

# Stabilité et stabilisation des systèmes

ENSEM - 2A NRJ

Romain Postoyan

`romain.postoyan@univ-lorraine.fr`

[www.cran.univ-lorraine.fr/romain.postoyan](http://www.cran.univ-lorraine.fr/romain.postoyan)





# Chapitre 1

## Introduction (sur planches)

Ce chapitre 1 du polycopié vient en complément des planches présentées en cours.

### 1.1 Phénomènes non-linéaires

#### 1.1.1 Explosion en temps fini

Soit le système scalaire

$$\dot{x} = x^2, \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}$ . On peut résoudre cette équation analytiquement, en effet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \int \frac{dx}{x^2} &= \int dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

à noter qu'on peut diviser par zéro, car seule la solution  $x(t) = 0$  pour tout  $t$  peut s'annuler. Continuons, pour  $x(0) = x_0 \neq 0$  et  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{-1}{x} \right]_{x_0}^{x(t)} &= [t]_0^t \\ \frac{-1}{x(t)} + \frac{1}{x_0} &= t \\ \frac{-1}{x(t)} &= t - \frac{1}{x_0} = \frac{tx_0 - 1}{x_0} \\ x(t) &= \frac{x_0}{1 - tx_0}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

On constate que  $x(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$ . On dit que le système/la solution explose en temps fini.

### 1.1.2 Absence de solution analytique en général

Pour un système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et un signal d'entrée continue par morceaux, la solution du système est unique et définie pour tout temps par

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \quad (1.5)$$

Une telle formule n'existe malheureusement pas pour les systèmes non-linéaires en général. On peut montrer que cela est impossible pour certains systèmes.

### 1.1.3 Multiples points d'équilibre

Pour un système linéaire sans entrée

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ , les points d'équilibre forment l'ensemble  $\ker A$  qui est soit zéro, soit un espace vectoriel de dimension égale ou plus grande que un. Ainsi les points d'équilibres ne sont pas isolés : si le système en possède plusieurs, la droite reliant ces deux points est constitué d'une infinité de points d'équilibre.

Un système non-linéaire peut quant à lui avoir des points d'équilibre isolés, à l'instar de l'exemple scalaire suivant

$$\dot{x} = x(x-1)(x-2) \quad (1.7)$$

pour lequel 0, 1, 2 sont points d'équilibre. A noter que ce système est bien non-linéaire, c'est peut-être plus claire en l'écrivant sous cette forme  $\dot{x} = x^3 + 2x - 3x^2$ .

### 1.1.4 Cycle limite

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

*Question aux élèves :* ce système peut-il générer des oscillations ? Tracer le plan complexe et leur rappeler le comportement des solutions de ce système en fonction des valeurs propres. Les amener à déduire que oui cela est possible, à condition que les valeurs propres soient sur l'axe des imaginaires.

Tracer ensuite l'allure des solutions dans le plan de phase pour le cas où  $n = 2$ . Leur montrer que les oscillations ne sont pas isolées, qu'elles dépendent nécessairement de la

**condition initiale de la solution.**

Évoquer ensuite les rythmes cardiaques, qui sont “stables”, toujours les mêmes, malgré d'éventuels efforts, fatigue. Les oscillations ne sont pas ici isolées. De même pour notre rythme de sommeil. Même s'ils sortent et font la fête, après un nombre de jours à rythme normal, ils retrouvent leur rythme habituel.

Leur faire ainsi sentir la **notion de cycle limite : un phénomène oscillatoire isolé.**

Exemple de l'oscillateur de van der Pol et simulations à l'aide de Matlab.

Tracer les trajectoires dans le plan  $(x_1, x_2)$ .



# Chapitre 2

## Modèle

### 2.1 Représentation

#### 2.1.1 Rappel du cas linéaire

En linéaire, nous avons trois types de modèles, qui sont bien sûr équivalents.

#### Équations différentielles ordinaires

Il est difficile d'énoncer une forme générale, prenons plutôt des exemples. Reprenons l'exemple du pendule simple sans frottement, cf. figure 2.1.1. La deuxième loi de Newton donne

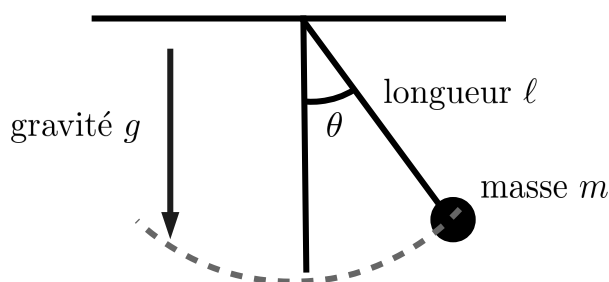
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0 \quad (2.1)$$

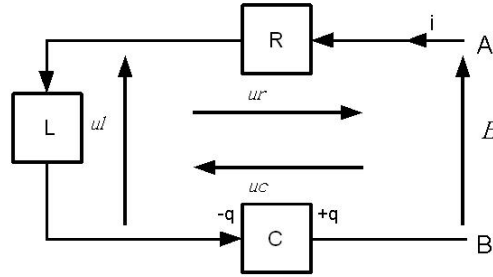
où  $\theta \in \mathbb{R}$  est l'angle,  $g$  la constante de gravité et  $\ell$  la longueur de la tige ou du fil. Au voisinage de  $\theta = 0$ ,  $\sin(\theta) \approx \theta$ , nous en déduisons dans ce cas que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0. \quad (2.2)$$

Ce système est un cas particulier la forme générale suivante

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_0 u \quad (2.3)$$





où  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  sont des coefficients. Il s'agit d'une EDO linéaire d'ordre  $n$  si  $a_n \neq 0$ . On retrouve le même genre d'équations lorsqu'on modélise un système électrique RLC série par exemple, cf. figure 2.1.1. En effet, dans ce cas, la loi des mailles impose la relation suivante

$$E = u_C + u_L + u_R = u_C + L \frac{di}{dt} + R_i. \quad (2.4)$$

A noter que nous pouvons également avoir des systèmes décrits par des équations de la forme suivante

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y + b_m z^{(m)} + \dots + b_0 z &= u_1 \\ c_n y^{(n)} + \dots + d_m z^{(m)} + \dots + d_0 z &= u_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si  $a_n$  ou  $c_n$  est différent de zéro, et si  $b_m$  ou  $d_m$  est différent de zéro, alors l'ordre du système est  $n+m$ . La notion d'ordre deviendra plus claire lorsqu'on nous passerons à la représentation d'état.

## Représentation d'état

Il s'agit d'écrire le système sous la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  l'entrée,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Lorsque ce système est équipé d'une sortie, s'ajoute l'équation

$$y = Cx + Du, \quad (2.7)$$

où  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

L'ordre du système est  $n$  : la dimension du vecteur d'état. Le passage d'une EDO est d'une représentation d'état peut s'obtenir de la façon suivante. Considérons le système (2.3) par exemple. En posant  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ ,  $\dots$ ,  $x_n = y^{n-1}$ . Le nombre de composantes de  $x$



dépend de la plus grande dérivée de  $y$ ,  $n$  ici. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0 \ \dots \ 0)x \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ceci n'est bien sûr qu'un exemple, mais l'idée sera toujours similaire.

On rappelle également que la représentation n'est pas unique. Nous aurions pu poser  $x_1 = 2y$  dans l'exemple précédent, ce qui aurait conduit à une autre équation. De façon générale, étant donné un vecteur d'état  $x$ , nous pouvons tout aussi bien considérer  $z := Px$  où  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est inversible et réécrire le système en l'état  $z$ .

## Fonction de transfert

Il s'agit de modèles entrée-sortie qui s'écrivent sous la forme

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) \quad p \in \mathbb{C}, \quad (2.9)$$

où  $Y$  est la transformée de Laplace de  $y$  et  $U$  celle de  $u$ . Contrairement aux précédentes représentations, les variables ne dépendent pas du temps mais de  $p$ , voire de  $j\omega$  ce qui permet d'étudier le comportement du système dans le domaine fréquentiel. Les fonctions de transfert sont adaptées aux systèmes mono-entrée, mono-sortie.

Revenons à la définition de  $Y$ , nous avons, pour tout  $p \in \mathbb{C}$ ,

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt} y(t) dt. \quad (2.10)$$

N'oublions pas que cette transformée n'est pas toujours définie<sup>1</sup>. C'est toujours le cas pour les systèmes linéaires, mais ce n'est souvent plus vraie pour les systèmes non-linéaires. Nous n'exploiterons donc pas ce type de représentation dans la suite de ce cours pour analyser les systèmes non-linéaires. Cela a plusieurs conséquences :

- nous ne parlerons pas de diagramme de Bode, ni de diagramme de Nyquist ;
- nous n'évoquerons pas les synthèses de correcteurs P, PI et PID en fréquentiel.

En résumé, nous ne travaillerons que sur des systèmes sous forme de représentation d'état.

1. Les conditions suffisantes vues en cours de maths de 1ère année pour l'existence de  $Y$  sont que  $y$  est continue par morceaux et d'ordre exponentiel.

### 2.1.2 Représentation d'état non-linéaire

Nous travaillerons sur des systèmes de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}\tag{2.11}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  l'entrée et  $y \in \mathbb{R}^p$  la sortie,  $n, m, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Nous reviendrons sur les propriétés des fonctions  $f$  et  $h$  dans la section 2.1.4.

### 2.1.3 Exemple de passage d'une EDO non-linéaire à une représentation d'état

Il est difficile d'établir une méthode générale pour passer d'une EDO non-linéaire à sa représentation d'état et ce n'est pas toujours chose facile. Contentons-nous d'un exemple. Soit le système

$$y^{(n)} = g(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}),\tag{2.12}$$

où  $y \in \mathbb{R}$ . Comme pour l'exemple linéaire vue précédemment, on pose  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ ,  $\dots$ ,  $x_n = y^{(n-1)}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ g(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\ y &= x_1.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Ainsi  $f(x) = (x_2, \dots, x_n, g(x))^\top$ .

Les élèves veulent souvent écrire les représentations d'état sous la forme  $Ax + Bu$  : cela n'a plus de sens en non-linéaire !

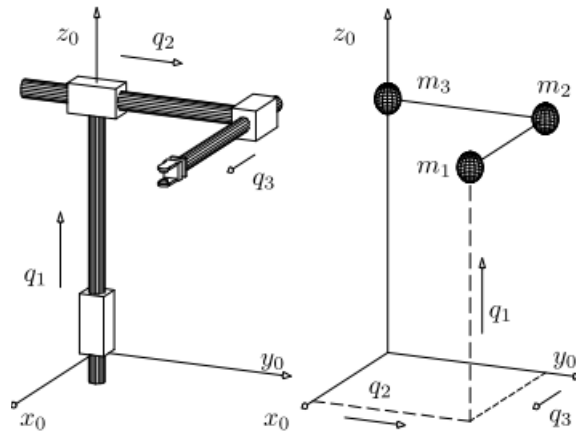
### 2.1.4 Existence et unicité des solutions

Pour simplifier la suite, nous supposons toujours que  $f$  dans le système (2.11) est continûment différentiable. Cela garantit que les solutions sont uniques pour toute condition initiale et qu'elles existent sur un intervalle de temps  $[0, t_{\max})$  où  $t_{\max} \in (0, \infty]$  dépend de la condition initiale (et de l'entrée).

S'il existe  $M \geq 0$  telle que  $\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| \leq M$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $t_{\max} = \infty$ . C'est également le cas pour les solutions  $x(\cdot)$  telles que  $x(t) \in \mathcal{S}$  pour tout  $t \in [0, t_{\max})$  où  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  est borné.

### 2.1.5 Exemple

Considérons le robot à trois degrés de liberté représenté sur la figure ci-dessous (cf. [2]). Celui-ci est constitué de trois liens rigides orthogonaux les uns par rapport aux autres.



Les équations dynamiques obtenues en appliquant les équations de Lagrange sont

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_1 + m_2 + m_3)g &= \tau_1 \\ (m_1 + m_2)\ddot{q}_2 &= \tau_2 \\ m_1\ddot{q}_3 &= \tau_3\end{aligned}$$

où  $m_1, m_2, m_3$  sont les masses des liens,  $g$  la constante gravitationnelle et  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  les forces externes appliquées à chaque joint.

1. Quel est l'ordre du système ? Celui-ci est-il linéaire ?
2. Représenter le système sous forme de représentation d'état.

**Réponses :**

1. Il y a trois variables scalaires  $q_1, q_2$  et  $q_3$  et chacune est dérivée au plus 2 fois. L'ordre du système est donc  $2+2+2 = 6$ . Le système n'est pas linéaire à cause du terme  $(m_1+m_2+m_3)g$ , nous avons, pour être précis, affaire à un système affine.

2. On pose  $x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2, x_5 = q_3$  et  $x_6 = \dot{q}_3$ . On obtient alors

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + (m_1 + m_2 + m_3)^{-1} \tau_1 \\ x_4 \\ (m_1 + m_2)^{-1} \tau_2 \\ x_6 \\ m_1^{-1} \tau_3 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

## 2.2 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

N'écartons pas trop vite les systèmes linéaires : ceux-ci peuvent se révéler très utiles pour analyser (voire contrôler, comme le verrons au chapitre 4) les systèmes non-linéaires. En effet, considérons le système

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.15)$$

et supposons que  $f(0) = 0$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \dots \\ &= f'(0)x + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Au voisinage de l'origine, nous avons donc

$$\dot{x} \approx f'(0)x, \quad (2.17)$$

où nous rappelons que  $f'(0)$  est la jacobienne de  $f$  évaluée en zéro, c'est-à-dire

$$f'(0) = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \bigg|_0, \quad (2.18)$$

avec  $f = (f_1, \dots, f_n)^\top$ . Le terme  $f'(0)$  est une matrice réelle, le système (2.17) est donc un système linéaire tout à fait classique.

Lorsque le système est équipé d'entrées et de sorties à l'instar de (2.11) et si  $f(0, 0) = 0$  et  $h(0, 0) = 0$ , alors sa linéarisation autour de l'origine est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (2.19)$$

où  $A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \bigg|_{(0,0)}$ ,  $B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \bigg|_{(0,0)}$ ,  $C = \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \bigg|_{(0,0)}$  et  $D = \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \bigg|_{(0,0)}$ .

À noter que si on souhaite linéariser le système autour d'un autre point  $(x^*, u^*)$  que l'origine, il suffit d'effectuer la translation suivante :  $z = x - x^*$  et  $v = u - u^*$  et de linéariser le système en  $(z, v)$ . En effet, on obtient dans ce cas

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} - \dot{x}^* = \dot{x} \\ &= f(x) = f(z + x^*) =: g(z). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous avons bien  $g(0) = 0$  car  $g(0) = f(x^*) = 0$ .

**Exemple.** Soit le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 + x_1(x_1 - 1) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

- Déterminer le(s) point(s) d'équilibre du système.
- Linéariser le système autour des ces deux points.

**Réponses :**

1. Il s'agit de  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ .

2. On doit obtenir  $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

## Interrogation 1

Soit l'oscillateur de van der Pol

$$\ddot{y} - \varepsilon \omega_0 (1 - y^2) \dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (2.22)$$

où  $y$  est une variable temporelle scalaire,  $\omega_0$  et  $\varepsilon$  des paramètres strictement positifs.

1. Quel est l'ordre du système ?
2. Écrire le système sous forme de représentation d'état.
3. Le système est-il linéaire ou non-linéaire ? Pourquoi ?
4. Pourquoi étudier les systèmes non-linéaires ?

**Réponses :**

1. Il est de 2, car  $y$  est dérivée au maximum deux fois par rapport au temps.
2. On pose  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$ . Ainsi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \varepsilon \omega_0 (1 - x_1^2) x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

3. Il est non-linéaire à cause du terme  $x_1^2 x_2$ .
4. Parce que nombre de processus dynamiques ne peuvent être modéliser avec précision qu'avec un système non-linéaire, en particulier s'il s'agit d'étudier des phénomènes oscillatoires ou de processus ayant des points d'équilibre isolés.



# Chapitre 3

## Stabilité interne

### 3.1 Définition

Soit le système

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et telle que  $f(0) = 0$ .

**Rappel.** Si  $f(\bar{x}) = 0$  et  $\bar{x} \neq 0$ , on peut toujours se ramener à l'étude du point d'équilibre 0 à l'aide du changement de variable  $z = x - \bar{x}$ . Ainsi  $\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + \bar{x}) = g(z)$  et  $g(z) = 0$ .

**Exemple.** Explications sur le pendule simple.

La **stabilité** est une notion fondamentale de l'automatique. Elle garantit (lorsqu'elle est asymptotique), la **convergence des solutions vers un point d'équilibre donné**, qui peut correspondre à une valeur désirée. De plus, nous sommes sûrs que si la condition initiale est proche de la valeur finale désirée, alors elle le restera pour tout temps positif. Ces deux propriétés sont fondamentales dans nombre d'applications comme la régulation de température dans une salle, ou de celle de la vitesse d'une voiture pour n'en citer que deux.

**Définition 1.** Considérons le système (3.1), le point d'équilibre  $x = 0$  est dit :

- **stable (S)** si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$ , qui dépend de  $\varepsilon$ , tel que pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|x(0)| \leq \delta$  la solution  $x(\cdot)$  correspondante satisfait  $|x(t)| \leq \varepsilon$  pour tout  $t \geq 0$  ;
- **instable** s'il n'est pas stable ;
- **localement asymptotiquement stable (LAS)** s'il est stable et qu'il existe  $\delta \in (0, \infty)$  tel que pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|x(0)| \leq \delta$  la solution  $x(\cdot)$  correspondante satisfait  $|x(t)| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  ;

- **globalement asymptotiquement stable (GAS)** s'il est stable et vérifie la propriété de convergence ci-dessus pour  $\delta = \infty$ .

Plusieurs remarques s'imposent.

- Illustration de la notion de stabilité / d'instabilité / et LAS, cf. explications en cours.
- On parle souvent de stabilité d'un système : c'est un abus de langage. Pour être précis, il faut parler de **stabilité d'un point d'équilibre donné pour le système en question**. C'est très clair dans le cas du pendule simple. On ne peut pas affirmer que celui-ci est stable ou instable : tout dépend du point de l'espace d'état considéré. À noter qu'on peut également parler de stabilité d'un ensemble ou d'une trajectoire, mais nous ne nous pencherons pas sur ces notions dans le cadre de ce cours.
- Un point d'équilibre peut être LAS mais pas GAS, reprendre ici une nouvelle fois l'exemple du pendule.
- Pourquoi stabilité + convergence et non convergence uniquement ? Souvent, on confond stabilité asymptotique et convergence vers l'origine. Ces notions sont équivalentes pour les systèmes linéaires temps-invariant : elles ne le sont plus en non-linéaire. Exemple de Vinograd (1957) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{r^2(1 + r^4)} \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{r^2(1 + r^4)},\end{aligned}\tag{3.2}$$

où  $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ , cf. simulations avec Matlab-Simulink. Pour cet exemple, toutes les solutions convergent vers l'origine, mais celle-ci n'est pas stable.

- La propriété de convergence dans LAS et GAS est également appelée **attractivité**.
- L'énoncé de la définition 1 suppose/garantit implicitement que les solutions sont définies pour tout temps positif.

Il existe pléthore de notions de stabilité. Nous n'en fournissons que deux supplémentaires dans la définition ci-dessous.

**Définition 2.** Considérons le système (3.1), le point d'équilibre  $x = 0$  est dit :

- **localement exponentiellement stable (LES)** s'il existe  $c_1, c_2 \in (0, \infty)$  et  $\delta \in (0, \infty)$  tels que, pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|x(0)| \leq \delta$  la solution  $x(\cdot)$  correspondante satisfait

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x(0)|$$

pour tout  $t \geq 0$  ;

- **globalement exponentiellement stable (GES)** s'il existe  $c_1, c_2 \in (0, \infty)$  tels que, pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , la solution  $x(\cdot)$  correspondante satisfait

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x(0)|$$



pour tout  $t \geq 0$ .

La constante  $c_1$  est lié au dépassement et  $c_2$  à la vitesse de convergence. Ce n'est pas la vitesse de convergence de la solution à proprement parler, mais une borne sur celle-ci. On remarque que la constante  $c_1$  est toujours plus grand ou égale à 1, sinon on obtiendrait  $|x(0)| < |x(0)|$ .

Nous pouvons logiquement nous poser la question de la relation entre toutes ces notions. Tel est le sujet de la prochaine proposition.

**Proposition 1.** *Considérons le système (3.1), si  $x = 0$  est :*

- (i) *GES alors il est LES;*
- (ii) *GES, alors il est GAS et donc LAS et donc S.*

En d'autres termes, nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{GES} & \Rightarrow & \text{GAS} & \Rightarrow & \text{LAS} & \Rightarrow & \text{S} \\ & \searrow \searrow & & \nearrow \nearrow & & & \\ & & \text{LES} & & & & \end{array} \quad (3.3)$$

**Explications.** L'implication  $\text{GES} \Rightarrow \text{LES}$  est triviale, de même pour  $\text{GES} \Rightarrow \text{GAS}$ ,  $\text{GAS} \Rightarrow \text{LAS}$  et  $\text{LAS} \Rightarrow \text{S}$ . Le cas  $\text{LES} \Rightarrow \text{LAS}$  mérite qu'on s'attarde. Supposons que  $x = 0$  soit LES pour le système (3.1). Si  $|x(0)| \leq \delta$ , alors  $|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x(0)|$  pour tout temps  $t$  positif, ce qui implique  $|x(t)| \leq c_1 |x(0)| \leq c_1 \delta$  toujours pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi pour n'importe quel  $\varepsilon > 0$ , il suffit de prendre  $\delta' = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{c_1}\}$ , ainsi  $|x(t)| \leq \varepsilon$  pour tout  $t \geq 0$ , ce qui prouve que  $x = 0$  est stable. De plus, il est clair que  $|x(t)| \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  pour  $|x(0)| \leq \delta$ . Par conséquent,  $x = 0$  est LAS.  $\square$

À noter que nous n'avons pas toutes ces nuances pour les systèmes linéaires. La proposition suivante explique ce constat.

**Proposition 2.** *Soit le système  $\dot{x} = Ax$  où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Le point  $x = 0$  est GES si et seulement s'il est GAS / LAS / LES / globalement attractif. Tel est le cas si et seulement si  $A$  est Hurwitz<sup>1</sup>.*

Nous prouverons la dernière partie de cette proposition dans la suite du cours.

**Question.** Tout cela est bien joli mais comment prouve-t-on la stabilité d'un point d'équilibre d'un système non-linéaire ? Toutes les définitions données impliquent les solutions de (3.1), or nous avons vu dans l'introduction que nous ne savons pas les calculer en général. Il nous faut donc des outils adaptés. En linéaire, nous ne calculions par les solutions du systèmes pour cela, il suffit d'analyser les valeurs propres de la matrice d'état. Le problème est qu'on ne peut pas parler de valeurs propres pour le champ de vecteur  $f(x)$  : de nouveaux outils sont nécessaires.

1. Une matrice est dit Hurwitz lorsque toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

## Interrogation 2

Soit le système

$$\frac{d^3}{dt^3}y + \dot{y}^4 + 2y + \sin(\dot{y}) = 0, \quad (3.4)$$

où  $y$  est une variable scalaire.

1. Écrire le système sous forme de représentation d'état.
2. Déterminer les points d'équilibre.
3. Linéariser le système autour de ces points.
4. Expliquer ce que veut dire que  $x = 0$  est GAS pour un système dynamique, sans utiliser de symbole mathématique.

**Réponses :**

1. On pose  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  et  $x_3 = \ddot{y}$ . Ainsi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_2^4 - 2x_1 - \sin(x_2) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

2.  $x = 0$

3.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad (3.6)$$

4. Cela signifie que si la condition initiale est proche de l'origine, elle le restera pour tout temps positif. De plus, toute solution converge asymptotiquement vers zéro.

## 3.2 Théorèmes de Lyapunov directs

Alexandre Lyapunov (1857–1918) était un mathématicien et physicien russe, qui a grandement contribué à l'étude des systèmes dynamiques. Pour plus d'informations, voici un lien vers sa page Wikipedia en français : [cliquer ici](#).

**Théorème 1.** Soit  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  ouvert et connecté, tel que  $0 \in \mathcal{D}$ . Soit  $V \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}_{\geq 0})$  telle que :

- $V$  est définie positive, i.e.  $V(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$  et  $V(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$  ;

- Pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$ .

Dans ce cas,  $x = 0$  est stable pour le système (3.1), on dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov faible. Si, de plus, pour tout  $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0$ , alors  $x = 0$  est localement asymptotiquement stable et  $V$  est une fonction de Lyapunov forte.  $\square$

Ce théorème appelle plusieurs remarques.

- Nous n'avons pas besoin de calculer les solutions de (3.1) pour vérifier les conditions du théorème. La première condition est que  $V$  est définie positive sur  $\mathcal{D}$ . À cette étape,  $V$  n'a aucun lien avec le système. Puis on prend  $x \in \mathcal{D}$  et on évalue  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ , ce qui nécessite uniquement la connaissance de  $V$  et de  $f$ . D'ailleurs, pourquoi étudie-t-on  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ ? Tout simplement parce que ce terme correspond à  $\frac{\partial V(x(t))}{\partial t}$ . En effet,  $\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} f(x(t))$ . Dans ce cas, on parle de formulation différentielle car elle fait intervenir la dérivée temporelle des solutions, tandis que celle du théorème est dite algébrique car on ne manipule que des vecteurs. Pourquoi favoriser la formulation algébrique? Parce qu'elle nous évite de devoir nous préoccuper des problèmes d'existence des solutions sur un intervalle fini. De plus, on ne peut pas se tromper sur le système en question, ce qui n'est pas toujours le cas quand on écrit  $\dot{V}(x(t))$  et que plusieurs systèmes sont considérés.
- À noter que bien que  $x \in \mathbb{R}^n$ , il suffit d'étudier des scalaires,  $V(x)$  et  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$  pour statuer quant à la stabilité du système. Nous sommes donc passés d'un problème de dimension  $n$  à un problème scalaire.

**Exemple.** Soit le système  $\dot{x} = -x^3$  où  $x \in \mathbb{R}$ . On prend  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et on montre que les conditions sont vérifiées.

**Exemple.** Considérons le pendule simple sans frottement, donc les équations sont

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1),\end{aligned}\tag{3.7}$$

où  $x_1$  est l'angle,  $x_2$  la vitesse angulaire et  $a > 0$  un paramètre. Prenons l'énergie du système comme fonction de Lyapunov, i.e.  $V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$  pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Vérifions que  $V$  est bien définie positive sur un domaine  $\mathcal{D}$  ayant l'origine dans son intérieur, à noter qu'elle est bien continûment différentiable.

Il est clair que  $V(0) = a(1 - 1) + 0 = 0$ . Par ailleurs,  $1 - \cos(x_1) \geq 0$  donc  $V(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ . De plus, si  $x_1 \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , alors  $V(x) > 0$ . On prend donc  $\mathcal{D} = (-2\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}$  pour le moment, quitte à le restreindre par la suite si nécessaire.

Soit  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} = [a \sin(x_1), x_2]$ , donc

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = a \sin(x_1)x_2 + x_2(-a \sin(x_1)) = 0. \quad (3.8)$$

D'après le théorème de Lyapunov direct que nous venons de voir,  $x = 0$  est stable ce qui est bien le résultat escompté. Peut-il être asymptotiquement stable ? L'intuition nous dit clairement que non. Les mathématiques aussi car nous avons une égalité et non une égalité ci-dessus : l'énergie du système est conservée, elle ne dissipe pas.

**Exemple.** Considérons le pendule simple avec frottement cette fois, donc les équations sont

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $x_1$  est l'angle,  $x_2$  la vitesse angulaire et  $a, b > 0$  des paramètres. Reprenons la même fonction de Lyapunov. Soit  $x \in \mathcal{D}$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = a \sin(x_1)x_2 + x_2(-a \sin(x_1) - bx_2) = -bx_2^2. \quad (3.10)$$

D'après le théorème de Lyapunov direct que nous venons de voir,  $x = 0$  est stable. Peut-on conclure que  $x = 0$  est LAS ? Non ! En effet, lorsque  $x_2 = 0$  et  $x_1 \neq 0$ , nous avons que  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = 0$  et non  $< 0$ . Pourtant la physique nous dit que ce devrait être le cas. Il nous faut changer la fonction de Lyapunov pour le démontrer. Prenons cette fois  $V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x^\top \begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix} x$ .

On rappelle qu'une matrice réelle symétrique, de dimension  $n \times n$   $P$  est définie positive si et seulement si  $x^\top Px > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il suffit pour cela que ses valeurs propres soient strictement positives. Une alternative consiste à étudier les mineurs de  $P$  qui doivent tous être strictement positifs, dans notre cas, nous avons :  $\frac{b^2}{2} > 0$  et  $\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4} > 0$ , c'est bien le cas.

Par conséquent, si  $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ ,  $V(x) > 0$  et  $V(0) = 0$ . La première condition du théorème de Lyapunov indirect est vérifiée.

Soit  $x \in \mathcal{D}$ ,  $V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{b^2}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{b}{2}x_1x_2$ . Ainsi  $\frac{\partial V(x)}{\partial x_1} = a \sin(x_1) + \frac{b^2}{2}x_1 + \frac{b}{2}x_2$  et  $\frac{\partial V(x)}{\partial x_2} = x_2 + \frac{b}{2}x_1$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) &= a \sin(x_1)x_2 + \frac{b^2}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + (x_2 + \frac{b}{2}x_1)(-a \sin(x_1) - bx_2) \\ &= -\frac{b}{2}x_2^2 - abx_1 \sin(x_1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

On remarque que  $x_1 \sin(x_1) > 0$  pour  $x_1 \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ . Par conséquent, en définissant  $\mathcal{D} = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ , nous avons montré que  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0$  pour tout  $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ . On en

déduit que  $x = 0$  est LAS.

**Question.** Au vu des exemples ci-dessus, il est naturel de se poser la question de comment construire la fonction  $V$ . Existe-t-il une formule générale? La réponse est non. Nous déterminons la fonction de Lyapunov par expérience. Nous suivons habituellement les étapes suivantes :

1.  $V(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ ;
2.  $V(x) = x^\top P x$  où  $P$  est une matrice réelle, symétrique, définie positive ;
3. l'énergie du système, si celle-ci a un système, quitte à la modifier comme nous l'avons fait pour le pendule simple avec frottement.

Il existe par ailleurs des outils numériques pouvant permettre de construire  $V$  pour les systèmes polynomiaux (cf. SOSTOOLS et Polyopt).

**Question.** Si  $x = 0$  est LAS, existe-t-il toujours une fonction de Lyapunov ou cette quête peut-elle être vaine? La réponse est oui.

**Question.** Quand la stabilité est locale, peut-on connaître la région de l'espace d'état pour laquelle les solutions convergent vers l'origine? On parle alors de bassin d'attraction. Nous pouvons estimer cette région à l'aide des fonctions de Lyapunov. Pour le voir, remarquons tout d'abord que cette région n'est pas a priori l'ensemble des points tels que  $\mathcal{S} := \left\{ x : \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0 \right\}$ . En effet, cette région n'est pas nécessairement invariante, en ce sens qu'il se peut qu'une solution soit dans cet ensemble puis le quitte, cf. illustration vue en cours. Pour éviter ce problème, il faut considérer un ensemble de la forme  $\mathcal{V}(a) := \{x : V(x) \leq a\}$  où  $a > 0$ . Si  $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{V}(a)$  est bien inclus dans le bassin d'attraction.

Le théorème de Lyapunov que nous avons vu statue quant à la stabilité locale. Le résultat suivant permet de conclure dans le cas global.

**Théorème 2.** Lorsque  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  et que  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est radialement non-bornée (i.e.  $V(x) \rightarrow \infty$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ ), alors, si  $V$  est une fonction de Lyapunov forte, l'origine du système (3.1) est GAS. □

**Exemples.**  $V(x) = |x|^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  où  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{b}{2}x_2^2$  pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  que nous avons rencontré lors de l'étude du pendule simple.

Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 1.** Soit  $P$  une matrice réelle, carrée de dimension  $n$ , symétrique, définie positive. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda_{\min}(P)|x|^2 \leq x^\top P x \leq \lambda_{\max}(P)|x|^2$  où  $\lambda_{\min}(P)$  et  $\lambda_{\max}(P)$  sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de  $P$ . De plus,  $\lambda_{\min}(P) > 0$ .  $\square$

Nous avons vu des caractérisations de Lyapunov pour toutes les notions de stabilités définies exceptés la stabilité exponentielle. Dans ce cas, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.** Considérons le système (3.1). Soient  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert, connecté et tel que  $0 \in \mathcal{D}$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $k_1, k_2, k_3 > 0$  et  $a > 1$  tels que :

- Pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $k_1|x|^a \leq V(x) \leq k_2|x|^a$  ;
- Pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -k_3|x|^a$  ;

alors  $x = 0$  est LES. Si les conditions sont vraies pour  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ ,  $x = 0$  est GES.  $\square$

**Exemples.**  $\dot{x} = -x^3$ ,  $\dot{x} = -x$ .

Pour conclure cette partie, pour les systèmes linéaires, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 4.** Considérons le système  $\dot{x} = Ax$ . L'origine de  $x = 0$  est GES si et seulement si  $A$  est Hurwitz.  $\square$

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant.

**Lemme 2.**  $A$  est Hurwitz si et seulement si pour toute matrice  $Q$  réelle, symétrique, définie positive, il existe une unique matrice  $P$  réelle, symétrique, définie positive telle que  $A^\top P + PA = -Q$ .  $\square$

La preuve consiste à considérer la fonction de Lyapunov  $V(x) = x^\top P x$ .

## Interrogation 3

1. Étudier la stabilité de  $x = 0$  pour le système  $\dot{x} = -x^7 - x$  où  $x \in \mathbb{R}$  à l'aide de  $V(x) = x^2$ .
2. L'origine du système  $\dot{x} = -x(1-x)\ln(1+x^2)$  où  $x \in \mathbb{R}$  est-elle globalement asymptotiquement stable ?
3. Expliquer la notion de stabilité globale asymptotique d'un point d'équilibre sans symbole mathématique.

**Réponses :**

1. La fonction  $V$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , définie positive et radialement non-bornée. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = 2x(-x^7 - x) = -2x^8 - x^2 \leq -x^2$ . On en déduit que  $x = 0$  est GES car les conditions du théorème 3 sont vérifiées avec  $k_1 = k_2 = 1$ ,  $k_3 = 2$  et  $a = 2$ .
2. Non car il y a un autre point d'équilibre  $x = 1$ . Par conséquent, une solution initialisée

en 1  $y$  restera pour tout temps et ne convergera donc pas vers l'origine.

3. Un point d'équilibre est GAS lorsque (i) toute solution converge asymptotiquement vers ce point, et (ii) toute solution initialisée dans un voisinage de ce point, y reste pour tout temps positif.

### 3.3 Théorèmes de Lyapunov indirects

Cette partie est bien plus courte que la précédente. L'idée est la suivante. Peut-on ramener l'étude de la stabilité locale à celle du système linéarisé? La réponse est fournie dans le théorème suivant.

**Théorème 5.** Considérons le système (3.1). Soit  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ . Si

- $A$  est Hurwitz, alors  $x = 0$  est LES.
  - $A$  a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x = 0$  est instable.
- 

Dans les deux cas du théorème, l'étude locale de la stabilité du système non-linéaire (3.1) nous renseigne sur la stabilité du système d'origine. Qu'en est-il du cas où la matrice  $A$  a une valeur propre dont la partie réelle est nulle. Dans ce cas, le problème est plus compliqué comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple.**  $\dot{x} = -x^3$  vs  $\dot{x} = x^3$ .

## Interrogation 4

Soit le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 - 2x_1 \\ x_3^4 - x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

L'objectif est d'analyser la stabilité de l'origine pour ce système.

1. Déterminer le système linéarisé au voisinage de l'origine.
2. Analyser la stabilité de l'origine à l'aide du théorème de Lyapunov indirect.
3. Soit  $V(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{\alpha}{8}x_3^8$  où  $\alpha > 0$ . Analyser la stabilité de l'origine du système à l'aide de  $V$  en choisissant  $\alpha$  judicieusement. Vous aurez besoin pour cela de la propriété suivante :  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Réponses :**

1. On a  $\dot{x} = Ax$  avec  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

2. Les valeurs propres de  $A$  sont  $-1, -1, -2$  donc  $A$  est Hurwitz, ce qui implique que l'origine est LES pour le système non-linéaire.

3. On note que  $V$  est bien  $C^1$ , définie positive et radialement non-bornée. Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = -x_1^4 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_2x_3^4 - \alpha x_3^8$ . Puisque  $x_2x_3^4 \leq \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^8)$ , on en déduit que  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -x_1^4 - 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - (\alpha - \frac{1}{2})x_3^8$ . En prenant  $\alpha > \frac{1}{2}$ , on conclut que  $x = 0$  est GAS.

### 3.4 Principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle

Reprenons l'exemple du pendule avec frottement. Pour rappel

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $a, b > 0$ . Nous avons montré que, pour  $V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = -bx_2^2. \quad (3.14)$$

Nous n'avions pu alors conclure quant à la stabilité asymptotique de l'origine. C'est la raison pour laquelle nous avons modifié la fonction de Lyapunov. Mais qu'implique (3.14)? Que  $V$  décroît strictement le long des solutions du système tant  $x_2 \neq 0$ . Que se passe-t-il "au cas limite", c'est-à-dire lorsque  $x_2 = 0$ ? Cela signifie que la vitesse est nulle et qu'elle le reste pour toujours : cela correspond forcément à un point d'équilibre. De plus, puisque la position haute,  $(x_1, x_2) = (\pi + 2k\pi, 0)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  est instable, soit la solution est initialisée en ce point et y reste, soit elle converge vers la position basse  $(x_1, x_2) = (2k\pi, 0)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le principe d'invariance de LaSalle permet de formaliser ce raisonnement.

**Théorème 6.** *Considérons le système (3.1). Soient  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact et  $V \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$  telles que :*

- Pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$ .

Définissons  $\mathcal{E} := \left\{ x \in \mathcal{D} : \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = 0 \right\}$  et  $\mathcal{M}$  le plus grand ensemble invariant inclus dans  $\mathcal{E}$ . Alors toute solution initialisée dans  $\mathcal{D}$  qui reste dans  $\mathcal{D}$  converge vers  $\mathcal{M}$ .  $\square$

**Remarques.**

- Expliquer l'idée :  $V$  décroît le long des solutions tant que celle-ci n'est pas dans  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{E}$ . Une fois dans  $\mathcal{E}$ , la solution ne peut rester que dans un invariant.



- $V$  n'a pas besoin d'être définie positive.

**Exemple.** Reprenons l'exemple du pendule avec frottement. L'ensemble  $\mathcal{D}$  est donnée par  $(-2\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}$ . Il nous faut un compact. Pas de souci, on prend  $\mathcal{D} = [-2\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \times [-M, M]$  avec  $\varepsilon > 0$  petit et  $M > 0$  et assumons qu'il est positivement invariant. L'ensemble  $\mathcal{E}$  est inclus dans  $\{x \in \mathcal{D} : x_2 = 0\}$ . Lorsqu'une solution est dans  $\mathcal{E}$ ,  $\dot{x}_1 = 0$  et  $\dot{x}_2 = -a \sin(x_1)$ . Pour que  $x_2$  reste nulle, en d'autres termes, pour que la solution reste dans  $\mathcal{E}$ , il faut que  $\dot{x}_2 = 0$  et donc que  $x_1 \in \{-\pi, 0, \pi\}$ . Ainsi  $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{D} : (x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = \pi \text{ ou } x_1 = -\pi) \text{ et } x_2 = 0\}$ . Donc les solutions convergent vers un des deux points d'équilibre. On en déduit que, soit la solution est initialisée en position haute, ou il converge vers la position basse.

**Exemple.** Soit le système  $\dot{x}_1 = x_2$  et  $\dot{x}_2 = -x_1 - \frac{x_2^3}{1+x_1^2}$ . Prendre  $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = x_1 x_2 - x_1 x_2 - \frac{x_2^4}{1+x_1^2} = -\frac{x_2^4}{1+x_1^2} \leq 0$ . On a  $\mathcal{E} := \{x : x_2 = 0\}$ . Soit  $x \in \mathcal{E}$ , pour rester dans  $\mathcal{E}$  il faut que  $x_1 = 0$ . Si  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , donc  $\mathcal{M} = \{0\}$ .

Le corollaire suivant permet de statuer quant à la stabilité d'un point d'équilibre à l'aide du principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

**Corollaire 1.** Considérons le système (3.1). Soient  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert, connecté, tel que  $0 \in \mathcal{D}$  et  $V \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$  tels que :

- $V$  est définie positive ;
- Pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$ .

Si  $\mathcal{M} = \{0\}$ , cf. théorème 6, alors  $x = 0$  est LAS. □

### 3.5 Conclusion

Nous ne traitons pas les systèmes variant dans le temps dans ce chapitre, c'est-à-dire les systèmes de la forme  $\dot{x} = f(t, x)$ . Seuls les théorèmes de Lyapunov directs s'appliquent, après quelques modifications mineures, dans ce cas. Par contre, les autres résultats (théorème de Lyapunov indirect et principe d'invariance) ne passent pas (en général). Pour plus d'informations, cf. [3, chapitre 4].



# Chapitre 4

## Stabilisation

### 4.1 Préambule

Avant de débiter, il est à noter que nous utiliserons le vocable stabilisation, contrôle, commande de façon indifférenciée dans ce cours.

Le sujet de cette partie est la synthèse de lois garantissant que l'origine du système bouclé est (asymptotiquement) stable. On parlera ainsi de façon équivalente de lois de commande/contrôle, de contrôleur voire de régulateur.

Nous nous intéressons aux systèmes commandés de la forme

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée de commande,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

### 4.2 Classe de contrôleurs

Il existe différents types de contrôleurs :

- $u = k(x)$  où  $k \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , on parle de *retour d'état statique* ;
- $u = k(y)$  où  $y = h(x, u) \neq x$  est la sortie du système, on parle de *retour de sortie statique* ;
- $\dot{x}_c = f_c(x_c, x)$  et  $u = k(x_c, x)$ , on parle de *retour d'état dynamique* ;
- $\dot{x}_c = f_c(x_c, y)$  et  $u = k(x_c, y)$ , on parle de *retour de sortie dynamique*.

Vous avez vu l'an passé dans le cours sur les systèmes linéaires des contrôleurs du type :

- $u = Kx$ , il s'agit d'un retour d'état statique ;
- commande basé observateurs, il s'agit de retours de sortie dynamiques ;
- P, retour de sortie statique ;
- PI, PID, retour de sortie dynamique.

Dans ce cours, nous nous concentrons sur le premier type de contrôleurs : les retours d'état statique. Ainsi, le système bouclé s'écrit  $\dot{x} = f(x, k(x)) =: F(x)$  et nous pourrions exploiter les résultats du chapitre précédent pour analyser la stabilité du système ainsi obtenu.

### 4.3 Contrôlabilité

L'objectif de ce chapitre est l'étude de techniques de stabilisation. Une question préalable est de savoir s'il est possible de concevoir une loi de commande stabilisante. Cette question est très proche de celle de la contrôlabilité (ou commandabilité).

**Définition 3.** *Le système (4.1) est globalement commandable si pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , pour tout état final  $x_f \in \mathbb{R}^n$  et pour tout temps final  $t_f > 0$ , il existe une loi de commande  $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tel que la solution de  $\dot{x} = f(x, u)$  vérifie  $x(0) = x_0$  et  $x(t_f) = x_f$ .  $\square$*

Nous avons vu en 1ère année qu'un système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est contrôlable si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \quad (4.2)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments du vecteur d'état. On appelle cette propriété la condition de Kalman.

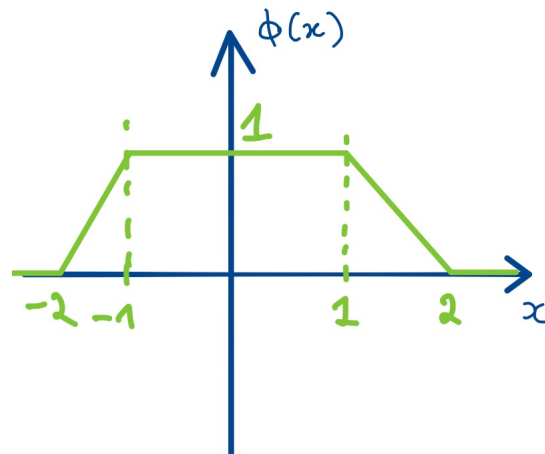
La question est beaucoup plus complexe pour les systèmes non-linéaires pour lesquels la contrôlabilité peut n'être qu'une propriété locale. Prenons cet exemple

$$\dot{x} = x + \phi(x)u \quad (4.3)$$

où  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $\phi(x) = 1$  sur  $[-1, 1]$ , 0 sur  $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ , cf. figure 4.1. L'idée de la fonction  $\phi$  est qu'au voisinage de  $x = 0$ ,  $\dot{x} = x + u$  auquel cas le système est contrôlable (la condition de Kalman est vérifiée). Par contre, lorsque  $|x|$  est grand,  $\dot{x} = x$  et le système n'est plus contrôlable car l'entrée  $u$  n'a plus aucun impact sur les dynamiques.

Pour information, la condition la plus célèbre en non-linéaire est celle de Brockett, que nous éluderons dans ce cours et qui n'est que nécessaire (et non suffisante).

Ce constat implique que nous sauterons l'étude de la contrôlabilité dans ce cours pour les systèmes non-linéaires, et construirons donc directement des contrôleurs, ce qui sera toujours possible pour les classes de systèmes considérées.

FIGURE 4.1 – Graphe de la fonction  $\phi$ .

## 4.4 Techniques de commande : systèmes linéaires

Considérons le système

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . On suppose que  $(A, B)$  est contrôlable<sup>1</sup>. Dans ce cas, nous pouvons toujours déterminer un retour d'état statique linéaire

$$u = Kx$$

où  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est choisie de telle sorte que  $A + BK$  est Hurwitz. Ainsi  $x = 0$  est GES pour le système contrôlé, d'après la proposition 2.

Sous Matlab, il suffit, une fois  $A$  et  $B$  définies, d'utiliser le code : `K=-place(A,B,p)` où  $p$  est le vecteur des valeurs propres désirées pour  $A + BK$ . Nous avons beaucoup de flexibilité pour choisir  $p$ . Rappelons que plus les valeurs propres sont à gauche dans le plan complexe, plus les solutions convergeront vite. Par contre, cela nécessitera typiquement un grand gain  $K$  et donc, si l'entrée  $u$  est bruitée pour une raison ou une autre, le bruit sera amplifiée. Par ailleurs, plus les valeurs propres sont éloignées de l'axe des réels, plus nous aurons d'oscillations en boucle fermée.

1. Il suffit en réalité d'avoir  $(A, B)$  stabilisable, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres (ou modes) de  $A$  non-contrôlables sont à partie réelle strictement négative.

## 4.5 Techniques de commande : systèmes non-linéaires

Contrairement aux systèmes linéaires, il n'existe pas de méthode générique permettant la construction d'un contrôleur pour un système non-linéaire.

Une conséquence de ce constat est que nous allons voir des techniques de commandes pour des classes de systèmes.

### 4.5.1 Approches par linéarisation

#### Stabilisation locale

Nous avons pour but de stabiliser  $x = 0$ . Nous pouvons donc linéariser le système (4.1) autour de ce point, à supposer que  $f(0, 0) = 0$ . Nous obtenons ainsi

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

où

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(0,0)}$$

et

$$B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(0,0)}.$$

À noter que si  $f(0, 0) \neq 0$ , on peut effectuer un changement de variable, voire choisir une pré-commande adaptée, i.e.  $u = u_{\text{pré}} + v$ , pour s'y ramener.

Si  $(A, B)$  est contrôlable, alors on construit  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que  $A + BK$  est Hurwitz. Dans ce cas, l'origine de  $\dot{x} = (A + BK)x$  est GES, et donc l'origine de  $\dot{x} = f(x, Kx)$  est LES, d'après le théorème 5 vu au chapitre précédent.

#### Remarques.

- Cette technique est toujours celle à privilégier en pratique. Elle est simple à mettre en œuvre lorsque les conditions sont vérifiées et permet d'utiliser toute l'armada des techniques de commande linéaire (placement de pôles, LQ,  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  etc.).
- Son défaut est que la stabilité du système bouclée n'est pas garantie d'être globale. Pour connaître le bassin d'attraction, nous pouvons soit mener une analyse numérique, soit l'estimer à l'aide d'une fonction de Lyapunov, cf. chapitre 3.2.

#### Stabilisation globale

La linéarisation obtenue précédemment consiste à approcher les dynamiques du système localement autour de l'origine. Parce que l'approximation est locale, la stabilité ne peut être que locale en général. Il existe une alternative pour linéariser un système non-linéaire dans

certain cas. Considérons le système suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + u,\end{aligned}\tag{4.5}$$

où  $u \in \mathbb{R}$ . Posons  $u = -x_1^2 + v$  où  $v$  est un terme à déterminer. Ainsi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v,\end{aligned}\tag{4.6}$$

nous avons obtenu un système linéaire dont l'entrée est  $v$  cette fois. De plus, ce système est contrôlable. En effet, la matrice d'état est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'entrée  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , la condition de Kalman correspond à

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.\tag{4.7}$$

Nous pouvons donc construire  $v = Kx$  pour stabiliser l'origine de ce système. Nous garantissons ainsi que l'origine de  $\dot{x} = f(x, Kx - x_1^2)$  est GES. À noter que la loi de commande est bien non-linéaire :  $u = Kx - x_1^2$ .

De façon générale, pour un système de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x \\ \dot{x}_2 &= \phi_1(x) + \phi_2(x)u,\end{aligned}\tag{4.8}$$

où  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_2 \in C(\mathbb{R}^{n_1+1}, \mathbb{R})$  telle que  $\phi_2(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n_1+1}$ , on peut construire la loi de commande linéarisante

$$u = \phi_2(x)^{-1}(-\phi_1(x) + v).\tag{4.9}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x \\ \dot{x}_2 &= v,\end{aligned}\tag{4.10}$$

qui est de la forme  $\dot{x} = Ax + Bv$  où  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Si  $(A, B)$  est contrôlable, alors il suffit de prendre  $v = Kx$  tel que  $A + BK$  soit Hurwitz.

La loi de commande finale est donnée par

$$u = \phi_2(x)^{-1}(-\phi_1(x) + v) + Kx.\tag{4.11}$$

**Remarques.**

- On peut énoncer le même principe sur une classe plus générale de systèmes.
- Si le système n'est pas sous la forme ci-dessus, sous certaines conditions, on peut trouver un changement de variables permettant de s'y ramener, cf. le livre d'Alberto Isidori [1].
- Un défaut possible de cette approche est son éventuel manque de robustesse, car il s'agit d'annuler exactement des non-linéarités. En effet, considérons

$$\dot{x} = x^2 + u. \quad (4.12)$$

En suivant l'approche précédente, nous posons

$$u = -x^2 + v, \text{ où } v = -x. \quad (4.13)$$

Ainsi  $\dot{x} = -x$ . Supposons maintenant que le vrai modèle soit

$$\dot{x} = (1 + \varepsilon)x^2 + u$$

où  $\varepsilon > 0$ . Le système bouclé devient dans ce cas  $\dot{x} = \varepsilon x^2 - x$ , dans ce cas, la stabilité n'est plus globale mais locale uniquement. En règle général, mieux vaut compenser une non-linéarité que l'annuler exactement. Sur cet exemple, en compensant, nous pourrions prendre  $u = -x - x^3 - x^2$ , ainsi  $\dot{x} = \varepsilon x^2 - x - x^3$ . Une analyse de Lyapunov montre que la stabilité GAS de l'origine est garantie pour  $\varepsilon$  petit.

## 4.5.2 Approches fondées sur une fonction de Lyapunov

### Idée générale

Reprenons l'exemple que nous venons de voir

$$\dot{x} = x^2 + u, \quad (4.14)$$

où  $x, u \in \mathbb{R}$ . Nous allons concevoir une loi de commande stabilisante à l'aide d'une fonction de Lyapunov ici. Soit  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $V$  est bien continûment différentiable, définie positive et radialement non-bornée. Soient  $x, u \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(x^2 + u) = x(x^2 + u). \quad (4.15)$$

Posons  $u = -x^2 - x - x^3$ , le terme cubique peut ne pas être pris en compte. Ainsi,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(x^2 + u) = -x^2 - x^4. \quad (4.16)$$



Les conditions du théorème de Lyapunov direct sont vérifiées, nous en déduisons que  $x = 0$  est GAS pour le système ainsi bouclé.

Prenons un peu de recul. Qu'avons-nous fait ici ? Nous avons pris une fonction de Lyapunov candidate, puis nous avons cherché une loi de commande telle que  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u)$  est définie négative. Il y a donc deux éléments clefs ici :

- la fonction de Lyapunov  $V$  ;
- la loi de commande.

Nous allons voir comment les déterminer pour des classes de systèmes par la suite. À noter qu'on peut toujours essayer cette approche telle quelle.

### Formule universelle de Sontag

Nous considérons ici les systèmes dits affines en la commande, qui s'écrivent sous la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4.17)$$

où  $f$  et  $g$  sont  $C^1$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ .

**Définition 4.** Soit  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  définie positive et radialement non-bornée. On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov de commande (CLF) si pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0 \right) \Rightarrow \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0 \right). \quad (4.18)$$

□

Penchons-nous sur (4.18). Soient  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x)u. \quad (4.19)$$

Quand  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0$ , on ne peut pas contrôler le système. Il est donc nécessaire dans ce cas que  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0$  quand  $x \neq 0$  pour pouvoir garantir la stabilité asymptotique de  $x = 0$ .

Nous avons le résultat suivant, que nous devons à Eduardo Sontag (1983) [7, chapitre 3.5.3].

**Théorème 7.** *Considérons le système (4.17). Soit  $V$  une CLF, alors  $x = 0$  est GAS pour le système bouclé à l'aide de la loi de commande suivante*

$$u = \begin{cases} -\frac{a(x) + \sqrt{a(x)^2 + |b(x)|^4}}{|b(x)|^2} b(x) & \text{si } b(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(x) = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $a(x) := \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$  et  $b(x) := \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) \right)^\top$ . □

Sous les conditions énoncées, nous avons la garantie que la loi de commande de (4.20) est continue (même localement Lipschitzienne).

**Remarques :**

- Cette loi de commande possède de « bonnes propriétés » de robustesse, cf. [7, chapitre 3.5.3].
- Le choix de  $V$  n'est pas évident et laissé libre ici. Cependant, une fois que nous avons trouvé  $V$  telle que (4.18) soit vérifiée, alors le problème est résolu. Nous allons voir dans la section suivante une technique qui permet de construire systématiquement  $V$  (et la loi de commande) cette fois.

## Backstepping

Il s'agit d'une technique développée dans la fin des années 80, début des années 90, par Steven Morse et Petar K. Kokotović [4]. Elle s'applique aux systèmes de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u + \phi_2(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $\phi_1(0) = 0$ . La méthode est itérative.

**Étape 1.** Considérons le premier sous-système, c'est-à-dire

$$\dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x_1), \quad (4.22)$$

et supposons que  $x_2$  soit une entrée de commande de ce système. Ce n'est de toute évidence pas le cas, mais supposons le pour le moment. Soit

$$V_1(x_1) := \frac{1}{2} x_1^2$$

pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}$ . La fonction  $V_1$  est  $C^1$ , définie positive et radialement non-bornée. Soient  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1(x_1)) = x_1(x_2 + \phi_1(x_1)). \quad (4.23)$$

Prenons  $x_2 = -x_1 - \phi_1(x_1)$ , ce que nous pouvons faire puisque nous supposons que  $x_2$  est une entrée de commande. Ainsi,

$$\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1(x_1)) = -x_1^2, \quad (4.24)$$

qui est bien définie négative. Nous avons donc déterminer une loi de commande qui garantit que  $x_1 = 0$  est GAS (GES) pour le premier sous-système sous l'hypothèse que  $x_2$  est une entrée de commande. Ce n'est néanmoins pas le cas. Posons du coup

$$\alpha_1(x_1) := -x_1 - \phi_1(x_1)$$

et appelons  $z_1$  l'écart entre  $x_2$  et ce qu'on appelle la *commande virtuelle*  $\alpha(x_1)$ , ainsi

$$z_1 := x_2 - \alpha_1(x_1).$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x_1) = -x_1 + z_1. \quad (4.25)$$

D'autre part, l'analyse de Lyapunov devient

$$\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1(x_1)) = -x_1^2 + x_1 z_1. \quad (4.26)$$

**Étape 2.** Nous avons

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_2 - \frac{d\alpha_1(x_1)}{dt} = u + \phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(-x_1 + z_1). \quad (4.27)$$

Posons

$$u = v - \left( \phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(-x_1 + z_1) \right). \quad (4.28)$$

Ainsi

$$\dot{z}_1 = v. \quad (4.29)$$

Soit  $V_2(x_1, z_1) := V_1(x_1) + \frac{1}{2}z_1^2$ . Soient  $x_1, z, v \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial V_2(x_1, z_1)}{\partial (x_1, z_1)}(-x_1 + z_1, v) = -x_1^2 + x_1 z_1 + z_1 v. \quad (4.30)$$

On prend alors

$$v = -x_1 - z_1, \quad (4.31)$$

ainsi

$$\frac{\partial V_2(x_1, z)}{\partial(x_1, z)}(-x_1 + z_1, v) = -x_1^2 - z_1^2. \quad (4.32)$$

Nous avons donc prouvé la stabilité globale exponentielle de  $(x_1, z_1) = 0$  pour le système dans les coordonnées  $(x_1, z_1)$ . Qu'en est-il du système dans les coordonnées d'origine  $(x_1, x_2)$  ?

Écrivons avec quelques abus

$$V_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \alpha_1(x_1))^2.$$

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  telle que  $V(x_1, x_2) = 0$ . Cela n'est possible que si  $x_1 = 0$  et donc, puisque  $\alpha(0) = 0$ ,  $x_2 = 0$ . Nous en déduisons que  $V_2$  ne s'annule qu'en l'origine  $x_1 = x_2 = 0$ . Puisque  $V_2$  est la somme de deux termes positifs, nous en concluons que  $V_2$  est définie positive. Par ailleurs,  $V_2$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  d'après la définition de  $\alpha$ . Considérons le cas où  $|x| \rightarrow \infty$ , si  $|x_1| \rightarrow \infty$ , alors  $V_2(x) \rightarrow \infty$  et si  $|x_1| \nrightarrow \infty$ , nécessairement  $|x_2| \rightarrow \infty$  puisque  $|x| \rightarrow \infty$  et donc  $V_2(x) \rightarrow \infty$ . Nous venons de prouver que  $V_2$  est radialement non-bornée. Par ailleurs,

$$\frac{\partial V_2(x_1, z)}{\partial(x_1, z)}(-x_1 + z_1, v) = -x_1^2 - (x_2 - \alpha_1(x_1))^2 = -2V_2(x_1, x_2), \quad (4.33)$$

et le majorant est bien définie négatif puisque  $V_2$  est définie positive. Nous avons bien que  $x = 0$  est GAS dans les coordonnées d'origine et la loi de commande à implémenter est donc

$$u = -x_1 - z_- \left( \phi_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(-x_1 + z_1) \right). \quad (4.34)$$

### Remarques.

- Il n'est pas nécessaire d'annuler toutes les non-linéarités comme nous venons le faire. En effet si  $\phi_1(x_1) = -x_1^3 + \tilde{\phi}_1(x_1)$  par exemple, le terme  $-x_1^3$  est « stabilisant », il suffit donc de compenser  $\tilde{\phi}_1$ .
- Nous avons annulé les non-linéarités en quelque sorte, on peut également les compenser : la méthode s'applique de la même façon.
- La même méthode s'étend aux systèmes de la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \phi_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= x_4 + \phi_3(x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u + \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4.35)$$

- Un des défauts du backstepping est qu'il conduit souvent à des expressions compliquées.

- Une approche similaire existe pour les systèmes de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + \phi_2(x_2, \dots, x_n)u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_n + \phi_n(x_n)u.\end{aligned}\tag{4.36}$$

On parle d'approche par « forwarding », que l'on doit notamment à Frédéric Mazenc et Laurent Praly (1994) [6].

### 4.5.3 Approches fondées sur le principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle

Dans cette partie, nous allons voir des techniques de commande dont l'analyse repose sur le principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle. Ainsi, tous les résultats du chapitre 3 auront été exploités pour la stabilisation.

#### Passivité

Nous considérons dans cette partie le système (4.1) équipée d'une sortie, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{4.37}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée de commande,  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Le vecteur  $y \in \mathbb{R}^m$  représente une sortie du système. Nous introduisons la notion suivante.

**Définition 5.** *Le système (4.37) est dit passif de  $u$  vers  $y$ , s'il existe une fonction  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , définie positive, radialement non-bornée<sup>2</sup> telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ ,*

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq u^\top y.\tag{4.38}$$

La passivité permet une interprétation physique : l'idée est que si l'entrée du système est nulle, alors son "énergie"  $V$  ne croît pas le long des solutions. Il s'avère que nombre de systèmes en génie électrique, en mécanique, en robotique sont passifs. Pour plus d'informations, cf. [2, 7].

Lorsque le système (4.37) est passif, il est très simple de concevoir une loi de commande stabilisante. En effet, il suffit de prendre

$$u = -ky,\tag{4.39}$$

---

2. *Stricto sensu*,  $V$  n'a pas besoin d'être définie positive, ni radialement non-bornée pour définir la passivité.

où  $k > 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, -ky) \leq -k|y|^2 \leq 0. \quad (4.40)$$

L'origine  $x = 0$  est donc stable d'après le théorème ???. Pour que celui-ci soit GAS, notons tout d'abord que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, -ky) \leq -k|h(x)|^2. \quad (4.41)$$

D'après le corollaire 1, si le plus grand ensemble invariant  $\mathcal{M}$  inclus dans  $\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$  est égal à  $\{0\}$ , alors  $x = 0$  est GAS pour le système (4.37)-(4.39).

### Commande adaptative directe

Un autre cas d'application du principe d'invariance est la commande adaptative directe. Qu'entend-on par là ? Il s'agit de contrôler un système sans connaître certains de ses paramètres. Pour palier ce manque, l'idée est de générer un estimé des paramètres inconnus et d'adapter le contrôleur en fonction de la valeur des estimés.

Considérons un exemple. Soit le système

$$\dot{x} = x\theta + u, \quad (4.42)$$

où  $x \in \mathbb{R}$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}$  l'entrée de commande et  $\theta \in \mathbb{R}$  un paramètre constant inconnu. L'objectif est de construire une loi de commande telle que toute solution de (4.42) converge asymptotiquement vers  $x = 0$  (on oublie la stabilité<sup>3</sup>).

Soit  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $V$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , définie positive et radialement non-bornée. Pour tout  $x, u \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(x\theta + u) = 2x(x\theta + u). \quad (4.43)$$

Si  $\theta$  était connu, il suffirait de prendre par exemple

$$u = -x\theta - x$$

pour stabiliser l'origine du système ; nous aurions alors  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}(x\theta + u) = -2x^2$ , qui est strictement négatif pour tout  $x \neq 0$ . Cela n'est malheureusement pas possible puisque  $\theta$  est inconnu. Pour palier cette difficulté, nous introduisons  $\hat{\theta}$ , un estimé de  $\theta$ , dont nous définirons la dynamique dans un instant. En reprenant les calculs ci-dessus, nous obtenons pour tout

---

3. Pas vraiment en réalité, mais cela demande de développer un peu le chapitre 3 ce que nous ne ferons pas dans le cadre de ce cours.

$x, u \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x}(x\theta + u) &= 2x(x\theta + u) \\ &= 2x(x\hat{\theta} + u + (\theta - \hat{\theta})x) \\ &= 2x(x\hat{\theta} + u) + 2x^2\tilde{\theta}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

où  $\tilde{\theta} := \theta - \hat{\theta}$ , il s'agit tout simplement de l'écart entre  $\theta$  et l'estimé  $\hat{\theta}$ . Nous pouvons cette fois définir la loi de commande comme

$$u = -x\hat{\theta} - x.$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(x\theta + u) = -2x^2 + 2x^2\tilde{\theta}. \quad (4.45)$$

Il reste néanmoins le terme  $2x^2\tilde{\theta}$ . Pour cela, nous ajoutons un terme à la fonction de Lyapunov ainsi

$$U(x, \hat{\theta}) = V(x) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^2$$

pour tout  $x, \hat{\theta} \in \mathbb{R}$ . Nous en déduisons que pour tout  $x, \hat{\theta}$ , avec quelque abus de notation,

$$\frac{\partial U(x, \hat{\theta})}{\partial(x, \hat{\theta})}(x\theta + u, \dot{\hat{\theta}}) = -2x^2 + 2x^2\tilde{\theta} + \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}, \quad (4.46)$$

or  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}} = 0 - \dot{\hat{\theta}}$  et donc

$$\frac{\partial U(x, \hat{\theta})}{\partial(x, \hat{\theta})}(x\theta + u, \dot{\hat{\theta}}) = -2x^2 + 2x^2\tilde{\theta} - \tilde{\theta}\dot{\hat{\theta}}. \quad (4.47)$$

En définissant

$$\dot{\hat{\theta}} = 2x^2,$$

nous avons

$$\frac{\partial U(x, \hat{\theta})}{\partial(x, \hat{\theta})}(x\theta + u, \dot{\hat{\theta}}) = -2x^2. \quad (4.48)$$

Nous pouvons alors invoquer le principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle. Le système en boucle fermée s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\theta - x\hat{\theta} - x = -x + x\tilde{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= 2x^2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

D'après (4.48), étudions le plus grand ensemble invariant pour le système (4.49) inclus dans  $\{(x, \hat{\theta}) : x = 0\}$ . Pour rester dans cet ensemble il faut que  $x\tilde{\theta} - x = 0$  ce qui est bien le cas puisque  $x = 0$ . Nous déduisons simplement du principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle que toute solution de (4.49) converge asymptotiquement vers 0 et que

donc  $\hat{\theta}$  converge vers une constante, qui n'est pas nécessairement  $\theta$ .

Nous pouvons généraliser l'approche aux systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\theta + h(x)u, \quad (4.50)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  l'entrée de commande,  $\theta \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur de paramètres constant inconnus et  $n, m, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Il faut pour cela supposer que nous connaissons une fonction de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et une loi de commande  $k(x, \theta)$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\theta \in \mathbb{R}^p$ ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)\theta + h(x)k(x, \theta)) \leq -\rho(x), \quad (4.51)$$

où  $\rho$  est une fonction définie positive. Ainsi, en appliquant la loi de commande

$$u = k(x, \hat{\theta})$$

et en considérant la fonction  $U(x, \hat{\theta}) = V(x) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^\top \tilde{\theta}$  où  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)\theta + h(x)k(x, \hat{\theta})) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)\hat{\theta} + h(x)k(x, \hat{\theta})) \\ &\quad + \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)\tilde{\theta} - \dot{\hat{\theta}}^\top \tilde{\theta} \\ &\leq -\rho(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)\tilde{\theta} - \dot{\hat{\theta}}^\top \tilde{\theta}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nous définissons alors

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x),$$

et nous obtenons

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)\theta + h(x)k(x, \hat{\theta})) \leq -\rho(x). \quad (4.53)$$

Nous déduisons alors du principe d'invariance de Barbashin-Krasovskii-LaSalle que toute solution du système ainsi contrôlé est telle que  $x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Remarque :** Il existe une version adaptative du backstepping pour les systèmes de la forme générale suivante, cf. [5],

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \theta^\top \phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \theta^\top \phi_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_3 &= x_4 + \theta^\top \phi_3(x_1, x_2, x_3) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u + \theta^\top \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4.54)$$



## 4.6 Conclusion

Nous avons vu un échantillon de techniques de commande non-linéaire. Il en existe bien d'autres : commande prédictive, par platitude, par mode glissant, symbolique etc. Néanmoins, ceci est une bonne base pour débiter.



## Chapitre 5

# Stabilité entrée-sortie : quelques mots sur la stabilité $\mathcal{L}_2$

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur la stabilité interne. Nous nous penchons succinctement dans cet avant-dernier chapitre sur un type de stabilité entrée-sortie : la stabilité  $\mathcal{L}_2$ .

Contrairement aux parties précédentes, nous considérons un système ayant une entrée et une sortie

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w) \\ z &= h(x, w),\end{aligned}\tag{5.1}$$

où

- $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,
- $w \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur d'entrées exogènes pouvant représenter selon l'application en question le vent sur un véhicule, le bruit de mesure lorsque le système décrit une boucle de commande etc.,
- $z \in \mathbb{R}^p$  est un vecteur de sortie. À noter ici que  $z$  n'est pas nécessairement un vecteur de variables mesurées, il s'agit d'un vecteur de variables pour lequel on veut étudier l'influence de  $w$ .

On suppose par simplicité que  $f$  et  $h$  sont continûment différentiables et que  $f(0, 0) = 0$  et  $h(0, 0) = 0$ .

Notre objectif ici est d'établir une notion qui traduisent l'influence de l'entrée exogène  $w$  sur le vecteur  $z$ , qui peut très bien être  $x$  tout entier, auquel cas  $h(x, w) = x$  pour tout  $w, x$ .

Il existe pléthore de définitions pour cela, nous nous concentrerons sur ce qu'on appelle la stabilité  $\mathcal{L}_2$ . Il s'agit d'étudier l'influence de  $w$  sur  $z$  en terme d'énergie. En d'autres mots, la question est de savoir comment l'énergie de  $w$  influence l'énergie de  $z$ .

On rappelle dans un premier temps la notion de norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal.

**Définition 6.** Soit  $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ . On dit que  $y \in \mathcal{L}_2([0, \infty), \mathbb{R}^r)$  ou plus simplement  $y \in \mathcal{L}_2$  si

$$\|y\|_2 := \left( \int_0^\infty |y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

□

Ainsi  $\|y\|_2$  représente l'énergie du signal  $y$  sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Nous sommes prêts à définir la stabilité  $\mathcal{L}_2$  pour le système (5.1).

**Définition 7.** Le système (5.1) est  $\mathcal{L}_2$ -stable de  $w$  à  $z$ , si toute solution  $x$  ayant pour entrée  $w \in \mathcal{L}_2$  continue par morceaux est définie pour tout temps positif et vérifie

$$\|z\|_2 \leq \alpha(|x(0)|) + \gamma \|w\|_2$$

où  $\gamma > 0$  est appelée le gain  $\mathcal{L}_2$ , et  $\alpha$  est une fonction définie positive.

□

### Remarques

- Il s'agit d'une propriété de stabilité entrée-sortie, et non d'une propriété de stabilité d'un point d'équilibre. De plus, la propriété en question ne fait intervenir que la variable  $z$ , qui n'est pas nécessairement le vecteur d'état  $x$  entier.
- La propriété de la définition signifie que si  $w$  est dans  $\mathcal{L}_2$ , alors  $z$  l'est également.
- Le gain  $\gamma$  traduit la robustesse du système par rapport à  $w$ . Admettons que  $x(0) = 0$ , de telle sorte que  $\alpha(|x(0)|) = 0$ , alors  $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ . Ainsi, si  $\gamma$  est petit, cela signifie que l'énergie de  $z$  n'est pas fortement influencée par celle de  $w$  : le système est robuste.
- La propriété en question ne fait intervenir qu'une inégalité, nous n'avons donc qu'une majoration de l'énergie de  $z$  à disposition, ce qui est toutefois suffisamment pour évaluer sa robustesse.
- $\gamma$  n'est en réalité qu'un majorant du véritable gain  $\mathcal{L}_2$ .

Nous concluons cette courte partie avec des conditions suffisantes de type Lyapunov pour étudier la stabilité  $\mathcal{L}_2$ .

**Théorème 8.** S'il existe  $c_1, c_2 > 0$  et  $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  telles que :

- $V$  est définie positive et radialement non-bornée ;
- Pour tout  $(x, w) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, w) \leq -c_1 |z|^2 + c_2 |w|^2$  ;

alors le système (5.1) est  $\mathcal{L}_2$ -stable de  $w$  à  $z$  avec un gain  $\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ .

□

**Remarque :** on peut relâcher certaines conditions du théorème et travailler localement également.

**Exemple.** Considérons le système perturbé suivant pour lequel nous souhaitons étudier la stabilité  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  à  $x_1$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + w \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + x_1.\end{aligned}\tag{5.2}$$

En prenant  $V(x) = |x|^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , on obtient  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, w) = -x_1^2 + 2x_1w - x_2^4$ . Puisque  $2x_1w \leq \epsilon x_1^2 + \epsilon^{-1}w^2$  pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, w) \leq -(1-\epsilon)x_1^2 + \epsilon^{-1}w - x_2^4$ . On prend  $\epsilon = \frac{1}{2}$  et on obtient  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, w) \leq -\frac{1}{2}x_1^2 + 2w - x_2^4$ . Les conditions du théorème sont vérifiées avec  $c_1 = \frac{1}{2}$  et  $c_2 = 2$ . Le système est donc  $\mathcal{L}_2$  stable de  $w$  à  $x_1$ .



# Chapitre 6

## Conclusion

Voici un petit guide d'utilisation de ce cours afin d'étudier la stabilité d'un système.

1. Tout d'abord laisser parler votre intuition (physique) pour avoir une idée du résultat. Ne pas hésiter également à lancer des simulations sous Matlab-Simulink par exemple pour comprendre le comportement du système.
2. Écrire le système sous forme de représentation d'état.
3. Déterminer à quel type de système vous avez à faire : en temps continu/discret, linéaire/non-linéaire, avec des sauts ou sans, avec des retards ou sans etc.
4. Diriger vous vers les outils théoriques correspondants. Supposons que le système en question soit non-linéaire et en temps continu.
5. Linéariser le système autour du point d'équilibre en question, si cela est possible. Puis appliquer le théorème de Lyapunov indirect.
6. Si ce dernier ne donne rien (valeur propre à partie réelle nulle) ou si le système n'est pas linéarisable, appliquer les théorèmes de Lyapunov direct.

Pour la stabilisation, c'est un peu le même principe : privilégier dans un premier temps la commande par linéarisation locale (la première du chapitre ). Si celle-ci ne suffit pas, pencher vous alors vers les techniques non-linéaires vues au chapitre 4.





# Bibliographie

- [1] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 3rd edition, 2002.
- [2] R. Kelly, V. Santibáñez, and A. Loria. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [3] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 3rd edition, 2002.
- [4] P.V. Kokotović. The joy of feedback : nonlinear and adaptive – 1991 Bode prize lecture. *IEEE Control Systems Magazine*, 12 :7–17, 1992.
- [5] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley and Sons, Inc., New York, U.S.A., 1995.
- [6] F. Mazenc and L. Praly. Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11) :1559–1578, 1996.
- [7] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, 1997.