

Antoine DALENCONTE,
Aharon ELBEZ,
Emy OLIVIERI,
Zheyu XIAO

ENSAE 3ème année
Projet d'approfondissement en finance et assurance
Année scolaire 2023 - 2024

Allocation de portefeuille sous contrainte ESG

Nexialog Consulting
Paris, France

Encadrants : Tom PICARD Matar KANDJI
Date début 10/2023 - Date fin 05/2024

Sommaire

1	Introduction	3
2	Revue de littérature	4
3	Familiarisation avec les scores ESG	5
3.1	Définitions	5
3.2	Les différents types de données	5
3.3	Une absence de consensus autour des scores	6
3.4	Notre choix de score ESG	7
4	La théorie d'optimisation de portefeuille	9
4.1	Le problème de Markowitz	9
4.2	L'ajout de la contrainte ESG	9
4.2.1	Le modèle de Pastor-Stambaugh-Taylor	10
4.2.2	Les extensions du modèle PST	10
4.3	L'interprétation par Tracking error	11
4.3.1	Définition	11
4.3.2	Inclusion du concept ESG	12
4.3.3	Théorie du Tracking Error	12
4.3.4	L'optimisation du tracking error	13
5	Intégration de nouvelles contraintes et résultats	14
5.1	Résultats de la méthode γ -Markowitz	14
5.2	Résultats de la méthode Pedersen	18
5.3	Les méthodes de sélection et d'exclusion	18
5.4	L'allocation contrainte à des minimums sur secteur	20
6	Prise en compte de l'incertitude avec la controverse et résultats	22
6.1	Méthode du minimum gaussien	22
6.2	Méthode probabilistique gaussienne	23
6.3	Méthode d'intervalle de confiance gaussien	24
7	Conclusion	26
A	Annexe	28
A.1	Preuves	28
A.1.1	Intervalle de confiance de la méthode par min	28
A.1.2	Intervalle de confiance de la méthode par probabilité	28
A.2	Données	30
A.3	Graphiques	34

1 Introduction

Ce projet présente une étude sur l'optimisation de portefeuilles sous contrainte ESG (Environnementale, Sociale, et de Gouvernance), dans le cadre d'un projet d'approfondissement en finance avec Nexialog Consulting. L'étude se concentre sur l'intégration de scores ESG dans l'allocation des portefeuilles, explorant des méthodologies diverses et leurs implications sur la performance des portefeuilles.

Face à l'urgence climatique, l'intégration des critères de durabilité dans l'allocation de portefeuille est devenue cruciale. Cependant, les fournisseurs de services financiers manquent souvent de confiance en raison de faibles corrélations. Comment alors construire un portefeuille qui se conforme aux critères de durabilité?

Pour y répondre, nous verrons dans un premier temps une analyse des scores ESG en expliquant leur importance et leur fonctionnement. Nous soulignons l'absence de consensus sur les méthodologies de notation parmi les principaux fournisseurs, tels que MSCI et Sustainalytics. Cela pose des défis quant à la comparabilité et la fiabilité des évaluations ESG.

La deuxième partie de cette étude revisite les modèles mathématiques d'optimisation de portefeuille, en mettant l'accent sur l'adaptation du modèle de Markowitz illustrant comment les scores ESG peuvent être intégrés stratégiquement pour aligner les objectifs de performance avec les responsabilités environnementales et sociales. La stratégie d'allocation du Tracking Error permet également de gérer et d'aligner le rendement d'un portefeuille avec un indice tout en intégrant des critères ESG.

Ce projet explore aussi les implémentations d'intégration de contraintes ESG dans l'optimisation de portefeuilles. L'ajout progressif de critères ESG modifie significativement la frontière efficiente en diminuant les ratios de Sharpe, illustrant le coût de l'intégration de la durabilité. Des méthodes de sélection et d'exclusion sectorielles sont également implémentées. Ces méthodes assurent une variété d'actifs en maintenant des seuils minimaux par secteur d'activité pour éviter l'exclusion complète de certains secteurs. Cette approche révèle comment des contraintes ESG influencent la structure des portefeuilles, offrant des informations précieuses pour les investisseurs éthiques qui souhaitent équilibrer performance financière et responsabilité sociale.

Finalement, le projet aborde plusieurs méthodes pour intégrer l'incertitude des scores ESG dans l'optimisation de portefeuilles ESG. Nous utilisons le score de controverse pour mesurer cette incertitude. Les approches incluent des techniques probabilistes et statistiques pour ajuster les scores ESG en fonction des scores de controverse, telles que la méthode du minimum gaussien. Chaque méthode apporte une façon différente d'interpréter les scores de controverse pour mesurer leur impact sur le portefeuille. Des simulations révèlent les nuances et les implications de chaque approche pour la gestion des portefeuilles sous contraintes ESG.

Toutes les implémentations peuvent être trouvées via ce lien vers GitHub : https://github.com/antoinedte/Allocation_de_portefeuille_sous_contrainte_ESG

2 Revue de littérature

L'optimisation de portefeuilles est une discipline qui est assez ancienne et cette section aura pour but de retracer dans les grandes lignes l'évolution de cette discipline.

Tout d'abord, cette discipline a débuté avec le problème d'optimisation principal dit de "Mean-Variance" ou de Markowitz [5], dont l'objectif est de maximiser l'espérance de rendement tout en minimisant les risques de volatilité. Cette approche révolutionnaire, introduite dans l'article classique de Markowitz en 1952 [5], a jeté les bases de la théorie moderne de portefeuille en montrant comment les investisseurs peuvent équilibrer le rendement attendu et le risque pour construire des portefeuilles efficaces.

Par la suite d'autres approches ont émergés comme celle de Marc C. Steinbach développé dans [9] et qui examine en détail l'interaction entre l'objectif et les contraintes dans plusieurs variantes à période unique, y compris les modèles semi-variance. Un accent particulier est mis sur la pénalisation des performances fortes. Les résultats sont ensuite utilisés comme éléments de base dans le développement et l'analyse théorique de modèles multi-périodes basés sur des arbres de scénarios. Marc C. Steinbach va d'ailleurs démontrer l'équivalence entre le problème d'optimisation mean-variance et le γ -markowitz problème (voir section 3).

C'est dans les années 2000, période où les institutions majeures commencent à prendre conscience des concepts de développement durable et de finance verte, que la notion de score ESG apparaît dans les modélisations d'optimisation de portefeuilles. Les travaux de Kempthorne [4] et de Roncalli [8] fournissent des cadres pour intégrer les contraintes ESG dans le processus d'optimisation de portefeuille. Mais c'est en 2015 que les premiers modèles où l'on retrouve le score ESG comme véritable composante des problèmes d'optimisation apparaissent avec le modèle Pastor-Stambaugh-Taylor (PST) qui est un modèle d'évaluation des actifs financiers qui a été proposé par Lubos Pastor, Robert F. Stambaugh et Lucian A. Taylor [6] dans lequel ils ajoutent une caractéristique ESG déterminée pour chaque actif d'un portefeuille.

Le modèle PST est devenu une base pour les autres modèles qui sont apparus par la suite et que l'on peut considérer comme des extensions tel que le modèle Avromov-Cheng-Lioui-Tarelli [1] dans lequel les scores ESG ne sont plus déterminés mais qui sont construits à partir de variables gaussiennes. Parmi les autres extensions connues du modèle PST, nous retrouvons le modèle de Pedersen [7] qui, en plus de considérer les scores ESG comme des variables gaussiennes, change légèrement de fonction objective.

Enfin, la méthode du tracking error par rapport à un benchmark sera ré-expliquée pour suivre l'efficacité d'un portefeuille. Le tracking error par rapport à un benchmark est une mesure couramment utilisée pour évaluer l'efficacité d'un portefeuille par rapport à son indice de référence. En surveillant la tracking error au fil du temps, les investisseurs peuvent évaluer la capacité du portefeuille à générer des rendements ajustés au risque par rapport à un benchmark.

Bien que c'est sur cet ensemble de modèles que nous avons décidé de fonder notre travail, nous avons aussi essayer d'approfondir le concept inédit (car jeune) de score de controverse qui sera développé en section 5 dans laquelle nous avons essayé d'implémenter la notion d'incertitude des scores ESG en fonction de ces scores de controverse.

3 Familiarisation avec les scores ESG

3.1 Définitions

Dans un contexte d'urgence climatique, les investisseurs sont de plus en plus sensibles aux critères permettant d'évaluer les entreprises. Par conséquent, un score pondérant l'impact environnemental, social et gouvernemental (ESG) d'un portefeuille devient primordial. Parmi ces nombreux scores, la section 3.4 détaille la construction du score de MSCI. Bien que tous les scores reposent sur 3 piliers communs (environnemental, social et gouvernance), ils sont différenciables par leur composition intrinsèque. On assiste à l'essor de la finance durable, définie par la Commission Européenne, comme étant le "processus de prise en compte des considérations environnementales, sociales et de gouvernance (ESG) lors de la prise de décisions d'investissement dans le secteur financier, ce qui conduit à des investissements à plus long terme dans des activités et des projets économiques durables."

Afin d'illustrer notre propos nous avons retranscrit ci-dessous un exemple des thèmes considérés pour l'élaboration d'un score ESG (issu du cours 2023-2024 de Thierry Roncalli, Sustainable Finance, p.19) :

Table 1: Un exemple de critères ESG

Environnemental	Social	Gouvernance
Émissions de carbone	Conditions d'emploi	Indépendance du board
Utilisation de l'énergie	Implication communautaire	Comportement de l'entreprise
Pollution	Égalité des sexes	Audit et contrôle
Gestion des déchets	Diversité	Rémunération des dirigeants
Utilisation de l'eau	Opposition des parties prenantes	Droits des actionnaires
Énergie renouvelable	Accès aux soins	Stratégie RSE
Voitures écologiques		
Financement vert		

Cependant ceci n'est qu'un exemple simplificateur de la réalité des choses. Il n'existe pas de cadre figé : Bloomberg utilise plus de 120 indicateurs ESG uniformément sur les 11 800 entreprises considérées. ISS ESG considère plus de 800 indicateurs et en applique environ 100 par entreprise. FTSE Russell utilise plus de 300 indicateurs et 14 thèmes. MSCI recourt à 10 thèmes, 80 indicateurs d'exposition et plus de 250 indicateurs de gestion. Sustainalytics prend en compte 350 indicateurs.

Une fois les thèmes et notes identifiées, le score ESG se calcule à partir d'une méthode dite "par arbre" : les feuilles de l'arbre prennent comme valeur les notes identifiées et chaque nœud est une pondération de ses branches. Une normalisation est ensuite appliquée sur les notes d'entreprise afin de récupérer un Z-score par méthode de rang.

3.2 Les différents types de données

En général, les données sur les entreprises peuvent être distinguées en 3 types:

- Les données financières publiées par les entreprises englobant les aspects monétaires de leurs activités (rapports annuels, déclarations financières et réglementaires). Ceci offre une vision quantitative de leur santé financière.

- Les données extra financières qui englobent des éléments tels que la consommation de charbon, la parité homme/femme, et d'autres aspects non strictement financiers. Ces données proviennent de diverses sources (de l'entreprise, des médias, des ONGs, de sites web...) , parfois avec des rapports d'audits internes, mais peuvent être exigées dans des formats variés.
- Les données alternatives qui incluent des informations telles que des données satellites et des nouvelles d'actualités. Un exemple concret est la révélation du travail des enfants dans les opérations d'une entreprise en Asie.

A partir de ces données, deux types de scores peuvent être élaborés: les scores ESG (dont la méthodologie diffère selon les établissements de *rating*) et les scores de controverse (souvent élaborés à l'aide de techniques de NLP et de ML pour l'analyse de sentiment sur des indices ESG).

3.3 Une absence de consensus autour des scores

Comme énoncé ci-avant, il existe un grand nombre d'établissement de *rating*, tels que MSCI, Sustainalytics, Bloomberg, Refinitiv (anciennement Thomson Reuters), ou encore Moody's, avec au moins autant de méthodologies différentes. Ces divergences semblent concerner aussi bien le type de données utilisées et les pondération de scoring que les valeurs elles-mêmes (les sources étant différentes et parfois non fiables).

Selon Billio et al. (2020) [3] cette différence est empiriquement vérifiée lors de l'étude des corrélations des scores d'une même entreprise, visible dans la table 2. Cette divergence entre les scores ESG serait due à des définitions différentes d'un score ESG. Berg et al. (2022) [2] ont quantifié ces différences en 3 points: la portée, les mesures et leurs pondérations. Les divergences de portée sont dues à ce que chaque établissement considère comme les thèmes durables à inclure dans le processus de sélection. La divergence de mesure concerne l'ensemble des indicateurs que le fournisseur de données sélectionne pour évaluer la qualité de l'entreprise pour chaque pilier. Enfin, la divergence de poids concerne les différences dans les mécanismes d'attribution d'importance des différentes agences, ce qui signifie que les agences de notation ont des points de vue différents sur l'importance relative des attributs. Les auteurs constatent que la divergence de mesure est responsable de plus de la moitié (56%) de l'écart global et que le champ d'application et le poids sont modérément moins importants (respectivement 38% et 6%), sans pour autant être négligeables.

	MSCI	Refinitiv	S&P Global	Sustainalytics
MSCI	100%			
Refinitiv	43%	100%		
S&P Global	45%	69%	100%	
Sustainalytics	53%	64%	69%	100%

Du fait de l'absence de consensus sur la méthodologie de calcul d'un score ESG, on pourrait naturellement se demander s'il en existe un plus fidèle à la réalité ou s'il faudrait considérer un nouveau score construit à partir d'une pondération des scores existants. On pourrait même se demander si ces scores sont neutres par rapport aux secteurs ou à la localisation géographique.

La situation actuelle reste donc assez floue, mais, au niveau européen, une plus grande transparence se profile comme le signale la proposition de régulation du parlement européen et du conseil sur la transparence et l'intégrité des activités de notation environnementale, sociale et de gouvernance (ESG) de mai 2023. Ce règlement vise à harmoniser la réglementation dans l'ensemble de l'UE, étant donné qu'il n'existe actuellement aucune loi régissant les fournisseurs de notations ESG dans les différents États membres de l'UE. Toutefois, afin de garantir la diversité des approches sur le marché européen des notations ESG, la Commission n'a pas l'intention d'exiger l'harmonisation des méthodologies utilisées par les fournisseurs de notations ESG. En l'état actuel, le marché des notations ESG ne répond pas aux besoins des utilisateurs. Dans l'exposé des motifs du règlement, la Commission européenne déclare que "le marché actuel des notations ESG présente des lacunes et ne fonctionne pas correctement, les besoins des investisseurs et des entités notées en matière de notations ESG n'étant pas satisfaits et la confiance dans les notations étant ébranlée". La Commission note que cela est dû à :

- Un manque de transparence sur les caractéristiques des notations ESG, leurs méthodologies et leurs sources de données
- Un manque de clarté sur le fonctionnement des agences de notation ESG (notamment en ce qui concerne les conflits d'intérêts et la gouvernance)

Cela signifie que les utilisateurs des notations ESG ne sont pas en mesure de prendre des décisions éclairées en ce qui concerne les investissements, les risques, les impacts et les opportunités liés à l'ESG.

3.4 Notre choix de score ESG

Bien que ce projet ne se concentre que sur un unique type de rating, les méthodologies utilisées et présentées peuvent être appliquées à d'autres, comme par exemple sur le futur score harmonisé.

Initialement, le score considéré était celui de Sustainalytics du fait que c'était le score avec les meilleures corrélations avec les autres scores (d'après la Table 2). Pour Sustainalytics, les évaluations du score ESG sont basées sur une échelle de notation de 0 à 100, **où un score faible indique un bon comportement**. Sustainalytics fournit aussi un indicateur de risque d'être impliqué dans une controverse. On y distingue 5 classes de risques, allant de la catégorie la moins risquée ("negligible risk") à la plus risquée ("severe risk"), dont la répartition géographique est représentée dans l'Annexe 22. D'après les scores de risque accordés par Sustainalytics, les entreprises peu risquées semblent rares, avec seulement 2% des entreprises classées comme négligeable face au risque. Ce score de risque ESG varie aussi au cours du temps de manière non négligeable, vu qu'en moyenne, entre 15 et 20% des compagnies ont changé de catégories entre 2019 et septembre 2022 (voir annexe 23). De plus, des différences entre les pays sont notables (annexe 24): les pays développés ont en moyenne un risque ESG plus faible que les pays en développement ou émergents. Plus particulièrement, l'Europe se place à la première place du classement du risque ESG avec un score moyen de 23,0 en dessous du score global moyen de 27,0. Juste derrière, les Etats-Unis et le Canada obtiennent un score moyen de 26,7. La mise en place de nouvelles réglementations par l'Union Européenne pourrait être la raison d'un score ESG aussi faible. Enfin, une dernière comparaison peut être opérée au niveau des secteurs d'activité (Annexe 25), où les risques sont plus importants pour des industries comme l'énergie ou les matériaux, car ils ont tendance à polluer davantage. A l'inverse, les secteurs comme l'immobilier et la technologie de l'information ont tendance à avoir des scores les plus faibles.

Il est donc difficile d'affirmer que le score ESG est neutre par rapport à la situation géographique et par rapport au secteur. Les comparer directement sur une base d'un score ESG harmonisé semblerait ainsi être délicat, c'est pourquoi nous avons décidé d'intégrer ces considérations d'incertitude sur le score en dernière partie du projet.

Puisque Sustainalytics ne fournit pas l'historique des scores ESG en libre accès, dans la suite de l'étude nous avons changé d'établissement de *rating* pour MSCI. MSCI semblait être une bonne solution pour récupérer davantage d'informations (récupérées grâce un algorithme de scrapping disponible sur notre github).

Le passage du score de Sustainalytics à MSCI possède toutefois un défaut notable: le passage d'un score "continu" entre (0, 100) (rendant compte de manière très précise les différences entre les scores) à un score discret restreint à 7 notes [CCC, B, BB, BBB, A, AA, AAA].

Bien que les indicateurs et pondérations ne sont pas accessibles, les grands thèmes considérés par MSCI dans l'élaboration de leur score ESG sont représentés dans la Figure ci-dessous:

MSCI ESG Score									
ENVIRONMENT PILLAR				SOCIAL PILLAR				GOVERNANCE PILLAR	
Climate Change	Natural Capital	Pollution & Waste	Env. Opportunities	Human Capital	Product Liability	Stakeholder Opposition	Social Opportunities	Corporate Governance	Corporate Behavior
Carbon Emissions	Water Stress	Toxic Emissions & Waste	Clean Tech	Labor Management	Product Safety & Quality	Controversial Sourcing	Access to Finance	Board	Business Ethics
Product Carbon Footprint	Biodiversity & Land Use	Packaging Material & Waste	Green Building	Health & Safety	Consumer Financial Protection	Community Relations	Access to Health Care	Pay	Tax Transparency
Financing Environmental Impact	Raw Material Sourcing	Electronic Waste	Renewable Energy	Human Capital Development	Privacy & Data Security		Opportunities in Nutrition & Health	Ownership	
Climate Change Vulnerability				Supply Chain Labor Standards	Responsible Investment			Accounting	
					Chemical Safety				

Universal key issues applicable to all industries

Figure 1: Liste des 35 thèmes retenus par MSCI dans l'élaboration du score ESG

4 La théorie d'optimisation de portefeuille

Cette partie est consacrée aux différents modèles mathématiques cités précédemment qui seront ici détaillés et expliqués. L'objectif est bien de remettre notre travail dans le contexte actuel de l'allocation de portefeuille.

4.1 Le problème de Markowitz

La Mean-Variance Optimization (MVO) de Markowitz [5] est une approche largement utilisée en finance pour la construction de portefeuilles. L'objectif principal de cette méthode est de trouver un portefeuille qui offre le meilleur compromis entre le rendement attendu et le risque, mesuré par la variance des rendements. La MVO peut prendre différentes formes équivalentes telles que celle qui permet de minimiser la variance pour un niveau de rendement cible :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{x}^T \mu = r \end{cases} \quad (1a)$$

Une façon équivalente de résoudre le problème précédent est de le reformuler en un problème dit de γ -Markowitz. Dans le modèle γ -Markowitz, l'objectif est de minimiser la variance du portefeuille en prenant en compte l'aversion au risque.

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{x}^T \mu \\ \text{s.c.} & \mathbf{1}_n^T \mathbf{x} = 1 \end{cases} \quad (1b)$$

Le Lagrangien de ce problème est le suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{x}^T \mu - \lambda (\mathbf{1}_n^T \mathbf{x} - 1)$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}_n & \iff \Sigma \mathbf{x} - \gamma \mu - \lambda \mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 & \iff \mathbf{1}_n^T \cdot \mathbf{x} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la valeur suivante pour \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}^* = \Sigma^{-1}(\gamma \mu + \lambda \mathbf{1}_n) \quad (1c)$$

Avec la deuxième equation, nous trouvons :

$$\mathbf{1}_n^T * [\Sigma^{-1}(\gamma \mu + \lambda \mathbf{1}_n)] = 1 \iff \lambda^* = \frac{1 - \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \gamma \mu}{\mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n} \quad (1d)$$

4.2 L'ajout de la contrainte ESG

Nous avons choisi le problème γ -Markowitz car celui-ci permet d'introduire le paramètre d'aversion au risque γ . De plus, cette approche offre une transition naturelle vers l'intégration de contraintes ESG dans la construction du portefeuille. L'idée est d'avoir un score ESG de portefeuille supérieur à un seuil (\bar{s}), avec le vecteur des scores ESG des différents actifs $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - \gamma \mathbf{x}^T \mu \\ \text{s.c.} & \\ & \mathbf{1}_n^T \mathbf{x} = 1 \\ & \sum_{i=1}^n s_i x_i \geq (\leq) \bar{s} \end{cases} \quad (2)$$

Ce seuil \bar{s} représente le score ESG du portefeuille. Nous chercherons, tout au long de ce projet, à minimiser (ou maximiser, cela dépend des notations ESG que nous prenons) ce seuil tout en maximisant notre performance qui se définira selon plusieurs indicateurs dont notamment le sharpe ratio.

4.2.1 Le modèle de Pastor-Stambaugh-Taylor

Le premier modèle à s'être intéressé à la notion de score ESG ainsi qu'à la prime de risque ESG est le modèle Pastor-Stambaugh-Taylor (PST). Initialement, ce modèle se concentre sur des facteurs macro-économiques et essaie de proposer une approche généralisée. Il est donc adaptable à notre contexte en prenant le score ESG comme facteur macro-économique. Ce modèle repose sur deux hypothèses principales.

Les rendements excédentaires des actifs $\tilde{R} = R - r = (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n)$ sont distribués selon une loi normale $\tilde{R} \sim \mathcal{N}(\pi, \Sigma)$. De plus, chaque entreprise possède une caractéristique ESG \mathcal{G}_i , qui est positive pour les entreprises respectueuses de l'environnement (ou vertes) et négative pour les entreprises non respectueuses de l'environnement (ou brunes).

Pour rappel, les scores ESG que nous avons utilisés sont dans l'intervalle $[0, 100]$. Un score ESG ne sera donc jamais négatif dans nos implémentations d'où la notation différente entre \mathcal{G} et S .

Le modèle Pastor-Stambaugh-Taylor prends en compte à la fois le facteur d'aversion au risque γ ainsi qu'un facteur de sensibilité au score ESG, $f_j = \alpha_j \mathcal{G}$ où $\alpha_j \geq 0$ pour un asset j qui cherche à modéliser l'intérêt que peut avoir un agent pour sa contrainte ESG. Le modèle utilise alors une fonction d'utilité exponentielle CARA fonction objective à optimiser. Leur travail montre que ce problème d'optimisation revient à un problème markowitz de la forme suivante pour un agent p :

$$\mathbf{x}_p^*(\gamma_p) = \arg \min_{\mathbf{x}_p} \frac{1}{2} \mathbf{x}_p^T \Sigma \mathbf{x}_p - \gamma_p \mathbf{x}_p^T \mu' \quad (3)$$

où γ_p est le facteur d'aversion au risque et $\mu' = \mu + \gamma_p f_p$ est le vecteur des returns qui prends en compte le score ESG de chaque asset.

4.2.2 Les extensions du modèle PST

Une extension connue du modèle PST est le modèle Avromov-Cheng-Lioui-Tarelli qui, en plus de considérer les returns comme des vecteurs gaussiens, envisage aussi les scores ESG comme des vecteurs gaussiens.

$$\begin{bmatrix} R \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mu \\ \mu_{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma_{\mu, \mu_{\mathbf{S}}} \\ \Sigma_{\mu_{\mathbf{S}}, \mu} & \Sigma_{\mu_{\mathbf{S}}} \end{bmatrix} \right) \quad (4a)$$

Ce modèle possède une solution qui peut se distinguer en deux parties pour un agent p :

$$x_p^* = \underbrace{\Gamma_p^{-1} \Omega_p (\mu + \alpha_p \mu \mathbf{S})}_{\text{ESG uncertainty}} + \underbrace{\Gamma_p \Sigma^{-1} (\mu + \alpha_p \mu \mathbf{S})}_{\text{PST solution}} \quad (4b)$$

où $\Gamma_p = \frac{1}{\gamma_p} W_p$ qui le facteur d'aversion au risque nominal.

Une autre approche consiste à utiliser le problème d'optimisation du modèle Pedersen-Fitzgibbons-Pomorski qui ne considère pas les scores ESG comme des variables gaussiennes et qui les fixe aux valeurs historiques pour chaque asset. La différence avec le modèle PST réside dans la fonction d'utilité. En effet, au lieu de prendre une fonction d'utilité exponentielle CARA, le modèle Pedersen-Fitzgibbons-Pomorski utilise une fonction d'utilité mean-variance où l'on ajoute une fonction d'intéressement au score ESG. Optimiser la fonction d'utilité revient à trouver le portefeuille optimisé en termes de moyenne-variance-ESG :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \min \mathbf{x}^\top \pi - \frac{\sigma}{2} \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} + \zeta(\mathbf{x}^\top \mathbf{S}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \quad (4c)$$

Une façon équivalent de réécrire ce problème est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* (\bar{\sigma}, \bar{\mathbf{S}}) &= \arg \max \mathbf{x}^\top \pi \\ \text{s.t. } & \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} &= 1 \\ \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} - \bar{\sigma}^2 &= 0 \\ \mathbf{x}^\top (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}} \mathbf{1}) &= 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4d)$$

Où π représente la prime de risque du portefeuille.

Après résolution numérique en utilisant un lagrangien à deux paramètres, nous trouvons :

$$\mathbf{x}^* = -\frac{1}{2\lambda_1} \Sigma^{-1} (\pi + \lambda_2 (\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}} \mathbf{1})) \quad (4e)$$

Finalement, l'un des avantages de ce modèle est qu'il nous fournit une closed form solution du sharpe ratio qui peut directement se trouver de la manière suivante :

$$SR(\mathbf{x}^*(\bar{\sigma}, \bar{\mathbf{S}}|r)) = \sqrt{C_{\pi, \pi} - \frac{(C_{1, \pi} \bar{\mathbf{S}} - C_{s, \pi})^2}{C_{s, s} - 2C_{1, s} \bar{\mathbf{S}} + C_{1, 1} \bar{\mathbf{S}}^2}} = SR(\bar{\mathbf{S}}|\pi, \Sigma, \mathbf{S}) \quad (4f)$$

Où $C_{a, b} = a^\top \Sigma^{-1} b$

4.3 L'interprétation par Tracking error

4.3.1 Définition

Dans le secteur de la gestion d'actifs, le Tracking Error (TE) est une mesure fondamentale d'évaluation de la performance qui est utilisée par l'industrie pour s'assurer que les gestionnaires de portefeuille respectent leur déclaration de politique d'investissement (DPI). L'erreur de suivi est une mesure de risque actif qui stipule l'écart type de la différence entre le rendement du portefeuille et le rendement de l'indice de référence (ou le rendement excédentaire).

4.3.2 Inclusion du concept ESG

L'objectif de l'investisseur est double. Il souhaite gérer son TE de suivi de son portefeuille par rapport à l'indice de référence b et avoir un meilleur score ESG que l'indice de référence. Néanmoins, cet investisseur est confronté à une contrainte long only car il ne peut pas utiliser d'effet de levier sur son portefeuille et il ne peut pas non plus vendre à découvert les actifs. Il s'agit donc de choisir le portefeuille avec le maximum du ratio de Sharpe plutôt qu'un indice ou de sélectionner rigoureusement les actifs en question dans notre cas car il n'est pas réalisable de répliquer le portefeuille de marché.

4.3.3 Théorie du Tracking Error

Le problème d'optimisation change complètement même si nous souhaitons toujours optimiser les poids de nos actifs dans notre portefeuille. Dans un premier temps, rappelons quelques concepts mathématiques intrinsèquement liés à la théorie du Tracking Error.

Premièrement, nous avons le Score ESG de l'indice de référence qui dans notre cas correspondra au score ESG du portefeuille optimale.

$$S(b) = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i S_i$$

où S_i est le score ESG de l'actif i

Par la suite, nous utiliserons l'excess score qui cherche à comparer la différence de score entre un portefeuille donné et le portefeuille de référence.

$$S(\mathbf{x}|b) = (\mathbf{x} - b)^T * \mathbf{S}$$

– Le rendement excédent attendu –

$$\mu(\mathbf{x}|b) = (\mathbf{x} - b)^T * \mu$$

– La volatilité de l'erreur de suivi –

$$\sigma(\mathbf{x}|b) = \sqrt{(\mathbf{x} - b)^T * \Sigma(\mathbf{x} - b)}$$

– Le ratio d'information –

$$\frac{\mu(\mathbf{x}|b)}{\sigma(\mathbf{x}|b)}$$

Toutes ces nouvelles variables sont utilisées dans le problème d'optimisation présenté dans la partie suivante. L'idée est de minimiser la tracking error volatility tout en cherchant à conserver un score ESG meilleur que celui du portefeuille de référence.

4.3.4 L'optimisation du tracking error

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\sigma^2(\mathbf{x}|b) - \gamma S(\mathbf{x}|b) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5a)$$

Le problème d'optimisation peut être réécrit comme suit :

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - \mathbf{x}^T (\Sigma b + \gamma S) \quad (5b)$$

Ainsi, il est possible de résoudre ce problème de plusieurs façons différentes. On peut directement optimiser sur \mathbf{x} pour trouver \mathbf{x}^* . Une autre possibilité serait de fixer la volatilité de l'erreur cible avec des valeurs comme $\sigma^* = 0.1, 0.2, 0.3 \dots$ et d'optimiser à nouveau \mathbf{x} . Enfin, il est possible de fixer le score excédentaire S^* . Le problème d'optimisation devient alors dans ce cas

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\sigma^2(\mathbf{x}|b) \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ S(\mathbf{x}|b) = S^* \end{cases} \quad 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \quad (5c)$$

Ainsi, les différents modèles présentés précédemment seront, pour certains, implémentés dans les prochaines sections. Néanmoins, ces modèles ne prennent pas en compte de certains concepts pourtant non-négligeables comme l'incertitude de ces scores ESG ainsi que l'utilisation des scores de controverses. Par conséquent, les prochaines sections se consacreront à l'implémentation de ces modèles mais aussi à l'ajout de nouvelles stratégies d'optimisations et à l'implémentation de nouveaux concepts dans cette discipline d'optimisation de portefeuilles.

5 Intégration de nouvelles contraintes et résultats

Dans cette partie, un portefeuille de marché décrit ci-dessous est considéré dans le problème γ -Markowitz en prenant en compte les scores ESG de MSCI. Par conséquent, un score ESG élevé signifie un bon score ESG. Ainsi, nous chercherons à maximiser notre seuil (voir équation 2):

- Dates : 2020-01-01 (début) - 2023-12-01 (fin)
- Taux sans risque : 0
- **Actifs disponibles** (se référer aux Tables 4 et 5 en Annexe pour accéder à l'historique des scores ESG et les scores de controverse actuel du 23 Avril 2024 d'après MSCI):

Table 3: Tickers et secteurs

Secteurs	Tickers
Communication Services	DIS, GOOGL
Consumer Cyclical	AMZN, TSLA, F
Consumer Defensive	WMT, PG, COST, KO, PEP
Energy	XOM, CVX, BP, TTE
Financial Services	BAC, MA, JPM, V
Healthcare	JNJ, PFE, MRK, ABT, UNH
Industrials	GE, BA, MMM, CAT, HON
Technology	AAPL, MSFT, NVDA

5.1 Résultats de la méthode γ -Markowitz

Le problème γ -Markowitz sous contrainte ESG reste celui précisé en 2 avec $i \in [1, \dots, 31]$. Dans un contexte d'absence d'actif sans risque, résoudre ce problème avec des contraintes ESG de plus en plus fortes a pour effet de décaler la frontière efficiente vers la droite et atténue l'amplitude vers le bas (des ratios de sharpes moins élevés), comme cela est visible sur la Figure 2. Dans un contexte de présence d'actif sans risque, résoudre ce problème avec des contraintes ESG de plus en plus fortes a pour effet de décaler la frontière efficiente vers la droite (augmentation de l'écart-type) et de créer une courbure de la capital market line, comme cela est visible sur la Figure 3. De plus, sur ce même graphique on remarque que lorsque la contrainte de score ESG minimal du portefeuille (60 et 70) est supérieur au score de l'actif dans risque (50), un investisseur fortement averse au risque n'investit pas dans un portefeuille 100% sans risque (car la contrainte ESG n'est pas satisfaite).

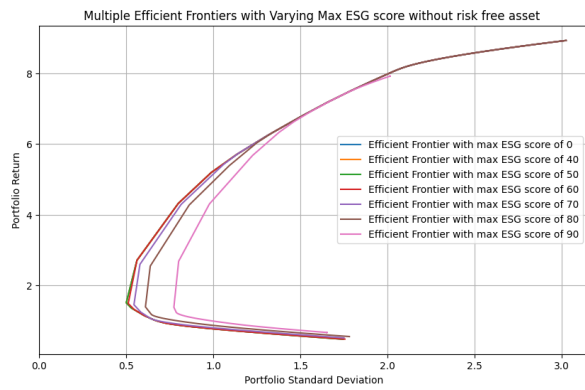


Figure 2: Représentation de l'évolution de la frontière efficiente en fonction de contraintes ESG de plus en plus fortes, en absence d'actif sans risque.

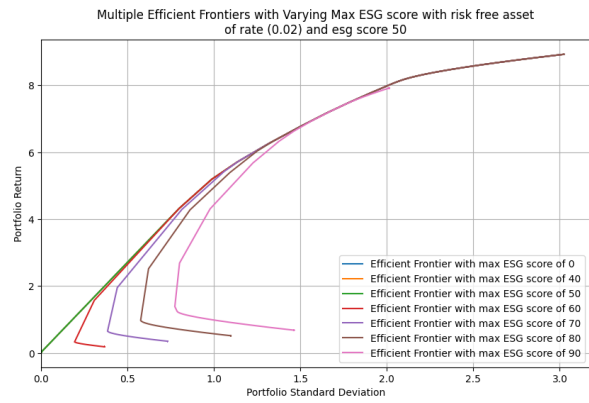


Figure 3: Représentation de l'évolution de la frontière efficiente en fonction de contraintes ESG de plus en plus fortes, en présence d'actif sans risque.

On peut aussi remarquer sur la Figure 4 qu'en absence de contrainte sur le score ESG, les portefeuilles de la frontière efficiente peuvent avoir des valeurs de score ESG très différentes. En revanche, en imposant un score minimal de 60 on récupère une frontière efficiente avec des scores ESG beaucoup plus restreints, comme cela est visible sur la Figure 5.

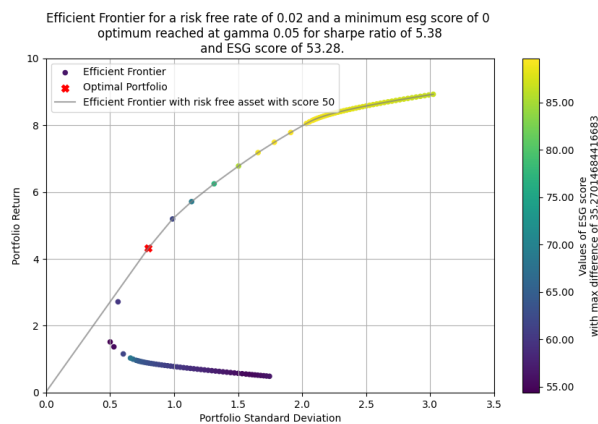


Figure 4: Frontière efficiente du marché en présence d'un actif sans risque (ligne grise) et en absence d'actif sans risque (points de couleur) sans imposition de score ESG minimal

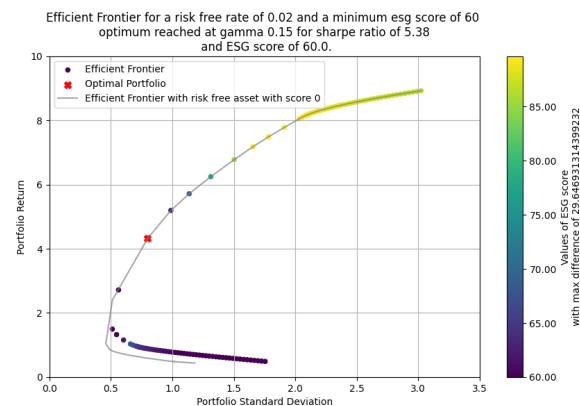


Figure 5: Frontière efficiente du marché en présence d'un actif sans risque (ligne grise) et en absence d'actif sans risque (points de couleur) avec un score ESG minimal de 60

Cette différence nous a alors mené à étudier l'évolution du portefeuille optimal (ensemble des points sur la capital market line) dont le ratio de sharpe est le plus élevé, en fonction du score ESG minimal. Les représentations suivantes permettent de mettre en lumière l'évolution du ratio de sharpe et de la composition ce portefeuille. C'est pourquoi nous proposons les Figures 6 (sans actif sans risque) et 7 (avec actif sans risque). Dans un contexte d'absence d'actif sans risque, le portefeuille optimal conserve la même composition jusqu'à un certain seuil de contrainte ESG (ici 60.38). A partir de ce seuil, le portefeuille optimal ne remplit plus les contraintes sur le score ESG, d'où l'évolution de sa composition par réduction de l'univers des possibles. Lorsque l'on est en présence d'un actif sans risque, l'évolution de la composition du portefeuille tangent est différente du fait de l'existence de l'actif sans risque lorsque la contrainte est plus faible. Cependant, à partir d'un certain seuil de contrainte ESG (entre 51.48 et 54.45 sur les figures ci-dessous), on constate que l'actif sans risque est retiré du portefeuille optimal. A partir de ce moment là, la composition du portefeuille optimal en présence et en absence

de l'actif sans risque suivent la même composition. Enfin, au-delà de 93.00, il n'existe pas de solution au programme d'optimisation (du fait que l'actif le plus propre possède un score esg de 93.00).

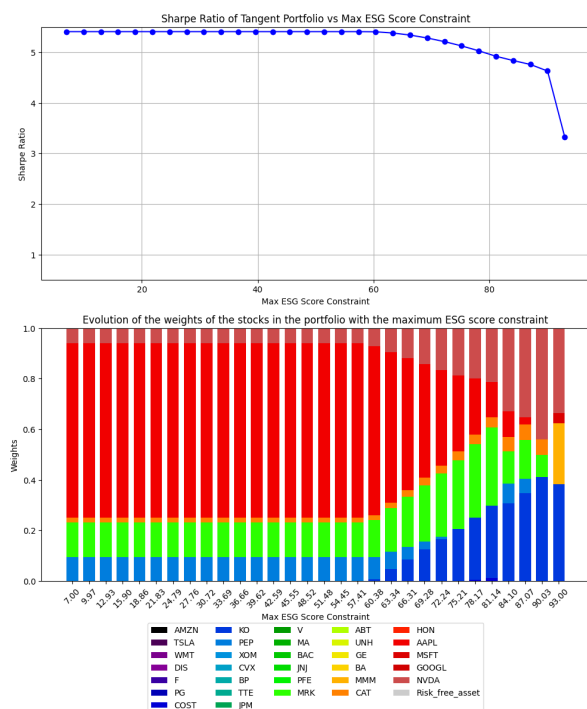


Figure 6: Représentation de l'évolution du ratio de sharpe et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille, en absence d'actif sans risque

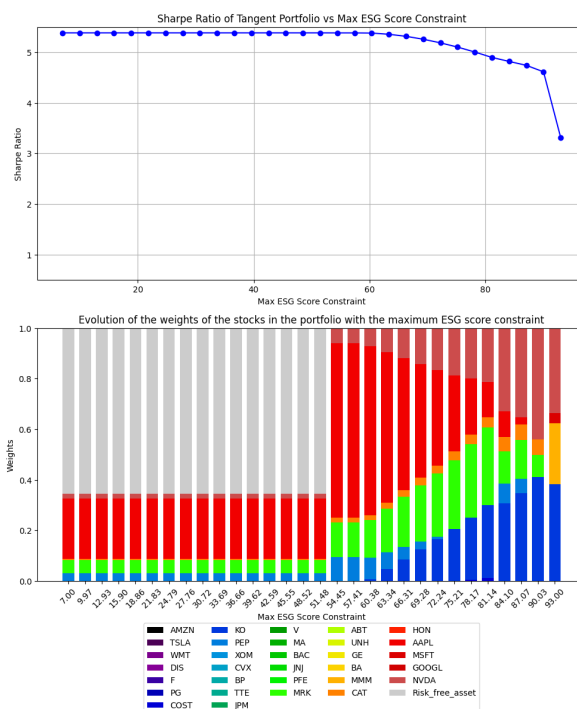


Figure 7: Représentation de l'évolution du ratio de sharpe et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

Afin d'observer plus précisément la composition des portefeuilles dont les scores ESG minimaux sont 0 (absence de contrainte) et 70 (score pour lequel le portefeuille optimale est de composition différente qu'en absence de contrainte), nous proposons d'étudier la composition sectorielle des allocations sur les Figures 8 (sans contrainte ESG) et 9 (avec contrainte ESG d'un score supérieur à 70) pour un marché sans actif sans risque et sur les Figures 10 (sans contrainte ESG) et 11 (avec contrainte ESG d'un score supérieur à 70) pour un marché avec actif sans risque. A partir de ces figures, on retrouve bien le fait qu'en absence de contrainte ESG, la composition des portefeuilles sur des marchés avec et sans actif sans risque est différente : les figures 8 et 10 présentent des compositions complètement distinctes. En revanche, avec un contrainte ESG suffisamment importante, les compositions sur ces deux marchés sont identiques : les figures 9 et 11 sont identiques.

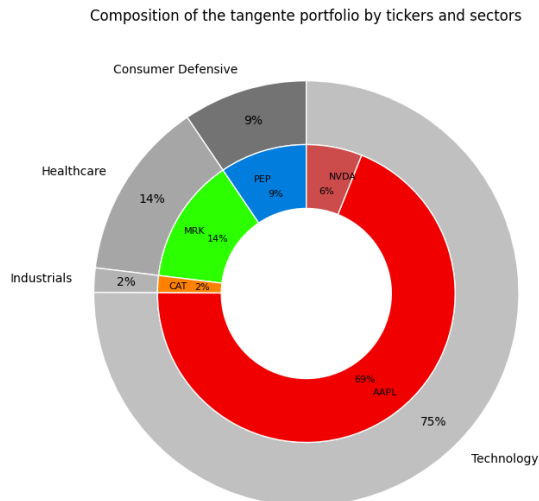


Figure 8: Composition du portefeuille optimal en absence de contrainte ESG, en absence d'actif sans risque

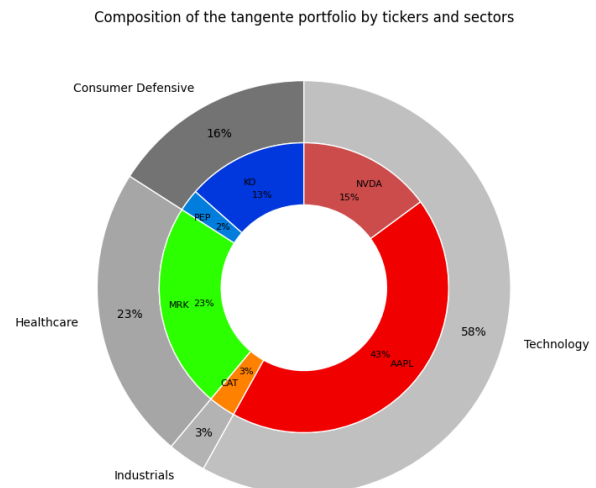


Figure 9: Composition du portefeuille optimal avec un score ESG minimal de 70, en absence d'actif sans risque

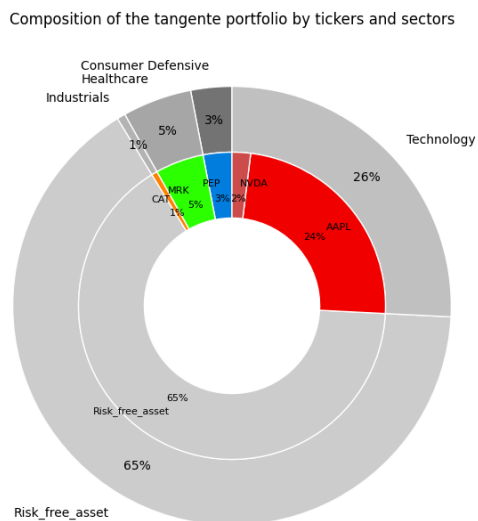


Figure 10: Composition du portefeuille optimal en absence de contrainte ESG, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

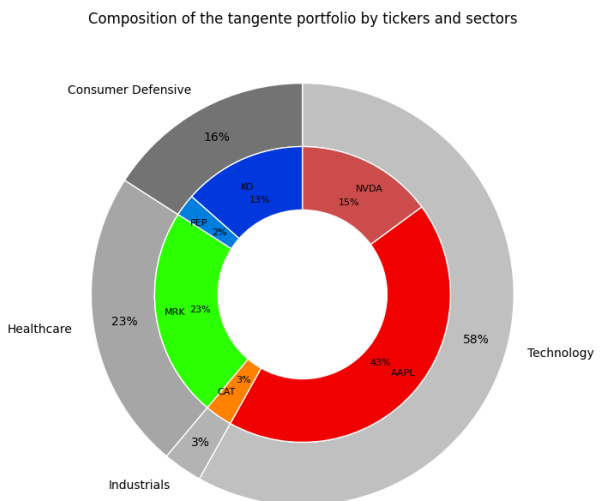


Figure 11: Composition du portefeuille optimal avec un score ESG minimal de 70, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

5.2 Résultats de la méthode Pedersen

Le graphique présente une Frontière Efficiente ESG qui montre le rapport entre le score ESG et le ratio de Sharpe. On observe que la courbe atteint un pic, suggérant qu'il existe un score ESG optimal offrant le meilleur ratio de Sharpe. Au-delà de ce pic, le ratio de Sharpe diminue avec l'augmentation du score ESG, indiquant qu'une focalisation excessive sur les critères ESG peut réduire les rendements ajustés au risque. La barre de couleur à droite indique la densité des portefeuilles à chaque point de la frontière, avec une concentration plus élevée dans les gammes de scores ESG moyens. Cette visualisation offre aux investisseurs des informations précieuses sur l'équilibre entre les considérations éthiques et les rendements financiers dans la construction de portefeuilles d'investissement.

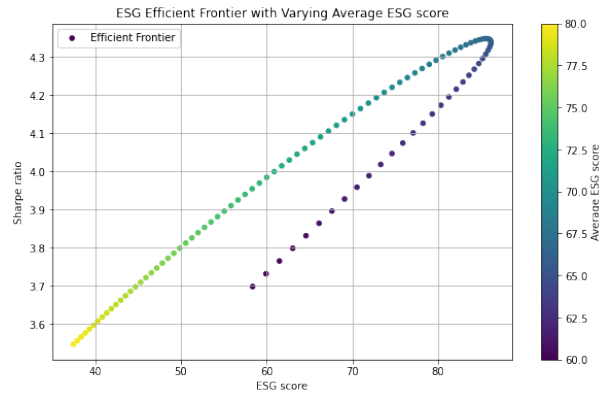


Figure 12: Frontière efficiente entre Sharpe ratio et scores ESG par modèle Pedersen

Intégrant directement les facteurs ESG dans son cadre d'optimisation, le modèle Pedersen permet aux investisseurs de prioriser la durabilité aux côtés des objectifs financiers, assurant ainsi une approche plus holistique de la prise de décision en investissement. De plus, sa flexibilité permet une personnalisation des contraintes et objectifs ESG, garantissant l'alignement des portefeuilles avec les valeurs et les objectifs individuels en matière de durabilité. En considérant les moments supérieurs de la distribution des rendements, tels que la skewness et la kurtosis, le modèle offre une évaluation plus complète des risques liés aux facteurs ESG, renforçant ainsi la résilience des portefeuilles intégrant la durabilité. Enfin, en identifiant les opportunités d'amélioration de la diversification des portefeuilles en incluant des actifs présentant de solides profils ESG, le modèle permet aux investisseurs de bénéficier de performances potentiellement supérieures à long terme, tout en atteignant leurs objectifs de durabilité.

5.3 Les méthodes de sélection et d'exclusion

L'idée de la méthode de sélection (respectivement d'exclusion) consiste à conserver (exclure) les assets les plus greens (les plus brown). Appliquer une stratégie de sélection/exclusion (best/worst in class) par quantile ($q_\alpha(set)$ avec $\alpha \in (0, 1)$ et set un ensemble) selon une stratégie globale (sur tous les actifs) ou sectorielle (sur les actifs du même secteur industriel), sachant que les actifs appartiennent à $J < n$ secteurs industriels différents et $(S_j)_{j=1:J} \subset S$ représente l'ensemble des secteurs des actifs du portefeuille:

$$\text{Sélection globale: } \begin{cases} s_i \geq q_\alpha(S), & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \\ \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\text{Sélection sectorielle: } \begin{cases} s_i \geq q_\alpha(S_j), & \text{pour } (i, asset_i) \in 1, 2, \dots, n \times S_j \text{ et } S_j \in S \\ \alpha \in (0, 1) \end{cases}$$

On remarque dans la Figure 13 que, dans un contexte de sélection globale de 50%, deux des tickers présents dans la composition des portefeuilles optimaux sous toutes contraintes ESG sont exclus pour l'investisseur : NVDA et MRK. Cela a pour effet d'introduire de nouveaux actifs dans l'optimisation et de conserver l'actif sans risque plus longtemps dans la composition du portefeuille par rapport à l'évolution de la contrainte ESG. En effet, si le portefeuille optimal se modifie à partir de la contrainte 51.48, cet actif sans risque reste dans le portefeuille optimal à 54.45 pour disparaître à 57.41.

En ce qui concerne le contexte de sélection sectorielle de 50%, visible dans la Figure 14, on remarque que cette fois c'est AAPL, un des tickers les plus importants, qui est exclu pour l'investisseur. Cela a aussi eu le double effet d'apparition de nouveaux tickers et d'un effet de conservation de l'actif sans risque dans la composition du portefeuille plus longue avec l'évolution de la contrainte ESG. Cette fois-ci, la composition du portefeuille est invariante jusqu'à la contrainte ESG de 60.38 et l'actif sans risque reste dans la composition du portefeuille jusqu'à un score de 72.24.

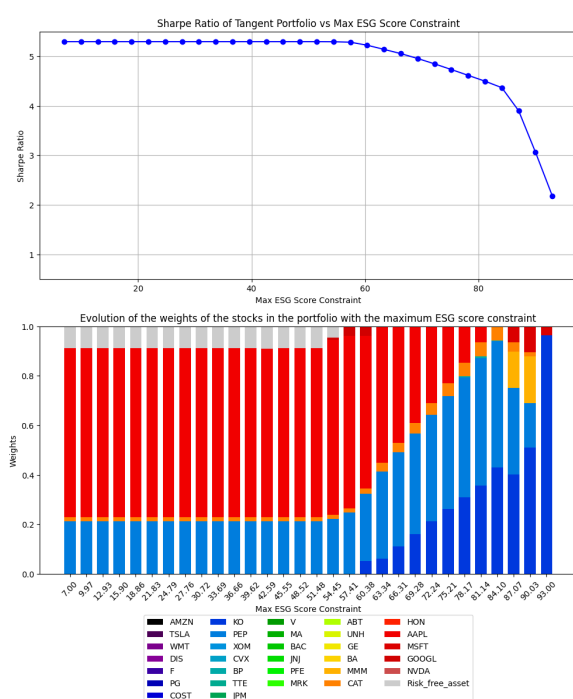


Figure 13: Évolution du ratio de sharpe et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille avec une sélection globale α de 0.5, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

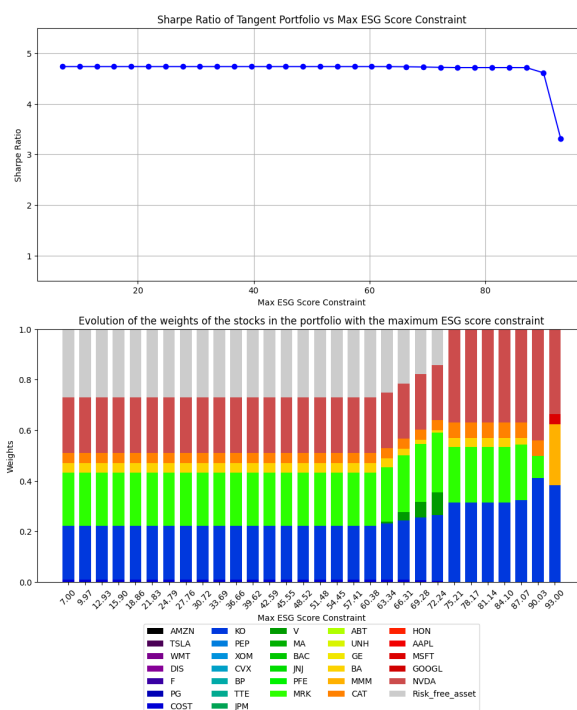


Figure 14: Évolution du ratio de sharpe et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille avec une sélection sectorielle α de 0.5, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

En somme, si on devait comparer ces deux méthodes de sélection on retiendrait deux aspects:

1. L'exclusion d'AAPL dans la sélection sectorielle, principal ticker dont l'allocation en l'absence de contrainte et de sélection était plus importante que NVDA et MRK réunis (AAPL: 24%, NVDA:2%, MRK:5% sur la figure 10), a eu pour effet de conserver l'actif sans risque dans la composition du portefeuille efficient encore plus longtemps (par rapport à l'évolution de la contrainte ESG du portefeuille) que pour la sélection globale. La comparaison des Figures 15 (sélection global) et 16 (sélection sectorielle) expose en effet que la composition des portefeuilles optimaux avec une contrainte ESG de 70 ne

considère plus l'actif sans risque pour le premier alors que l'actif sans risque est encore bien présent pour le second.

2. La sélection globale offre un portefeuille tangent dont le ratio de sharpe est plus élevé que pour une sélection sectorielle, lorsque la contrainte ESG est faiblement contraignante. Cependant, à partir d'un certain seuil (ici un score de 75.21) c'est l'inverse : la méthode de sélection sectorielle offre un ratio de sharpe plus élevé.

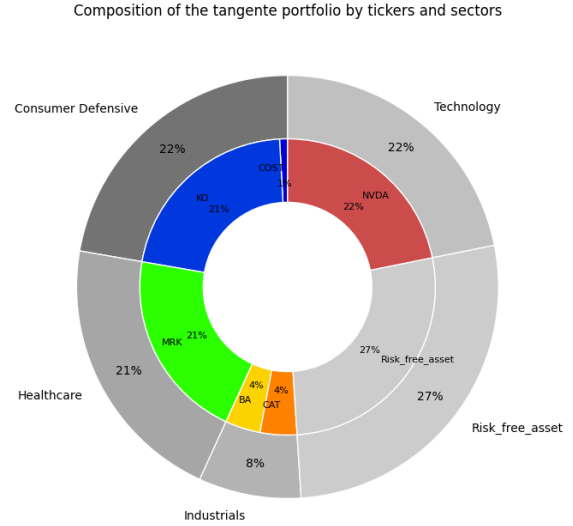
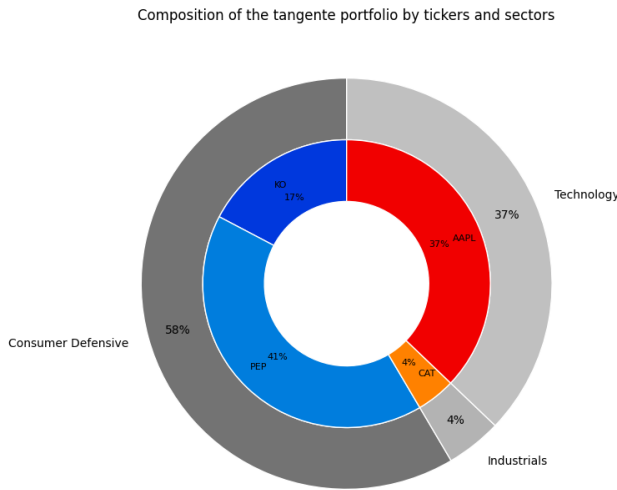


Figure 15: Composition du portefeuille optimale avec un score ESG minimum de 70 avec une sélection globale α de 0.5, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

Figure 16: Composition du portefeuille optimale avec un score ESG minimum de 70 avec une sélection globale α de 0.5, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50

5.4 L'allocation contrainte à des minimums sur secteur

La motivation sous-jacente à cette méthode est d'éviter l'exclusion de certaines industries entières. Par le biais de l'attribution d'un poids minimum pour chaque secteur, on peut ajouter la contrainte suivante avec la notation du poids minimum pour le secteur S_j définit par $PoidsMinimum_j$:

$$\left\{ \sum_{asset_i \in S_j} x_i s_i \geq PoidsMinimum_j, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, J \right.$$

Ci-dessous en Figure 17, sont représentés les résultats de cette méthode dans le cadre de Markowitz avec le portefeuille d'actif complet (en Annexe 26 et 27 cette application aux portefeuilles avec méthode de sélection globale et sectorielle) pour une allocation avec un minimum de 10% d'investissement dans le secteur de l'énergie et de 15% dans le secteur de la santé. Sur cette figure on observe trois choses :

1. L'actif sans risque n'est plus dans le portefeuille optimal.
2. Il n'existe pas de portefeuille solution du problème pour une contrainte ESG supérieure à 87.07.
3. La composition du portefeuille paraît plus stable au cours de l'évolution de la contrainte ESG.

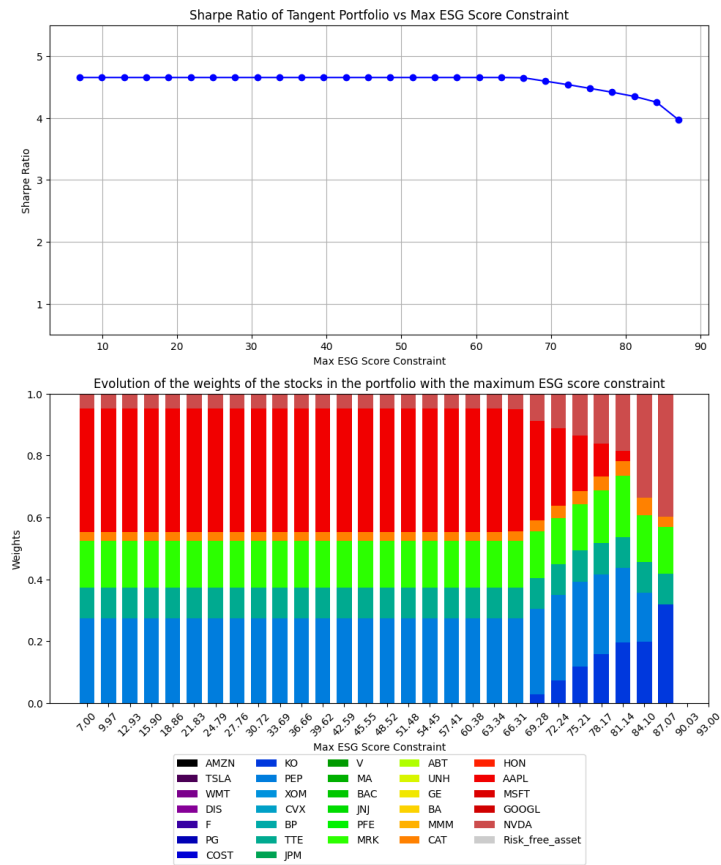


Figure 17: Représentation de l'évolution du ratio de sharp et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille avec un minimum d'allocation de 10% dans le secteur de l'énergie et de 10% dans le médical, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50.

Afin de valider la satisfaction des contraintes de minimum par secteurs, nous proposons la la Figure 18:

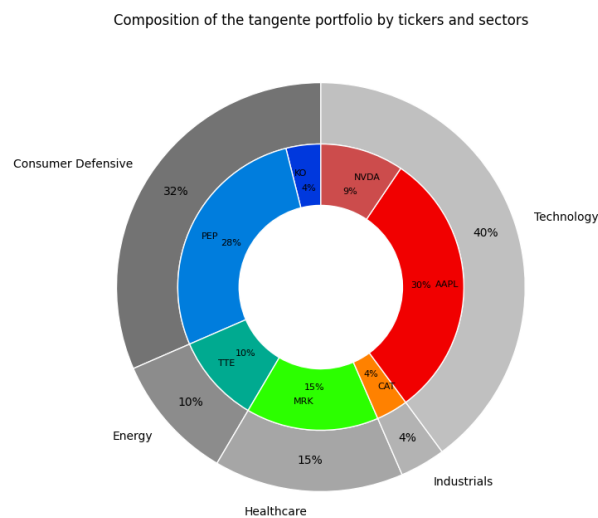


Figure 18: Composition du portefeuille optimale avec un score ESG minimale de 70 et un poids minimum de 10% pour le secteur de l'énergie et de 10% sur le médical, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50.

6 Prise en compte de l'incertitude avec la controverse et résultats

Plusieurs méthodes ont été étudiées :

1. Méthode du **minimum gaussien**: L'idée est de générer un score suivant une gaussienne avec comme volatilité le score de controverse puis de prendre le minimum entre le score esg et le score généré.
2. Méthode **probabilistique gaussienne**: L'idée est d'estimer une probabilité de réalisation d'une controverse à partir de son score de controverse puis de retirer au score esg l'écart à la moyenne d'une gaussienne de volatilité le score de controverse.
3. Méthode d'**interval de confiance gaussien**: L'idée est de modéliser l'incertitude des scores esg à partir de gaussiennes avec comme volatilité le score de controverse et d'ajouter comme contrainte le fait que l'allocation vérifie à 95% la contrainte esg.

6.1 Méthode du minimum gaussien

Cette méthode a pour objectif d'utiliser le score de controverse afin de réduire uniquement le score ESG des actifs selon une variable aléatoire (gaussienne) tout en conservant un score entre 0 et le score précédent. Nous verrons qu'une critique possible de cette méthode est que le score ESG des actifs est souvent réduit, même lorsque le score de controverse est minimal.

Algorithm 1: Pseudo-code méthode du minimum gaussien

Data:

$esg = (esg_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores esg des tickers

$c = (c_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores de controverse des tickers

Result:

$e\tilde{s}g = (e\tilde{s}g_i)_{i=1:n}$ correspond au score esg

```

1 for  $i$  in  $1 \dots n$  do
2    $e\hat{s}g_i = \mathcal{N}(esg_i, c_i)$ 
3    $e\tilde{s}g_i = \max(\min(esg_i, e\hat{s}g_i), 0)$ 
4 end
```

Propriétés:

- $\forall i \in 1 \dots n, e\tilde{s}g_i \in (0, esg_i)$ ps
- $\forall i \in 1 \dots n, \mathbb{P}[e\tilde{s}g_i > esg_i] = 1/2$
- Par calculs en Annexe A.1.1 on peut récupérer un intervalle de confiance,

$$\forall \alpha \in (0, 1), \mathbb{P}[e\tilde{s}g_i \geq \delta_i] \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \delta_i \leq \Phi_{0,1}^{-1}\left(\frac{\alpha - c_i}{\sigma_i}\right) \quad (6)$$

où $\Phi_{0,1}^{-1}$ désigne l'inverse de la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite.

Ci-dessous, la Figure 19 offre une représentation graphique de l'effet de la méthode du "minimum gaussien" par méthode de bootstrapping. Sur cette figure, un actif fictif avec un score ESG de 30 a été considéré et pour chaque score de controverse dans un intervalle de 1 à 4 séparé en 9, 1 000 simulations de l'algorithme 1 ont été effectuées. Les boîtes à moustache ci-dessous représentent bien le fait que le quantile 0.5 est le score ESG initial et que la variance du score ESG augmente avec la valeur du score de controverse.

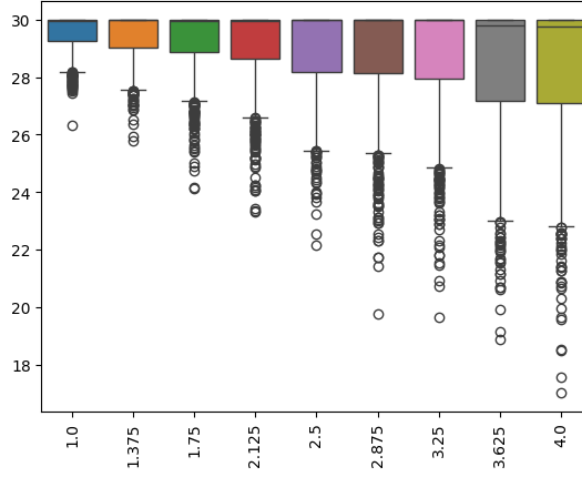


Figure 19: Représentation par boîte à moustache de l'effet bootstrapé de la méthode du minimum gaussien pour un score esg de 30 et en fonction du score de controverse (allant de 1 à 4).

6.2 Méthode probabilistique gaussienne

Cette méthode a pour objectif d'avoir davantage de contrôle sur la probabilité de diminution du score ESG sachant le score de controverse, où un faible score de controverse entraîne très rarement une diminution du score ESG et un fort score de controverse implique de manière plus importante une diminution du score ESG retenu. Nous verrons qu'une critique possible de cette méthode est que le score ESG des actifs n'est que modifié dans un sens: il est diminué.

Algorithm 2: Pseudo-code méthode probabilistique gaussienne

Data:

$esg = (esg_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores esg des tickers

$c = (c_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores de controverse des tickers

Result:

$e\tilde{s}g = (e\tilde{s}g_i)_{i=1:n}$ correspond au score esg

```

1 for  $i$  in  $1..n$  do
2    $e\hat{s}g_i = \mathcal{N}(esg_i, c_i)$ 
3    $e\tilde{s}g_i = esg_i - |X| \mathbf{1}_{controverse|c_i}$ 
4 end
```

Propriétés:

- $\forall i \in 1 \dots n, e\tilde{s}g_i \leq esg_i$ ps

L'indicateur $\mathbf{1}_{controverse|c_i}$ a été calibré comme une loi de Bernoulli de paramètre la probabilité qu'une controverse se réalise sachant le score de controverse. Afin de faire au plus simple nous avons calibré cette probabilité à partir d'hypothèses que nous voulions vérifier : $\mathbb{P}[controverse|c_i = 1] = 10\%$, $\mathbb{P}[controverse|c_i = 4] = 50\%$ et la fonction $c \rightarrow \mathbb{P}[controverse|c]$ convexe. D'où sa définition en annexe A.1.2.

La Figure 20 expose les effets de la méthode par probabilité gaussienne. Cette méthode a pour effet de rarement changer le score ESG des actifs avec un score de controverse inférieur à 2.5 et de le modifier à la baisse à partir de ce palier de manière plus significative. On remarque aussi que la médiane reste au niveau du score ESG.

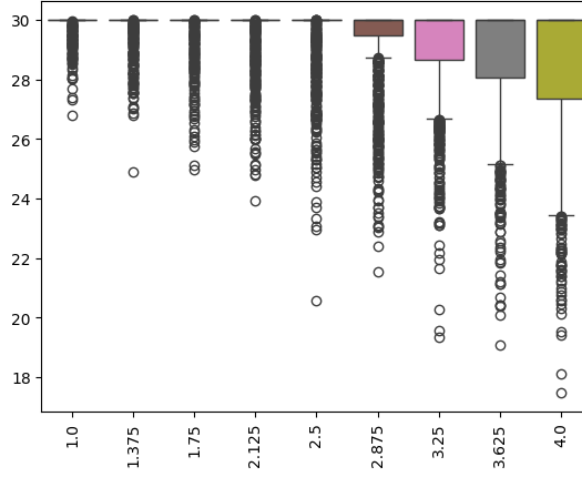


Figure 20: Représentation par boîte à moustache de l'effet bootstrapé de la méthode par probabilité gaussienne pour un score esg de 30 et en fonction du score de controverse (allant de 1 à 4).

6.3 Méthode d'intervalle de confiance gaussien

Dans cette sous partie, nous avons essayé d'intégrer le score de controverse dans nos problèmes d'optimisation afin de mesurer la sensibilité d'un portefeuille par rapport au score ESG d'un actif.

L'objectif serait d'utiliser une distribution normale de moyenne S_i qui représente le score ESG du i ème stock et de volatilité égale à $\sqrt{SC_i}$ qui est le score de controverse de l'actif i .

L'objectif est de créer une volatilité qui repose sur les scores de controverse. Pour rappel, un score de controverse quantifie l'implication d'une entreprise dans des événements ayant un fort impact d'un point de vue ESG. Par exemple, si une entreprise a un score de controverse égal à 2, alors cette dernière est peu impliquée dans des événements environnementaux ou sociaux graves comme une marée noire ou une inculpation pour travail forcé.

Dans le cadre de l'implémentation, nous avons décidé de simuler pour chaque actif un échantillon de taille 31×1 pour les 31 actifs. Concrètement, on récupère un vecteur de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_1 \\ \tilde{S}_2 \\ \vdots \\ \tilde{S}_{31} \end{bmatrix}$$

Où $\tilde{S}_i \sim \mathcal{N}(S_i, \sqrt{SC_i})$.

Par la suite, on calcule le portefeuille tangent et le sharpe ratio optimal en faisant varier à chaque itération, le score ESG d'un seul actif (en remplaçant S_i par \tilde{S}_i). L'objectif est de voir comment le sharpe ratio du portefeuille varie en fonction du score ESG d'un seul actif. Par ailleurs, nous avons fait le même processus mais en prenant à chaque itération $S_i \pm 3\sqrt{SC_i}$ au lieu de S_i pour dessiner un intervalle de confiance de $\pm 3\sigma_i$ avec $\sigma_i = \sqrt{SC_i}$ la volatilité de chaque actif.

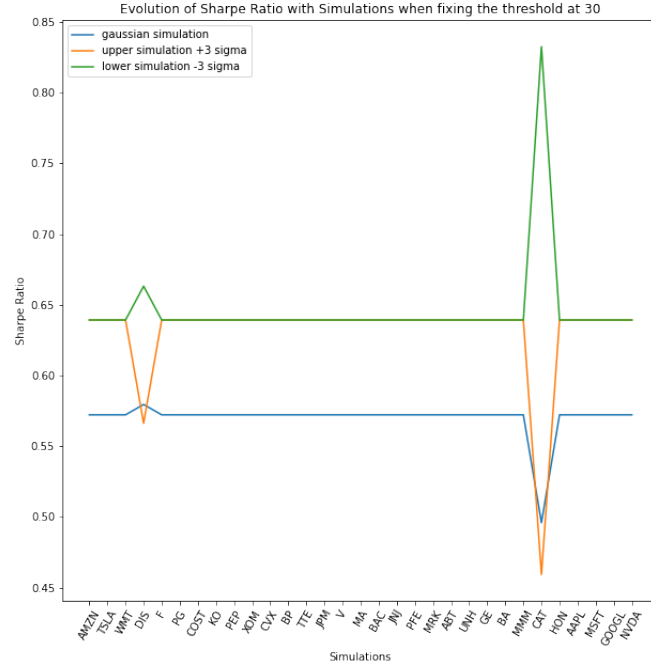


Figure 21: Variation du sharpe ratio d'un portefeuille en fonction du score ESG de chacun de ses actifs

Le graphique suivant nous montre l'évolution du sharpe ratio sur ce portefeuille de 31 actifs en fonction de la variation du score ESG d'un actif. l'axe des abscisses représente la simulation aléatoire suivant une loi normale du score ESG de chaque actif. Nous pouvons vite remarquer que lorsque le sharpe ratio est constant alors cela indique que l'actif en question n'est pas considéré dans les poids optimaux finaux ou plutôt que son poids optimal dans le portefeuille est réduit à 0. Par conséquent, la dérivée du sharpe ratio par rapport à cet actif est bien nulle ce qui se traduit par une pente nulle et donc un sharpe constant pour ce genre d'actifs.

D'un autre côté, nous remarquons que les simulations à $\pm 3\sigma$ n'ont pas du tout généré un intervalle de confiance et que le sharpe ratio en moyenne pour ces deux échantillons plus grand que pour les simulations purement gaussiennes. Ce qui est encore plus étonnant c'est que les bornes semblent se comporter de manière paradoxalement symétrique. Plus précisément, nous nous attendions à ce que le sharpe ratio augmente si le score ESG de l'actif augmente mais il semble que ce soit l'inverse. La figure suivante montre bien une proportionnalité inversée entre le score ESG et le sharpe ratio. Cela peut s'expliquer par le fait que l'actif CAT est considéré dans l'optimisation comme un actif majeur et que son poids final est assez grand (80%) du portefeuille optimale. Ainsi, l'on peut supposer que le sharpe ratio possède une sensibilité négative au score ESG des actifs ou dit autrement :

$$\frac{\partial SR(\mathbf{x}^*)}{S_i} < 0$$

7 Conclusion

Ce projet a exploré l'intégration des critères ESG dans l'optimisation de portefeuille, une démarche qui prend de plus en plus d'importance dans le contexte actuel de sensibilisation aux enjeux environnementaux, sociaux et de gouvernance. L'adoption de ces critères vise à aligner les pratiques d'investissement avec des objectifs de développement durable, tout en cherchant à maintenir, voire à améliorer, la performance financière des portefeuilles.

Nous avons examiné diverses méthodologies et modèles qui intègrent les scores ESG dans le processus d'allocation d'actifs. Ces modèles permettent de considérer non seulement le retour financier mais aussi l'impact ESG de chaque actif, offrant ainsi une approche plus holistique de la gestion de portefeuille.

Nos résultats montrent que, bien que l'inclusion de contraintes ESG puisse parfois limiter l'espace d'investissement et augmenter la volatilité du portefeuille, elle peut également conduire à des portefeuilles plus résilients et alignés avec les valeurs éthiques des investisseurs. De plus, les analyses ont démontré que les scores ESG, malgré leur manque de standardisation, apportent une valeur ajoutée significative en termes de gestion des risques et de compliance.

Il est également apparu que les contraintes ESG peuvent être intégrées de différentes manières, selon l'aversion au risque de l'investisseur et ses objectifs spécifiques. Les stratégies basées sur des scores ESG minimums, par exemple, assurent que tous les actifs du portefeuille respectent certains critères de durabilité, tandis que les approches de sélection et d'exclusion ciblent directement les entreprises les plus performantes ou évitent les secteurs les plus problématiques.

En conclusion, notre étude confirme l'importance croissante de l'ESG dans la finance moderne et souligne la nécessité de développer des outils et des modèles plus raffinés pour évaluer l'impact ESG. L'intégration réussie de ces critères nécessite une compréhension approfondie des nuances des scores ESG et une collaboration étroite entre les investisseurs, les analystes et les régulateurs pour améliorer la transparence et la fiabilité des évaluations ESG. À mesure que le marché évolue et que de nouvelles réglementations entrent en vigueur, nous anticipons que les stratégies d'investissement durable joueront un rôle de plus en plus central dans la gestion de portefeuille.

References

- [1] Yuriy Avramov, Si Cheng, Jamil Tarelli, and Lionel Martellini. Asset allocation: Risk models for alternative investments. *The Journal of Portfolio Management*, 39(2):109–124, 2012.
- [2] Florian Berg, Julian F Kölbel, and Roberto Rigobon. Aggregate confusion: The divergence of esg ratings. *Review of Finance*, 26(6):1315–1344, November 2022.
- [3] Monica Billio, Michele Costola, Iva Hristova, Carmelo Latino, and Loriana Pelizzon. Inside the esg ratings: (dis)agreement and performance. *Corporate Social Responsibility and Environmental Management*, 28(5):1948–1959, September 2021.
- [4] Kempthorne Dr. Lecture 14: Portfolio theory mit 18.s096. 2013.
- [5] Harry M. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):71–91, 1952.
- [6] Lubos Pastor, Robert F Stambaugh, and Lucian A Taylor. The equity premium and the concentration of aggregate shocks. *The Journal of Finance*, 70(4):1667–1702, 2015.
- [7] Lasse Heje Pedersen, Shaun Fitzgibbons, and Lukasz Pomorski. Responsible investing: The esg-efficient frontier. November 2021.
- [8] Thierry Roncalli. Asset management lecture 1. portfolio optimization. January 2021.
- [9] Marc C. Steinbach. Markowitz revisited: Single-period and multi-period mean-variance models. 1999.

A Annexe

A.1 Preuves

A.1.1 Intervalle de confiance de la méthode par min

Soit $\tilde{Y} = \max(Y, 0)$, avec c une constante positive, $Y = \min(X, c)$ et $X \sim \mathcal{N}(c, \sigma^2)$ ($\sigma \in \mathbb{R}$). On cherche alors δ tel que $\mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta] \geq 1 - \alpha$, pour ce faire on identifie d'abord que $1 = \mathbf{1}_{X < 0} + \mathbf{1}_{0 \leq X < c} + \mathbf{1}_{X \geq c}$. De fait,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta] &= \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \times (\mathbf{1}_{X < 0} + \mathbf{1}_{0 \leq X < c} + \mathbf{1}_{X \geq c})] \\ &= \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \mathbf{1}_{X < 0}] + \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \mathbf{1}_{0 \leq X < c}] + \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \mathbf{1}_{X \geq c}] \\ &= \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \cap X < 0] + \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \cap 0 \leq X < c] + \mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \cap X \geq c] \end{aligned} \quad (7)$$

Cependant,

- $\mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \cap X < 0] = \mathbb{P}[0 \geq \delta \cap X < 0] = 0$, car $0 > \delta$ p.s.
- $\mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \cap 0 \leq X < c] = \mathbb{P}[X \geq \delta \cap 0 \leq X < c]$
 $= \mathbb{P}[\delta \leq X < c]$
 $= \Phi_{c, \sigma^2}(c) - \Phi_{c, \sigma^2}(\delta)$
 $= 1/2 - \Phi_{c, \sigma^2}(\delta)$
 car $0 > \delta$ p.s. et X centrée en c .
- $\mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta \cap X \geq c] = \mathbb{P}[c \geq \delta \cap X \geq c] = 1$, car $\delta \leq c$ p.s.

Par conséquent, $\mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta] = 1 - \Phi_{c, \sigma^2}(\delta)$. Ce qui permet de conclure avec :

$$\mathbb{P}[\tilde{Y} \geq \delta] \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi_{c, \sigma^2}(\delta) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow \delta \leq \Phi_{c, \sigma^2}^{-1}(\alpha) \Leftrightarrow \delta \leq \Phi_{0,1}^{-1}\left(\frac{\alpha - c}{\sigma}\right)$$

A.1.2 Intervalle de confiance de la méthode par probabilité

Soit $\tilde{Y} = c - |X| \mathbf{1}(\text{controverse}_{occurs} | \text{controverse}_{niv})$, où :

- c est une constante positive
- $X \sim \mathcal{N}(0, \text{controverse}_{niv})$ représente l'effet potentiel en cas d'occurrence d'une controverse
- $\text{controverse}_{occurs} = [\text{une controverse se produit}]$ et $\text{controverse}_{niv} \in (1, 4)$ représente un proxy du niveau de confiance en lequel une controverse se réalise, donc $\mathbf{1}(\text{controverse}_{occurs} | \text{controverse}_{niv})$ est l'indicatrice d'occurrence de la controverse sachant un proxy du niveau de confiance de l'occurrence de cette controverse.

Le choix de l'approximation de $\mathbb{P}[\text{controverse}_{occurs} | \text{controverse}_{niv}]$ pourrait être étudié par le biais des variables de modélisation des événements rares (Gumbel, Fréchet, Weibul...) mais par contrainte de temps, nous avons décidé de créer une fonction $f : \text{controverse}_{niv} \rightarrow \mathbb{P}[\text{controverse}_{occurs} | \text{controverse}_{niv}]$ telle que:

1. $f(1) = p$
2. $f(4) = q$

3. f est convexe

De fait, nous avons défini f comme étant de la forme $f(x) = \exp(ax + b)$, avec a et b solution de:

$$\begin{cases} a + b = \ln(p) \\ 4a + b = \ln(q) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} a = 1/3(\ln(p) - \ln(q)) \\ b = 2/3 \ln(p) + \ln(q) \end{cases}$$

A.2 Données

Table 4: Tableau des tickers considérés et de leur historique de score ESG pour MSCI

Tickers	Sectors	Date_1	Score_1	Date_2	Score_2	Date_3	Score_3	Date_4	Score_4	Date_5	Score_5
DIS	Communication Services	2020-04-01	50	2020-12-01	50	2021-12-01	50	2022-12-01	64	2023-08-01	50
GOOGL	Communication Services	2020-04-01	64	2021-05-01	64	2021-12-01	64	2022-05-01	64	2023-07-01	64
AMZN	Consumer Cyclical	2020-06-01	50	2020-12-01	36	2021-09-01	50	2022-10-01	50	2023-12-01	50
TSLA	Consumer Cyclical	2020-04-01	50	2021-03-01	64	2022-02-01	64	2023-01-01	64	2024-01-01	64
F	Consumer Cyclical	2019-12-01	7	2020-09-01	7	2021-12-01	7	2022-12-01	21	2023-06-01	21
WMT	Consumer Defensive	2019-04-01	36	2020-04-01	36	2020-12-01	36	2022-03-01	36	2023-11-01	50
PG	Consumer Defensive	2019-04-01	36	2020-02-01	36	2021-03-01	50	2022-06-01	64	2023-04-01	64
COST	Consumer Defensive	2019-11-01	79	2020-12-01	79	2021-12-01	79	2022-09-01	93	2023-08-01	93
KO	Consumer Defensive	2019-12-01	79	2020-06-01	79	2021-12-01	79	2022-12-01	79	2023-11-01	79
PEP	Consumer Defensive	2019-09-01	50	2020-07-01	50	2021-06-01	50	2022-05-01	50	2023-05-01	50
XOM	Energy	2019-10-01	50	2020-09-01	50	2021-09-01	50	2022-06-01	64	2023-09-01	64
CVX	Energy	2019-08-01	50	2020-08-01	50	2021-11-01	64	2022-07-01	64	2023-07-01	64
BP	Energy	2019-10-01	64	2020-09-01	64	2021-11-01	64	2022-05-01	64	2023-08-01	79
TTE	Energy	2020-07-01	36	2020-12-01	50	2021-10-01	64	2022-12-01	64	2023-12-01	64
BAC	Financial Services	2019-12-01	64	2020-03-01	64	2021-03-01	64	2022-05-01	64	2023-06-01	64
MA	Financial Services	2019-05-01	64	2020-05-01	64	2021-06-01	64	2022-12-01	79	2023-10-01	79
JPM	Financial Services	2019-07-01	36	2020-05-01	36	2021-02-01	50	2022-07-01	64	2023-08-01	64
V	Financial Services	2019-10-01	50	2020-12-01	50	2021-12-01	50	2022-08-01	64	2023-08-01	64
JNJ	Healthcare	2019-06-01	21	2020-06-01	21	2021-06-01	21	2022-07-01	64	2023-06-01	64
PFE	Healthcare	2020-02-01	64	2021-03-01	50	2021-10-01	64	2022-10-01	79	2023-10-01	64
MRK	Healthcare	2019-11-01	50	2020-12-01	36	2021-11-01	36	2022-08-01	64	2023-08-01	50
ABT	Healthcare	2020-09-01	36	2021-08-01	36	2022-05-01	50	2022-08-01	79	2023-08-01	79
UNH	Healthcare	2020-05-01	64	2020-12-01	36	2021-12-01	36	2022-12-01	50	2023-12-01	64
GE	Industrials	2020-03-01	36	2020-12-01	36	2021-12-01	36	2022-07-01	50	2023-09-01	50
BA	Industrials	2019-07-01	93	2020-06-01	93	2021-09-01	93	2022-10-01	93	2023-10-01	93
MMM	Industrials	2020-04-01	64	2020-08-01	64	2021-10-01	64	2022-11-01	64	2023-12-01	64
CAT	Industrials	2019-12-01	36	2020-12-01	36	2021-12-01	36	2022-11-01	21	2023-11-01	36

Suite sur la page suivante

Table 4 – Suite de la page précédente

Tickers	Sectors	Date_1	Score_1	Date_2	Score_2	Date_3	Score_3	Date_4	Score_4	Date_5	Score_5
HON	Industrials	2019-11-01	64	2020-12-01	50	2021-12-01	64	2022-11-01	50	2023-12-01	50
AAPL	Technology	2019-03-01	93	2020-02-01	93	2021-03-01	93	2022-02-01	93	2023-02-01	93
MSFT	Technology	2020-03-01	79	2020-11-01	50	2021-06-01	50	2022-07-01	50	2023-07-01	50
NVDA	Technology	2020-02-01	93	2020-10-01	93	2021-10-01	93	2022-09-01	93	2023-05-01	93

Table 5: Tableau des tickers considérés et de leur score de controverse pour MSCI

Tickers	Sectors	Color for Environment	Color for Social	Color for Governance
DIS	Communication Services	Yellow	Orange	Yellow
GOOGL	Communication Services	Green	Orange	Yellow
AMZN	Consumer Cyclical	Green	Orange	Orange
TSLA	Consumer Cyclical	Green	Orange	Yellow
F	Consumer Cyclical	Green	Green	Green
WMT	Consumer Defensive	Orange	Orange	Yellow
PG	Consumer Defensive	Green	Yellow	Green
COST	Consumer Defensive	Orange	Yellow	Yellow
KO	Consumer Defensive	Orange	Yellow	Green
PEP	Consumer Defensive	Orange	Orange	Yellow
XOM	Energy	Yellow	Yellow	Green
CVX	Energy	Orange	Orange	Green
BP	Energy	Yellow	Orange	Green
TTE	Energy	Green	Yellow	Orange
BAC	Financial Services	Green	Yellow	Green
MA	Financial Services	Green	Yellow	Green
JPM	Financial Services	Green	Orange	Orange
V	Financial Services	Green	Orange	Orange
JNJ	Healthcare	Green	Orange	Yellow
PFE	Healthcare	Green	Orange	Green
MRK	Healthcare	Green	Orange	Green
ABT	Healthcare	Green	Orange	Orange
UNH	Healthcare	Yellow	Green	Yellow
GE	Industrials	Green	Orange	Yellow
BA	Industrials	Yellow	Orange	Green
MMM	Industrials	Green	Yellow	Green
CAT	Industrials	Green	Orange	Green
HON	Industrials	Green	Orange	Yellow
AAPL	Technology	Green	Yellow	Yellow
MSFT	Technology	Green	Yellow	Green
NVDA	Technology	Green	Green	Green

A.3 Graphiques

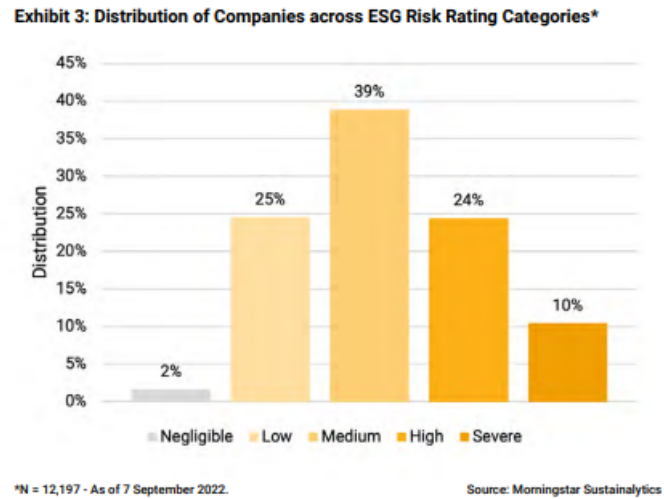


Figure 22: Distribution des compagnies par catégories de risque ESG pour Sustainalytics

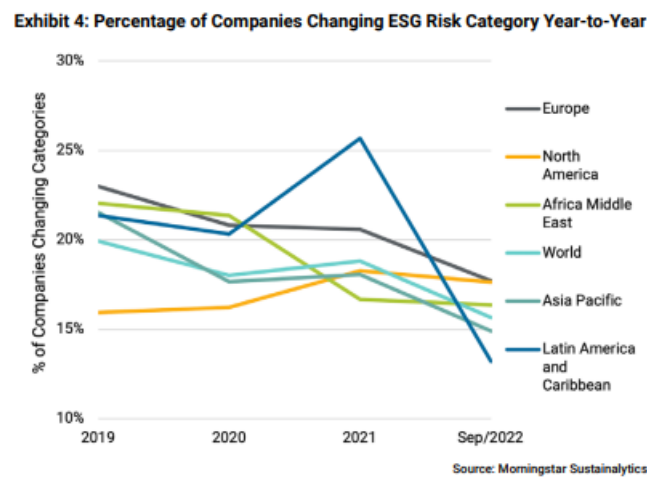


Figure 23: Pourcentage de compagnies dont la catégorie de risque ESG a varié d'une année à l'autre

Exhibit 5: Average ESG Risk Rating Score by Country*

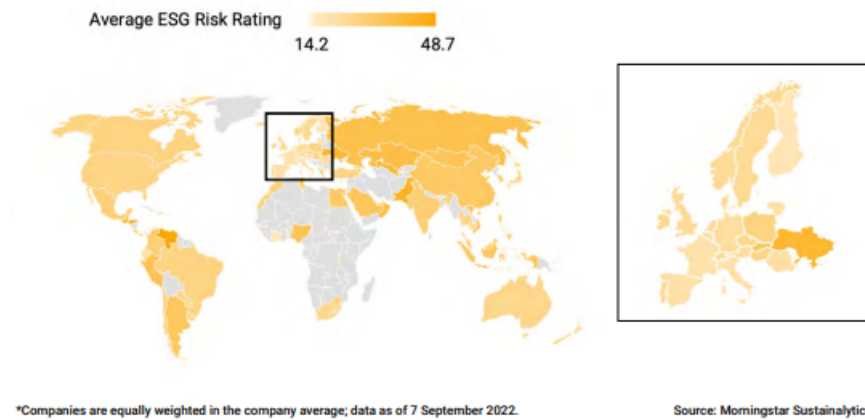


Figure 24: Répartition du risque ESG moyen par pays

Exhibit 7: Average ESG Risk Ratings by Sector*

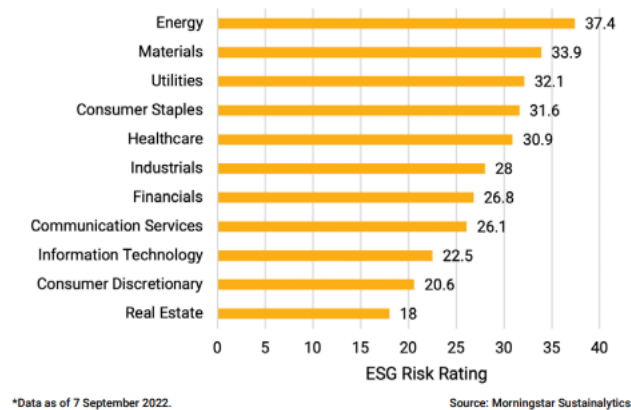


Figure 25: Répartition du risque ESG moyen par secteur d'activité

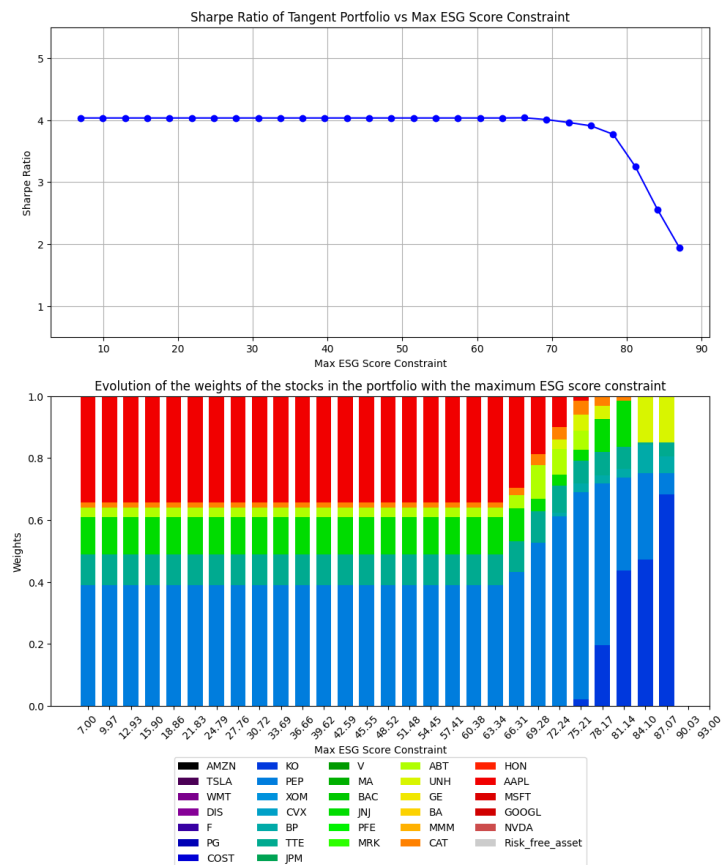


Figure 26: Représentation de l'évolution du ratio de sharpe et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille une sélection globale α de 0.5 et un minimum d'allocation de 10% dans le secteur de l'énergie

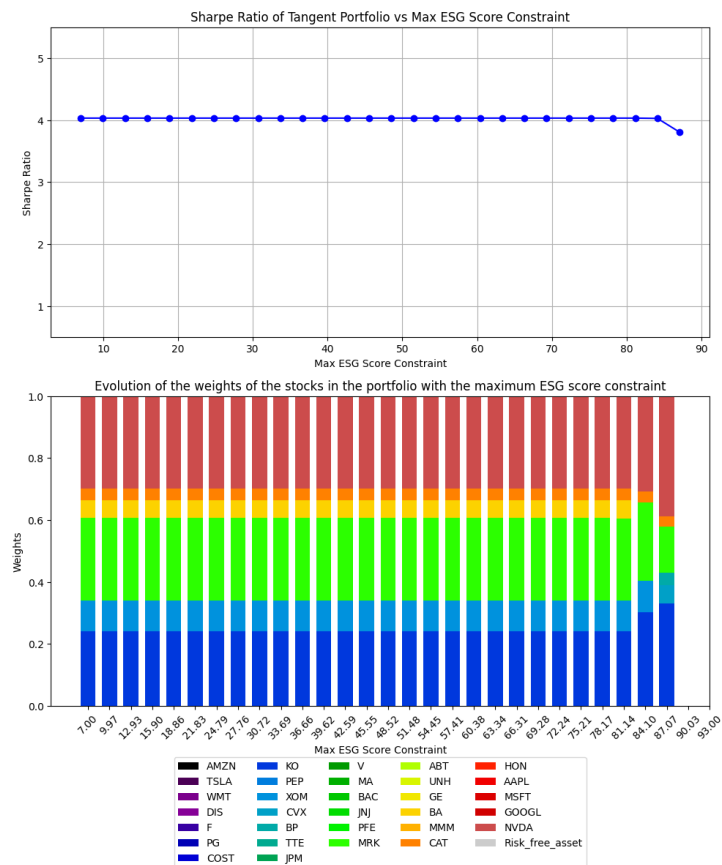


Figure 27: Représentation de l'évolution du ratio de sharpe et de la composition des portefeuilles efficients en fonction du score ESG minimal du portefeuille une sélection sectorielle α de 0.5 et un minimum d'allocation de 10% dans le secteur de l'énergie