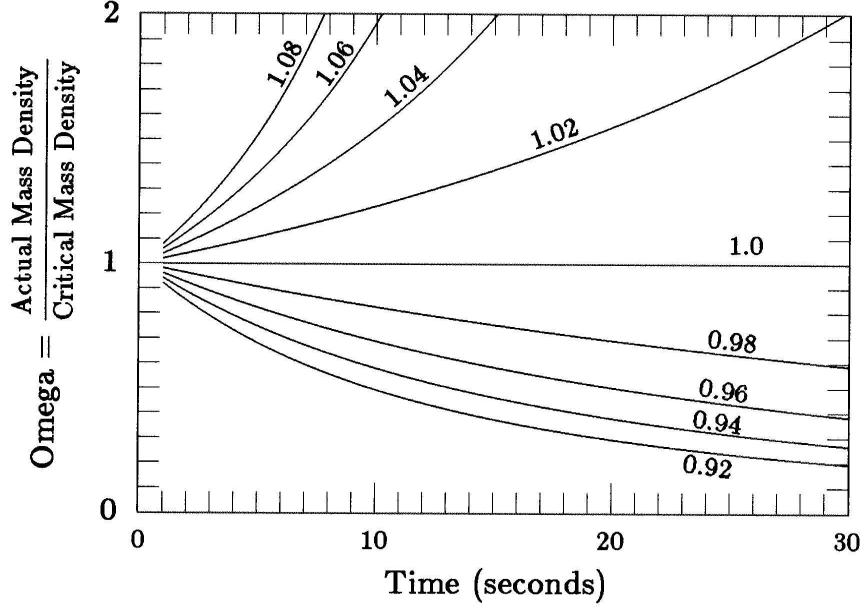


Figure 59: Evolution de Ω durant les 30 premières secondes après le Big Bang. Les courbes commencent 1 seconde après le Big Bang. Chaque courbe illustre une valeur initiale différente de Ω , valeur indiquée sur chaque courbe.

$$\frac{dl}{dz} = c \frac{dt}{dz} = c \frac{1}{R} \frac{dR}{dz} = \frac{c}{H(z)(1+z)} . \quad (305)$$

Sachant que :

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda} \quad (306)$$

et que :

$$d_A = \frac{c(1+z)^{-1}}{H_0 |1-\Omega_m-\Omega_\Lambda|^{1/2}} \text{sinn} \left[|1-\Omega_m-\Omega_\Lambda|^{1/2} \int_0^z [(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda]^{-1/2} dz \right] \quad (307)$$

on peut alors prédire les comptages des galaxies en fonction des modèles cosmologiques et les comparer notamment aux grands relevés spectroscopiques.

- Cas $k = 0, \Omega_\Lambda = 0$:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{4c^3 n_0 \delta\Omega}{H_0^3} \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3}{(1+z)^{5/2}} \quad (308)$$

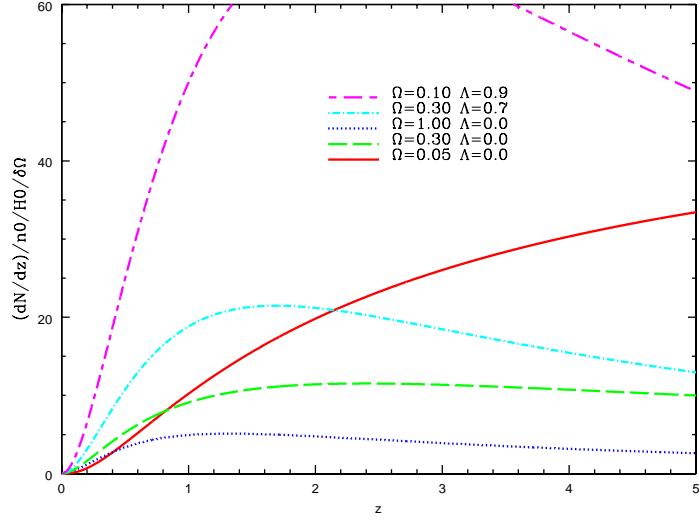


Figure 60: Comptage des galaxies par élément de redshift en fonction du modèle cosmologique.

- Cas $\Omega_m = 0.1, \Omega_\Lambda = 0$:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{4c^3 n_0 \delta\Omega}{H_0^3} \frac{[\Omega_m z + (\Omega_m - 2)(\sqrt{1 + \Omega_m z} - 1)]^2}{\Omega_m^4 (1+z)^3 \sqrt{1 + \Omega_m z}}. \quad (309)$$

La Figure 60 montre les prédictions pour cinq modèles cosmologiques ($c = 1$).

12.5 Profondeur optique

Par définition la profondeur optique τ est définie par :

$$\tau = \int n(z) \sigma(z) dl, \quad (310)$$

où $n(z)$ est la densité numérique comobile de particules et $\sigma(z)$ la section efficace comobile. Dans le cas d'un Univers dominé par la matière, les Equations (305) et (306) de la section précédente nous permettent d'exprimer τ en fonction du redshift :

$$\tau(z) = \int n(z) \sigma(z) \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} \frac{dz}{1+z}. \quad (311)$$

Applications :

- Cas de la diffusion Thomson dans un milieu ionisé :

Dans ce cas, la conservation de la densité comobile d'électrons implique que :

$$n_e(z) = n_{e,0} (1+z)^3 . \quad (312)$$

Or :

$$n_{e,0} = \frac{\rho_0}{m_p} = \frac{\rho_{0,c} \Omega_0}{m_p} , \quad (313)$$

où m_p est la masse du proton et $\rho_{0,c}$ la densité critique actuelle. Donc :

$$\tau(z) = \frac{\rho_{0,c} \Omega_0 \sigma_T c}{m_p H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda}} (1+z)^2 dz . \quad (314)$$

Par exemple, pour un Univers avec ($\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0$) :

$$\tau(z) = 0.045 h f_{b,i} [(1+z)^{3/2} - 1] , \quad (315)$$

où $f_{b,i}$ est la fraction de baryon ionisé.

- Cas des effets statistiques de lentilles gravitationnelles :

Dans ce cas, la conservation du nombre de galaxies (ce qui n'est pas réaliste...) implique de la même façon :

$$n_g(z) = n_{g,0} (1+z)^3 . \quad (316)$$

et la section efficace d'interaction est donnée par la section de la galaxie :

$$\sigma(z) = \pi R_g^2 . \quad (317)$$

Pour ce cas simple, la profondeur optique est donc :

$$\tau(z) = \frac{n_{g,0} \pi R_g^2 c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2 (1+\Omega_m z) - z(2+z) \Omega_\Lambda}} (1+z)^2 dz . \quad (318)$$

Pour un Univers $\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0$, on a donc :

$$\tau(z) = \frac{2 n_{g,0} \pi R_g^2 c}{3 H_0} (1+z)^{3/2} . \quad (319)$$

Ainsi, pour une galaxie de 10 kpc de rayon et avec $n_{g,0}$ donnée par la fonction de luminosité des galaxies $n_{g,0} \approx 0.01$ galaxy Mpc⁻³ :

- $\tau(z=0.3) = 0.008$;
- $\tau(z=1) = 0.02$;
- $\tau(z=30) = 1$.

12.6 Évolution du spectre du corps noir cosmologique

Nous avons vu que la découverte de l'expansion de l'Univers conduit inévitablement à un Univers dont la densité devait être très élevée dans le passé. Le taux d'accroissement est :

$$\rho = \rho_0 (1 + z)^4 \quad (320)$$

Par ailleurs, les observations du spectre du fond cosmologique démontrent qu'il s'agit un rayonnement de corps noir.

Il est possible de démontrer que l'expansion de l'univers conserve le corps noir, mais en modifie sa température. En effet, soit $n_\nu d\nu$ la densité de photons dans le domaine de fréquence ν et $\nu + d\nu$. On a, pour un corps noir :

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (321)$$

Le nombre total de photons est donc :

$$n = \int_0^\infty n_\nu d\nu = 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 16\pi \zeta(3) \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \quad (322)$$

où $\zeta(3) = 2.404$.

La densité d'énergie de rayonnement est :

$$u_r = \rho c^2 = \int_0^\infty h\nu n_\nu d\nu = aT^4 \quad (323)$$

A cause de l'expansion, la fréquence d'un photon est décalée et devient $\nu' = \nu(1 + z)$. Le nombre de photons dans ce domaine de fréquence contenus dans un volume V est par ailleurs $N_\nu d\nu = n_\nu V d\nu$. Or, l'expansion affecte le volume qui devient $V' = V/(1 + z)^3$. Si les photons sont sans interaction, alors leur nombre doit être conservé :

$$n_\nu V d\nu = n'_{\nu'} V' d\nu' \quad (324)$$

donc :

$$\frac{8\pi\nu'^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu'}{kT'}} - 1} \right] V' d\nu' = \frac{8\pi\nu^2 (1 + z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] \frac{V}{(1 + z)^3} (1 + z) d\nu \quad (325)$$

soit :

$$\frac{8\pi\nu^2(1+z)^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] \frac{V}{(1+z)^3} (1+z) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(1+z)}{kT}} - 1} \right] V d\nu \quad (326)$$

Ainsi, le spectre est toujours celui d'un corps noir mais de température :

$$T' = \frac{T}{1+z} \quad (327)$$

On peut donc en permanence prédire la température de l'Univers T à partir de la mesure de la température actuelle T_0 : $T = T_0(1+z)$. L'Univers était donc plus chaud dans le passé et il a donc une histoire liée à cette évolution en température.

12.7 L'effet Sunyaev-Zeldovich (SZ)

Lorsque les photons du milieu inter-galactique traversent le gaz chaud intra-amas ils interagissent avec les électrons de ce gaz par diffusion Compton. C'est en particulier le cas des photons du fond diffus cosmologique. La diffusion transfère l'énergie des photons du fond diffus aux électrons qui la re-émettent ensuite à plus haute fréquence.

Quoique, au premier ordre, les photons aient la même probabilité de gagner ou de perdre de l'énergie dans la diffusion Compton, au second ordre il y a un gain statistique net en énergie. Ainsi le spectre de la radiation du CMB est décalé vers des énergies légèrement plus grandes. Dans la région Rayleigh-Jeans du spectre, il y a une légère décroissance dans l'intensité du CMB dans la direction des amas de galaxies, alors que dans la région de Wien, il y a un léger excès.

Cette redistribution spectrale se traduit par une modification spatiale des propriétés du fond diffus qui apparaît sous la forme d'un décrément apparent de la carte de température autour de l'amas de galaxies. C'est l'effet Sunyaev-Zeldovich (SZ) thermique.

La carte de température observée à la distance radiale R du centre de l'amas est alors :

$$\frac{\Delta T(R)}{T_{CMB}} = -2 \frac{k_B \sigma_T}{m_e c^2} \int n_e(l) T_e(l) dl = -2y, \quad (328)$$

où n_e , m_e , $T_e(R)$ sont, respectivement, la densité numérique, la masse et la température des électrons du gaz, σ_T la section efficace de diffusion Thomson (6.65×10^{-25} cm 2), T_{CMB} est la température du fond diffus cosmologique, R est le rayon projeté et $dl = c dt$ est la longueur du trajet du photon dans le gaz chaud. La quantité y s'appelle le *paramètre-y de Compton*.

La cartographie de la déplétion est un moyen de sonder la quantité de baryons chauds dans les amas de galaxies (voir Figure 61). Cette méthode est très complémentaire de l'analyse des cartes X. En effet, le rayonnement de freinage thermique dépend de la densité électronique comme n_e^2 alors que l'effet SZ en dépend comme n_e . On peut donc en couplant les deux méthodes estimer les effets des sous-structures dans le gaz, voire construire une carte tri-dimensionnelle de la distribution de matière. Par ailleurs, l'émissivité X dépend de la constante de Hubble comme $h^{1/2}$ alors que dans

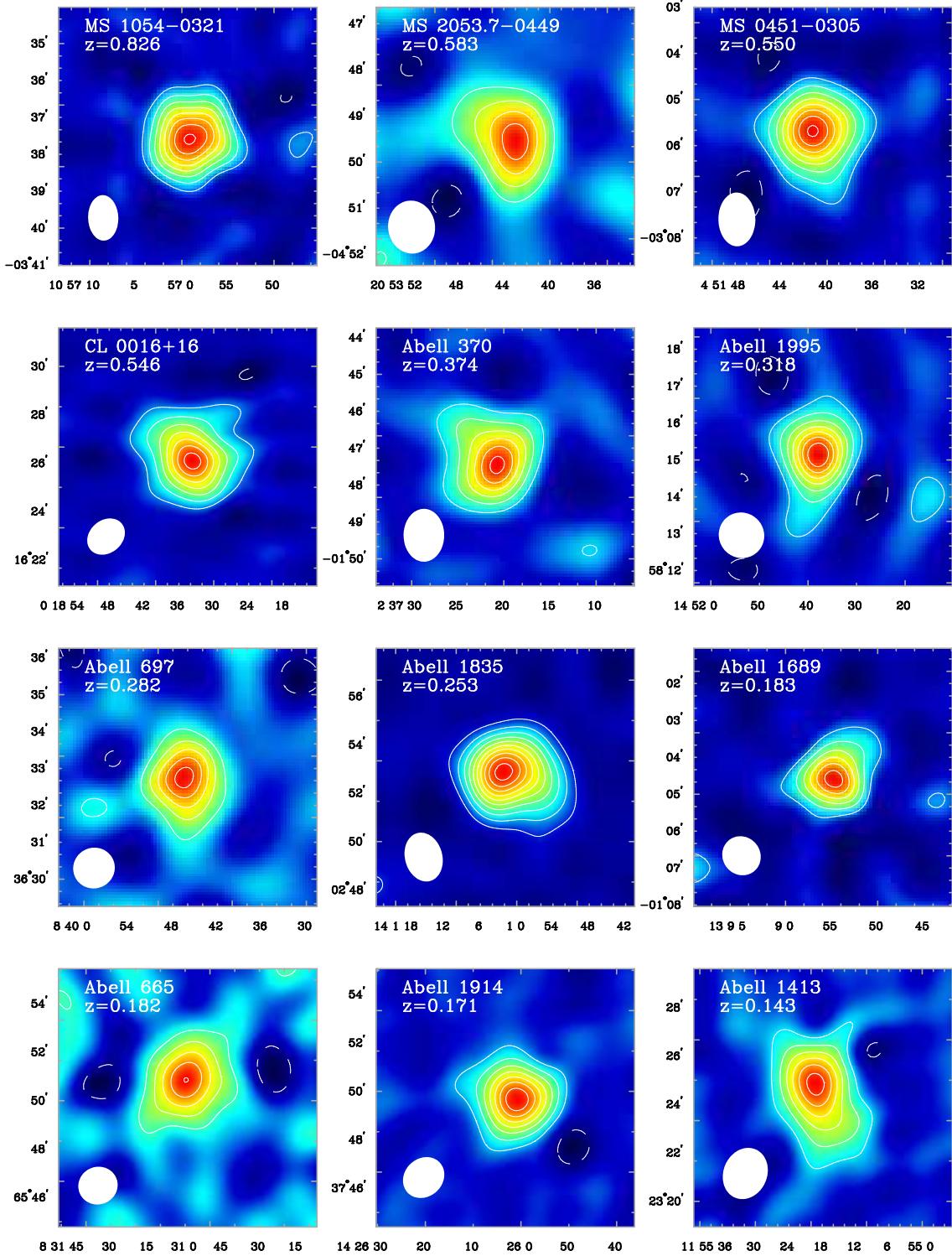


Figure 61: Cartographie de la déplétion SZ de 12 amas de galaxies lointains. Les contours sont des lignes d'iso-températures observées avec les détecteurs millimétriques ORVO et BIMA. On voit que la température décroît vers l'intérieur progressivement avec l'amplitude de l'effet SZ. L'ellipse blanche en bas à gauche donne la résolution effective de l'instrument. D'après Carlstrom et al. 1999.

l'effet SZ la dépendance est en h . En supposant donc que l'on soit en mesure de produire une analyse détaillée de la distribution de matière dans l'amas, on peut déduire une valeur de h .

Plus remarquable encore, comme le montre l'expression de y , l'amplitude de l'effet SZ est indépendante du redshift de l'amas responsable de la diffusion Compton. C'est une conséquence immédiate du fait que y est le rapport de deux températures qui subissent les mêmes effets du “dimming-factor”. Voir Section 8.3.5. On peut donc observer par cette méthode des amas de galaxies lointains sans être affecté par les atténuations produites par les effets de distance.

13 Mesure des paramètres cosmologiques

Le processus de mesure des paramètres cosmologiques désigne les méthodes et les résultats concernant les quatre quantités H_0 , Ω_m , Ω_Λ et q_0 . En fait, pour explorer en détail les scénarios cosmologiques il faut aussi inclure l'âge de l'Univers, la description du spectre de puissance des fluctuations de densité (sa forme, notamment l'indice s'il s'agit d'une loi de puissance, et sa normalisation, σ_8) et la nature des fluctuations (gaussiennes, fraction de défauts topologiques). Le degré de dégénérescence des contraintes est en général important et il faut être très prudent sur l'interprétation et la portée réelle des résultats discutés dans la littérature.

D'une façon générale, mesurer les paramètres cosmologiques au sens large devrait au moins inclure toutes les quantités suivantes :

- Description de la géométrie et du contenu de l'univers :
 - H_o : constante de Hubble
 - Ω_k : courbure de l'Univers ($\Omega_{total} = 1 - \Omega_k$)
 - Ω_Λ : constante cosmologique
 - Ω_w : contenu en énergie sombre (autre que Ω_Λ et génériquement qualifiée par le terme “quintessence”)
 - Ω_b : fraction de matière baryonique
 - Ω_m : fraction de matière totale (baryon, matière sombre chaude et/ou froide)
 - Ω_{CDM} : fraction de matière sombre froide
 - Ω_γ : fraction de photons
 - ω : rapport p/ρ caractérisant l'équation d'état de l'énergie sombre ($\omega = -1$ pour une constante cosmologique)
 - $\omega_1 = d\omega/dz$: paramétrisation de la dépendance en redshift (temporelle) de ω (dans ce cas : $\omega \approx \omega_0 + \omega_1(z)$)
 - M_ν : somme des masses des composantes de neutrinos
 - N_ν : nombre d'espèces de neutrinos
- Description astrophysique du milieu :
 - τ : profondeur optique de re-ionisation à la période du découplage
 - b : facteur de biais linéaire
- Description de la physique de l'Univers primordial :
 - C_{10} : normalisation du spectre de puissance des fluctuations de densité initiales
 - n_s : indice de la composante scalaire du spectre du puissance des fluctuations
 - n_T : indice de la composante tensorielle du spectre du puissance des fluctuations
 - r : rapport des amplitudes scalaires et vectorielles
 - $\alpha = d\ln n_s / d\ln k$: *running spectral index* caractérisant l'évolution de l'indice du spectre scalaire en fonction de l'échelle.
 - t_0 : âge de l'univers

Si l'on disposait d'informations précises concernant tous ces paramètres, nous serions en mesure d'apporter d'énormes contraintes sur l'Univers et son histoire. En particulier, nous pourrions confronter les scénarios d'inflation aux observations. Malheureusement, nous sommes encore loins d'y parvenir complètement, même si des progrès rapides et spectaculaires ont été accomplis. Il est important de mesurer le sens et les limites actuelles des résultats qui sont résumés dans cette section, même si se dessine progressivement un scénario cohérent.

On peut d'ores et déjà calculer la fraction de photons par rapport à la densité critique. Le rayonnement fossile cosmologique (CMB) représentant plus de 90 % des photons, il suffit de déterminer :

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_{CMB}}{\rho_{critic}} . \quad (329)$$

D'après l'Equation (213), on déduit donc que :

$$\Omega_\gamma = \frac{4.8 \cdot 10^{-34}}{1.88 \cdot 10^{-29} \cdot h^2} = 2.55 \times 10^{-5} \cdot h^{-2} \quad (330)$$

13.1 Mesure de H_0

La mesure de H_0 fait partie des grandes aventures à rebondissement de la cosmologie. Ce fut sans doute la constante la plus controversée et, de fait, la plus fluctuante durant les 50 dernières années. Elle est restée longtemps dans une fourchette $50 < H_0 < 100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, sans qu'une valeur finale n'émerge. En fait, la discussion autour de la valeur de la constante de Hubble est un exemple caractéristique des problèmes techniques auxquels les astronomes doivent faire face. C'est un problème de définition et de calibration de distance, de précision des mesures astronomiques et de définition d'échantillons non biaisés.

Les techniques de mesure de H_0 relèvent pour la plupart de problème d'échelle de distance. La difficulté est progressive au fur et à mesure que la distance des indicateurs et des galaxies croissent. Les échelles de distances ont été discutées dans le cours d'*Introduction à l'astrophysique*. Rapidement, on les distinguent en trois classes formant une hiérarchie qui caractérise leur portée en distance : les calibrateurs primaires, secondaires et tertiaires. Les indicateurs primaires sont bien sûr les plus robustes et les mieux contrôlés. Ils sont calibrés sur des objets astronomiques de notre Galaxie. Les indicateurs tertiaires sont les moins sûrs.

Pour pallier aux difficultés techniques et aux erreurs systématiques, il est indispensable de disposer d'indicateurs de distance et/ou de méthodes de mesure de H_0 , indépendantes les unes des autres. C'est la raison pour laquelle il en existe une multitude. D'une façon générale on peut dire qu'il existe deux types de techniques : celles qui mesurent H_0 dans notre environnement proche ($D < 100 \text{ Mpc}$) et celles qui mesurent H_0 sur des échelles cosmologiques.

Les méthodes suivantes : Céphéïdes, TRGB (*Tip of the Red Giant Branch*), GCLF (*Globular Cluster Luminosity Function*), Baade-Wesselink, SBF (*Surface Brightness Fluctuation*), Faber-Jackson, Tully-Fisher et SNIa, sont parmi les plus connues des méthodes locales. Elles présentent l'avantage de pouvoir être bien calibrées, grâce aux observations d'objets relativement proches.

Méthode	H_0
	$\text{km sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
Méthodes traditionnelles (toutes confondues)	74 ± 10
Baade-Wesselink	60 ± 10
Cepheid HST Key Program	72 ± 8
SnIa	64 ± 3
Sunyaev-Zeldovich S-Z	55 ± 17
Décalages temporels de lentilles gravit.	64 ± 13

Table 2: Court résumé des valeurs de H_0 suivant les méthodes. Sous le chapeau “Méthodes traditionnelles” se cachent une multitude d’approches, notamment celles utilisant les variables Céphéides, RR-Lyrae, W-Virginis, les méthodes utilisant les fonctions de luminosités des amas globulaires et des nébuleuses planétaires, celles fondées sur les relations de Tully-Fisher, Faber-Jackson ou sur les fluctuations de brillance de surface des galaxies. La méthode de Baade-Wesselink utilise l’expansion des enveloppes des novae ou supernovae. La méthode “SNIA” utilise la magnitude apparente des supernovae au pic de luminosité et l’évolution des courbes de lumière apparente des supernovae. La méthode du “décalage temporel” utilise les effets de lentille gravitationnelle qui engendre des décalages temporels des événements identiques survenant sur différentes images de la même source.

Les méthodes suivantes : SNIA, Sunyaev-Zeldovich (SZ), et le décalage temporel induit par les lentilles gravitationnelles, sont des techniques non-locales, s’appliquant sur des échelles cosmologiques. Elles ne sont pas sensibles aux variations locales des champs de vitesse produits par le Superamas Local qui peuvent créer des biais dans la valeur locale de H_0 .

Sans entrer dans les détails de toutes ces approches, on résume dans la Table 2, voir également la Figure (62) le statut des mesures selon ces diverses approches. Tout confondu il ressort que :

$$H_0 = 63 \pm 15 \text{ km sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1} . \quad (331)$$

Cependant, cette moyenne n’a pas grand sens car il faudrait la pondérer par la fiabilité des méthodes. En particulier l’approche SZ est encore à valider car peu d’amas ont été analysés et les résultats dépendent fortement du modèle de potentiel gravitationnel utilisé. De même, en ce qui concerne les méthodes traditionnelles, il faut aussi effectuer des pondérations. En prenant en compte ces performances relatives, on peut dire que pour le moment :

$$H_0 = 68 \pm 15 \text{ km sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1} . \quad (332)$$

13.2 De la mesure du rapport M/L à Ω_m

L’intérêt cosmologique de mesurer la masse des systèmes gravitants est contenu dans l’évaluation des rapports masse-luminosité M/L (ce rapport est évalué relativement au rapport M_\odot/L_\odot solaire). Ils

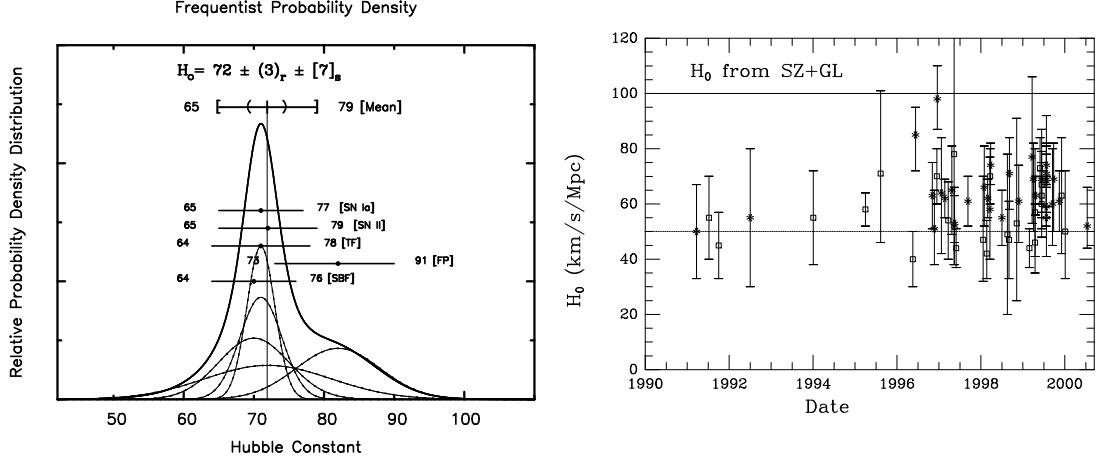


Figure 62: Une compilation de mesure de H_0 . A gauche, la distribution des mesures obtenues par le HST Hubble Key Project et fondée sur 5 méthodes. A droite, la distribution des mesures obtenues par des méthodes d'effet Sunyaev-Zeldovich (SZ) ou de décalages temporels d'images de lentilles gravitationnelles (GL). D'après Freedman et al. 2001, ApJ 553, 47.

permettent en effet de donner un ordre de grandeur de la contribution de chaque système physique observé à Ω_m .

Nous avons vu dans la Section 6.1.3 que la densité de lumière des galaxies, ρ_L , était donnée par la fonction de luminosité. Pour une loi de Schechter, les observations les plus récentes donnent :

$$\rho_L = 2. \pm 1. \times 10^8 h L_\odot \text{ Mpc}^{-3}. \quad (333)$$

Par ailleurs, nous avons calculé la densité critique de l'univers :

$$\rho_{crit} = 1.88 h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} = 2.75 h^2 \times 10^{11} M_\odot \text{ Mpc}^{-3}. \quad (334)$$

On peut donc calculer le rapport M/L critique correspondant à une densité de matière d'un Univers ayant la densité critique :

$$\left(\frac{M}{L}\right)_{crit} = \frac{\rho_{crit}}{\rho_L} = 1375 h \pm 50\%. \quad (335)$$

Cette valeur est donc une référence qui permet d'affecter un paramètre Ω_i à toutes les composantes i pour lesquelles un rapport M/L moyen sur une vaste population d'objets peut être calculé. Il est déterminé par :

$$\Omega_i = \frac{\langle M/L \rangle_i}{(M/L)_{crit}} \quad (336)$$

13.2.1 Galaxies

Les masses des galaxies elliptiques peuvent être déterminées de plusieurs façons : (i) comparaison du profil de lumière à un profil de masse d'une sphère isotherme ayant la dispersion des vitesses des étoiles, mesurée par la largeur des raies stellaires, (ii) analyse dynamique par le théorème du viriel (voir Annexe B), (iii) analyse du gaz émetteur X des galaxies selon la même procédure que celle décrite pour les amas de galaxies en Section 13.2.3, et (iv) analyse dynamique des galaxies à coquilles. Le rapport M/L médian est d'environ 30 (avec une grande dispersion).

Les masses des galaxies spirales sont déterminées par la modélisation des courbes de rotation plates en ajustant un profil à deux composantes représentant le disque et un halo (voir Figure 63). Les rapport M/L sont d'environ 10 à 30.

13.2.2 Groupes de galaxies

Les groupes de galaxies sont principalement analysés par le théorème du viriel (voir Annexe B) ou l'analyse du gaz X. Les résultats concernant leurs masses sont très dispersés. Il n'est pas encore clair si les groupes forment un ensemble homogène avec des propriétés dynamiques identiques car ils présentent une grande disparité en morphologie. Il s'avère donc difficile de leur attribuer un rapport M/L moyen. Disons qu'une médiane de 200 semble raisonnable.

13.2.3 Amas de galaxies

La distribution de la matière dans les amas de galaxies est un problème particulièrement important pour la cosmologie. Historiquement, c'est par l'analyse dynamique de l'amas de galaxies Coma que Zwicky, en 1936, mit en évidence une contradiction apparente entre la distribution de lumière et la masse totale mesurée par le théorème du viriel. C'est ce travail qui a donné naissance au problème de la *masse manquante* (qui d'ailleurs ne manque pas... en fait c'est plutôt qu'il y en a trop !), ou de la *masse cachée*, ou de la *masse invisible*. Pour rester orthodoxe, nous garderons le concept de *matière sombre (dark matter)* comme nom générique.

Il est évidemment important de vérifier si cette quantité de matière sombre excède significativement l'abondance de baryons prédicta par la nucléosynthèse primordiale. Pour cela, il faut mesurer avec précision, et avec des estimateurs indépendants, la masse des amas de galaxies.

Il y a 3 grandes méthodes pour accéder à la masse des amas de galaxies :

1. l'analyse *dynamique* qui utilise les galaxies de l'amas comme des particules d'un gaz. Elle est basée essentiellement sur le théorème du viriel (voir Annexe B) ;
2. l'analyse du *rayonnement X* du gaz, basée sur l'équilibre hydrostatique du gaz inter-galactique intra-amas ;
3. les effets de *lentille gravitationnelle*, basés sur les arcs ou sur l'analyse statistique des distorsions gravitationnelles faibles.

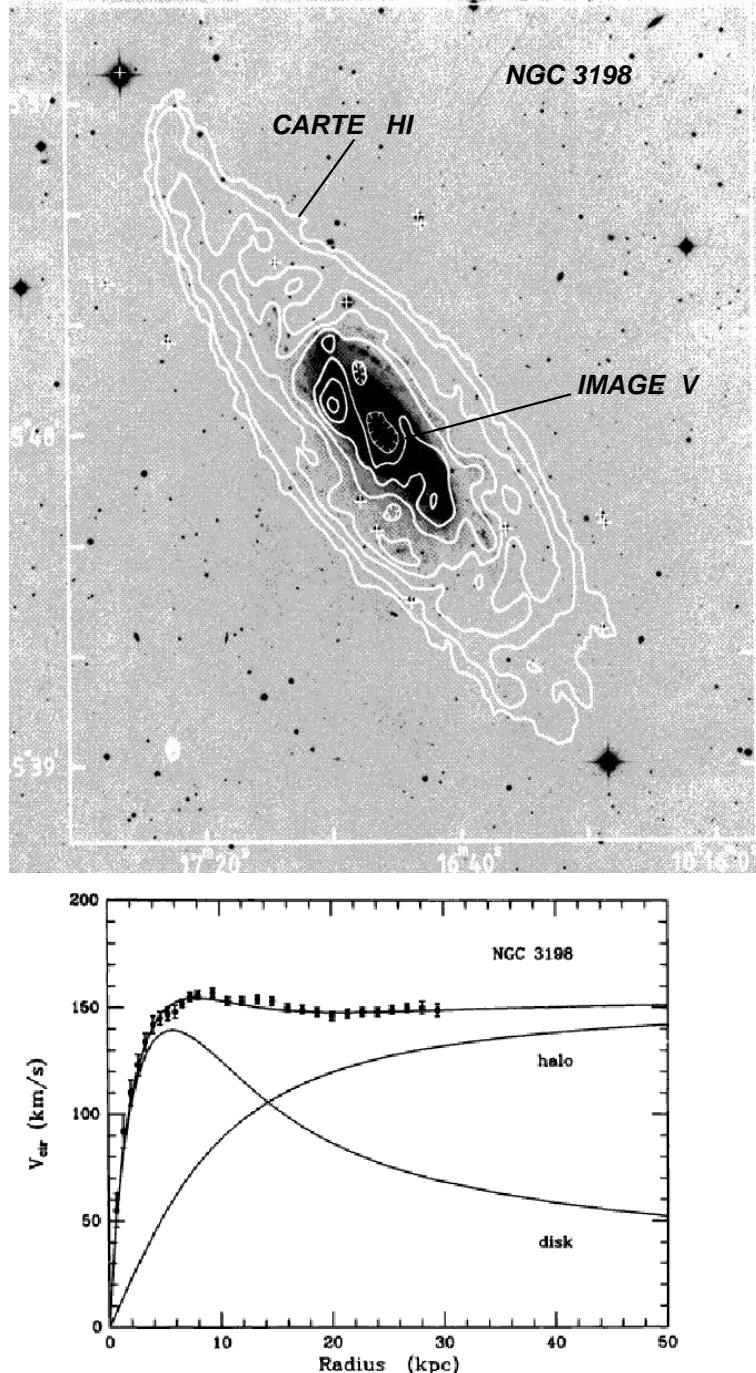


Figure 63: Analyse dynamique d'une galaxie spirale typique. L'image du haut est une photographie visible de la galaxie sur laquelle les contours d'émission HI ont été superposés à une image dans le visible. La raie radio à 21 cm et la raie optique H- α peuvent être utilisées pour calculer la vitesse de rotation en fonction de la distance au centre. Elle est montrée en bas (carrés noirs). Les lignes représentent un modèle halo+disque qui ajuste les valeurs observées. On voit qu'à grande distance la courbe de rotation reste plate. Seule l'addition hypothétique d'un halo invisible de matière semble pouvoir en rendre compte. D'après van Albada et al. 1985, ApJ 295, 305.

1. Masse dynamique

Supposons que les galaxies d'un amas donné soient des particules d'un gaz confiné dans un puits de potentiel gravitationnel. Supposons ensuite, qu'en première approximation cet amas ait atteint un état stationnaire. Dans ce cas, il est en équilibre dynamique décrit par le théorème du viriel (voir Annexe B). Donc, l'énergie cinétique totale des particules, E_c , est reliée à l'énergie potentielle du système autogravitant, E_g , par la relation simple suivante (voir Annexe B) :

$$2E_c + E_g = 0 , \quad (337)$$

et donc, si le gaz de galaxies a une dispersion des vitesses σ :

$$\sigma^2 = \frac{GM_{dyn}}{R} , \quad (338)$$

où M_{dyn} est la masse de l'amas, appelée *masse virielle*, et R le rayon caractéristique de l'amas, appelé *rayon de viriel*.

D'un point de vue observationnel, la difficulté consiste à estimer la dispersion des vitesses et le rayon de viriel. En effet, on ne mesure que la vitesse radiale des particules et le rayon de l'amas est une quantité très mal définie. Dans le cas simple d'un modèle sphérique, il est cependant possible de mesurer la masse virielle à partir de ces observations.

Soit :

$$E_c = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (339)$$

l'énergie cinétique totale des N galaxies de l'amas dont les masses et les vitesses individuelles dans le repère de l'amas sont respectivement m_i et v_i , et soit :

$$E_g = - \sum_{paires} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (340)$$

l'énergie potentielle, calculée à partir des distances entre les galaxies. La vitesse radiale de chaque galaxie est :

$$v_{ri} = v_i \cos \theta_i , \quad (341)$$

où θ_i est l'angle entre la direction de la ligne de visée de la galaxie i et la direction de son vecteur vitesse par rapport au centre de masse de l'amas, et :

$$R_{ij} = r_{ij} \sin \phi_{ij} , \quad (342)$$

la distance entre les galaxies i et j projetée sur le plan du ciel.

Dans le cas d'un amas sphérique la moyenne des angles peut être calculée, en admettant que les vitesses v_i et les masses m_i ne sont pas corrélées aux orientations des galaxies. On a alors :

$$\langle \cos\theta_i \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\phi} = \frac{1}{3}, \quad (343)$$

et :

$$\left\langle \frac{1}{\sin\phi_{ij}} \right\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi_{ij}^{-1} \sin\phi_{ij} d\phi_{ij} d\psi_{ij}}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi_{ij} d\phi_{ij} d\psi_{ij}} = \frac{\pi}{2}. \quad (344)$$

A ce stade, on peut calculer la masse à condition de se donner une prescription permettant d'associer les N particule-galaxies aux masses m_i . Si par exemple on suppose que toutes les galaxies ont la même masse individuelle m alors, $M_{dyn} = N \times m$, et on a donc :

$$\frac{1}{3} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{3} M \frac{\sum_i v_i^2}{N} = \frac{1}{3} M \sigma^2, \quad (345)$$

et :

$$\sum_{paires} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{M}{N} \frac{M}{N} \sum_{paires} \frac{1}{R_{ij}} \left\langle \frac{1}{\sin\phi_{ij}} \right\rangle^{-1} = M^2 \left[\frac{1}{N^2} \sum_{paires} \frac{1}{R_{ij}} \right] \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} M^2 \left\langle \frac{1}{R_{ij}} \right\rangle. \quad (346)$$

Avec ces approximations, on peut déterminer simplement la masse d'un système autogravitant en mesurant les vitesses radiales individuelles par spectroscopie et le rayon du viriel par imagerie des positions individuelles des galaxies :

$$M_{dyn} = \frac{3\sigma^2}{G} \frac{\pi}{2} \left\langle \frac{1}{R_{ij}} \right\rangle^{-1}, \quad (347)$$

où σ est la dispersion des vitesses radiales. La quantité $\pi/2 \langle 1/R_{ij} \rangle^{-1}$ est appelé rayon de viriel tridimensionnel.

L'Equation (347) donne un mode opératoire pour déterminer une masse sur la base de données observationnelles. Cet exemple illustre le fait que la manipulation des observables, qui sont des quantités projetées sur le ciel, n'est jamais immédiate. On doit faire appel à un certains nombres d'hypothèses dynamiques et géométriques concernant le système qui sont fréquemment mal fondées, voire contestables.

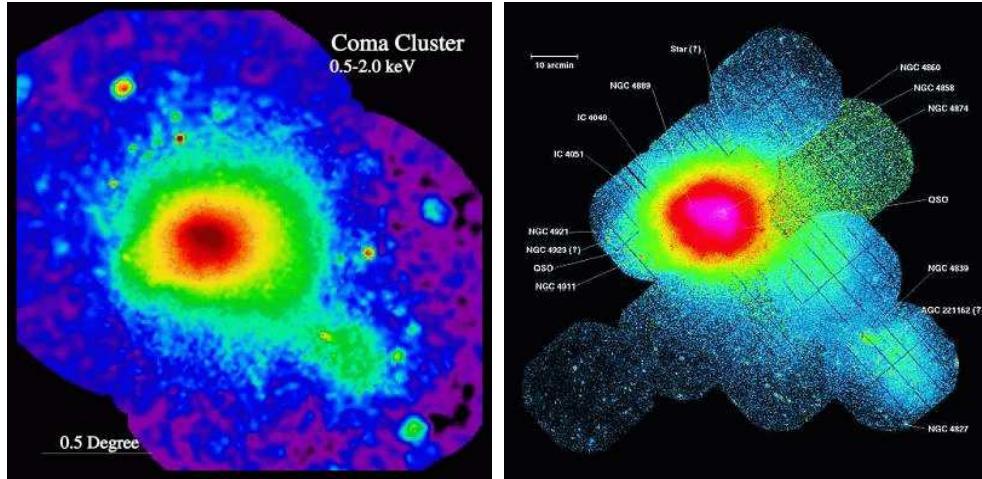


Figure 64: Cartes comparatives de l'émissivité X de l'amas de galaxies Coma vue par ROSAT (à gauche) et par le nouveau satellite XMM (à droite). Les progrès dans le domaine de l'observation X ont été très importants et permettent désormais d'observer les amas de galaxies lointains et/ou de cartographier en détail la distribution des baryons chauds des amas proches pour mieux comprendre leur état thermodynamique.

On peut calculer rapidement les ordres de grandeur à partir de l'Equation (347). La dispersion des vitesses des galaxies telle qu'elle est mesurée à partir de catalogue de vitesse radiale est de l'ordre de 1000 km s^{-1} . Le rayon caractéristique est de l'ordre de 1 Mpc. Donc :

$$M_{dyn} = \frac{3 \times 3.08 \times 10^{24} (\text{cm}) \times (10^8)^2 (\text{cm sec}^{-1})^2}{6.67 \times 10^{-8} (\text{cm}^2 \text{g}^{-1} \text{sec}^{-2})} = 6.9 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot \quad (348)$$

2. Masse X

Les satellites équipés de détecteurs à rayons X embarqués ont permis de découvrir que les amas de galaxies contenaient un gaz inter-galactique intra-amas dans lequel baignent les galaxies. Ce gaz chaud et ionisé est détecté par le rayonnement de freinage thermique émis par les ions. Sa température, de l'ordre de 10^8 K , est évaluée par les raies d'émission d'éléments lourds fortement ionisés, comme le Fe XIV (voir Figures 64 et 65). Dans le cas simple d'un modèle sphérique, et si l'on suppose que le gaz est en équilibre hydrostatique (cette hypothèse se justifie pour ce gaz, car hormis les zones les plus centrales, le temps de refroidissement du gaz est très largement supérieur au temps de propagation d'une onde acoustique dans le milieu), on peut mesurer la masse totale de l'amas de galaxies, $M_t(r)$, contenue dans une sphère de rayon r .

Si p_X est la pression du gaz émetteur X et ρ_X sa densité, alors l'hypothèse d'équilibre hydrostatique implique que :

$$\frac{dp_X}{dr} = -\frac{GM_t}{r^2}\rho_X \quad (349)$$

La pression est donnée par la loi des gaz parfaits :

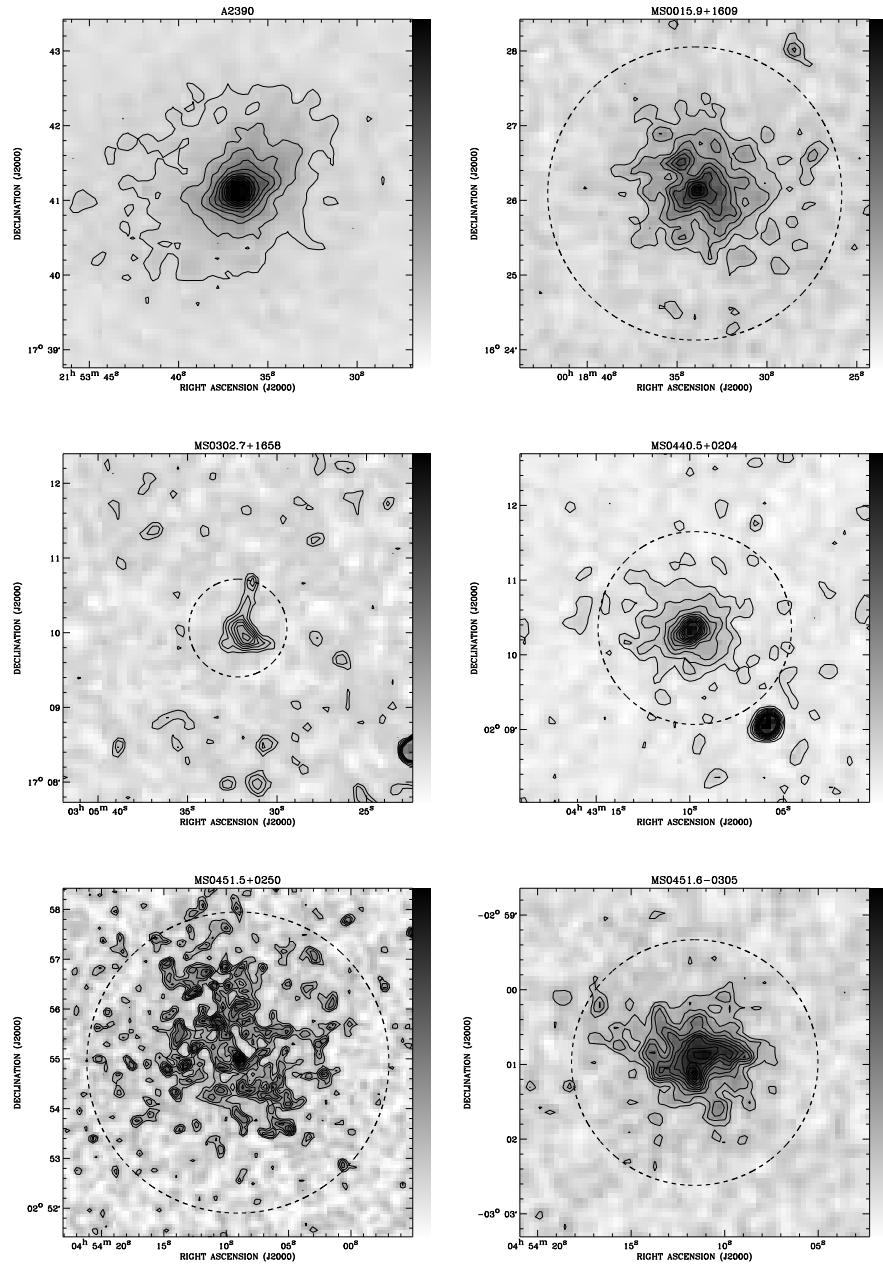


Figure 65: Cartes d'émissivité X d'amas de galaxies lointains. Comme on le voit, l'intensité de l'émission et la morphologie de la distribution varient fortement d'un amas à l'autre. Les morphologies les plus régulières sont associées aux amas les plus évolués dynamiquement.

$$p_X = \frac{\rho_X k_B T_X}{\mu m_H} \quad (350)$$

où T_X est la température du gaz chaud, m_H est la masse de l'atome d'hydrogène, μ la masse moléculaire moyenne du gaz et k_B la constante de Boltzmann.

Différenciant l'équation des gaz parfaits par rapport à r et remplaçant dans l'équation de l'équilibre hydrostatique, on obtient, après quelques réarrangements, la masse en deçà du rayon r :

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_X(r) r^2}{G \mu m_H} \left[\frac{d(\ln \rho_X)}{dr} + \frac{d(\ln T_X)}{dr} \right] . \quad (351)$$

Si l'équilibre hydrostatique est aussi vérifié pour les autres composantes, alors on a de même, pour la matière sombre, avec DM pour Dark Matter :

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_{DM}(r) r^2}{G \mu_{DM} m_{DM}} \left[\frac{d(\ln \rho_{DM})}{dr} + \frac{d(\ln T_{DM})}{dr} \right] . \quad (352)$$

Prenons par exemple le cas d'une sphère isotherme. Le terme de gradient de température est donc nul. Par ailleurs, si la dispersion des vitesses de la matière sombre est isotrope, on peut exprimer la température de la matière sombre en fonction de sa dispersion des vitesses :

$$\sigma_{DM}^2 = \frac{k_B T_{DM}}{\mu_{DM} m_{DM}} \quad (353)$$

et donc :

$$M_t(r) = -\frac{k_B T_X(r) r^2}{G \mu m_H} \left[\frac{d(\ln \rho_X)}{dr} \right] = -\frac{\sigma_{DM}^2 r^2}{G} \left[\frac{d(\ln \rho_{DM})}{dr} \right] \quad (354)$$

et donc l'on obtient une relation simple entre les deux profils de densité :

$$\frac{d \ln \rho_X}{dr} = \frac{\mu m_H \sigma_{DM}^2}{k_B T_X} \frac{d \ln \rho_{DM}}{dr} , \quad (355)$$

Dans le cas simple d'une sphère isotherme, il est facile de montrer que des distributions de matière, comme les profils de King, représentent bien le profil de masse des sphères isothermes tout en conservant l'idée que le potentiel à une échelle caractéristique r_c appelé rayon de coeur (voir Annexe C) :

$$\rho(r) = \rho_o \left(1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right)^{-3/2} . \quad (356)$$

Donc les expressions paramétriques ont la forme suivante :

$$\rho_t(r) = \rho_{ot} \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-3/2} \quad (357)$$

et :

$$\rho_X(r) = \rho_{0X} \left(1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right)^{-3\beta/2}, \quad (358)$$

où :

$$\beta = \frac{\mu m_H \sigma_{DM}^2}{k_B T_X} \quad (359)$$

est simplement le rapport de la température de la matière totale, donc à peu de chose près celle de la matière sombre, à celle du gaz intra-amas.

En pratique, on mesure une émissivité X , qui permet de construire un profil de densité de particules $n(R)$ projeté sur le ciel, et donc un profil de densité en masse $\mu m_H n(R)$ projeté. Il est ensuite facile d'ajuster le paramètre β avec le profil de densité projeté, puis de déprojeter le profil pour obtenir $\rho_X(r)$ (voir Annexe C Equation (525)). Ainsi, sans connaître σ_{DM} on peut tout de même déterminer ρ_{DM} grâce à l'ajustement de β aux données.

Cette approche est intéressante car elle permet de déduire à la fois la quantité de masse totale et la quantité de masse sous forme de gaz ionisé qui est déterminée par le profil radial de l'émissivité X. En y ajoutant le contenu en matière des galaxies, on peut donc mesurer la fraction de masse sous forme baryonique relativement à la matière sombre.

On peut exprimer simplement la masse totale $M_t(r)$ déterminée par les cartes X :

$$M_t(r) = 1.13 \times 10^{15} \beta \left(\frac{T_X}{10 \text{keV}}\right) \times \left(\frac{r}{\text{Mpc}}\right) \frac{\left(\frac{r}{r_c}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right]} h^{-1} M_\odot \quad (360)$$

A ce jour une cinquantaine d'amas de galaxies ont fait l'objet de ce type d'investigation. Il ressort que M_X est tout à fait compatible avec M_{dyn} , la dispersion de l'écart étant de l'ordre de 10 % .

Plus remarquable encore, la fraction de gaz déduite de ces études atteint 10 à 30 % de la masse totale, ce qui est considérable (voir Figure 66). En effet, si l'Univers a pour densité la densité critique et si la fraction de baryons est de l'ordre de 1 % (on verra tout cela par la suite), alors si la fraction de masse du gaz est de 20 %, tous les baryons dans un rayon :

$$R = \left(\frac{20}{100} \frac{3. \times 1. \times 10^{15} \times 2.10^{33}}{0.01 \times 1.9 \times 10^{-29} \times 4\pi}\right)^{1/3} = 20 h^{-1} Mpc \quad (361)$$

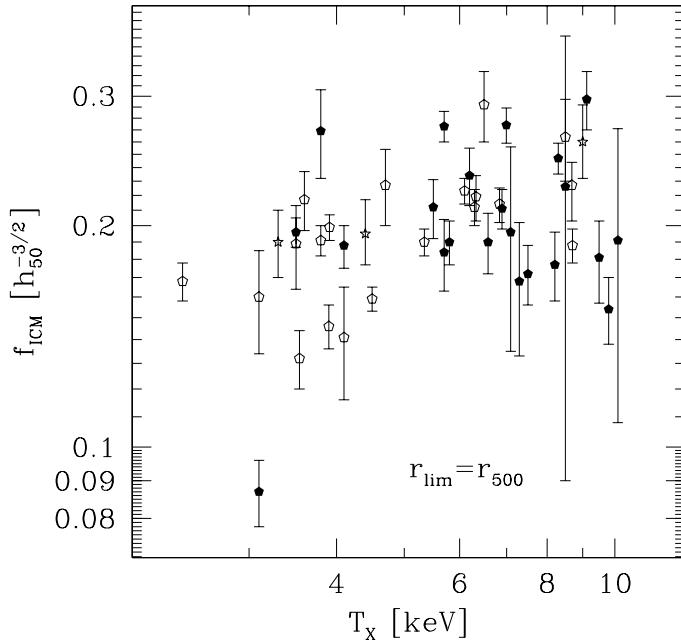


Figure 66: Fraction de matière baryonique confinée sous forme de gaz ionisé dans les amas de galaxies calculée pour 45 amas. On voit qu’indépendamment de la température du gaz, cette fraction se situe dans le domaine 10-30 %. Les différents symboles représentent des amas de galaxies avec des temps de refroidissement centraux plus courts que 10^{10} ans (pentagones blancs), plus longs que 10^{10} ans (pentagones noirs), et sans limites supérieures pour la température du gaz. D’après Mohr et al. 1999.

ont été engloutis dans le puits de potentiel de l’amas.

Les estimateurs présentés dans les paragraphes précédents sont confrontés à trois difficultés :

1. Ils sont fondés sur des hypothèses simplificatrices qui définissent la géométrie et l’état dynamique des systèmes autogravitants mais dont les justifications physiques sont imprécises, voire critiquables.
2. Les observations semblent démontrer que la matière sombre domine l’Univers et que la fraction de matière visible diminue progressivement lorsque les dimensions des systèmes augmentent. Ce comportement suivant l’échelle est problématique, d’autant plus qu’il est difficile de trouver un outil robuste qui permette d’analyser de façon homogène la totalité des échelles sur lesquelles se distribue la matière. La variation de la fraction de matière visible avec la dimension de la structure pourrait n’être qu’apparente et artificiellement induite par les estimateurs eux-mêmes.
3. Dans la plupart des cas, les méthodes d’analyse dynamique des systèmes utilisent des propriétés révélées par les photons qu’ils émettent. Or, ceux-ci ne montrent que la partie visible, sans que l’on sache établir solidement le rapport entre la matière visible et la matière invisible. Ce lien pourrait dépendre de la position dans l’espace, de la nature des sources lumineuses et certainement du temps (les populations stellaires évoluant avec le temps cosmique).

3. Lentille gravitationnelle

Les lentilles gravitationnelles peuvent résoudre ces difficultés. Dans la situation des *champs faibles* et pour une *lentille mince*, c'est-à-dire de dimensions négligeables comparées aux distances ls et ol (voir Figure 67), la relation entre la position réelle de la source et la position de l'image vue par un observateur est donnée par *l'équation des lentilles* :

$$\theta_s D_{os} + \alpha D_{ls} = \theta_i D_{os}, \quad (362)$$

où θ_s est le vecteur caractérisant la position sur le ciel de la source et θ_i celle de l'image. Les composantes de θ_s et de θ_i sont donc des angles. Les D_{ij} représentent les distances diamètres angulaires.

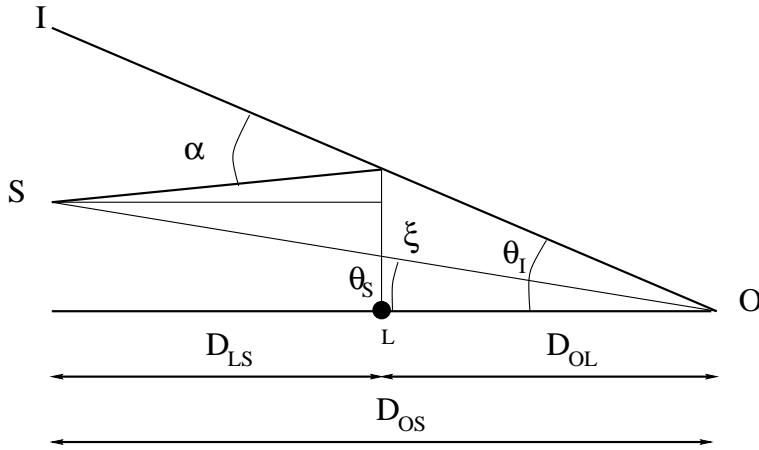


Figure 67: Schéma d'une configuration de lentille gravitationnelle. L'angle de déflexion est α . θ_i est la position angulaire de l'image, θ_s est la position angulaire de la source.

Pour illustrer quelques propriétés des effets de lentille gravitationnelles, prenons le cas simple d'un déflecteur constitué d'une masse ponctuelle. Comme l'a prédit Einstein, la déflexion des rayons lumineux prend la forme bien connue (voir cours de Relativité Générale et Annexe D) :

$$\alpha = (4G/c^2)(M/D_{ol}\theta) \quad (363)$$

qui, avec l'équation des lentilles, conduit à une équation du second degré et donc à la formation de deux images. Les images correspondent donc, dans le plan (θ_i, α) aux intersections d'une droite $y = D(\theta_i - \theta_s)$ et d'une hyperbole $y = K/\theta_i$, et la position de la source est l'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses. Des cas plus réalistes où la masse est nulle à l'origine et où la densité reste finie au centre conduisent plutôt à trois images, voire plus, mais on peut montrer que le nombre total d'images est toujours impair (voir Figures 68 et 69).

Les images multiples correspondent à des trajectoires différentes des photons provenant d'un même point de la source. Les temps de propagation de la lumière sur ces deux trajectoires sont donc différents et deux photons émis du même point de la source au même moment peuvent par conséquent atteindre l'observateur avec un *décalage temporel*.

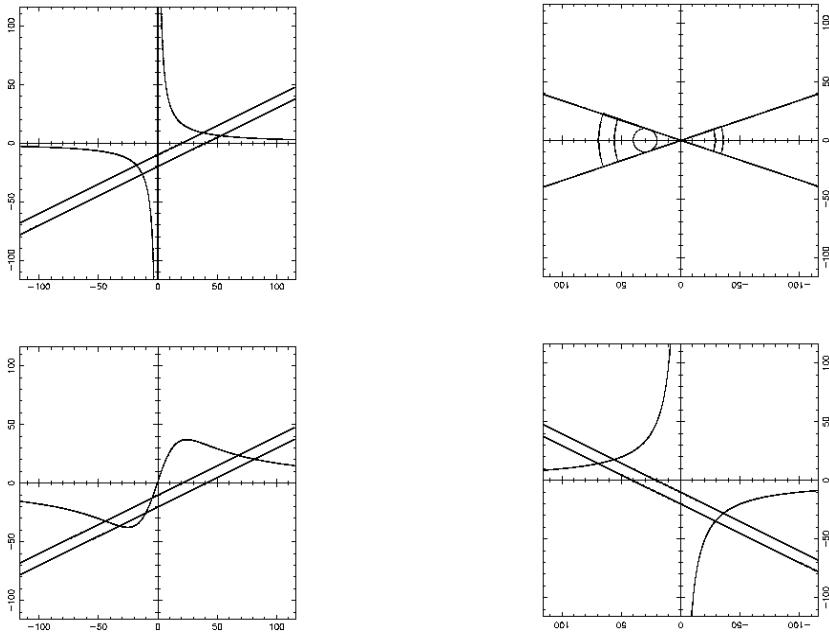


Figure 68: Description, dans le plan (θ_i, α) , des images produites par des lentilles gravitationnelles simples. Le cadre en haut à gauche illustre comment une source assimilée à un segment de droite porté sur l'axe des abscisses produit deux images dont les longueurs sont les deux arcs portés par l'hyperbole. Les deux images n'ont pas la longueur du segment de départ. C'est l'effet de grandissement. La figure en haut à droite illustre le grandissement d'une source circulaire. Elle se déduit de la première par simple multiplication des segments qui sont toutes les cordes traversant la source et dont les directions passent par le centre de la lentille. Le cadre en bas à gauche montre les mêmes propriétés pour une lentille non singulière. D'après Blandford & Narayan 1997.

Pour une source étendue, dont l'extension radiale est le segment de droite porté par l'axe des abscisses de la Figure 68, les positions des images sont données par les intersections des deux droites parallèles limitant le segment. Les deux images sont renversées l'une par rapport à l'autre et leur longueur n'est plus égale à celle de la source. C'est le phénomène d'*amplification*. La projection des segments-images de la Figure 68 sur l'axe des abscisses donne leur position sur le plan du ciel. Par raison de symétrie par rapport au centre du déflecteur, la reconstruction complète des images est immédiate.

L'amplification est le rapport des surfaces de l'image et de la source correspondante. Considérons en effet un pinceau de lumière infinitésimal, issu d'une source étendue, et qui traverse le plan de la lentille. Les déviations subies par tous les rayons du faisceau sont égales ce qui entraîne la conservation de l'étendue du faisceau, d'où l'égalité des brillances de surface de la source et de ses images. Le phénomène d'amplification n'est donc pas un accroissement de l'intensité de la brillance de l'objet mais bien une augmentation de sa surface, c'est-à-dire un agrandissement. Ceci est illustré sur la Figure 68. Notons que sur cette figure on voit que les images des points extrêmes de la source sont inversées sur les deux images. Ce *changeement de parité* des images se produit à chaque création d'une nouvelle image.

Supposons que le déflecteur soit une masse ponctuelle de masse M . Dans une configuration unidimensionnelle, les solutions pour les images sont données par :

$$\theta_s = \theta_i - \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}} \frac{4GM}{c^2\theta_i} . \quad (364)$$

Un cas critique se produit quand $\theta_s = 0$, correspondant à un alignement parfait entre la source, la lentille et l'observateur. Les positions des images sont alors dégénérées et forment un cercle d'amplification infinie de rayon θ_E appelé *rayon d'Einstein* :

$$\theta_E = \left[\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}} \right]^{1/2} . \quad (365)$$

La dimension du rayon d'Einstein dépend de la configuration de la lentille :

- pour une étoile de $1 M_\odot$ à la distance $D = 1$ kpc, $\theta_E = 0.001$ seconde d'arc,
- pour une galaxie de $10^{12} M_\odot$ à la distance $D = 1$ Gpc, $\theta_E = 1$ seconde d'arc,
- et pour un amas de galaxies de $10^{14} M_\odot$ à $z = 0.3$ et des sources à $z_s = 1$, $\theta_E = 30$ secondes d'arc.

On définit la matrice d'amplification par $A = d\theta_s/d\theta_i$, qui est obtenue simplement en différentiant l'équation des lentilles. La matrice contient le terme de convergence, κ , et les composantes du cisaillement, (γ_1, γ_2) :

$$\begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \partial_{xx}\varphi & -\partial_{xy}\varphi \\ -\partial_{xy}\varphi & 1 - \partial_{yy}\varphi \end{pmatrix} , \quad (366)$$

où les " ∂_{ij} " sont les dérivées partielles du potentiel gravitationnel projeté sur la ligne de visée. L'amplitude de l'amplification est donnée par :

$$\mu = \frac{1}{|\det A|} = \frac{1}{|(1 - \kappa^2) - \gamma^2|} . \quad (367)$$

L'amplitude du cisaillement $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ exprime l'amplification anisotrope, alors que κ exprime la composante isotrope. On constate que $2\kappa = \Delta\varphi = \Sigma/\Sigma_{crit}$, est directement la densité de masse projetée. Lorsque le déterminant s'annule l'amplification devient infinie. D'un point de vue observationnel ces cas limites correspondent à la formation des anneaux et des arcs gravitationnels. Les points de l'image où l'amplification est infinie sont les *lignes critiques*. Dans le plan source elles correspondent aux *lignes caustiques*.

La *densité critique* est définie par :

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{os}}{D_{ls}D_{ol}} \approx 0.1 \left(\frac{H_0}{50 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \right) \frac{D_{os}}{D_{ls}D_{ol}} \text{ g cm}^{-2} \quad (368)$$

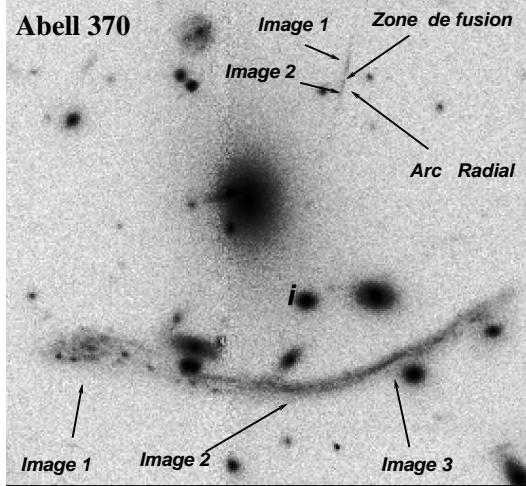


Figure 69: Arcs gravitationnels dans l’amas de galaxies Abell 370 ($z = 0.375$). Le long filament est un arc tangentiel, fusion de trois images d’une source à $z = 0.725$. L’image 1, bien qu’amplifiée, n’est pas déformée. On reconnaît la morphologie d’une galaxie spirale. Les deux autres images sont fortement déformées. A partir des propriétés de ces trois images (position, élongation, rayon de courbure), on peut estimer la masse de la lentille dans un rayon défini par le rayon de courbure. En haut à droite on distingue un cas de fusion de deux images radiales. Les autres objets du champs sont des galaxies appartenant à l’amas de galaxies Abell 370.

et exprime la force de la lentille à produire des effets gravitationnels. Par exemple, pour un amas de galaxies au redshift $z_l = 0.3$ et des sources amplifiées au redshift $z_s = 1$, $D_{os}/(D_{ls}D_{ol}) \approx 3$. Si l’amas est une sphère isotherme de rayon de cœur R_c et avec $M(R_c) = 2 \times 10^{14} M_\odot$, alors :

- pour $R_c = 250$ kpc, $\Sigma_{crit} = 0.05 \text{ g cm}^{-2}$,
- pour $R_c = 50$ kpc, $\Sigma_{crit} = 1.0 \text{ g cm}^{-2}$.

Donc, l’existence d’arcs gravitationnels implique que la matière totale est nécessairement fortement concentrée. La découverte d’arcs gravitationnels fut une surprise car les distributions radiales des galaxies et du gaz ionisé ne montrent pas une très forte concentration centrale.

Pour une sphère isotherme singulière (SIS) de dispersion des vitesses tri-dimensionnelle σ , le potentiel projeté au rayon r , $\varphi(r)$, est :

$$\varphi = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{os}} r \quad (369)$$

et les images sont décrites par l’équation des lentilles :

$$\boldsymbol{\theta}_s = \boldsymbol{\theta}_i - 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{os}} \frac{\boldsymbol{\theta}_I}{|\boldsymbol{\theta}_I|}. \quad (370)$$

La matrice d’amplification est :

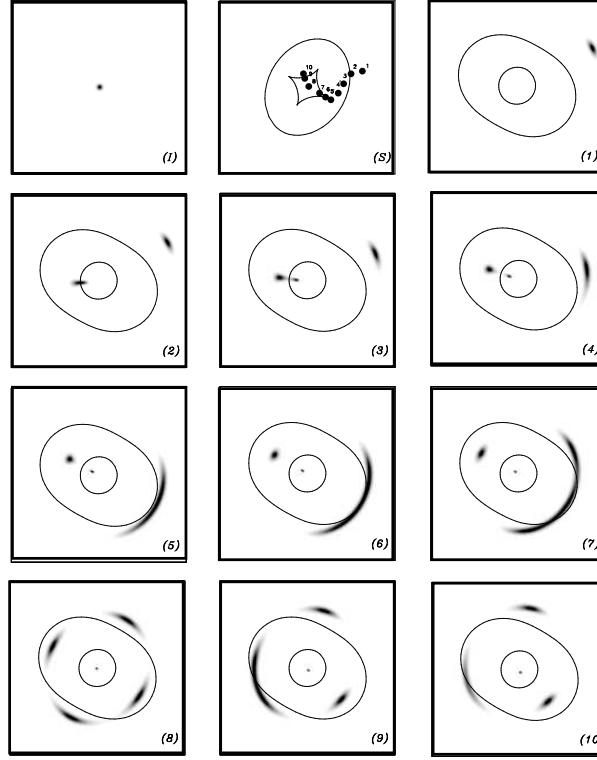


Figure 70: Effet de lentille gravitationnelle fort produit par un potentiel elliptique en fonction de la position de la source. L'image en haut à gauche montre la forme de la source. L'image suivante montre les positions de la source dans son plan source. Les lignes sont les lignes caustiques interne et externe. Pour chaque position, les images suivantes montrent les effets de la lentille. Selon la position de la source, de une à cinq images sont produites. Les positions des lignes critiques sont montrées pour chaque configuration. D'après Kneib 1993.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{os}} \frac{1}{|\theta_i|} \end{pmatrix} \quad (371)$$

et dans ce cas, il n'y a qu'une ligne critique qui est donnée par le *rayon d'Einstein* :

$$\theta_{SIS} = 4\pi \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{os}} \approx 16'' \left(\frac{\sigma}{1000 \text{ km sec}^{-1}} \right)^2 \quad (372)$$

Pour un Univers “Einstein-de Sitter”, avec $z_l = 0.3$ et $z_s = 1$, la masse totale contenue dans un rayon θ est alors :

$$M(\theta) = 0.57 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot \left(\frac{\theta}{30''} \right) \left(\frac{\sigma}{1000 \text{ km sec}^{-1}} \right)^2 \quad (373)$$

et l'amplification s'écrit :

$$\mu(\theta_i) = \frac{\theta_i}{\theta_i - \theta_{SIS}} \quad (374)$$

Dans le cas, par exemple, de l'arc observé dans l'amas de galaxies Abell 370, la masse contenue dans le rayon défini par le rayon de courbure de l'arc est alors :

$$M_{A370}(\theta < 30'') = 1. \times 10^{14} h^{-1} M_\odot \quad (375)$$

Si l'on dispose de suffisamment de sources d'arrière-plan, on s'attend à voir une image cohérente produite par la totalité de ces sources qui tracent le champ de gravitation (à l'instar de la limaille de fer traçant des lignes de champ magnétique sur une feuille de papier). C'est ce que montrent la simulation de la Figure 71 et la spectaculaire image de l'amas de galaxies Abell 1689 de la Figure 72. La reconstruction des champs de gravitation par cette approche est possible, sous certaines hypothèses :

- l'orientation des sources est isotrope,
- l'orientation des sources n'est pas corrélée à leur ellipticité,
- la distribution en distance des sources est connue.

On peut ainsi reconstruire la densité de matière, sachant que la relation entre cisaillement et densité de matière est donnée par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{1}{2} (\partial_{xx} - \partial_{yy}) \varphi + i\partial_{xy}\varphi & \text{cisaillement} \\ \kappa = \frac{1}{2} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \varphi & \text{convergence} \\ \varphi = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln(|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|) d\boldsymbol{\theta}' & \text{potentiel gravitationnel} \end{array} \right. \quad (376)$$

et donc :

$$\gamma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \kappa(\boldsymbol{\theta}') d^2\theta' , \quad (377)$$

où :

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') = \frac{(\theta_2 - \theta'_2)^2 - (\theta_1 - \theta'_1)^2 - 2i(\theta_1 - \theta'_1)(\theta_2 - \theta'_2)}{|(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')|^4} . \quad (378)$$

Cette équation peut être inversée, ce qui donne une relation entre κ , c'est-à-dire la densité de matière, et γ , c'est-à-dire l'ellipticité des galaxies produite par le cisaillement gravitationnel :

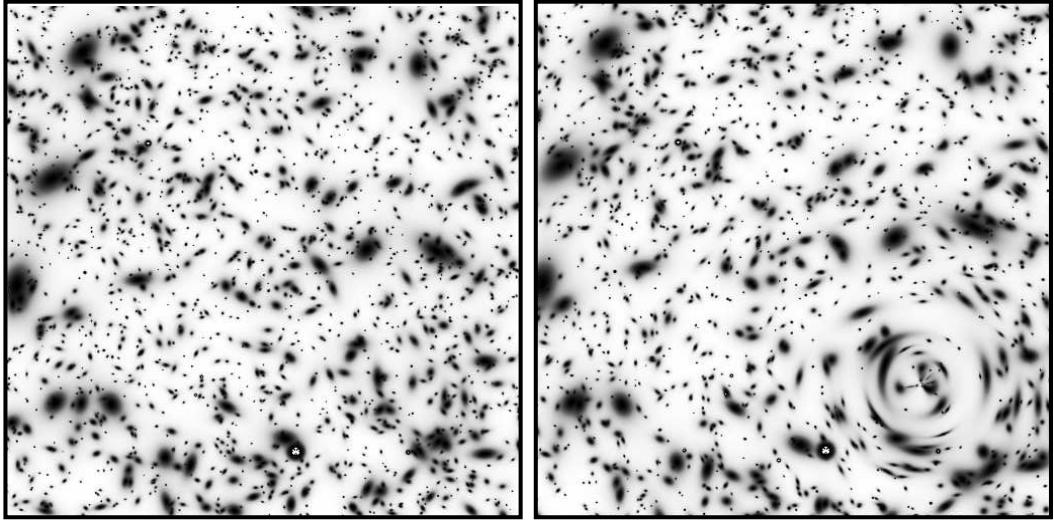


Figure 71: Champ de distorsion gravitationnelle induit par une lentille. La figure de gauche montre une distribution aléatoire de galaxies avec une densité correspondant à celle observée sur les images les plus profondes obtenues sur les grands télescopes. La figure de droite montre la même population telle qu'elle apparaît sous l'effet de la lentille. Le déflecteur est une sphère isotherme de dispersion des vitesses 1300 km s^{-1} à un redshift de $z = 0.15$. Les sources sont à un redshift moyen de $z = 1.3$. Le champ de distorsion est une structure cohérente qui trace la forme du potentiel gravitationnel. D'après Mellier 1999, ARAA 37, 127.

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \Re[\mathcal{D}^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta}')] d^2\boldsymbol{\theta}' + \kappa_0 , \quad (379)$$

où \Re désigne la partie réelle. Si les galaxies sont distribuées aléatoirement en orientation, alors $\langle |\boldsymbol{\epsilon}^S| \rangle_{\theta=0} = 0$ et par conséquent :

$$\langle |\boldsymbol{\epsilon}^I| \rangle = |\mathbf{g}| = \frac{|\boldsymbol{\gamma}|}{1 - \kappa} . \quad (380)$$

Ceci démontre bien qu'à partir des ellipticités et des orientations des galaxies, on peut reconstruire une carte de densité de la matière. Par exemple, dans le cas de l'amas MS1008-1224 ($z_l = 0.31$) où la distance des sources est bien connue, la carte de cisaillement est bien visible et donne l'allure du profil de matière totale :

$$M_{WL}(< \theta) = 6.14 \times 10^{14} h^{-1} M_\odot \bar{\kappa}(< \theta) \theta^2 \quad (381)$$

où θ est la distance radiale angulaire exprimée en minutes d'arc et $\bar{\kappa}$ est la valeur moyenne de κ dans le cercle de rayon θ . Voir Figures 71, 72 et 73.

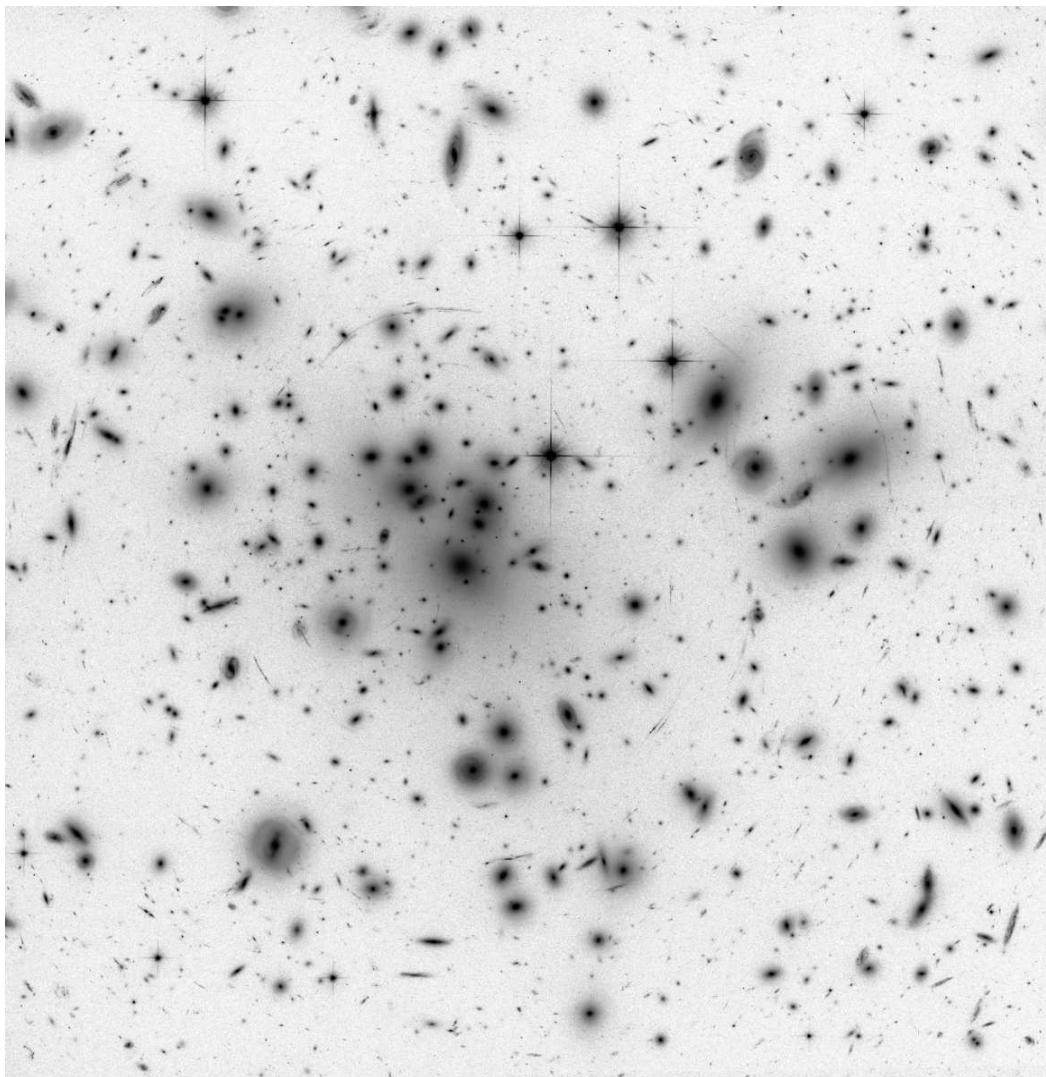


Figure 72: Image profonde de l'amas de galaxies Abell 1689 ($z = 0.18$) obtenue avec la nouvelle caméra ACS du HST. Elle montre l'image d'un champ de distorsion gravitationnelle induit par l'amas de galaxies. La comparaison avec la simulation de la Figure 71 est frappante. Les détails sont suffisamment précis pour construire une cartographie de la matière sombre jusqu'aux échelles des halos associés aux galaxies. D'après Broadhurst et al. 2004, astro-ph/0409132.

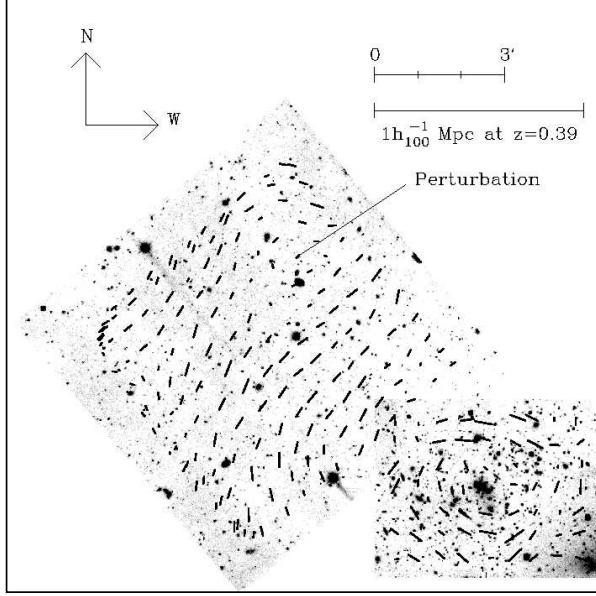


Figure 73: Carte de distorsion gravitationnelle observée autour de l’amas de galaxies Cl0024+1654 ($z_l = 0.38$). Les traits indiquent l’orientation et l’amplitude du cisaillement gravitationnel. La cohérence du champ de cisaillement révèle la morphologie de la distribution de la matière sombre. La perturbation indiquée a été détectée par le cisaillement alors qu’aucune contrepartie optique n’est visible. Cela montre que potentiellement les distorsions gravitationnelles peuvent sonder la matière invisible indépendamment de la distribution de la lumière. D’après Bonnet, Mellier & Fort 1994, ApJ 427, L83.

13.2.4 Les mouvements à grande échelle des galaxies

L’organisation à grande échelle des champs de vitesse est aujourd’hui démontrée. On observe effectivement que les mouvements propres des galaxies ne sont pas aléatoires mais qu’ils constituent d’immenses mouvements cohérents sur des échelles de l’ordre de 100 Mpc. Ces champs de vitesse sont interprétés comme les mouvements induits par des champs de gravitation de structures très massives, comme des superamas de galaxies (voir Figure 21).

Il est possible de cartographier ces mouvements et de les combiner avec les cartes de densité numérique et/ou de densité de lumière des galaxies pour reconstruire le champ de matière responsable de ces flots. Cette chance résulte du fait que dans un Univers en expansion dont les perturbations sont d’origine gravitationnelle, les champs de vitesses induits sont dominés par des composantes radiales dirigées vers le potentiel gravitationnel qui domine l’environnement. L’amplitude de la composante perpendiculaire au gradient du potentiel de la vitesse décroît inversement au facteur d’échelle R . On montre alors que le champ de vitesse est directement relié au contraste de densité de matière, $\delta(\vec{x})$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{H_0 f(\Omega)}{4\pi} \int \frac{\delta(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' , \quad (382)$$

où la fonction f est une expression déterminée empiriquement :

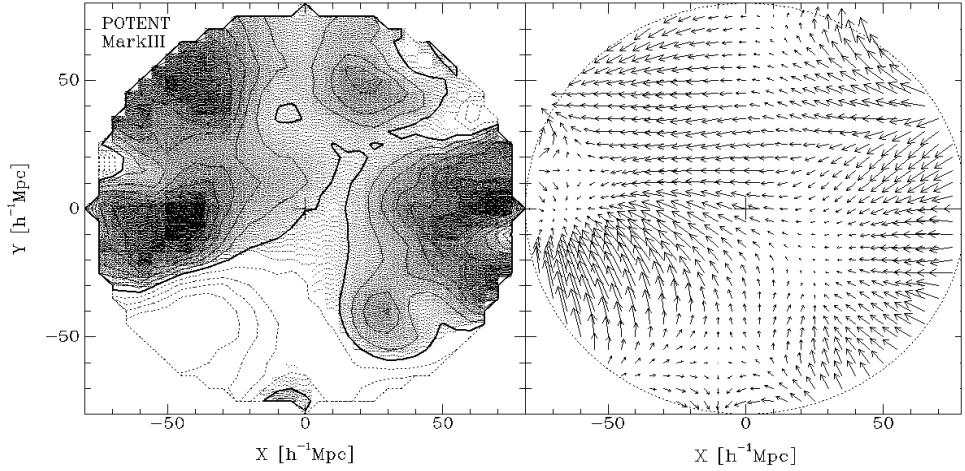


Figure 74: Cartographies du champ de densité de matière et du champ de vitesse des galaxies à partir du catalogue de galaxies Mark III (3300 galaxies). A gauche, le champ de densité. Les contours en tirets sont les zones à contraste de densité négatif. A droite, le champ de vitesse des galaxies projeté dans le plan supergalactique. D'après Dekel et al. 1999, ApJ 522, 1.

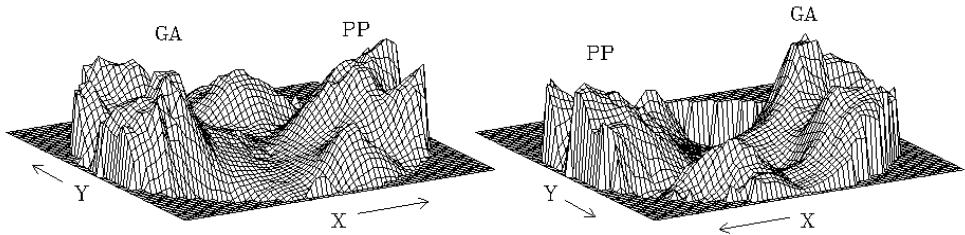


Figure 75: Reconstruction du champ de densité selon deux points de vue dans le plan supergalactique. La dimension du champ atteint $80 h^{-1}$ Mpc. Les deux structures dominantes sont le Grand Attracteur (GA) et le Superamas Perseus-Pisces (PP).

$$f \approx \Omega_m^{0.6} + \frac{\Omega_\Lambda}{70} \left(1 + \frac{\Omega_m}{2} \right) . \quad (383)$$

Ces deux expressions montrent que l'on peut utiliser les champs de vitesse pour mesurer la masse des grandes structures responsables de mouvements à grande échelle des galaxies, ou bien, si l'on parvient à déterminer le champ de densité δ de manière indépendante, pour mesurer Ω .

La principale difficulté est la mesure des vitesses radiales individuelles des galaxies, v_i , qui sont combinées avec la vitesse d'expansion :

$$v_i = v_{tot} - H_0 D , \quad (384)$$

où v_{tot} est la vitesse radiale totale et D la distance de la galaxie considérée. Il est donc crucial de disposer d'indicateurs de distances précis et sans erreurs systématiques.

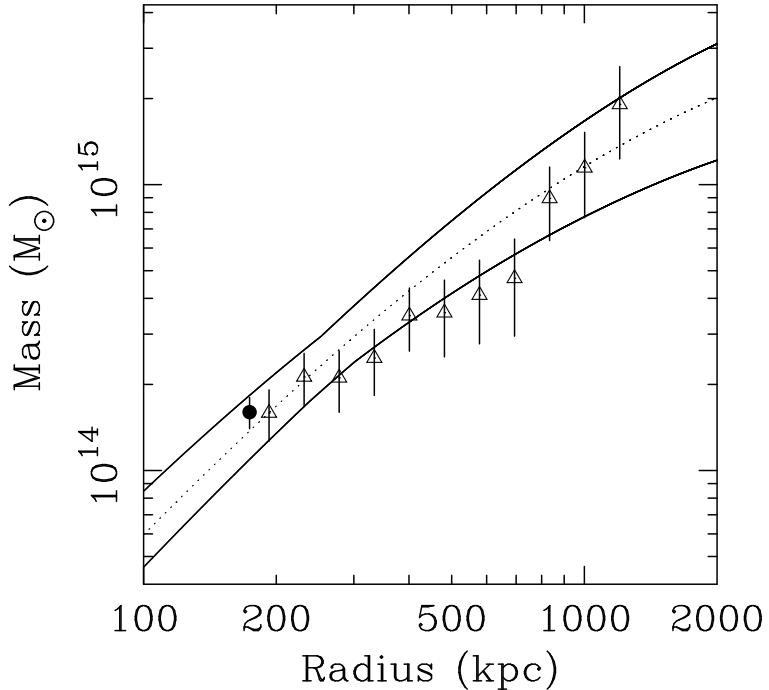


Figure 76: Analyse comparée X et distorsion gravitationnelle de l'amas de galaxies Abell 2390. Les courbes continues définissent le profil radial de masse déduit de l'analyse des données X du satellite Chandra. D'après Allen et al. 2001, MNRAS 324, 877. Les triangles représentent le profil de matière déduit de la cartographie des distorsions gravitationnelles. D'après Squires et al 1996, ApJ 461, 572. Le cercle noir est la masse calculée au rayon critique indiqué par l'arc détecté dans A2390. D'après Pierre et al. 1996, A&A 311, 413. La correspondance des mesures est très satisfaisante.

Cette approche a été initialement utilisée pour analyser la distorsion du champ de vitesse local de l'expansion par la présence du champ de gravité du Superamas Local et de l'amas de galaxies Virgo. Mais c'est sur des catalogues des champs de vitesse (appelés catalogues "4-D" car

Composante/méthode	M/L	échelle	Ω_m
Voisinage solaire	5	1 kpc	$0.003 h^{-1}$
Cœur des galaxies elliptiques	10	2 kpc	$0.007 h^{-1}$
Analyse virielle des galaxies elliptiques	30	10 kpc	$0.02 h^{-1}$
Courbe de rotation des galaxies spirales	30	10 kpc	$0.02 h^{-1}$
Groupes de galaxies	200	500 kpc	$0.13 h^{-1}$
Amas de galaxies	300	1Mpc	$0.20 h^{-1}$
Abondance de baryons (nucléosynthèse)	-		$0.01\text{--}0.05 h^{-2}$
Composante stellaire	-		$0.0030 h^{-1}$
Gaz inter-galactique HI	-		$0.0004\text{--}0.010 h^{-1}$
Fond diffus cosmologique	-	-	$0.000023 h^{-2}$
Chute sur Virgo	-	15 Mpc	$0.1\text{--}0.4$
Champs de vitesse	-	20 Mpc	> 0.5

Table 3: Estimation du paramètre de densité de certaines composantes dominantes de l’Univers et dans l’Univers actuel (ces fractions dépendent de l’histoire de la formation des galaxies). La ligne intermédiaire donne la contribution à la densité d’énergie du fond diffus cosmologique.

ils fournissent les positions projetées sur le ciel, la distance et la vitesse individuelle de chaque galaxie) que les résultats les plus intéressants ont été publiés. On a pu ainsi reconstruire les champs de vitesse de notre voisinage et mettre en évidence les structures responsables de ces accrétions. Les Figures 74 et 75 montrent la reconstruction des champs de vitesse et de matière autour de notre Groupe Local sur des échelles de $80 h^{-1}$ Mpc. Les grandes structures dominantes sont le Grand Attracteur et le Superamas Perseus-Pisces qui doivent atteindre des masses dépassant $10^{15} M_\odot$.

Les mesures de Ω déduites de ces analyses donnent $\Omega > 0.3$. Cependant elles sont sensibles au *facteur de biais* qui relie les contrastes de densité numérique de galaxies au contraste de masse et qui intervient dans l’inversion de l’Equation (382).

13.2.5 En résumé

La Figure 76 est très intéressante car elle montre la concordance des mesures obtenues avec les trois estimateurs “X”, “weak lensing” et “strong lensing”. Ce sont des comparaisons indispensables pour valider chacune de ces méthodes. Les trois méthodes montrent clairement la présence de quantités de matière supérieures à celle liée à la matière lumineuse, et indique donc la présence de matière sombre. La Table 3 et la Figure 77 résument les méthodes et les valeurs de M/L et de Ω déduites de ces analyses.

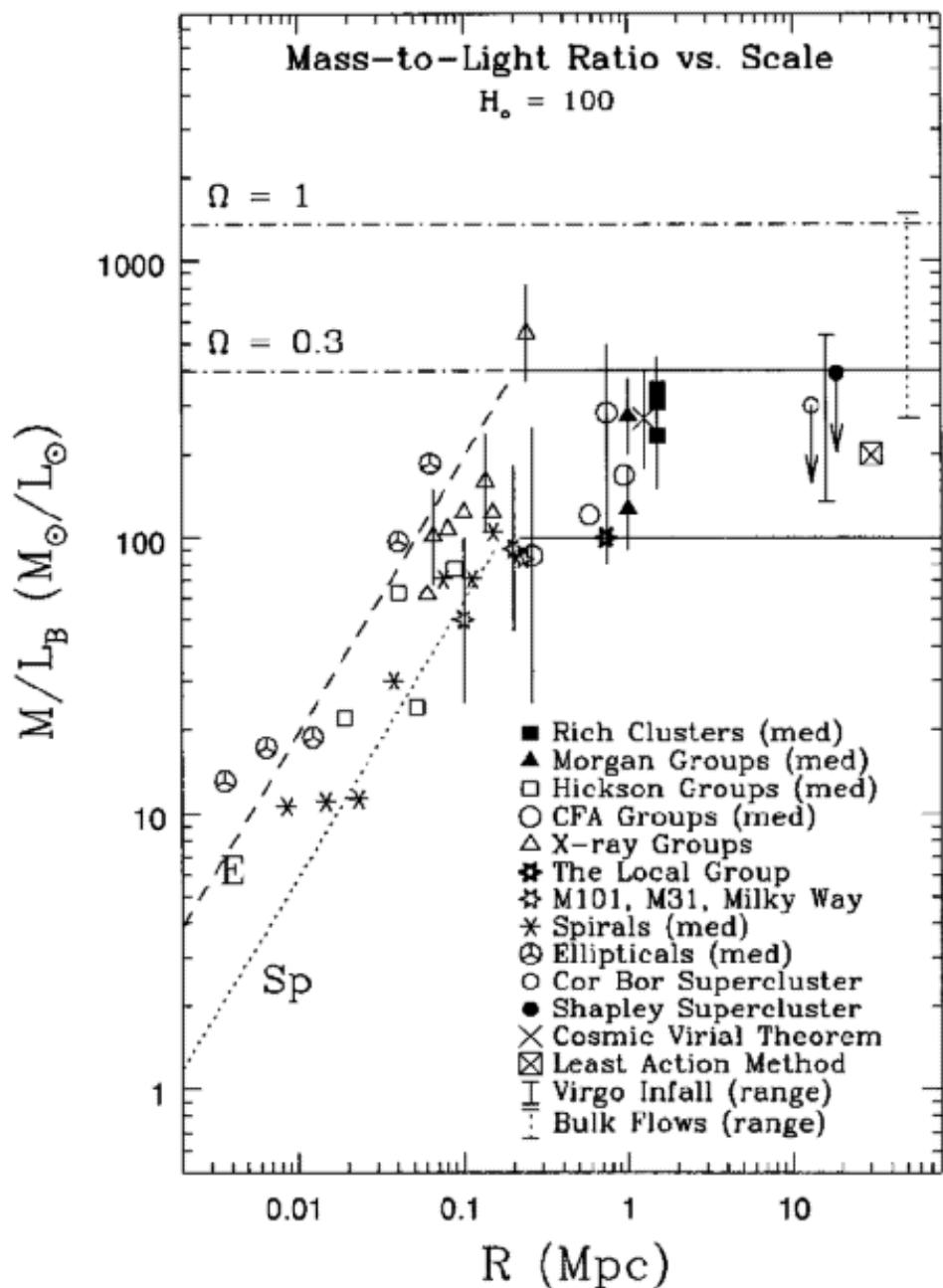


Figure 77: Évolution du rapport M/L en fonction de l'échelle de la structure. Les symboles E et Sp se rapportent aux galaxies elliptiques et spirales. Les champs de vitesse à grandes échelles se rapportent aux données *Virgo Infall* et *Bulk Flows*. La montée progressive du M/L est claire. Cependant, il n'y a pas de preuves que Ω tende vers 1, sauf peut être marginalement pour les champs de vitesse.

13.3 Mesure du couple Ω_m, Ω_Λ

Les dernières années (depuis à peu près l'an 2000) ont été particulièrement enthousiasmantes en ce qui concerne la mesure des paramètres Ω_m et Ω_Λ . Les observations des supernovae ont amorcé en 1998 ce bouleversement en mettant en évidence l'accélération de l'Univers. Elle conduit inévitablement à conclure que la constante cosmologique doit être non nulle. Les spectaculaires résultats de BOOMERANG, MAXIMA, WMAP et PLANCK montrent que notre Univers doit être plat, ce qui implique l'existence d'une constante cosmologique. Enfin, les premières détections des effets de distorsion gravitationnelle cosmologique apportent des toutes nouvelles contraintes sur Ω_m et la normalisation du spectre de puissance des fluctuations, σ_8 et semblent montrer que ce champ des fluctuations initiales était gaussien.

Compte tenu des équations décrites en Sections 9, 10 et 11, on s'attend donc à des prédictions différentes des modèles standards (sans constante cosmologique) sur tous les observables : magnitudes apparentes, comptages de galaxies, évolution de la fraction d'amas de galaxies, champs de vitesse à grande échelle, fluctuations des anisotropies du fond diffus cosmologiques. La Figure 57 illustre la multitude de modèles qu'engendre l'introduction d'une constante cosmologique. Par la suite, on décrit comment certaines observables peuvent effectivement apporter des contraintes sur ces deux paramètres.

13.3.1 Les supernovae de type Ia

Les supernovae de type Ia (SNIa) sont des naines blanches qui explosent sous l'effet de l'interaction avec un compagnon proche avec lequel elle forme un système double. Le spectre des SNIa est complexe et évolue dans le temps. Il diffère des autres supernovae par la présence de raie de SiII. Les courbes de lumière des SNIa possèdent des propriétés remarquables et très homogènes. Voir Figure 78.

Leur luminosité absolue à la période du maximum d'éclat et le profil de décroissance après le maximum sont les mêmes pour toutes ces supernovae et atteint les valeurs caractéristiques $M_B = -19.6 \pm 0.1$ ou $M_I = -19.3 \pm 0.1$. Il en résulte en particulier que le module de distance des SNIa au maximum est une fonction qui ne dépend que du couple $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ si l'on connaît leur redshift :

$$m - M = \text{Cte} + \log [d_A(z, \Omega_m, \Omega_\Lambda)] \quad (385)$$

Le diagramme de Hubble d'un échantillon de supernovae réparties dans un grand intervalle de redshift peut donc en principe être construit et comparé aux prédictions de différents modèles.

Les mesures actuelles établies sur la base de deux grands programmes indépendants de détection et de suivi de supernovae lointaines donnent des résultats concordants. Voir Figures 79 et 80. Sur environ 2 échantillons d'environ 200 supernovae, il ressort que $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. Plus précisément :

- le modèle $(\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0)$ est exclu,
- $\Omega_\Lambda > 0$ (significatif à 3 σ),

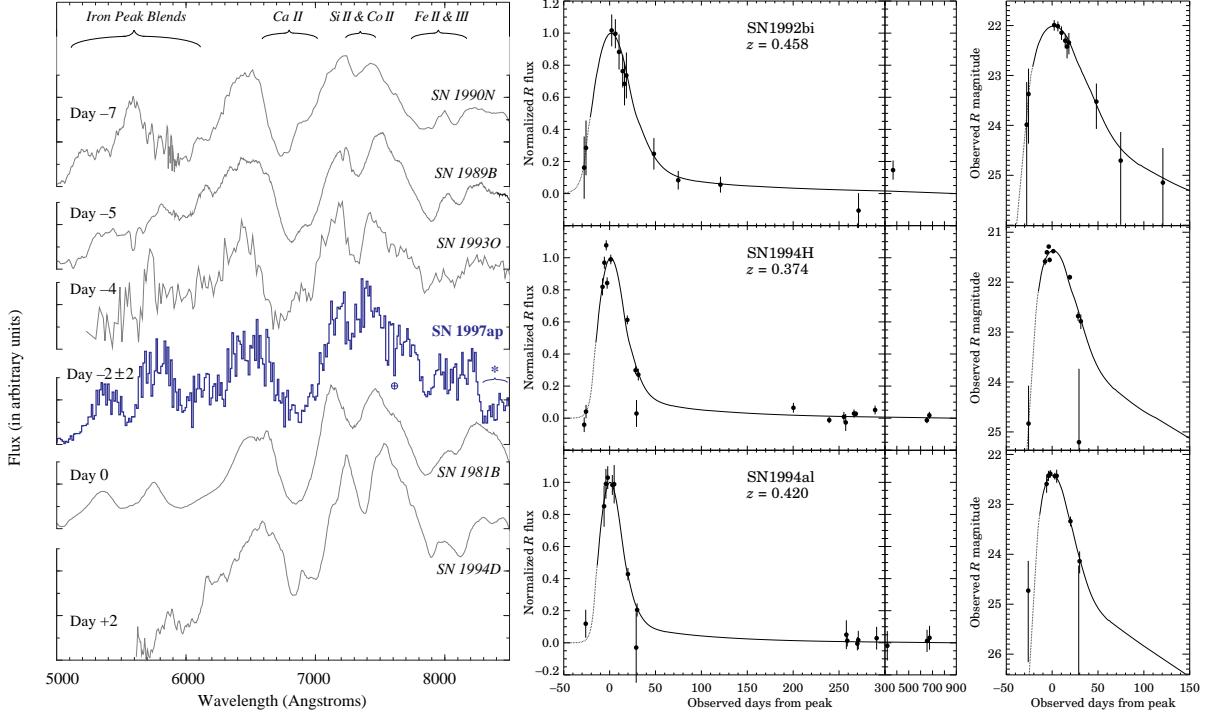


Figure 78: A gauche, spectres de SNIa à différents redshifts. A droite, courbes de lumière montrant les magnitudes apparentes. Elles diffèrent puisque ces supernovae sont à des redshifts différents.

- $q_0 < 0$ et l'Univers est donc en accélération
- si $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, alors $\Omega_m \approx 0.3$, $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ et $q_0 \approx -0.55$.

Une étude approfondie des sources de biais systématiques est en cours à l'heure actuelle. En particulier pour vérifier si les SNIa ont les mêmes propriétés pour tous redshifts, si les effets d'extinction internes affectent les luminosités mesurées, si les effets de lentille gravitationnelle ne biaissent pas l'échantillon ou si les SNIa ont des propriétés qui dépendent de la morphologie de la galaxie hôte. Pour le moment aucun de ces effets ne semble pouvoir remettre en cause les résultats.

13.3.2 La fraction des quasars amplifiés

L'Equation (268) décrit comment le facteur d'expansion évolue. Il est assez facile de décrire l'effet de Ω_Λ qui peut s'opposer à Ω_m . A grand redshift, le terme de matière domine l'expansion car il varie comme z^3 alors que le terme Ω_Λ varie comme z^2 . Comme $\Omega_m \rightarrow 1$ quand z croît, l'évolution temporelle du facteur d'échelle $R(t)$ est similaire à celle d'un modèle $\Omega_m \approx 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$. L'Univers semble avoir une expansion qui ralentit comme un Univers fermé. Mais progressivement z augmente, le terme Ω_Λ devient de plus en plus important et contribue majoritairement à l'expansion jusqu'à inverser sa courbure. Dans le cas d'un Univers plat, pour $z \approx 0.2$, le terme Ω_Λ peut contrebalancer Ω_m et il existe donc une phase où l'Univers a une expansion très lente.

Imaginons par exemple que la valeur de Ω_Λ soit assez élevée pour contrebalancer Ω_m et inverser très significativement le sens de l'accélération de l'expansion. Il existe une période dans l'histoire

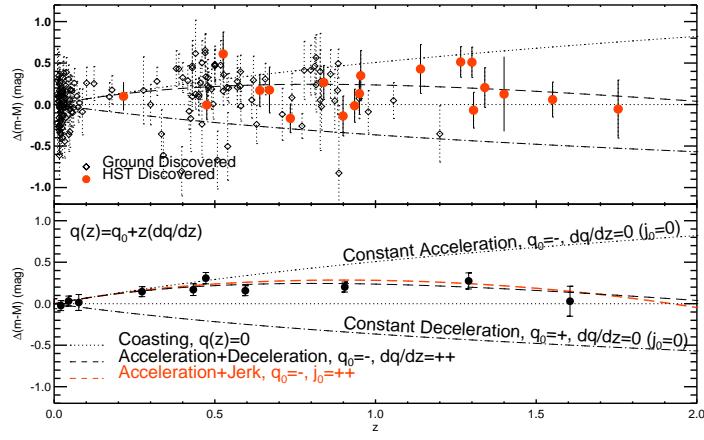


Figure 79: Diagramme de Hubble résiduel construit à partir d'un échantillon de ~ 200 SNIa réparties en redshift et comparées avec différents modèles cosmologiques. En abscisse, le redshift de la supernova, en ordonnée, son écart de magnitude par rapport à un modèle de référence avec $q_0 = 0$. Haut: SNIa entre les redshifts 0.0 et 1.7, obtenues à partir du sol (losanges) et à partir du HST (points rouges). Bas: les points noirs sont des points médians par boîtes fixes en redshift. Les observations montrent un désaccord net avec des modèles à décélération ($q_0 > 0$) ou à accélération ($q_0 < 0$) constante. D'après Riess et al. 2004, ApJ 607, 665.

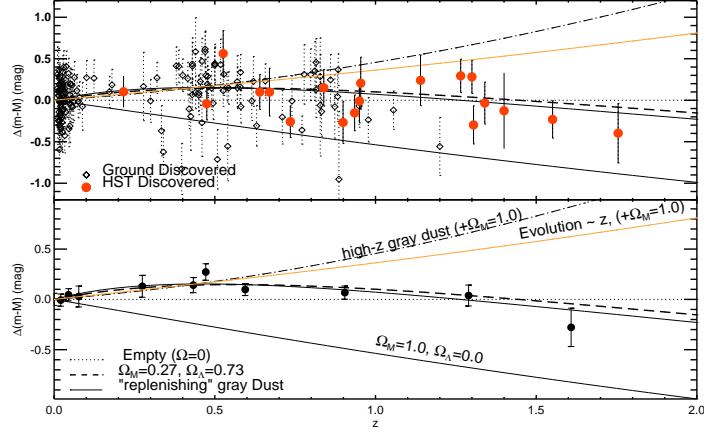


Figure 80: Diagramme de Hubble résiduel construit avec les mêmes données que dans la Figure 79 et comparées avec différents modèles cosmologiques. Données et modèles sont montrés par rapport à un modèle de référence avec $\Omega = 0$. Les courbes continues sont les prédictions des modèles avec différentes valeurs de $(\Omega_m; \Omega_\Lambda)$. Les observations sont en accord avec le modèle $\Omega_m = 0.27$ et $\Omega_\Lambda = 0.73$ (trait gras pointillé). D'après Riess et al. 2004, ApJ 607, 665.

de l’Univers où les structures et les galaxies se forment dans un volume d’Univers quasi-constant. L’Univers accumule donc un grand nombre de galaxies, qui sont autant de lentilles gravitationnelles potentielles, dans un intervalle de redshift très réduit. Toutes ces galaxies vont donc produire des effets de lentille gravitationnelle sur les quasars d’arrière plan. On s’attend donc à une forte dépendance du nombre de quasars amplifiés en fonction de l’amplitude de la constante cosmologique.

L’analyse statistique du nombre de quasars amplifiés montre que la fréquence observée du phénomène est incompatible avec $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$. Pour le moment les limites les plus solides donnent $\Omega_\Lambda < 0.9$ (Malhotra et al. 1997). Il est en fait assez compliqué de produire une contrainte car les échantillons de quasars sont peu nombreux et les biais possibles mal contrôlés. Les progrès à venir proviendront sans doute des catalogues 2dF et SDSS (on attend plus de 100’000 quasars) ainsi que du grand relevé profond du VLT VIRMOS, car ils produiront de très gros échantillons homogènes de quasars.

13.3.3 Les arcs gravitationnels

Les arcs gravitationnels, comme la fraction de quasars multiples à grande séparation angulaire, ou bien la position de lignes critiques dans les amas de galaxies, permettent de mesurer Ω_Λ grâce à un effet de convergence du banc d’optique dont l’amplitude dépend de Ω_m et Ω_Λ . Pour l’illustrer, considérons le cas d’une sphère isotherme singulière. Nous avons vu (Equation 372) que la position de la ligne critique varie $\theta \propto \sigma^2 D_{LS}/D_{OS}$. Si par chance nous observions deux arcs gravitationnels provenant de deux sources à des redshifts différents, alors le rapport R_l des lignes critiques des sources 1 et 2 serait donné par :

$$R_l = \frac{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_1}{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_2}, \quad (386)$$

qui est une fonction ne dépendant que de Ω_m et Ω_Λ si les redshifts des deux arcs sont connus.

Malheureusement aucun cas idéal comme celui-ci n’a été rencontré. Il est même assez vraisemblable qu’il n’existe pas car les amas de galaxies ne sont pas vraiment des sphères isothermes. Cependant, on peut généraliser cette méthode à des configurations plus complexes, comme par exemple lorsqu’un arc a un redshift connu et que la ligne critique des sources lointaines est aussi connue. Les résultats sont pour le moment très incertains. Dans le cas de l’amas Cl0024+1654, ce test donne $\Omega_\Lambda \approx 0.6 - 0.7$ si $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$. Mais la méthode dépend fortement de la distribution en redshift des sources et du modèle de la lentille. Une alternative est de considérer des triplets d’arclets situés approximativement à la même position projetée dans le plan de la lentille. Ces triplets voient alors le même champ déflecteur ce qui permet de briser la dégénérescence induite par la distribution en densité du potentiel.

13.3.4 Les effets de distorsion gravitationnelle cosmologique

L’amplitude des effets de lentille gravitationnelle produits par les grandes structures de l’Univers est infime car les contrastes de densité sont de l’ordre de 10^{-2} . Cependant, ils s’accumulent progressivement pendant tout le trajet des photons. La matière sombre peut ainsi déformer les galaxies

lointaines et le champ cohérent de déformation induit peut être observé et analysé sur les grands relevés photométriques du ciel.

L'angle de défexion induit par les interactions cumulées sur une ligne de visée est :

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}, w) = \frac{\delta \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}, w)}{r_k(w)} = \frac{2}{c^2} \int_0^w dw' \frac{r_k(w-w')}{r_k(w)} \nabla_{\perp} \Phi [r_k(w') \boldsymbol{\theta}, w'] . \quad (387)$$

où r_k est la distance angulaire comobile décrite par l'Equation (271), $w = dr/\sqrt{1 - kr^2}$ la distance comobile et \mathbf{x} la séparation transverse comobile. Sachant par ailleurs que :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_i} \quad (388)$$

on en déduit l'expression générale de la convergence, κ :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}, w) = \frac{1}{c^2} \int_0^w dw' \frac{r_k(w-w') r_k(w')}{r_k(w)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Phi [r_k(w') \boldsymbol{\theta}, w'] . \quad (389)$$

Les dérivées secondes de Φ expriment le Laplacien du potentiel comobile associé à une perturbation $\delta \times \bar{\rho}$ située sur la ligne de visée. Le terme $R(t)$ vient du fait qu'il s'agit du Laplacien comobile et donc $\nabla_x = R \nabla_r$. Et donc :

$$\Delta \Phi = 4\pi G R^2(t) \bar{\rho} \delta = 4\pi G R^2(t) \frac{\bar{\rho}_0}{R^3(t) \rho_c} \rho_c \delta = 4\pi G R^2(t) \Omega_0 \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{1}{R(t)} \delta \quad (390)$$

soit :

$$\Delta \Phi = \frac{3H_0^2}{R(t)} \Omega_0 \delta \quad (391)$$

Pour des perturbations faibles du champ de matière (voir la théorie des perturbations), on peut développer en série de Taylor le contraste de densité de matière δ et exprimer κ au premier ordre :

$$\kappa^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z) = \frac{3}{2} \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 \Omega_0 \int_0^z \frac{dz}{(1+z) H(z)} \frac{d_A(z', z) d_A(z')}{d_A(z)} \delta_{mass}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}, z) , \quad (392)$$

où les d_A sont les distances angulaires données par l'Equation (275). On peut alors montrer que dans le cas d'un spectre de fluctuation de la forme $P(k) \propto k^n$ des sources situées à une distance $z = z_s$ on a :

1. Variance du champ de convergence :

$$\langle \kappa^2(\boldsymbol{\theta}) \rangle^{1/2} \approx 0.01 \sigma_8 \Omega_0^{0.8} \left(\frac{\theta}{1 \text{deg}} \right)^{-\frac{n+2}{2}} z_s^{0.75} ; \quad (393)$$

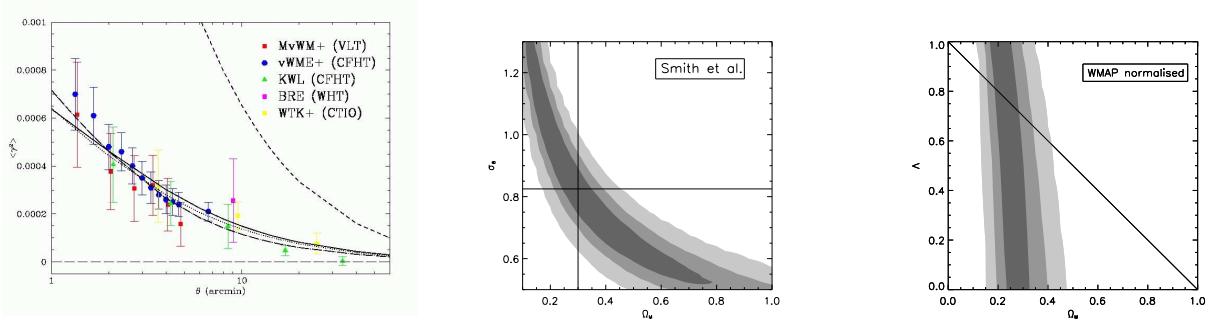


Figure 81: A gauche, mesures de la variance du cisaillement gravitationnel en fonction de l'échelle angulaire. Les courbes représentent des modèles cosmologiques. On remarque en particulier le modèle CDM standard normalisé sur COBE qui est rejeté à plus de 5σ . D'après Maoli et al. 2001, A&A 368, 766. Au centre et à droite, les contraintes sur $\Omega_m - \sigma_8$ et $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ obtenues avec le relevé VIRMOS-DESCART portant sur 12 deg². D'après van Waerbeke et al. 2005, A&A 429, 75.

2. Relation entre la variance de κ et celle de γ :

$$\langle \kappa^2 (\theta) \rangle = \langle \gamma^2 (\theta) \rangle ; \quad (394)$$

3. Dissymétrie (skewness) du champ de convergence :

$$S_3 (\kappa) \approx 40 \Omega_0^{-0.8} z_s^{-1.35} . \quad (395)$$

Les propriétés (1) et (3) indiquent que si on parvient à mesurer la variance et la dissymétrie (ou la skewness de la distribution), on peut alors obtenir simultanément Ω_0 et σ_8 (la normalisation du spectre de puissance des fluctuations). La Propriété (2) nous indique qu'on peut mesurer la variance de κ à partir de celle de γ . Or, en régime de distorsion gravitationnelle faible, γ est directement l'ellipticité mesurée des galaxies. Donc, on peut sonder les modèles d'Univers par la cartographie des ellipticité des galaxies du ciel.

La Figure 81 montrent les résultats actuels. Les premières mesures de la dissymétrie (skewness) effectuées sur le relevé VIRMOS-DESCART du CFHT en janvier 2003 permettent de casser la dégénérescence. Elles conduisent à une contrainte solide $\Omega_m < 0.4$ (90 % c.l.).

13.3.5 Contrainte des anisotropies du fond diffus cosmologique

L'origine des fluctuations du fond cosmologique peut être décrite avec grands détails. On se contente ici des donner des explications qualitatives sur leur origine.

Bien que le fond diffus cosmologique soit, globalement, remarquablement isotrope, des anisotropies d'origine cosmologique s'ajoutent aux contributions de notre Galaxie et à l'effet Doppler dû au mouvement du Groupe Local. Voir Figure 82. Ces fluctuations sont engendrées par des perturbations sur les photons émis par la surface de dernière diffusion à $z \approx 1000$ (anisotropies primaires) ou bien par des effets de diffusion le long de la ligne de visée (anisotropies secondaire). Suivant la nature des perturbations, des échelles angulaires différentes sont attendues, ce qui permet de reconstituer

Méthode	$(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$
SNIa (High- z Supernovae Team)	$\Omega_m \approx 0.24, \Omega_\Lambda \approx 0.7$
SNIa (Supernovae Cosmology Project)	$\Omega_m \approx 0.28, \Omega_\Lambda \approx 0.7$
Quasars	$\Omega_\Lambda < 0.9$
Arcs/Deplétion	$\Omega_m \approx 0.3, \Omega_\Lambda \approx 0.6 - 0.7$
Boomerang + Maxima + WMAP	$\Omega_m + \Omega_\Lambda \approx 1$
Distortions gravitationnelles cosmologiques	$0.1 < \Omega_m < 0.4$ $0.5 < \sigma_8 < 1.0$
2dF : distorsion en redshift	$\Omega_m \approx 0.3$ et $b \approx 1$
Amas de galaxies	$\Omega_m < 0.4$

Table 4: Un court résumé des estimations de la constante cosmologique. Les contraintes des quatre premières lignes sont données dans l'hypothèse où $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

la contribution de chacune d'elles en analysant leur amplitude respective en fonction de l'échelle angulaire.

Il existe trois types de contributions primaires :

1. Les perturbations gravitationnelles (effet Sachs-Wolfe). Elles sont produites à l'émission de photons piégés dans des régions denses de la surface de dernière diffusion. Ces photons subissent un effet de décalage spectral gravitationnel pour s'extraire du champ de gravité des régions denses, ce qui produit une variation de température du corps noir :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\Phi}{3c^2}. \quad (396)$$

On comprend que ce phénomène dépende des paramètres Ω_m et Ω_Λ puisqu'il dépend des fluctuations du champ de densité.

2. Les perturbations de vitesse (ou Doppler) produites par les mouvements du plasma à la surface de dernière diffusion. Elles engendrent des fluctuations de la forme :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta v}{c} \quad (397)$$

et enfin,

3. les perturbations adiabatiques produites par la compression du champ de rayonnement dans les régions de haute densité qui accroît sa température. L'accroissement de température retarde localement la recombinaison, qui se produit donc à un décalage spectral plus faible. La fluctuation de température est directement donnée par :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta z}{1+z}. \quad (398)$$

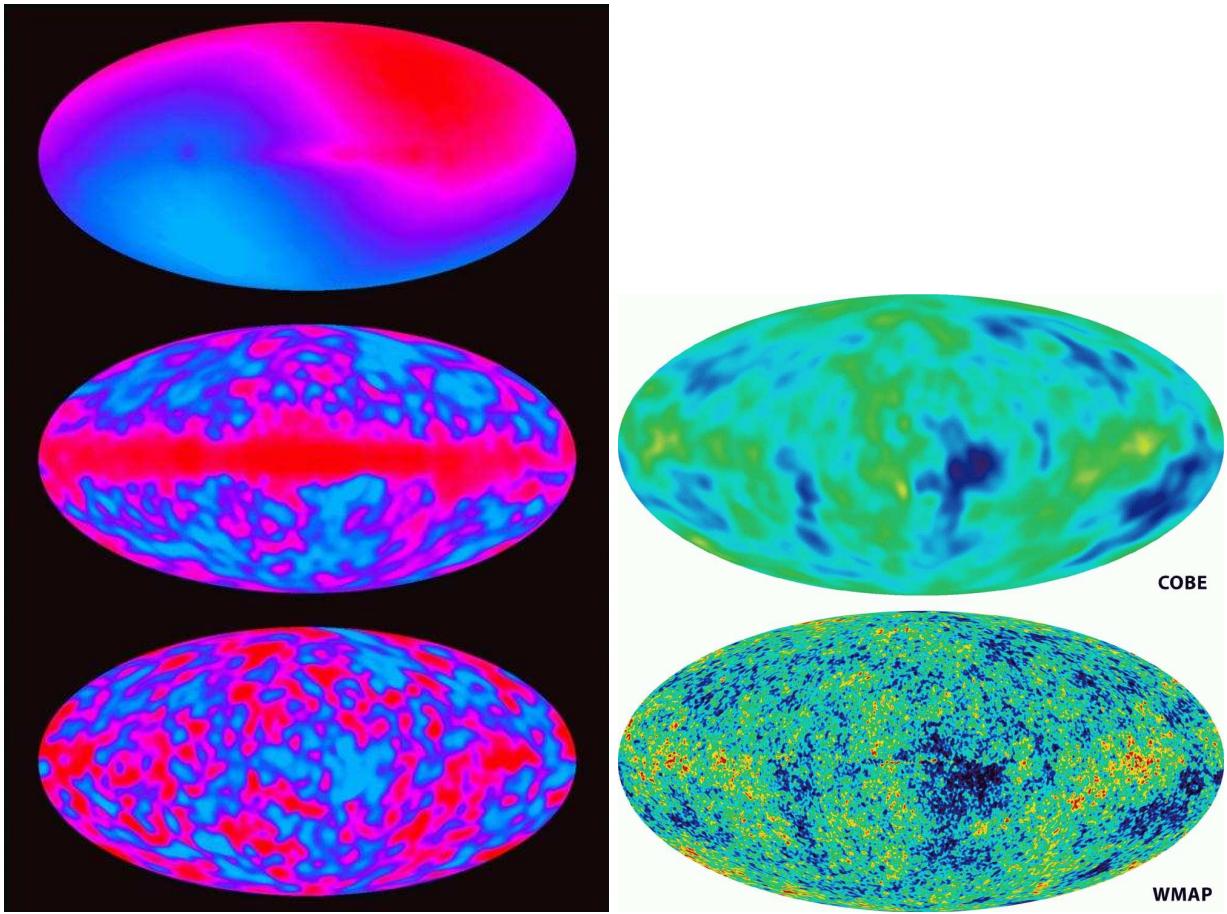


Figure 82: Carte de l'instrument DMR du satellite COBE montrant les anisotropies du fond de rayonnement cosmique micro-onde. Figures de gauche : en haut la composante dipolaire, signature du mouvement du Groupe Local. Au milieu, la contribution de notre Galaxie. En bas, la carte des anisotropies cosmologiques. Figures de droite : comparaison des cartes finales de COBE et WMAP. D'après Bennett et al. 2003, ApJS 148, 97; voir aussi les quatre papiers suivants : Komatsu et al. arXiv:0803.0547, Dunkley et al. arXiv:0803.0586, Nolta et al. arXiv:0803.0593, and Hinshaw et al. arXiv:0803.0732 pour l'analyse des cinq premières années d'observations de WMAP.

Les trois effets n'affectent pas les mêmes échelles. L'effet Sachs-Wolfe perturbe les grandes échelles angulaires, les effets Doppler et adiabatiques les échelles intermédiaires. La mesure des fluctuations selon les échelles permet donc en principe de contraindre les modèles cosmologiques.

Les amplitudes des termes d'anisotropie en fonction de l'échelle angulaire sont évaluées en décomposant les fluctuations de température en harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (399)$$

dont les moments multipolaires, $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ peuvent être reliés au spectre de fluctuation de densité $P(k)$. En particulier aux grandes échelles angulaires comme celles mesurées par COBE, on a :

Rayon de Hubble	4.222 Gpc
Distance comobile limite future de visibilité	19.027 Gpc
Distance comobile de la fin de la période d'inflation	14.283 Gpc
Distance comobile de l'époque de découplage	14.165 Gpc
Distance comobile de la recombinaison	10.000 Gpc
Distance comobile à $z = 6$	8.422 Gpc
Distance comobile à $z = 3$	6.461 Gpc
Distance comobile à $z = 1$	3.317 Gpc
Distance comobile à $z = 0.2$	0.809 Gpc

Table 5: Distances caractéristiques de quelques événements dans un Univers parmi les plus probables, compte tenu des observations actuelles.

$$C_l = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{H_0}{c} \right)^4 \int_0^\infty \frac{P(k)}{k^2} j_l^2(2ck/H_0) dk , \quad (400)$$

où les j_l sont les fonctions de Bessel sphériques.

Le terme dipolaire est dominant mais est dû au mouvement du Groupe Local (voir Figure 82, première figure en haut à gauche) qui engendre un décalage Doppler :

$$T(\theta) = T_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \quad (401)$$

dont l'amplitude correspond à $v = 600 \text{ km s}^{-1}$.

Le premier terme cosmologique est la composante quadrupolaire. Les mesures les plus récentes sont celles des expériences embarquées sur COBE, WMAP et PLANCK (satellites), BOOMERANG, MAXIMA et ARCHEOPS (ballons), DASI et CBI (interféromètres). Elles ont détecté le premier pic acoustique avec certitude, et parmi ces expériences certaines montrent le second et troisième pics (notamment WMAP). Voir les Figures 83 et 84. Grâce à ces données nous avons aujourd'hui des arguments très forts en faveur d'un Univers à courbure nulle. Les résultats les plus spectaculaires sont ceux de WMAP qui permettent de contraindre avec précision plusieurs paramètres simultanément (voir la Figure 84). Le satellite Planck devrait fournir, en 2013 environ, des résultats couvrant la totalité du ciel, ceci avec une résolution et une sensibilité exceptionnelle.

13.4 Synthèse

Les analyses combinées qui utilisent conjointement toutes les observations s'accumulent progressivement et dessinent un scénario qui semble produire un ensemble sans contradiction évidente. Toutefois, le nombre de paramètres qui décrivent les propriétés de l'Univers et de son évolution est

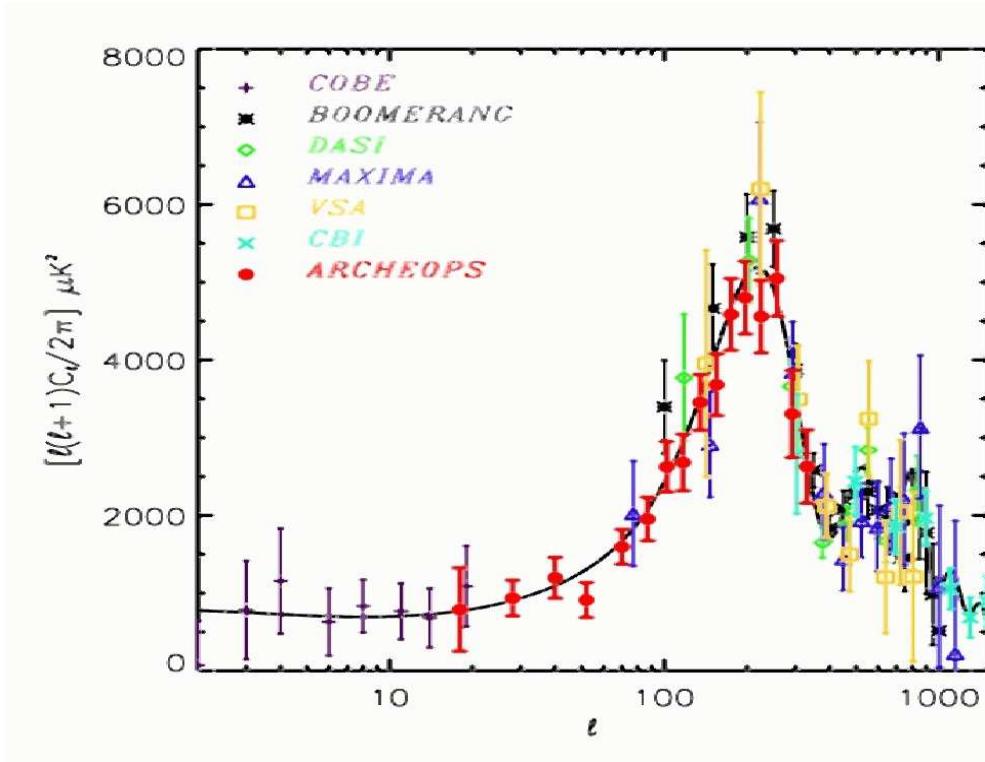


Figure 83: Mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique à différentes échelles : une synthèse des résultats obtenus par les meilleurs instruments avant l'arrivée de WMAP. La ligne continue est le meilleur modèle CDM ajustant tous ces points. D'après Benoit et al. 2003, A&A 399, L25.

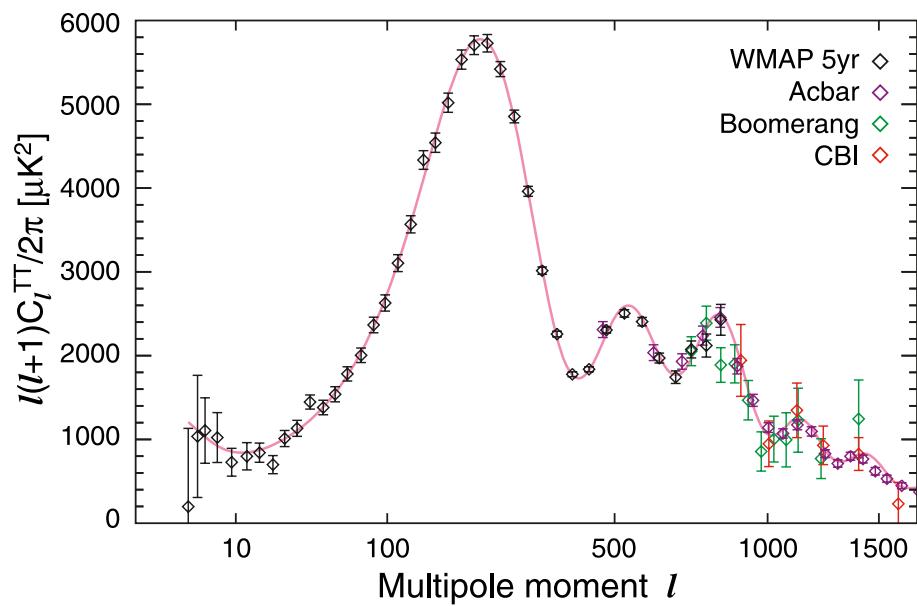


Figure 84: Mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique à différentes échelles : synthèse avec les données de WMAP et des expériences interférométriques. D'après Nolta et al. arXiv:0803.0593

Description	Symbol	Valeur	erreur + / -
Densité totale	Ω_{tot}	1.02	0.02 / 0.02
Equation d'état du champ de quintessence	w	< -0.78	95 % CL
Densité d'énergie du vide	Ω_Λ	0.73	0.04 / 0.04
Densité de baryon	$\Omega_b h^2$	0.0224	0.0009 / 0.0009
Densité de baryon	Ω_b	0.044	0.004 / 0.004
Densité de baryon (cm^{-3})	n_b	2.5×10^{-7}	$0.1/01 \times 10^{-7}$
Densité de matière	$\Omega_m h^2$	0.135	0.008 / 0.009
Densité de matière	Ω_m	0.27	0.04 / 0.04
Densité de neutrino légers	$\Omega_\nu h^2$	< 0.0076	95 % CL
Temperature du CMB (K) (Déduit de COBE)	T_{cmb}	2.725	0.002 / 0.002
Densité de photons CMB (cm^{-3}) (Déduit de COBE)	n_γ	410.4	0.9 / 0.9
Rapport baryon-sur-photon ratio	η	6.1×10^{-10}	$0.3/0.2 \times 10^{-10}$
Rapport baryon-sur-matière	$\Omega_b \Omega_m^{-1}$	0.17	0.01 / 0.01
Fluctuation d'amplitude dans $8h^{-1} \text{ Mpc}$	σ_8	0.84	0.04 / 0.04
Calibration de l'abondance des amas de bas z	$\sigma_8 \Omega_m^{0.5}$	0.44	0.04 / 0.05
Normalisation du spectre de puissance (à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	A	0.833	0.086 / 0.083
Indice spectral scalaire (à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	n_s	0.93	0.03 / 0.03
Pente de l'indice spectral (à $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$)	$dn_s/d \ln k$	-0.031	0.016 / 0.018
Rapport tenseur-sur-scalaire (à $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$)	r	< 0.90	95 % CL
Redshift du decouplage	z_{dec}	1089	1 / 1
Epaisseur du decouplage (FWHM)	Δz_{dec}	195	2 / 2
Constante de Hubble	h	0.71	0.04 / 0.03
Age de l'Univers (Gyr)	t_0	13.7	0.2 / 0.2
Age au decouplage (kyr)	t_{dec}	379	8 / 7
Age à la réionisation (Myr, 95 % CL))	t_r	180	220 / 80
Durée du decouplage (kyr)	Δt_{dec}	118	3/2
Redshift de l'égalité matière-énergie	z_{eq}	3233	194 / 210
Profondeur optique à la réionisation	τ	0.17	0.04 / 0.04
Redshift de la réionisation (95 % CL)	z_r	20	10 / 9
Horizon accoustique au decouplage ($^\circ$)	θ_A	0.598	0.002 / 0.002
Distance diamètre angulaire du découplage (Gpc)	d_A	14.0	0.2 / 0.3
Echelle accoustique ($l_A \approx \pi/\theta_A$)	ℓ_A	301	1 / 1
Horizon accoustique au découplage (Mpc) ($l_A \approx \pi/\theta_A$)	r_s	147	2 / 2

Table 6: Le meilleur modèle déduit des observations de la première année d'observation de WMAP. D'après Spergel et al. 2003, ApJS 148, 175 et Bennett et al. 2003, ApJS 148,1. Voir aussi les quatre papiers suivants : Komatsu et al. arXiv:0803.0547, Dunkley et al. arXiv:0803.0586, Nolta et al. arXiv:0803.0593, and Hinshaw et al. arXiv:0803.0732 pour l'analyse des cinq premières années d'observations de WMAP.

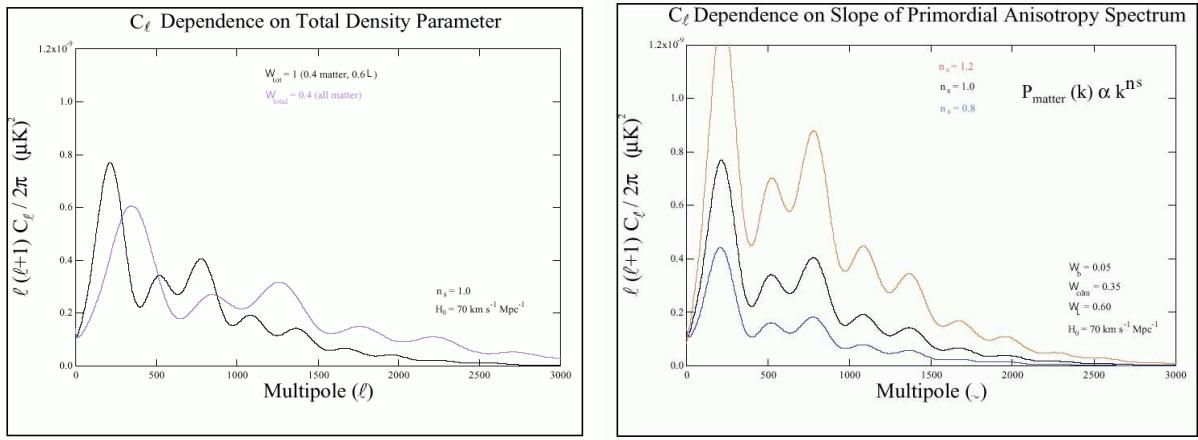


Figure 85: Effet de certains paramètres définissant les propriétés de l’Univers sur les anisotropies du fond diffus cosmologique. A gauche, les deux courbes montrent deux mesures des anisotropies du fond diffus cosmologique à différentes échelles pour $\Omega_{total} = 1.0$, $\Omega_m = 0.4$ (celle dont le pic est le plus élevé) et $\Omega_{total} = 0.4$, $\Omega_m = 0.4$. Les valeurs en bas à droite sont fixées pour ces deux modèles. A droite, les courbes correspondent à trois indices différents du spectre de puissance de la matière. D’après Benoit et al. 2002, astro-ph/0210306.

encore une limitation. Des dégénérescences subsistent, comme on peut le voir sur les Figures 86, 87 et 88.

Dans un modèle où $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, $\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_\gamma = 8.35 \cdot 10^{-5}$ et $\Omega_k = 0$, nous aurions les caractérisques visibles aux Tables 5 et 6.

Dans le schéma qui se dessine, on peut se satisfaire du fait qu’il correspond remarquablement bien aux prédictions théoriques. Mais il montre aussi un Univers qui pour l’essentiel serait dominé par 25 % de matière sombre et 70 % d’énergie sombre... deux composantes dont nous ne connaissons absolument rien, ni leurs nature ni leurs origines... Difficile de dire dans ces conditions que nous avons maintenant compris les propriétés de notre Univers ... !

On peut aussi contruire une vue synthétique du spectre de puissance en combinant les informations disponibles grâce à tous les relevés : CMB, amas de galaxies, relevés spectroscopiques des galaxies, weak lensing, distribution de la forêt Lyman- α . En faisant un certain nombre d’hypothèses pour passer des données observées à la quantité de matière, une reconstruction par déprojection donne donc le spectre de puissance tri-dimensionnel à toutes les échelles. C’est ce que montre la Figure 89. Cette figure est assez impressionnante car elle montre un spectre qui correspond à ce que pourrait prédire un modèle d’Univers avec les paramètres cosmologiques établis dans la section suivante : $\Omega_\Lambda = 0.7$ et $\Omega_m = 0.3$, où la matière sombre froide domine largement. Il faut cependant nuancer ce résultat qui dépend de toutes les hypothèses attachées à chaque type de données, tant pour le passage de l’observation à la matière que pour le passage permettant la déprojection.

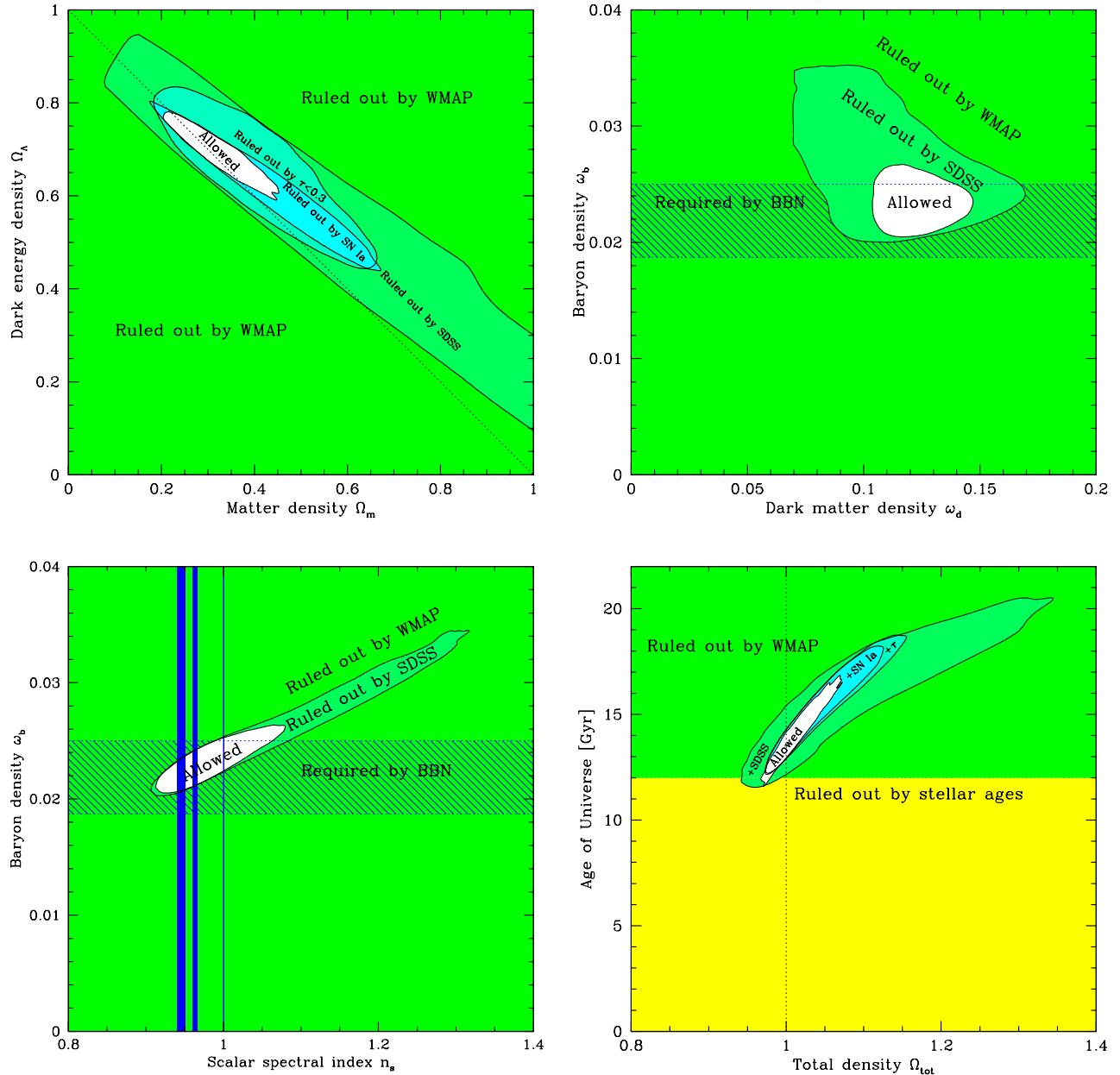


Figure 86: Analyse multi-observations des paramètres cosmologiques (panel 1). D'après Tegmark et al. 2004, Phys. Rev. D 69, 103501.

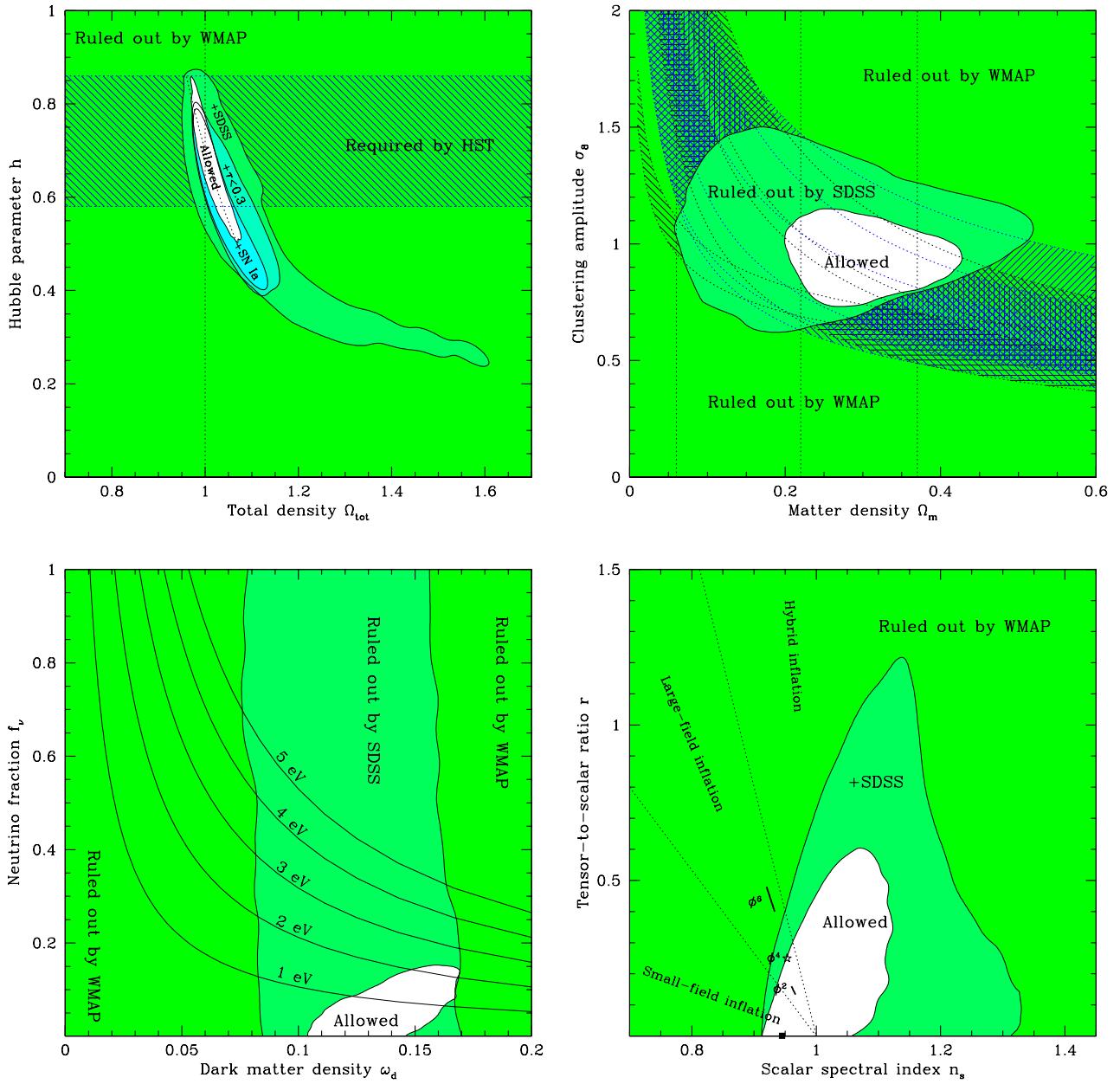


Figure 87: Analyse multi-observations des paramètres cosmologiques (panel 2). D'après Tegmark et al. 2004, Phys. Rev. D 69, 103501. Les zones hachurées hyperboliques de la figure en haut à droite sont les contraintes provenant de l'abondance des amas de galaxies et du cosmic shear.

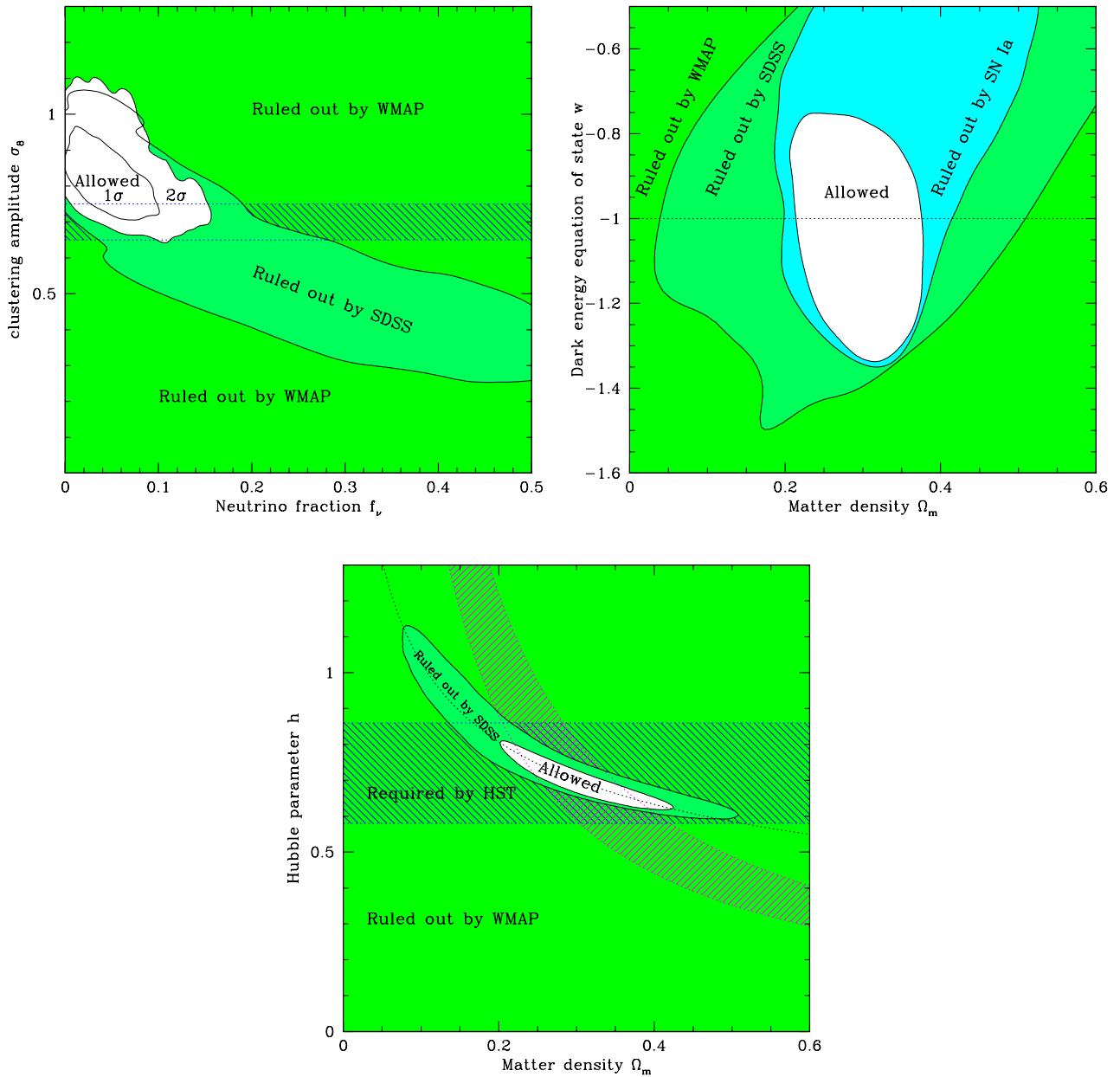


Figure 88: Analyse multi-observations des paramètres cosmologiques (panel 3). D'après Tegmark et al. 2004, Phys. Rev. D 69, 103501.

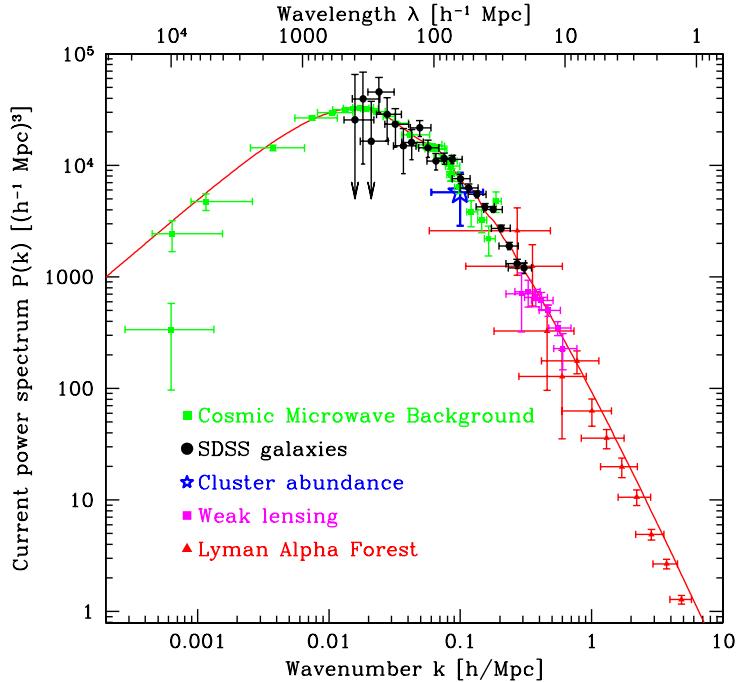


Figure 89: Une reconstruction complète du spectre de puissance tri-dimensionnel à $z = 0$. Cette figure est une synthèse qui prend en compte toutes les données mises à la disposition des cosmologistes pour sonder le spectre de puissance. Chaque méthode sonde un intervalle d'échelle particulier ainsi qu'un domaine de redshift qui lui est propre. Cette figure synthétique résume de façon spectaculaire l'état de nos connaissances du spectre de puissance. Cependant, aux petites échelles notamment, la reconstruction dépend sensiblement des hypothèses qui permettent de construire un modèle d'évolution non linéaire des structures. D'après Tegmark et al. 2004, ApJ 606, 702.

13.5 La matière sombre

En dépit des incertitudes sur la mesure des masses des systèmes, les courbes de rotation plates des galaxies spirales et les arcs gravitationnels dans les amas de galaxies sont des preuves convaincantes qu'il existe une fraction de la matière qui n'émet aucun rayonnement. Sa nature est donc une clé fondamentale de l'énigme car sa découverte démontrerait définitivement son existence et ouvrirait le champ à toute une nouvelle physique. Au contraire, si la recherche était infructueuse, il faudrait se poser franchement la question de la validité de nos interprétations des phénomènes et de notre compréhension de la physique extragalactique et des systèmes autogravitants.

13.5.1 Nécessité d'introduire une composante de matière exotique

De la théorie de la nucléosynthèse primordiale, dite aussi nucléosynthèse cosmologique, on sait que la fraction de baryons peut s'exprimer sous la forme :

$$\Omega_B = 0.0035 \eta_{10} h^{-2} \left(\frac{T}{2.7} \right)^3 \quad (402)$$

où :

$$\eta_{10} = 10^{10} \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (403)$$

avec n_B , la densité numérique des baryons et n_γ , la densité numérique des photons.

L'abondance en hélium peut se mettre sous la forme :

$$Y = 0.261 - 0.018 \log \left[10^5 \frac{n_D + n_{^3\text{He}}}{H} \right] + 0.014 [N_\nu - 3] + 0.014 [\tau_{1/2} - 10.6] \quad (404)$$

où n_D la densité numérique du deutérium, $n_{^3\text{He}}$ la densité numérique de ${}^3\text{He}$; $\tau_{1/2}$ est la durée de vie du neutron en minutes, N_ν est le nombre d'espèces de neutrinos (d'après les expériences du LEP au CERN, il n'en existe que 3).

Le facteur η_{10} est contraint par les observations, notamment le ${}^7\text{Li}$ mesuré dans les étoiles de faible métallicité. Avec les mesures actuelles, nous avons finalement les limites suivantes :

$$1.2 \leq \eta_{10} \leq 6.4 \quad (405)$$

$$0.0040 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.025 \quad (406)$$

Si l'on considère l'intervalle le plus compatible avec l'abondance des éléments légers, $\eta_{10} = 4.1$, alors :

$$\Omega_B h^2 = 0.015 \quad (407)$$

et dans ce cas :

1. Comme $\Omega_{lumineux} = \Omega_{galaxie} + \Omega_{gaz} = 0.007$, il doit exister des baryons non lumineux.
2. Comme $\Omega_m > 0.1$, il doit exister de la matière non baryonique.

13.5.2 Les candidats possibles de matière sombre

Le Tableau 3 et la Figure 77 montrent clairement une tendance du rapport M/L à croître avec la masse et la dimension de la structure. Il semble donc que la distribution de la matière sombre et peut être sa nature dépendent de l'échelle. Comme on le verra par la suite, l'abondance de baryon

Candidat	Nature	catégorie	masse approximative
Jupiters	baryonique	matière sombre froide	$0.001 M_{\odot}$
Naines brunes	baryonique	matière sombre froide	$0.08-0.01 M_{\odot}$
Naines blanches	baryonique	matière sombre froide	$0.1-0.5 M_{\odot}$
Étoiles à neutrons	baryonique	matière sombre froide	$0.1 M_{\odot}$
Trous noirs stellaires	baryonique	matière sombre froide	$\approx 1. M_{\odot}$
Trous noirs massifs	baryonique	matière sombre froide	$10^{5-6} M_{\odot}$
Trous noirs primordiaux	baryonique	matière sombre froide	?
Axion	non-baryonique	matière sombre froide	10^{-5} eV
SUSY-LSP neutralino	non-baryonique-WIMPs	matière sombre froide	MeV
gravitino	non-baryonique	matière sombre tiède	500 eV
neutrinos	non-baryonique	matière sombre chaude	keV
majorons	non-baryonique	matière sombre chaude	10^{-5} eV

Table 7: Liste de quelques candidats à la composante invisible la matière de l'univers.

prédicté par la nucléosynthèse primordiale peut marginalement rendre compte de la matière invisible contenue dans les halos des galaxies mais n'est pas compatible avec le Ω déduit des mesures aux plus grandes échelles. La matière sombre est donc vraisemblablement en majorité de nature non-baryonique (c'est-à-dire que ses propriétés différentes de celles de nos protons et neutrons ; dans le contexte des discussions sur la matière sombre, les électrons sont fréquemment inclus dans cette composante baryonique, même si ce ne sont pas des baryons. Le terme est donc assez générique).

On peut classer la matière sombre en trois grandes catégories qui sont différenciées selon leur température : la *matière sombre froide* (*CDM* pour *Cold Dark Matter*), qui comprend en particulier les candidats baryoniques, la *matière sombre tiède* (*WDM* pour *Warm Dark Matter*) et la *matière sombre chaude* (*HDM* pour *Hot Dark Matter*). Il existe aussi une composante dite matière sombre volatile correspondant aux particules à désintégration rapide. La Table 7 résume ces candidats.

Les observations et les expériences en laboratoire peuvent apporter des contraintes intéressantes qui limitent les candidats possibles. Les expériences de microlentille gravitationnelle permettent de tester les objets compacts baryoniques, comme les Jupiters, les naines brunes, les naines blanches (expériences EROS, MACHOs, OGLE, AGAPE). Les observations continues des nuages de Magellan ont permis de détecter un certain nombre d'événements à relativement longue durée (de l'ordre de la semaine) qui doivent correspondre à des objets compacts d'environ $0.5 M_{\odot}$. Par contre, aucun phénomène à courte durée n'a encore été détecté.

Les suivis EROS et MACHO (cf. Figure 90, gauche) permettent donc de conclure que, si le halo des galaxies est proche d'une sphère isotherme, des candidats objets compacts de masse entre $2 \times 10^{-7} M_{\odot}$ et $1 M_{\odot}$ ne peuvent contribuer à plus de 25 % à la masse du halo de matière

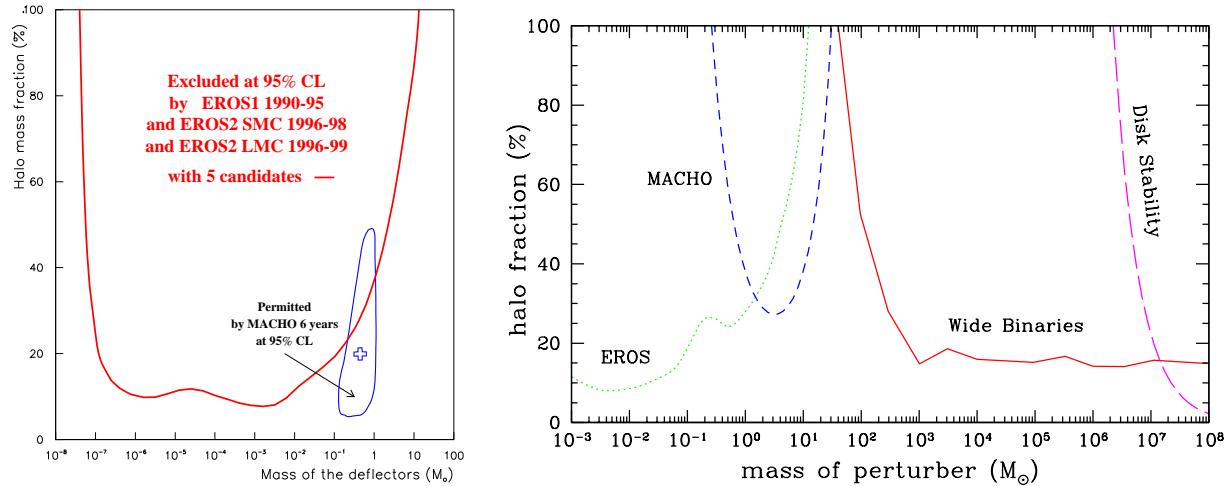


Figure 90: A gauche : Diagramme d'exclusion définissant l'intervalle de masse et la fraction du halo composée de MACHOs. Les figures montrent les zones permises à la fois par les expériences MACHOs et EROS. L'absence d'événements à courte période permet de limiter fortement la région des petites masses. Le domaine possible est celui sous la ligne d'exclusion en rouge. La composante baryonique sous forme d'objets compacts est donc loin de rendre compte de la matière sombre dans les galaxies et a fortiori dans l'univers. D'après Milsztajn, Lasserre et la collaboration EROS 2001, Nuc. Phys. B 91, 413. A droite, un bilan des contraintes sur la fraction d'objets compacts du halo de la Galaxie d'après les analyses de microlentilles gravitationnelles, de statistique des binaires et d'analyse dynamique de la stabilité du disque de la Galaxie. D'après Yoo et al. 2004, ApJ 601, 311.

sombre de la Galaxie. Les expériences MACHO permettent par ailleurs d'exclure les candidats de $1 M_{\odot}$ à $30 M_{\odot}$. Enfin, les expériences sur la statistiques des binaires dans le halo rejettent de façon complémentaire tous les candidats de masse supérieure à $200 M_{\odot}$, alors que les études de dynamiques des disques permettent d'exclure les trous noirs de masse supérieure à $10^7 M_{\odot}$ dans le halo. La Figure 90 (droite) présente une synthèse de ces contraintes.

On peut potentiellement étendre ces méthodes aux effets transitoires de microlentille gravitationnelle produits par d'hypothétiques trous noirs extra-galactiques. C'est donc aussi une méthode directe pour sonder la distribution de matière invisible compacte inter-galactique. Cependant, en pratique ce sont des expériences très longues et difficiles qui, dans le cas de trous noirs intergalactiques, demandent des suivis sur plus de 10 ans.

Les candidats exotiques à la matière sombre sont très nombreux. Parmi les plus sérieux on compte le neutrino massif, l'axion et les WIMPs pour *Weakly Interacting Massive Particles* (voir Table 7).

Le neutrino est le meilleur candidat pour la matière sombre chaude. Sa contribution à la densité actuelle de l'Univers est relativement bien comprise et vaut (voir l'Equation (82)) :

$$n_{\nu 0} = \frac{3}{4} \frac{4}{11} n_{\gamma 0} = 117 \text{ neutrinos cm}^{-3}. \quad (408)$$

Le coefficient ($3/4$) étant le rapport du nombre de degrés de liberté du photon relativement au

neutrino. Le rapport (4/11) provient de la perte d'une fraction de neutrino par annihilation e^+e^- lorsque la température de l'Univers a atteint celle de la masse e^+e^- .

Sachant que la densité de l'Univers est $\Omega\rho_c$ et que :

$$\rho_c = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ gcm}^{-3} = 10.5 \times 10^3 h^2 \text{ eV cm}^{-3}, \quad (409)$$

la contribution à la densité d'un neutrino de masse m_ν serait :

$$F_\nu = \frac{m_\nu n \nu}{10.5 \times 10^3 \Omega h^2} = \left(\frac{m_\nu}{90 \text{ eV}} \right) \frac{1}{\Omega h^2}. \quad (410)$$

Les recherches actuelles de neutrinos atmosphériques ou de neutrinos solaires semblent indiquer une faible contribution des neutrinos à la matière sombre, avec :

$$F_\nu << 1. \quad (411)$$

Le spectre de puissance de la distribution des galaxies aux grandes échelles et la découverte de galaxies à très grands décalages spectraux s'opposent aussi à l'hypothèse que la matière sombre chaude contribue majoritairement à la composante matérielle de l'univers. En effet, leur grande vitesse leur permet de s'échapper rapidement des fluctuations de petite échelle ce qui tend à tuer les fluctuations de masse inférieures à $10^{15} M_\odot$. Ainsi, le processus de formation des galaxies à partir des fluctuations aux petites échelles est fortement ralenti et les galaxies ne parviennent pas à ce former rapidement. L'existence de galaxies à grand redshift (les plus lointaines sont à $z \approx 8$) est dès lors une difficulté pour ces modèles.

Une expérience cruciale concernant ces candidats est bien évidemment la détermination de la masse des neutrinos. Bien qu'il ait été annoncé que cette masse avait été mesurée (expérience Super Kamionkande au Japon), rien n'est encore fermement établi et certains résultats sont encore contradictoires. Les limites actuelles sont :

$$\nu_e < 10 \text{ eV} \quad \nu_\mu < 170 \text{ keV} \quad \nu_\tau < 18.2 \text{ MeV} \quad (412)$$

En fait, toutes les observations actuelles en cosmologie favorisent les modèles d'Univers avec une composante de matière sombre non-baryonique froide, *CDM*. Il semble que les meilleurs candidats actuels soient :

- l'axion, qui est un champ des modèles de chromodynamique quantique ajouté au champ de Higgs pour tuer la composante de moment dipolaire électrique qui, d'après les expériences en laboratoire, est nulle. Les contraintes actuelles sont portées sur la Figure 91.
- les WIMPs, acronyme pour *Weakly Interacting Massive Particles*, sont aussi une multitude et font référence, entre autres, aux particules construites dans les modèles supersymétriques. Les théories supersymétriques prédisent l'existence de nouvelles particules qui sont des partenaires des fermions et des bosons. Les contraintes actuelles sur ces particules sont peu nombreuses,

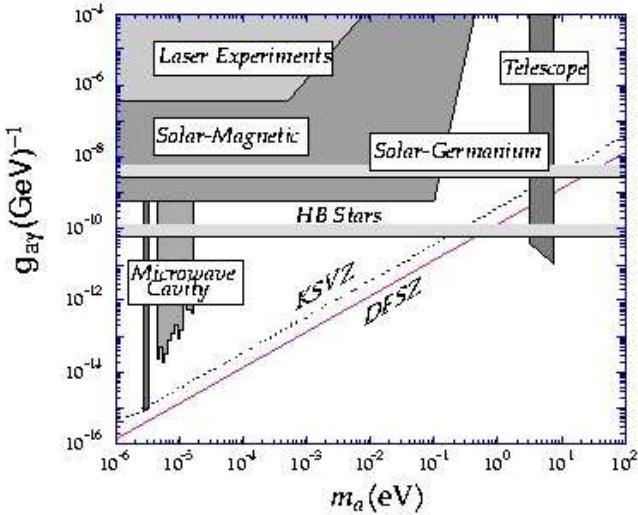


Figure 91: Diagramme d'exclusion des recherches actuelles sur les axions. Les zones hachurées sont exclues. En abscisse est portée la masse et en ordonnée le couplage photon-axion qui permet la désintégration $ax \rightarrow \gamma\gamma$. Dans le domaine eV, la désintégration des axions en photons aurait dû être détectée avec les télescopes actuels, ce qui explique la contrainte reportée sur cette figure.

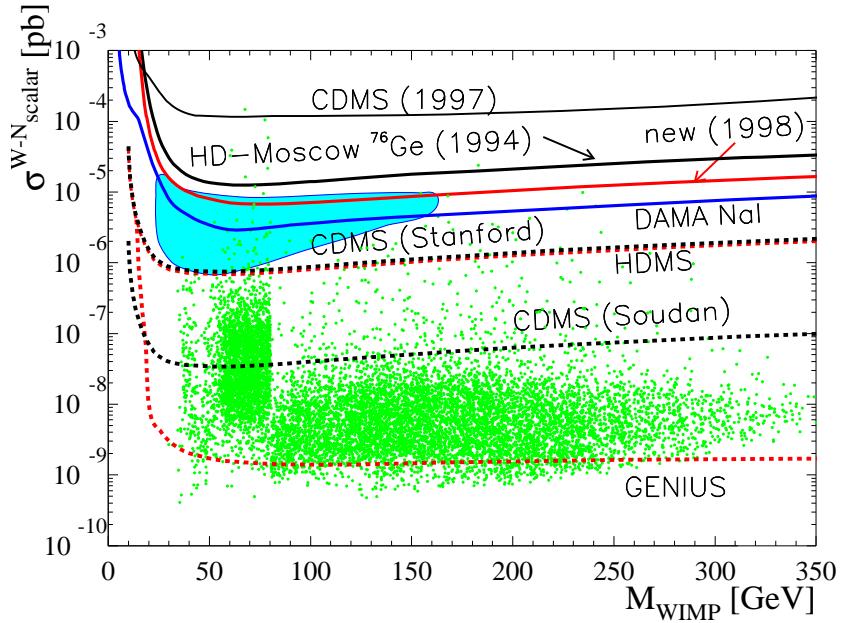


Figure 92: Diagramme d'exclusion des recherches sur les WIMPs. En abscisse est portée la masse et en ordonnée la section efficace d'annihilation qui détermine la stabilité de la particule. Les lignes noires continues sont les contraintes actuelles et les lignes discontinues sont les futures expériences. Les points répartis sur la figure sont les paramètres prédits par les modèles supersymétriques. On voit que les futures expériences seront déterminantes.

mais un grand nombre d'expériences sont en cours ou en projet car les WIMPs sont parmi les candidats sérieux pour la matière sombre. Ces expériences sont résumées sur la Figure 92.

14 Histoire thermique de l'Univers

Dès 1946, Gamov a envisagé que, si l'Univers a été beaucoup plus chaud dans le passé, les réactions nucléaires qui ont dû se produire lors de ses premières phases pourraient expliquer l'origine et l'abondance des éléments. Gamov prédit aussi qu'il doit exister un rayonnement de type corps noir, fossile de cette période dont il estime la température égale à environ 5 K . Par contre, Fermi en 1950 démontre qu'il n'y a aucun moyen de former des éléments lourds dans un Univers chaud. Par ailleurs, la théorie de la nucléosynthèse stellaire apporte, à la même période, un cadre apparemment satisfaisant pour tenter d'expliquer la formation des éléments.

Ce n'est que vers 1960 que les idées concernant la nucléosynthèse primordiale et l'existence d'un rayonnement résiduel sont de nouveau considérées sérieusement. En fait, au moment de la découverte du rayonnement cosmologique en 1965 par Penzias et Wilson, une équipe de Princeton avait déjà mis sur pied une expérience pour tenter de le mesurer. C'est la raison pour laquelle l'interprétation des observations de Penzias et Wilson fut immédiate.

Ce cours ne décrit pas les détails de toute l'histoire thermique de l'Univers, il aborde essentiellement la partie liée à la nucléosynthèse. Les grandes lignes de l'histoire thermique sont décrites sur la Figure 93.

Le principe de l'analyse de l'histoire thermique repose sur une idée de base, relativement simple. Plaçons-nous, par exemple, dans la période radiative. Un phénomène physique est caractérisé par une échelle de temps typique, τ , qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\tau = \frac{1}{n\sigma c} \quad (413)$$

où n est la densité de particules en interaction, σ la section efficace d'interaction et c la vitesse de la lumière. Pendant cette période le facteur d'expansion $R \propto t^{1/2}$ alors que la densité $n \propto R^{-3}$. Donc :

$$\frac{\tau}{t} \propto \frac{R}{\sigma} \quad (414)$$

Les interactions ne seront donc efficaces que tant que $\tau/t \ll 1$. Mais comme R croît l'Univers doit passer inéluctablement vers un stade où l'interaction devient négligeable. En particulier, toute phase d'équilibre maintenue par une interaction donnée doit évoluer vers une étape où l'équilibre est rompu. L'histoire de l'Univers est donc une suite de phases d'équilibre où les transitions de phase sont des étapes majeures. La suite ci-dessous en décrit quelques-unes.

14.1 Transition matière-rayonnement

Si ρ_m est la densité pendant la phase dominée par la matière et ρ_r est la densité pendant la phase dominée par le rayonnement, on a :

$$\rho_m = \rho_c \Omega_m (1 + z)^3 \quad (415)$$

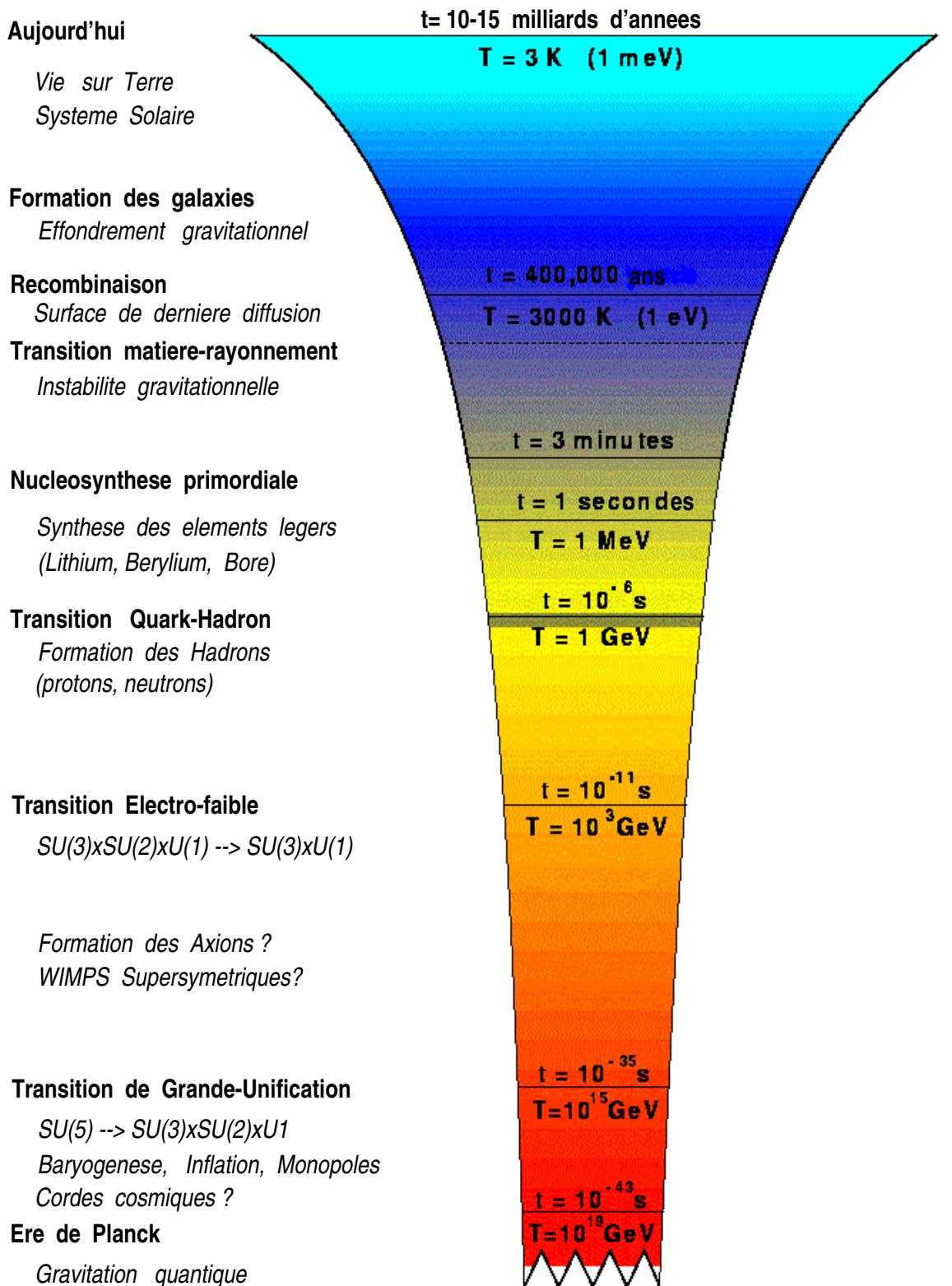


Figure 93: Une (très) brève histoire thermique de l'Univers retracant ses époques marquantes.

et :

$$\rho_r = \rho_c \Omega_r (1+z)^4 \quad (416)$$

La transition entre ces deux périodes se produit donc à :

$$1 + z_{eq} = \frac{R_0}{R_{eq}} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m} \quad (417)$$

Les observations donnent les valeurs actuelles : $\Omega_m \geq 0.2$ et $\Omega_r h^2 = 2.56 \times 10^{-5}$. Donc :

$$1 + z_{eq} = 3.9 \times 10^4 (\Omega h^2) \quad (418)$$

correspondant à une température T_{eq} :

$$T_{eq} = (1 + z_{eq}) T_0 = 1.07 \times 10^5 (\Omega h^2) K = 9.24 (\Omega h^2) eV \quad (419)$$

et au temps t_{eq} :

$$t_{eq} = 0.4 \frac{1}{H_0} \frac{1}{\Omega^{1/2}} (1+z)^{-3/2} \quad (420)$$

soit :

$$t_{eq} = 1.57 \times 10^{10} (\Omega h^2)^{-1/2} \text{ sec} = 500 (\Omega h^2)^{-1/2} \text{ ans} . \quad (421)$$

14.2 Découplage et recombinaison

Dans la phase chaude de l'histoire de l'Univers, matière et rayonnement étaient en fort contact thermique à cause du taux d'interaction élevé entre photons et électrons. Mais au fur et à mesure de l'expansion, la densité d'électrons libres diminue et va finir par devenir trop faible pour maintenir l'efficacité de l'interaction : photons et électrons *se découpent*. Grossièrement, cette étape se produit lorsque le libre parcours moyen des photons devient plus grand que la distance de Hubble à la période considérée, c/H .

Le taux d'interaction photons-électrons est donné par :

$$\tau_\gamma = n_e \sigma_T c \quad (422)$$

où n_e est la densité numérique d'électrons libres et σ_T la section efficace de Thomson, égale à $6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$.

L'équilibre des abondances des électrons libres est déterminé par l'équation de Saha. Si n_H est la densité numérique de l'hydrogène, n_p la densité numérique de protons libres et n_e la densité numérique d'électrons libres (on néglige les noyaux d'hélium), la neutralité de charge de l'Univers implique :

$$n_e = n_p \quad (423)$$

La conservation du nombre de baryons, n_B , implique :

$$n_B = n_p + n_H \quad (424)$$

A l'équilibre thermique, pour des températures inférieures à $m_i c^2$, la densité du constituant i est donnée par :

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{\mu_i - m_i}{T} \right] \quad (425)$$

où $i = e, p, H$ et où μ_i est le potentiel chimique. L'équilibre chimique :



garantit que :

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H \quad (427)$$

et donc :

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_e} n_p n_e \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{B}{T} \right] \quad (428)$$

où B est l'énergie de liaison de l'hydrogène, égale à : $B = (m_p + m_e - m_H)c^2 = 13.6$ eV. On appelle *fraction d'ionisation*, la quantité :

$$X_e = \frac{n_p}{n_B} \quad (429)$$

Sachant que $g_p = g_e = 2$ et $g_H = 4$ et en posant $n_B = \eta n_\gamma$, on peut déterminer la fraction d'ionisation à l'équilibre, X_e^{eq} et l'exprimer sous la forme :

$$\frac{1 - X_e^{eq}}{(X_e^{eq})^2} = \frac{4\sqrt{2} \zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\frac{B}{T}} \quad (430)$$

qui est l'équation de Saha pour la fraction d'ionisation à l'équilibre et où $\zeta(3) = \Sigma_{i=1}^{\infty} 1/i^3 \simeq 1.202$. Le rapport baryons sur photons, η , est contraint par les observations :

$$\eta = 2.68 \times 10^{-8} \left(\Omega_B h^2 \right) . \quad (431)$$

Il est clair que l'Equation (430) trace l'évolution de la fraction d'ionisation puisque T varie comme $(1+z)$. Par définition, la *(re)combinaison* est la période où 90 % des électrons se sont recombinés avec les protons. Cette époque se situe à :

$$z_{rec} \sim 1200 - 1400 \quad (432)$$

Par exemple, pour $z_{rec} = 1300$, on a $T_{rec} = T_0(1+z_{rec}) = 3775 K = 0.308 \text{ eV}$. Compte tenu du z_{eq} calculé dans la section précédente, on voit que la recombinaison s'est produite pendant la phase dominée par la matière. On peut donc facilement déterminer l'âge auquel s'est déroulée la recombinaison :

$$t_{rec} = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \left(\frac{1}{\Omega} \right)^{1/2} (1+z)^{-3/2} \quad (433)$$

soit :

$$t_{rec} = 4.39 \times 10^{12} \left(\Omega h^2 \right)^{-1/2} \text{ sec} = 140'000 \left(\Omega h^2 \right)^{-1/2} \text{ ans} \quad (434)$$

Il peut paraître surprenant que la recombinaison se produise à $\approx 4000 K$ et non pas à $\approx 150'000 K$ correspondant à 13.6 eV. C'est une conséquence de la distribution en énergie des photons qui est très large. En fait, il suffit qu'un photon sur 10^8 ait une énergie supérieure à 13.6 eV pour avoir assez de photons ionisants.

En utilisant l'équilibre d'ionisation et le fait que la densité d'électrons libres est :

$$n_e = X_e n_B = X_e \eta n_{\gamma} \approx 1.13 \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \left(\Omega_B h^2 \right) \quad (435)$$

et que :

$$\tau \approx \frac{1}{n_e \sigma_T c} \quad (436)$$

et enfin que l'âge de l'Univers est donné par :

$$t = \left(\frac{2}{3} \right) (1+z)^{-3/2} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} \quad (437)$$

on peut estimer la période de découplage qui correspond à $t \approx \tau$. Comme le libre parcours moyen des photons dépend de Ω_B et que l'âge de l'Univers dépend de Ω , le redshift au découplage dépend donc de ces deux paramètres essentiels.

Grossièrement le découplage se produit aux environs de $z = 1100$ et donc :

$$t_{dec} = \left(\frac{2}{3}\right) H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} (1 + z_{dec})^{-3/2} \quad (438)$$

soit, pour $z = 1100$:

$$t_{dec} = 5.64 \times 10^{12} (\Omega_0 h^2)^{-1/2} \text{ sec} = 180'000 (\Omega_0 h^2)^{-1/2} \text{ ans} \quad (439)$$

On voit que le découplage se produit après la recombinaison. Remarquablement, il se produit dans un tout petit intervalle en redshift. Ceci est essentiellement un effet de profondeur optique qui dépend très fortement de l'état d'ionisation (voir l'Equation (315) qui décrit comment calculer cette profondeur optique). Le $\Delta z \approx 100$ est donc une véritable barrière opaque. On l'appelle la *surface de dernière diffusion*. Voir Figure 82 (COBE and WMAP). Il n'est donc possible d'obtenir des observations via les photons que jusqu'à un redshift d'environ $z = 1100$, environ 180'000 ans après le Big Bang. Après, à des redshifts plus grands, on se heurte à la barrière de photons.

14.3 Nucléosynthèse primordiale des éléments légers

La période de la nucléosynthèse primordiale est particulièrement importante car elle fournit une des contraintes les plus solides sur l'abondance de baryons dans l'Univers. La physique de base suit l'idée générale décrite en préliminaire à toute cette section. Soit une particule relativiste, c'est-à-dire d'énergie totale bien plus grande que son énergie au repos, $kT \gg mc^2$. Si les échelles de temps des interactions qui maintiennent les espèces en équilibre thermique avec les autres espèces présentes à la température T sont plus courtes que l'âge de l'Univers, alors la densité numérique d'une particule et de son anti-particule est :

$$n = \bar{n} = \frac{4\pi g}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\frac{E}{kT}} \pm 1} dp \quad (440)$$

où g est le poids statistique de la particule, p est la quantité de mouvement, et les signes + et - désignent respectivement les fermions et les bosons. Pour les photons (bosons), $g = 2$, pour les nucléons (fermions), $g = 2$, et enfin pour les neutrinos (fermions), $g = 1$. (Fermions, un seul par état : électrons, protons, neutrons, quarks, neutrinos ; bosons, beaucoup peuvent occuper le même état : photons, atomes ${}^4\text{He}$, gluons).

On a, pour une densité numérique n et pour la densité d'énergie ε :

$$\begin{cases} n_\gamma = 0.244 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_\gamma = aT^4 \\ n_{nuc} = 0.183 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_{nuc} = \frac{7}{8}aT^4 \\ n_{\nu_{e,\mu}} = 0.091 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3 \text{ cm}^{-3} & \varepsilon_{\nu_{e,\mu}} = \frac{7}{16}aT^4 \end{cases} \quad (441)$$

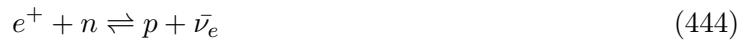
et plus généralement :

$$\varepsilon = \chi(T)aT^4 \quad (442)$$

Lorsque les particules deviennent non-relativistes, $kT \ll mc^2$, les abondances s'expriment alors sous la forme :

$$n = g \left(\frac{mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{kT}} \quad (443)$$

Considérons les découplages protons et neutrons. On se place dans le cas où protons et neutrons sont non-relativistes mais leur équilibre est maintenu par les interactions électrons-neutrinos :



et l'abondance relative des neutrons et protons est donnée par :

$$\frac{n}{p} = \exp \left[-\frac{\Delta mc^2}{kT} \right] \quad (446)$$

Elle sera gelée dès que les interactions des neutrinos ne pourront maintenir l'équilibre neutrons-protons. La condition de gel se produit lorsque l'échelle de temps des interactions faibles devient supérieure à l'âge de l'Univers :

$$t_{weak} = \frac{1}{n\sigma_{weak}c} \quad (447)$$

où σ_{weak} est la section efficace de l'interaction faible ($\sigma_{weak} \propto E^2$ où E est l'énergie), et n est la densité numérique de nucléons. A cause de l'expansion de l'Univers, nous savons que :

$$n \propto \frac{1}{R^3} \quad ; \quad R \propto \frac{1}{T} \quad ; \quad E \propto T \quad (448)$$

et donc :

$$t_{weak} \propto \frac{1}{T^5} \quad (449)$$

Cette échelle de temps doit être comparée à celle de l'expansion de l'Univers. Or dans la phase dominée par le rayonnement et pour $z \gg z_{eq}$ on a $\Omega \approx 1$, et donc les équations de Friedmann s'écrivent :

$$\begin{cases} 2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx -\frac{8\pi G}{c^2}\rho & (a) \\ \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3c^2}\rho & (b) \end{cases} \quad (450)$$

et comme pendant la période radiative on a $\rho R^4 = \text{Cte} = \rho_1 R_1^4$, la variation du facteur d'échelle en fonction du temps s'écrit :

$$\frac{R}{R_1} = \left(\frac{32\pi G\rho_1}{3c^2}\right)^{1/4} t^{1/2} \quad (451)$$

d'où :

$$\varepsilon = \chi(T)aT^4 = \frac{3c^2}{32\pi G}t^{-2} \quad (452)$$

et donc :

$$t \propto \frac{1}{T^2} \quad (453)$$

En fait, on peut montrer que :

$$t = \frac{0.143 \times 10^{14}}{T^2} \text{ ans } K^2 \quad (454)$$

Donc l'échelle de temps t_{weak} décroît beaucoup plus vite que l'échelle de temps de l'expansion. Le découplage se déroule lorsque $t = t_{weak}$. Sachant que :

$$\sigma_{weak} = 3 \times 10^{-9} \left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^2 \text{ m}^2 \quad (455)$$

on démontre que ce découplage se produit pour $kT = 1 \text{ MeV}$. L'Univers n'est plus opaque aux neutrinos, lesquels ne peuvent plus maintenir les protons et les neutrons en équilibre thermodynamique. Comme pour les photons à $z = 1100$, il existe une barrière de neutrinos à $kT = 1 \text{ MeV}$, i.e., environ 1 seconde après le Big Bang. On peut obtenir des observations via les neutrinos en remontant jusqu'à une seconde après le Big Bang. Après, à des redshifts plus grands, on se heurte à la barrière de neutrinos. A cet instant on a alors :

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{1.28 \text{ MeV}}{1 \text{ MeV}}} \quad (456)$$

ce qui donne :

$$\frac{n}{n+p} = 0.21 \quad (457)$$

Après ce découplage, lié à l'interaction faible (laquelle implique toutes les particules fondamentales sauf les gluons et les photons), la fraction de neutrons ne décroît plus selon la loi (456) mais beaucoup plus lentement car il n'y a plus d'équilibre. C'est à cette époque que les neutrons libres vont donc pouvoir fusionner pour former les éléments légers. Tous les neutrons vont alors se combiner pour former des noyaux de ${}^4\text{He}$. Les réactions de base sont les suivantes :



L'abondance d'hélium est caractérisée par la quantité :

$$Y = \frac{m_{\text{He}}^4 n_{\text{He}}^4}{m_H n_H + m_{\text{He}}^4 n_{\text{He}}^4} \approx 0.25 \quad (462)$$

De la même façon se forment simultanément le deutérium, l'hélium 3 et le lithium 7. Ces éléments, qui ne peuvent pas se former dans les étoiles, trouvent donc leur origine dans les phases précoces d'un univers chaud en expansion dont la température décroît progressivement. La prédition de leur abondance est un très grand succès de la théorie de la nucléosynthèse primordiale. Voir Figure 94.

14.4 Comparaison avec les observations

Voici en résumé les abondances mesurées :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^4\text{He} : 0.236 \leq Y \leq 0.254 \\ \frac{{}^7\text{Li}}{{}^1\text{H}} : 1.1 \pm 0.4 \times 10^{-10} \\ \text{D} : 2 \cdot 10^{-5} \leq D \leq 1.5 \times 10^{-4} \\ {}^3\text{He} : \frac{\text{D} + {}^3\text{He}}{{}^1\text{H}} = 3.6 \pm 0.6 \times 10^{-5} \end{array} \right. \quad (463)$$

La Figure 94 montre le remarquable accord entre les observations et les prédictions théoriques.

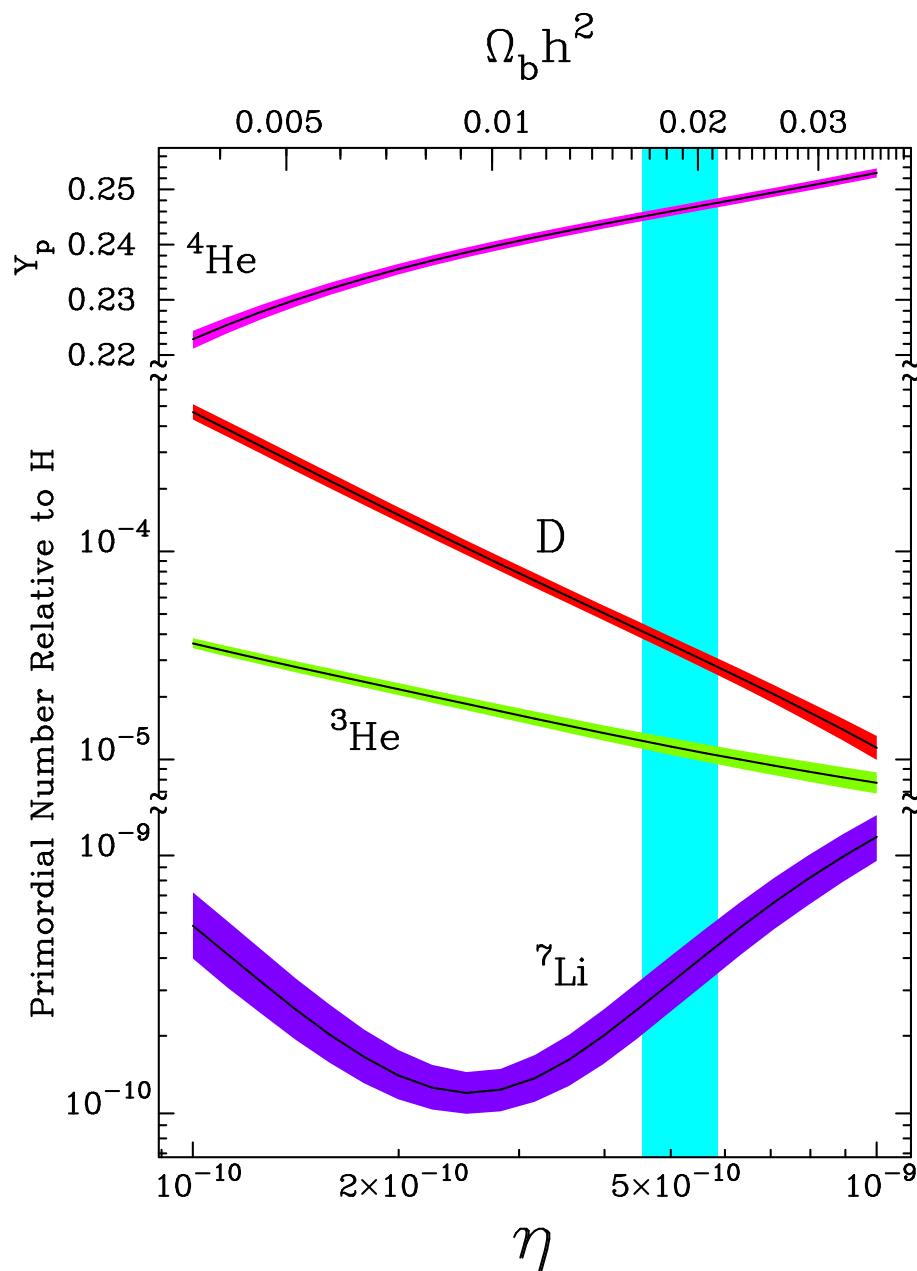


Figure 94: Abondances des éléments légers prédictes par la nucléosynthèse primordiale en fonction du rapport baryon sur photon (en bas) ou de la fraction de baryon (en haut). La bande verticale montre l'intervalle permis par les observations.

14.5 Contrainte sur la fraction de baryons

La fraction de baryons peut s'exprimer sous la forme :

$$\Omega_B = 0.0035 \eta_{10} h^{-2} \left(\frac{T}{2.7} \right)^3 \quad (464)$$

où :

$$\eta_{10} = 10^{10} \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (465)$$

Par ailleurs, on peut montrer que l'abondance en hélium peut se mettre sous la forme :

$$Y = 0.261 - 0.018 \log \left[10^5 \frac{n_D + n_{^3\text{He}}}{H} \right] + 0.014 [N_\nu - 3] + 0.014 [\tau_{1/2} - 10.6] \quad (466)$$

où $\tau_{1/2}$ est la durée de vie du neutron en minutes, N_ν est le nombre d'espèces de neutrinos (d'après les expériences du LEP, il n'en existe que 3).

Le rapport η_{10} est contraint par les observations, notamment le ${}^7\text{Li}$ mesuré dans les étoiles de faible métallicité. Avec les mesures actuelles nous avons finalement les limites suivantes :

$$1.2 \leq \eta_{10} \leq 6.4 \quad (467)$$

$$0.0040 \leq \Omega_B h^2 \leq 0.025 \quad (468)$$

Si l'on considère l'intervalle le plus compatible avec l'abondance des éléments légers, $\eta_{10} = 4.1$, alors :

$$\Omega_B h^2 = 0.015 \quad (469)$$

et dans ce cas :

1. Comme $\Omega_{lumineux} = \Omega_{galaxie} + \Omega_{gaz} = 0.007$, il doit exister des baryons non lumineux.
2. Comme $\Omega > 0.1$, il doit exister de la matière non baryonique.

15 Les nouveaux instruments de la cosmologie

L'objectif de cette section est de présenter un panorama des moyens observationnels et des outils dont dispose la cosmologie physique pour aborder les grandes questions de la cosmologie du futur immédiat. Ceci avec l'intention de permettre à vous, étudiantes et étudiants, de voir plus clair dans la multitude de projets en chantier et en gestation, afin d'y discerner, éventuellement, des objectifs qui pourraient vous motiver.

Il est important avant toute chose de rappeler les grandes questions et/ou énigmes de la cosmologie :

1. les tests des théories de la gravitation,
2. la topologie de l'Univers,
3. les paramètres cosmologiques,
4. la nature de la matière sombre,
5. la nature de l'énergie sombre,
6. la recherche de signatures des défauts topologiques,
7. les contraintes sur les modèles inflationnaires,
8. l'origine du spectre de fluctuation,
9. la quantité et la distribution de la matière sombre à très grande échelle,
10. la description de la structuration de l'Univers,
11. la formation des amas et l'évolution de l'abondance des amas de galaxies,
12. la(es) relation(s) entre la lumière et la matière ; évaluation du facteur de biais : comment dépend-il du temps, de la densité locale, du type de galaxie ? Est-ce une relation linéaire ?
13. la formation des halos (le *Dark Age*),
14. origine de la re-ionisation de l'Univers,
15. lien entre quasars, AGNs et galaxies,
16. les premières étoiles (la fin du *Dark Age*) et l'histoire de la formation stellaire dans les galaxies,
17. l'origine des types morphologiques des galaxies,
18. la distribution et les mécanismes de formation des nuages de la forêt Lyman- α ,
19. lien entre systèmes amortis et les premières galaxies : histoire du gaz,
20. les fluctuations du fond diffus, des très grandes aux toutes petites échelles,
21. la masse et la distribution des composantes de la matière dans les amas de galaxies : SZ/X/Lentille gravitationnelle.

Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons des témoins : les photons, les neutrinos, les ondes gravitationnelles (projets VIRGO et LIGO, et plus tard LISA), les particules de très haute énergie. Pour piéger ces témoins nous construisons d'immenses collecteurs : les télescopes et les antennes au sol, dans la haute atmosphère et dans l'espace, les collecteurs de neutrinos et les détecteurs d'ondes gravitationnelles, les accélérateurs de particules, les télescopes gravitationnels.

Pour analyser ces témoins nous construisons des instruments : les photomètres, les caméras bi-dimensionnelles, les spectrographes, les polarimètres, les bolomètres.

Enfin, pour déterminer ce que nous devons chercher, comment nous devons nous y prendre, et comment interpréter les données nous nous référerons aux recherches théoriques, et faisons appel aux modélisations et aux simulations numériques.

Question	expérience	Instrument	Date
Nature de la matière sombre	Edelweiss, CDMS, GENIUS Tevatron, LHC	Bolomètres Accélérateur	2000-2007 2003-2012
Analyse des neutrinos	AMANDA, ANTARES	-	2002-2010
Particules de très haute énergie	AUGER	-	2002-2010
Évolution des galaxies	VLT, 10-m, Keck/Subaru AAT/Apache Point ELT-OWL, ALMA, CELT ALMA, JWST, ELT-OWL	FORS/ISAAC /SINFONI/FLAMES 2dF/SDSS	1999-2012 1999-2010 1999-2004 2008-2015
Formation des galaxies	Exp. ballons, CFHT VST-VISTA	MEGACAM	2000-2008
Paramètres cosmologiques	redshift surveys (SDSS, 2dF) WMAP, Planck Surveyor, JDEM	OMEGACAM	2006-2012 2000-2004 2004-2015
Évolution de la structuration des galaxies	Keck/Subaru/VLT/Gemini	VIRMOS, DEIMOS	2002-2005
Fluctuation du fond diffus aux petites échelles	Planck Surveyor	-	2007-2010
Distribution de la matière sombre à grande échelle	CFHT, JDEM, LSST VST-VISTA	MEGACAM OMEGACAM	2003-2015 2003-2015
Topologie de l'Univers	Planck Surveyor	-	2007-2010
Formation et évolution des amas de galaxies	VLTs, Chandra/XMM/ GMRT(?) / Exp. SZ/ELT-OWL	VIRMOS, DEIMOS	1999-2012 1999-2015
Masse et évolution de la masse des amas de galaxies	XMM/Chandra/VLTs /CFHT/HST/JWST/ VST-VISTA / Exp. SZ/ELT-OWL	CFH12K/MEGACAM OMEGACAM	2000-2010 2000-2015 2004-2015
Formation et structuration des nuages Lyman- α	VLT	UVES	2001-2005
Relation AGN/Galaxies	XMM, Chandra, VLT AAT/Apache Point	FORS/UVES 2dF/SDSS	1999-2007 1999-2003
Origine de la morphologie des galaxies	HST/JWST	-	2000-2015
Propriétés de l'énergie sombre	CFHT/JDEM/ VST-VISTA/LSST	MEGACAM OMEGACAM	2003-2015
Test des modèles d'inflation	Planck, CFHT Exp. Polarisation CMB/LISA(?) JDEM/LSST/ST-VISTA	MEGACAM OMEGACAM	2003-2015

Table 8: Un court résumé des instruments d'intérêt cosmologique disponibles depuis peu ou qui seront disponibles d'ici 10 ans. Ce n'est pas une liste exhaustive. On mentionne simplement les instruments qui ont une véritable vocation à répondre à certaines des questions de la cosmologie.

16 Annexes

16.1 Annexe A : Projection de la fonction de corrélation

Supposons que la fonction de corrélation à deux points ait la forme usuelle :

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}. \quad (470)$$

On se propose de calculer la projection $\omega(\theta)$ et d'analyser son comportement pour des petits angles. On rappelle que :

$$dP_{2D} = N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (471)$$

et :

$$dP_{3D} = n^2 [1 + \xi(r_{12})] dV_1 dV_2. \quad (472)$$

Si la fonction de sélection du relevé est $\Phi(r/D)$ et sachant que $dS = r^2 d\Omega$ $dV = r^2 dr d\Omega$, la densité numérique par unité d'angle solide devient :

$$N = \int_0^\infty r^2 n \Phi\left(\frac{r}{D}\right) dr \quad (473)$$

$$= n D^3 \int_0^\infty y^2 \Phi(y) dy \quad (474)$$

$$= n D^3 E \quad (475)$$

et la projection de dP_{3D} s'écrit :

$$dP_{2D} = n^2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) d\Omega_1 dr_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) [1 + \xi(r_{12})] d\Omega_2 dr_2. \quad (476)$$

En utilisant (471), (473) et (476) on obtient :

$$n^2 D^6 E^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 = n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) [1 + \xi(r_{12})] dr_2 \quad (477)$$

et donc :

$$N^2 [1 + \omega(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 = N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 + n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) dr_2 \quad (478)$$

soit :

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi(r_{12}) r_2^2 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) dr_2 \quad (479)$$

Dans l'hypothèse où θ est petit, alors :

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta \approx (r_1 - r_2)^2 + r_1 r_2 \theta^2 \quad (480)$$

et on peut définir une nouvelle variable u telle que :

$$r_2 - r_1 = ur_0; \text{ et par ailleurs, comme } r_2 = r_1 = yD, \quad (481)$$

on a donc :

$$r_2 \approx ur_0 + yD, \quad (482)$$

et, pour r_1 fixe :

$$dr_2 \approx r_0 du. \quad (483)$$

Dans ce cas, y est presque constant autour de $r_2 - r_1$ et donc :

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 \Phi\left(\frac{r_1}{D}\right) dr_1 \int \xi\left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2}\right] r_0 \Phi\left(\frac{r_2}{D}\right) r_2^2 \quad (484)$$

$$\omega(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int y^4 \Phi(y)^2 D^5 dy \int r_0 \xi\left[\sqrt{u^2 r_0^2 + y^2 D^2 \theta^2}\right] du \quad (485)$$

Comme $N^2 = n^2 D^6 E^2$, on pose :

$$x = \frac{ur_0}{yD\theta}, \quad (486)$$

d'où l'on déduit finalement :

$$\omega(\theta) = \theta^{1-\gamma} \left(\frac{r_0}{D}\right)^\gamma \frac{1}{E^2} \int y^{5-\gamma} \Phi(y)^2 dy \int (1+x^2)^{-\gamma/2} dx \quad (CQFD). \quad (487)$$

16.2 Annexe B : Théorème du viriel

La méthode la plus simple pour déterminer une masse dynamique d'un système stellaire consiste à utiliser le théorème du viriel.

Considérons un système auto-gravitant composé de N masses ponctuelles dont les positions, vitesses et masses sont représentées respectivement par les quantités \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i et m_i . Le moment d'inertie du système est alors :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i^2. \quad (488)$$

Par conséquent :

$$\dot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad (489)$$

et :

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i^2 + \mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i). \quad (490)$$

Puisque le système est auto-gravitant, l'accélération d'une particule i est la somme des interactions gravitationnelles de chacune des particules :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} G m_j \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (491)$$

Le terme en \mathbf{v}_i^2 est associé à l'énergie cinétique totale K du système auto-gravitant, de sorte que :

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2 K + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (492)$$

On peut exprimer le second terme plus simplement avec $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j$:

$$\sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{j \neq i} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (493)$$

d'où :

$$\sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{r}_j \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (494)$$

On transfère le second terme de droite à gauche, puis on y intervertit les indices. Les deux termes de gauche sont alors identiques, d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2 K - \frac{G}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = 2 K + W. \quad (495)$$

Cette quantité est quelquefois appelée le Viriel, $K + W$ représentant l'énergie totale du système auto-gravitant.

Dans l'hypothèse où le système est stationnaire, on peut admettre que sur plusieurs fois l'échelle de temps dynamique caractérisant le système, la moyenne temporelle de \ddot{I} est nulle. L'échelle de temps dynamique est le temps typique qu'il faut à une particule pour traverser l'ensemble du système auquel elle est associée. Ce n'est généralement pas une quantité observable puisqu'en pratique l'astronome n'observe un système qu'une seule fois et/ou pendant une courte période. L'utilisation du théorème du viriel pour les galaxies n'est donc pas rigoureuse, mais on admet néanmoins que pour les systèmes observés on a :

$$2 K + W \approx 0. \quad (496)$$

En d'autres termes, il est implicitement admis que les systèmes sont à l'équilibre et dans un état stationnaire. Ceci n'est vrai que lorsque l'échelle de temps dynamique du système est beaucoup plus courte que son âge au moment de l'observation.

En résumé on a donc :

- Système lié : $E_{total} \leq 0 \Leftrightarrow K + W \leq 0$.
- Système stationnaire : $2K + W = 0$.

16.3 Annexe C : La sphère isotherme singulière

Considérons une sphère de gaz isotherme en équilibre hydrostatique. L'équation d'équilibre peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{kT}{m} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (497)$$

où p et T sont la pression et la température du gaz, m la masse des particules individuelles, k la constante de Boltzmann, ρ la densité du gaz et enfin $M(r)$ la masse de gaz contenue dans une sphère de rayon r .

Sachant que $dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho$, si on multiplie les deux membres de l'équation précédente par r^2 et si on différentie ensuite, on obtient :

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{d\ln\rho}{dr}) = -\frac{Gm}{kT} 4\pi r^2 \rho. \quad (498)$$

Supposons maintenant que nous observons un système dynamique dont la fonction de distribution ait la forme suivante :

$$f(E) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right). \quad (499)$$

E est en fait l'énergie totale changée de signe.

La densité est obtenue en sommant sur l'espace des vitesses :

$$\rho = \int f(E) d^3\vec{v} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\Psi}{\sigma^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{\sigma^2}} 4\pi v^2 dv. \quad (500)$$

Donc :

$$\rho = \rho_1 e^{\frac{\Psi}{\sigma^2}} \quad \text{ou} \quad \Psi = \sigma^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1}. \quad (501)$$

Pour ce système l'équation de Poisson s'écrit alors :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \frac{d\Psi}{dr}) = -4\pi G \rho. \quad (502)$$

Compte tenu de l'expression précédente de Ψ , on a :

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{d\ln\rho}{dr}) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho. \quad (503)$$

L'expression en fonction de Ψ s'écrit alors :

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{d\Psi}{dr}) = -4\pi G \rho_1 r^2 \exp\left[\frac{\Psi}{\sigma^2}\right]. \quad (504)$$

La comparaison des équations (498) et (504) montre qu'elles sont identiques si on pose :

$$\sigma^2 = \frac{kT}{m}, \quad (505)$$

où σ est la dispersion des vitesses sur une dimension.

Par conséquent une sphère de gaz auto-gravitante est identique à un système d'étoiles sans collisions dont la fonction de distribution est donnée par l'expression (499), soit :

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}\right] \quad (506)$$

Cette distribution est identique à celle d'un gaz isotherme à l'équilibre : la distribution de Maxwell-Boltzmann. Cependant, il ne faut absolument pas les confondre : la distribution d'un gaz isotherme donne une équpartition de l'énergie par particule. Mais dans notre cas, le système étant sans collisions : il ne peut y avoir équpartition par particule. Ce que nous donne la fonction de distribution c'est l'énergie par unité de masse. On peut se demander comment un système sans collisions a pu parvenir à un tel état dynamique. En fait, il résulte d'une étape transitoire extrêmement rapide se déroulant après l'effondrement du système et que l'on appelle relaxation violente. Cette phase explique aussi pourquoi des systèmes sans collisions ont pourtant tous globalement la même morphologie.

On peut trouver facilement une solution à l'équation (504) en recherchant les solutions du type $\rho = Cr^{-\alpha}$. On a alors nécessairement :

$$\alpha = \frac{4\pi G}{\sigma^2} Cr^{2-\alpha}. \quad (507)$$

D'où :

$$\alpha = 2 \quad \text{et} \quad C = \frac{\sigma^2}{2\pi G}, \quad (508)$$

ce qui conduit au profil qui caractérise la sphère isotherme singulière :

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2}. \quad (509)$$

Cette solution est appelée *Sphère Isotherme Singulière*. Bien qu'extrêmement simple, la sphère isotherme singulière a l'inconvénient d'avoir une densité infinie en $r = 0$, une singularité d'où son

nom. Pour obtenir un comportement plus réaliste on définit de nouvelles variables sans dimension \tilde{r} et $\tilde{\rho}$ telles que :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \quad (510)$$

où ρ_0 est la densité centrale et :

$$r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}}. \quad (511)$$

où r_0 est appelé le *Rayon de King*. C'est le rayon pour lequel la densité projetée vaut environ la moitié de la densité centrale projetée. C'est pour cette raison que r_0 est fréquemment appelé le rayon de cœur par analogie avec le rayon de cœur qu'ont défini les modélisateurs.

La valeur de r_0 peut paraître arbitraire. En fait elle provient du théorème du Viriel : la vitesse quadratique moyenne des particules d'une sphère isotherme est :

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) v^4 dv}{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right) v^2 dv} = 3\sigma^2. \quad (512)$$

Le théorème du Viriel donne donc :

$$2K + W = 2m\frac{1}{2}(3\sigma^2) - \frac{GM(r)m}{r} = 0. \quad (513)$$

Les ordres de grandeur sont alors fixés par la masse contenue dans une sphère de rayon r_0 et de densité ρ_0 :

$$M(r_0) = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0, \quad (514)$$

la relation entre σ et $M(r_0)$ fixe alors r_0 :

$$3\sigma^2 = \frac{4G}{3r_0}\pi\rho_0 r_0^3. \quad (515)$$

Avec ces nouvelles variables, l'Equation (504) s'écrit :

$$\frac{d}{d\tilde{r}}(\tilde{r}^2 \frac{d\ln\tilde{\rho}}{d\tilde{r}}) = -9\tilde{r}^2 \tilde{\rho}, \quad (516)$$

ρ_0 étant la densité centrale, on a donc dans ce cas :

$$\rho_1 = \rho_0 e^{-\frac{\Psi(0)}{\sigma^2}}. \quad (517)$$

D'autre part, la relation entre Ψ et ρ impose que :

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = \frac{d(\Psi/\sigma^2)}{dr}. \quad (518)$$

On a donc :

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left[\tilde{r}^2 \frac{(d\Psi/\sigma^2)}{d\tilde{r}} \right] = -4\pi G \rho_0 r_0^2 \exp \left[\frac{\Psi(r) - \Psi(0)}{\sigma^2} \right]. \quad (519)$$

La détermination de $\tilde{\rho}$ s'obtient par intégration numérique de l'Equation (519) et des conditions aux limites réalistes, comme $\tilde{\rho}(0) = 1$ et $(d\tilde{\rho}/d\tilde{r}) = 0$. La solution numérique montre que pour \tilde{r} suffisamment grand, $\tilde{\rho}$ décroît comme \tilde{r}^{-2} et s'approche donc du modèle à sphère isotherme singulière. On peut alors évaluer le comportement de la densité projetée loin du centre (en pratique quelques rayons de cœur) :

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad \text{et} \quad \Sigma(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) dz, \quad (520)$$

où z est l'axe perpendiculaire au rayon projeté, R le rayon projeté et $\Sigma(R)$ la densité projetée au rayon R .

Comme $r^2 = R^2 + z^2$, et pour des raisons de symétrie, on peut écrire :

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^{+\infty} \rho(r) \cdot \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (521)$$

Compte tenu de l'expression de $\rho(r)$, on a :

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{\pi G} \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (522)$$

L'intégration admet une solution analytique en posant $r = R/\cos w$, et on obtient finalement la densité projetée de la sphère isotherme singulière :

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{2GR} = \frac{2}{9}\pi\rho_0 r_0 \left(\frac{r_0}{R}\right). \quad (523)$$

Lorsque l'on s'approche du centre, le profil de densité de la sphère isotherme est bien représenté par une *loi de Hubble modifiée* :

$$\tilde{\rho}(\tilde{r}) \approx \tilde{\rho}_H(\tilde{r}) = \frac{1}{(1 + \tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (524)$$

La densité projetée est alors obtenue en intégrant le long de la ligne de visée, z :

$$\Sigma(\tilde{R}) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1 + \tilde{r}^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1 + \tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (525)$$

Soit :

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{(1 + \tilde{R}^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1 + \frac{\tilde{z}^2}{1 + \tilde{R}^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (526)$$

L'intégration se fait par deux changements de variables consécutifs :

$$\text{en premier : } u = \frac{\tilde{z}}{\sqrt{1 + \tilde{R}^2}}; \quad \text{puis : } u = \text{sht}. \quad (527)$$

On obtient alors :

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2} [\text{tth}]_0^{+\infty}, \quad (528)$$

La densité projetée a donc une expression simple :

$$\Sigma(\tilde{R}) = \frac{2}{1 + \tilde{R}^2}, \quad (529)$$

où $\tilde{R} = R/r_0$.

A grand rayon, la loi de Hubble modifiée décroît comme \tilde{r}^{-3} et n'est donc pas une bonne approximation d'un profil isotherme. Néanmoins, la densité projetée issue de la loi de Hubble modifiée ajuste remarquablement les profils de brillance de surface des galaxies elliptiques à grand rayon, alors qu'elle n'ajuste pas leur profil à petit rayon. On arrive donc à une situation un peu paradoxale, où $\tilde{\rho}_H$ est une expression simple des régions internes des sphères isothermes et des régions externes des galaxies, mais ne peut être utilisée pour les zones externes des sphères isothermes ou les zones internes des galaxies.

Enfin, la sphère isotherme présente l'inconvénient de conduire à des masses totales infinies. Par conséquent, en dépit de son attrait par les expressions simples qu'elle prédit, la sphère isotherme n'est certainement pas un modèle réaliste au-delà d'une zone limitée. C'est ce qui a par la suite conduit à l'introduction des fonctions de distribution de King et Michie qui définissent un rayon de troncature. Dans la pratique, on définit un rayon de troncature qui correspond à la distance radiale à partir de laquelle la densité du fond de ciel noie totalement l'énergie reçue de l'objet

observé. Dans ce cas, il est probable qu'une partie du profil de l'objet correspondant aux zones les plus externes n'est plus accessible, mais on admet que la région noyée dans le fond de ciel reste limitée et n'affecte pas fondamentalement le profil restitué par les régions internes où le ciel n'est plus dominant.

16.4 Annexe D : Angle de déflexion et densité de matière

Dans l'approximation des champs faibles, la métrique est définie par :

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl^2 . \quad (530)$$

Pour un photon $ds^2 = 0$ est donc :

$$dt = \frac{1}{c} \left(\frac{1 - \frac{2\Phi}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \right)^{1/2} dl \approx \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl . \quad (531)$$

La Figure 95 décrit la configuration et le système de coordonnées. On a donc $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

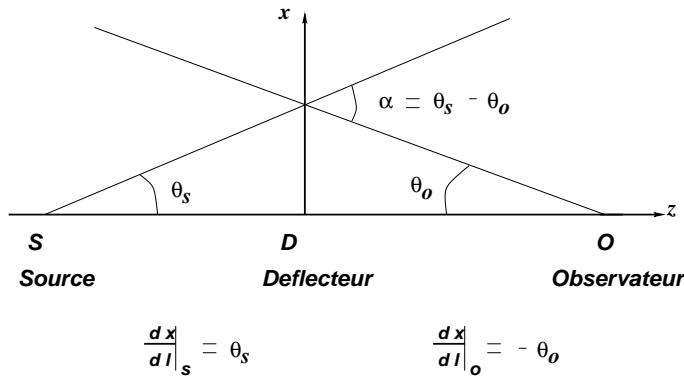


Figure 95: Configuration du “banc d’optique gravitationnel”.

Le principe de Fermat nous dit que les chemins empruntés par les photons sont ceux pour lesquels le temps écoulé sera un extremum. Le temps écoulé est immédiatement donné par l'Equation (531) et les chemins peuvent donc être déterminés en calculant ceux qui seront stationnaires par rapport à une petite variation δt . Comme :

$$ct = \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl \quad (532)$$

$$ct = \int \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} dz . \quad (533)$$

Remarquons tout d'abord que l'Equation (532) est formellement identique à celle correspondant à la propagation du faisceau dans un milieu d'indice :

$$n = \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) . \quad (534)$$

Par ailleurs, on peut, sans perdre en généralité, faire varier simplement t suivant la coordonnée $x(z)$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} c \delta t = \int \frac{\partial n}{\partial x} \delta x \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dz + \\ + \int n \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \frac{dx}{dz} \frac{d\delta x}{dz} dz \end{array} \right. \quad (535)$$

dont le second terme du membre de droite peut être intégré par parties :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int n \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \frac{dx}{dz} \frac{d\delta x}{dz} dz = \left[\delta x \ n \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]_S^O - \\ - \int dz \ \delta x \ \frac{d}{dz} \left\{ n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\}. \end{array} \right. \quad (536)$$

Le premier terme du membre de droite de l'Equation (536) est nul car la variation de δx en $S = source$ et en $O = observateur$ est évidemment nulle. Par conséquent :

$$c\delta t = \int dz \ \delta x \ \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \frac{d}{dz} \left[n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right] \right\}. \quad (537)$$

Or $\delta t = 0$ quel que soit le chemin considéré. Comme δx est maintenant en facteur dans l'intégrant, $\delta t = 0$ pour tout δx si le terme multiplicatif associé à δx est nul pour tout z . Par conséquent :

$$\frac{\partial n}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \frac{d}{dz} \left[n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right], \quad (538)$$

que l'on peut intégrer :

$$\int dz \ \frac{\partial n}{\partial x} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \int d \left[n \frac{dx}{dz} \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]. \quad (539)$$

c'est-à-dire :

$$\int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} dl = \int_S^O d \left[n \frac{dx}{dl} \right]. \quad (540)$$

Le terme de droite est assez clair. Aux bornes S et O le champ du déflecteur est nul est donc $n = 1$. On a donc :

$$\int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} dl = \left(\frac{dx}{dl} \right)_S - \left(\frac{dx}{dl} \right)_O . \quad (541)$$

Et dans ce cas, les deux termes de droites sont respectivement les deux angles θ_S et $-\theta_O$ projetés sur le plan (x, z) . Leur différence est donc exactement l'angle de déflexion α projeté sur ce plan. De la même façon on peut déterminer l'angle projeté sur l'axe yz . La somme des deux donne donc α . Pour les mêmes raison le terme de droite généralisé aux deux plans (x, z) et (y, z) s'exprime donc en fonction du gradient de n le long des axes perpendiculaires à z . On obtient donc la loi générale :

$$\alpha = \int_S^O \nabla_{\perp} n \, dl . \quad (542)$$

Soit, compte tenu de la relation entre n et Φ :

$$\alpha = -\frac{2}{c^2} \int_S^O \nabla_{\perp} \Phi \, dl . \quad (543)$$

La force gravitationnelle engendrée par le champ de matière de la lentille est :

$$\mathbf{F} = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') \, d\mathbf{x}' . \quad (544)$$

On définit le potentiel gravitationnel $\Phi(\mathbf{x})$ par :

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \, d\mathbf{x}' , \quad (545)$$

tel que :

$$\mathbf{F} = -\nabla \Phi , \quad (546)$$

et où le gradient est tel que :

$$-\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} . \quad (547)$$

On peut donc effectuer la substitution dans l'équation (543) pour exprimer l'angle de déflexion en fonction du champ de densité de matière :

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int_S^O dl \int d\mathbf{x}' \nabla_{\perp} \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (548)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{2G}{c^2} \int \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \int_S^O \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})_{\perp}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} dl \quad (549)$$

16.5 Annexe E : Notions sur les tenseurs

La convention d'Einstein consiste à simplifier l'utilisation des symboles dans les sommes portant sur des indices qui sont répétés une fois en haut et une fois en bas des quantités sommées.

$$\sum_{i=1}^n A_i B^i = A_i B^i . \quad (550)$$

En particulier cette convention est adoptée pour ds^2 :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (551)$$

16.5.1 Vecteurs contravariants

Supposons que l'on décrive une trajectoire par une courbe paramétrée sous la forme $x^i = x^i(\lambda)$. La direction de la tangente à cette courbe est déterminée par le vecteur A^i tel que :

$$A^i = \frac{dx^i}{d\lambda} . \quad (552)$$

Mais la tangente à une courbe est un invariant : elle ne dépend pas du système de coordonnées, même si ses composantes dans un autre système sont différentes. Supposons donc que dans un nouveau système de coordonnées x'^i , les nouvelles composantes du vecteur représentant la direction de la tangente soient :

$$A'^i = \frac{dx'^i}{d\lambda} . \quad (553)$$

Sachant que $x^i = x^i(x'^k)$ et $x'^k = x'^k(x^i)$, on établit immédiatement que :

$$A'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A^i , \quad (554)$$

où nous avons adopté la convention d'Einstein.

L'Equation (554) est la loi de transformation générale de tous vecteurs de type A^i . Les quantités qui se transforment selon cette loi sont appelées des *vecteurs contravariants*.

16.5.2 Vecteurs covariants

Soit $\Phi(x^k)$ une fonction scalaire. L'équation $\Phi(x^k) = C^{te}$ décrit une hyper-surface dont la normale est définie par les 4-vecteurs :

$$B_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} . \quad (555)$$

La normale à l'hyper-surface est aussi une quantité indépendante du système de coordonnées. De la même façon, ses nouvelles composantes dans un nouveau système peuvent s'écrire :

$$B'_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} , \quad (556)$$

avec :

$$B'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i . \quad (557)$$

Les quantités dont les lois de transformation sont selon l'équation (557) sont appelées *vecteurs covariants*.

16.5.3 Tenseurs

Définition Par définition, un *tenseur contravariant* de rang 2 est un objet défini par la loi de transformation suivante :

$$T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^{mn} \quad (558)$$

où l'on adopte toujours la convention d'Einstein.

Un *tenseur covariant* de rang 2 est un objet défini par la loi de transformation suivante :

$$T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_{mn} . \quad (559)$$

Enfin, un *tenseur mixte* de rang 2 est un objet défini par la loi de transformation suivante :

$$T'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_n^m . \quad (560)$$

Les tenseurs généralisent les concepts de scalaires et de vecteurs. En fait, les scalaires, les vecteurs et les tenseurs sont les seules quantités avec lesquels on peut définir des invariants par changement de systèmes de coordonnées. Il était donc naturel qu'Einstein tente d'exprimer les équations reliant la courbure à la matière-énergie sous forme tensorielle. La difficulté des tenseurs est surtout dans le fait que contrairement aux scalaires et aux vecteurs, nous n'avons pas de moyens mentaux ou géométriques de nous les représenter.

Exemple : tenseur métrique

Les g_{ik} sont effectivement les composantes d'un tenseur. En effet :

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (561)$$

$$g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} dx'^m \right) \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} dx'^n \right) \quad (562)$$

$$g_{ik} dx^i dx^k = \left(g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \right) dx'^m dx'^n \quad (563)$$

et donc :

$$g_{ik} dx^i dx^k = g'_{mn} dx'^m dx'^n \quad (564)$$

qui est bien la loi de transformation d'un tenseur.

Un tenseur satisfaisant $T_{ik} = T_{ki}$ est dit symétrique. Inversement, un tenseur satisfaisant $T_{ik} = -T_{ki}$ est dit antisymétrique. Le tenseur métrique est symétrique.

Contraction des tenseurs La contraction est une opération de réduction du rang d'un tenseur. Elle s'effectue en identifiant un indice supérieur d'une composante avec un indice inférieur d'une autre composante. Par exemple :

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (565)$$

est un scalaire obtenu par contraction d'un vecteur. Il est construit par association des composantes de même indice.

Par la même procédure on peut abaisser ou monter un indice :

$$A_i = g_{ik} A^k \quad \text{ou} \quad A^i = g^{ik} A_k . \quad (566)$$

Dérivée covariante Soit un champ de vecteurs quelconque $B_i(x^k)$ covariant. Ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial B'_k}{\partial x'^m} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} \frac{\partial B_i}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^m \partial x'^k} B_i . \quad (567)$$

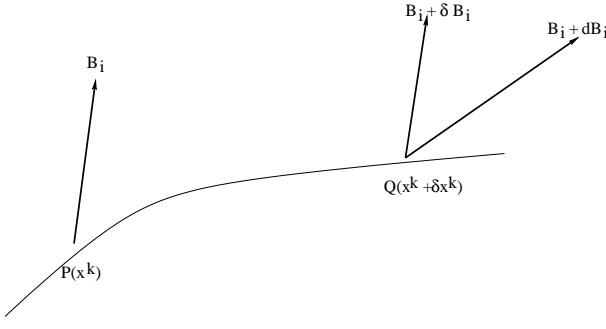


Figure 96: Illustration de la signification de la dérivée covariante. Le vecteur B au point P évolue vers le vecteur $B + dB$ au point Q . Pour établir la variation de B il faut tenir compte du déplacement de B et donc, il faut transporter d'abord B au point Q et l'évaluer à cette position. C'est précisément ce que donne $B + \delta B$.

Dans le cas le plus général le second membre de la partie droite de cette transformation n'est pas nul. Donc, la dérivée partielle d'un tenseur covariant n'est pas un tenseur.

Cette situation est illustrée sur la Figure 96. P et Q sont deux points voisins de coordonnées (x^k) et $(x^k + \delta x^k)$ où le vecteur B vaut respectivement B et $B + dB$. Mais pour calculer la variation de B de P à Q il faut évaluer la variation de B au même point. Pour cela on effectue un *transport parallèle* des composantes B_i de P vers Q . Les composantes y prennent les valeurs $B_i + \delta B_i$. La différence entre $B(x^k + \delta x^k)$ et B transporté par transport parallèle est un vecteur au point Q . Par conséquent, si on sait comment B est modifié pendant le transport parallèle, alors on peut définir la différentiation du vecteur.

On exprime ce changement par une relation de la forme :

$$\delta B_i = \Gamma_{ik}^l B_l \delta x^k , \quad (568)$$

où les Γ_{ik}^l sont appelés les symboles de Christoffel. Il est important de noter que les Γ_{ik}^l sont des objets nouveaux qui s'ajoutent à la métrique. En effet, alors que la métrique définit comment mesurer des distances entre deux points, les Γ_{ik}^l définissent comment construire un vecteur parallèle en des points voisins (c'est plus génériquement une connexion affine).

On a donc :

$$B_i(x^k + \delta x^k) - [B_i(x^k) + \delta B_i] = B_i(x^k) + \delta x^k \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - B_i(x^k) - \delta B_i \quad (569)$$

soit, par identification avec l'Equation (568) :

$$\delta x^k \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \delta B_i = \left(\frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l B_l \right) \delta x^k . \quad (570)$$

On redéfinit alors la dérivée d'un vecteur par l'expression suivante :

$$B_{i;k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l B_l = B_{i,k} - \Gamma_{ik}^l B_l . \quad (571)$$

$B_{i;k}$ est appelé la *dérivée covariante d'un vecteur covariant*. Notez les symboles “j;k” et “j,k” qui différencient les dérivées covariantes et partielles.

L'objectif de toute cette procédure est de définir un objet dont la variation se transforme comme un tenseur. On peut alors démontrer que, pour que $B_{i;k}$ se transforme comme un tenseur, il faut que les Γ_{ik}^l se transforment de la façon suivante :

$$\Gamma'_{kl}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \frac{\partial x^p}{\partial x'^l} \Gamma_{np}^m + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k \partial x'^l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} . \quad (572)$$

Dans le cas du tenseur métrique, on peut montrer que :

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^p g_{pk} - \Gamma_{kl}^p g_{ip} \quad (573)$$

Dans le cas particulier des géométries Riemanniennes (utilisées notamment par Einstein), on peut montrer que

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i \text{ et } g_{ik;l} = 0 \quad (574)$$

et dans ce cas, on peut déduire cette relation bien connue :

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (575)$$

Différentielle covariante totale Par définition :

$$DA^i = dA^i + \Gamma_{kl}^i A^k dx^l = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l \quad (576)$$

et :

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \right) dx^l \quad (577)$$

Cas d'un tenseur

$$D_l A^{ik} = \partial_l A^{ik} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im} \quad (578)$$

Cas d'un scalaire

$$D\Phi = d\Phi \quad ; \quad D_l\Phi = \partial_l\Phi \quad (579)$$

Tenseur de Riemann-Christoffel Comme le montre la Figure 97, dans le cas le plus général d'une géométrie non-euclidienne, le résultat d'un transport parallèle dépend du chemin de transport. Une question intéressante est de trouver quelles conditions il faudrait sur le vecteur B_i pour que le résultat du transport parallèle soit indépendant du chemin ? Cela revient à trouver un vecteur tel que :

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^l B_l \quad (580)$$

soit :

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^m \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\Gamma_{ik}^l B_l \right) = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^m} B_l + \Gamma_{ik}^l \frac{\partial B_l}{\partial x^m} \quad (581)$$

On peut montrer que :

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^m} B_l + \Gamma_{ik}^l \frac{\partial B_l}{\partial x^m} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^n} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{ln}^m \right) B_m \quad (582)$$

et comme :

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^n \partial x^k} = \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^n} \quad (583)$$

La condition qu'un résultat de transport parallèle soit indépendant du chemin est donc :

$$R_{i\ kn}^m = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{ln}^m - \Gamma_{in}^l \Gamma_{lk}^m \right) = 0 \quad (584)$$

Comme il faut que ce résultat soit indépendant du système de coordonnées, il faut que $R_{i\ kn}^m$ soit un tenseur. Ce n'est pas évident mais cela se démontre effectivement. $R_{i\ kn}^m$ est le tenseur de Riemann-Christoffel. On peut dire que c'est ce tenseur qui spécifie les propriétés géométriques de l'espace-temps. On peut montrer qu'il s'exprime en fonction du tenseur métrique de la façon suivante :

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} (g_{kl,im} + g_{im,kl} - g_{km,il} - g_{il,km}) \quad (585)$$

Tenseur de Ricci et tenseur d'Einstein Le tenseur de Ricci est construit par contraction du tenseur de Riemann-Christoffel :

$$R_{ik} = g^{im} R_{iklm} = R_{klm}^m \quad (586)$$

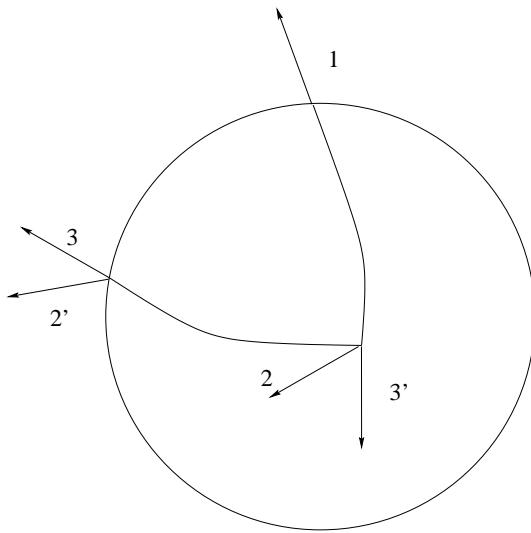


Figure 97: Illustration de la dépendance du transport parallèle avec le chemin. Les chemins (1,2,3) et (1,2',3') déplacent le même vecteur selon deux trajets différents. On voit que le résultat est différent : la direction du vecteur n'est pas identique.

qui est un tenseur symétrique.

Par contraction consécutives on construit ainsi la courbure scalaire R :

$$R = R_{kk} = R_k^k . \quad (587)$$

Le tenseur :

$$G_{ik} = g^{kl} R_{kl} - \frac{1}{2} g_{ik} R \quad (588)$$

est le tenseur d'Einstein.

16.6 Annexe F : Formulaire aide-mémoire

Métrique FRW :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \right] \quad (589)$$

Partie spatiale :

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\chi^2 + S_k(\chi)^2 (\mathrm{d}\theta^2 + \sin\theta \mathrm{d}\phi^2) ; \text{ soit } ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \mathrm{d}\sigma^2 \quad (590)$$

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & \text{si } k = 1 \\ \chi & \text{si } k = 0 \\ \operatorname{sh}\chi & \text{si } k = -1 \end{cases} \quad (591)$$

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c \mathrm{d}t}{R(t)} = \int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (592)$$

Redshift :

$$\frac{R(t_0)}{R(t_1)} = 1 + z \quad (593)$$

Distance diamètre angulaire :

$$D_A(z) = r_1 R(t_1) = \frac{r_1 R(t_0)}{1 + z} \quad D_L(z) = r_1 R(t_0) (1 + z) \quad (594)$$

Equation de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 & = & \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{c^2}{3}\Lambda - \frac{c^2}{R^2}k \\ \frac{\ddot{R}}{R} & = & -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{c^2}{3}\Lambda \end{array} \right. \quad (595)$$

Equation d'état :

$$P = \omega \rho c^2 \implies \rho_X = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\omega+1)} \quad (596)$$

Paramètres cosmologiques :

$$H_0 = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)_{t=t_0} ; \quad q_0 = \left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \right)_{t=t_0} \quad (597)$$

$$\Omega_{m0} + \Omega_{\gamma0} + \Omega_{X0} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1 \quad (598)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Omega_0 & = & \frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_{m0} + \rho_{\gamma0} + \rho_{X0}) = \frac{\rho_0}{\rho_c} \\ \Omega_{\Lambda} & = & \frac{c^2}{3H_0^2}\Lambda \\ \Omega_k & = & -\frac{c^2}{H_0^2 R_0^2} k \end{array} \right. \quad (599)$$

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{1}{1+z} ; \quad \frac{\dot{a}(t)^2}{H_0^2} = \sum_i \frac{\Omega_i}{a(t)^{3\omega_i+1}} \quad (600)$$

Composante	Ω_i	ω_i
Matiere	Ω_m	0
Photon	Ω_{γ}	1/3

Energie sombre	Ω_X	ω
Constante cosmologique	Ω_{Λ}	-1
Quintessence	Ω_Q	ω_Q
Cordes cosmiques	Ω_C	-1/3
Murs de domaine	Ω_D	-2/3
Courbure	Ω_k	-1/3

Temps cosmique :

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\sum_i \frac{\Omega_i}{a(t)^{3\omega_i+1}}}} = \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{\sum_i \Omega_i (1+z)^{3\omega_i+1}}} \quad (602)$$

$$H(z) = H_0 (1+z) \sqrt{\sum_i \Omega_i (1+z)^{3\omega_i+1}} \quad (603)$$

Distances :

$$\begin{aligned} D_p(z) &= \int_0^z \frac{c dz}{H(z)} \\ D_A(z_1; z_2) &= \frac{1}{1+z_2} S_k \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{c dz}{H(z)} \right) \\ D_L(z_1; z_2) &= (1+z_2)^2 D_A(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (604)$$

Univers rayonnement	$\rho \propto a^{-4}$	$a \propto t^{1/2}$
Univers matiere	$\rho \propto a^{-3}$	$a \propto t^{2/4}$
Univers constante cosmologique	$\rho = \text{Cte}$	$a \propto \text{Exp}(H t)$

(605)