Allocation de portefeuille sous contrainte ESG

Antoine Dalenconte, Emy Olivieri, Aharon Elbez, Zheyu Xiao

14 Mai 2024

Introduction

Contexte de l'étude

Ce projet mené en collaboration avec Nexialog Consulting explore l'intégration de scores ESG dans l'allocation de portefeuilles et les impacts sur la performance des portefeuilles:

- Analyse des défis de comparabilité et de fiabilité des scores ESG à cause de l'absence de consensus parmi les fournisseurs de notation.
- Les modèles mathématiques d'optimisation de portefeuille et l'intégration des scores ESG.
- L'impact de l'intégration de critères ESG sur la frontière efficiente et les méthodes de sélection et d'exclusion sectorielles.
- L'incertitude des scores ESG et les techniques probabilistes et statistiques pour ajuster ces scores.

Familiarisation avec les scores ESG

Qu'est-ce qu'un score ESG

- 3 piliers : Environnement, Social et Gouvernance
- Score élaboré par méthode d'arbre pondéré et normalisation pour récupérer un Z-score
- Différents types de données : **financières** (aspects monétaire de l'activité par les rapports annuels, déclarations financières...), **extra-financières** (parité homme/femme...), **alternatives** (données satellites, actualité...)
- Une absence de consensus autour de la méthodologie du scoring comme le montre la Table de corrélation entre les principaux scores ESG ci après:

	MSCI	Refinitiv	S&P Global	Sustainalytics
MSCI	100%			
Refinitiv	43%	100%		
S&P Global	45%	69%	100%	
Sustainalytics	53%	64%	69%	100%

Familiarisation avec les scores ESG

Notre choix de score ESG

Bien qu'initialement on considérait Sustainalytics, on est passé au rating de MSCI ce qui a eu pour conséquence:

- le passage d'un score "continu" entre $(0, 100)$ à un score discret restreint à 7 notes [CCC, B, BB, BBB, A, AA, AAA]
- L'accès à un historique de scores ESG
- L'accès à un score de controverse appartenant à 4 catégories.

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Les différentes considérations

- Le problème de Markowitz
- L'ajout de la contrainte ESG
- Le modèle de Pastor-Stambaugh-Taylor
- Les extensions du modele PST
- Le tracking Error

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Le problème de Markowitz 1

En prenant en compte un ensemble de n actifs, et $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ représentant les pondérations attribuées à ces actifs dans le portefeuille examiné. Nous avons les hypothèses les suivantes :

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1$
- $\mu = \mathbb{E}[\mathbf{R}]$ et $\Sigma = \mathbb{E}[(\mathbf{R} - \mu)(\mathbf{R} - \mu)^\top]$ où $\mathbf{R}$ est le vecteur de returns des assets.

L'optimisation par Mean-Variance

Il existe plusieurs versions de ce problème dont la suivante :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \\ \text{s.c.} & \mathbf{x}^T \mu = r \end{cases} \tag{1}$$

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Le problème de Markowitz 2

Une façon équivalente de résoudre le problème précédent est d'inclure le facteur d'aversion au risque.

γ-Markowitz problem

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\Sigma\mathbf{x} - \gamma\mathbf{x}^T\mu \text{ s.c.} \\ \mathbf{1}_n^T\mathbf{x} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

L'ajout de la contrainte ESG

Soit $\mathbf{S} = (S_1, .., S_n)$ le vecteur contenant le score ESG de chaque asset.

Inclusion du score ESG

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\Sigma\mathbf{x} - \gamma\mathbf{x}^T\mu \\ \text{s.c.} & \\ & \mathbf{1}_n^T\mathbf{x} = 1 \\ & \sum_{i=1}^n S_i x_i \geq (\leq)\overline{S} \end{cases} \tag{3}$$

où $\overline{S}$ représente le seuil ESG à dépasser (ou non)

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Le modèle de Pastor-Stambaugh-Taylor

- $\tilde{R} = R - r = (\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n)$ avec $\tilde{R} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma})$
- $\mathcal{G}_i$ représente le score ESG d'une entreprise i et qui peut être positive ou négative.
- $f_j = \alpha_j \mathcal{G}$ où $\alpha_j \geq 0$ pour un agent j
- La fonction d'utilité prise est la fonction d'utilité CARA :

$$\mathcal{U}(\tilde{W}_j, w_j) = -e^{-\gamma \tilde{W}_j - w_j^\top b_j W_j}$$

PST Optimization Problem

$$\mathbf{x}_p^\star(\gamma_p) = \arg\min_{\mathbf{x}_p} \frac{1}{2} \mathbf{x}_p^\top \Sigma \mathbf{x}_p - \gamma_p \mathbf{x}_p^\top \mu' \tag{4}$$

où γ_p est le facteur d'aversion au risque de l'agent p et $\mu' = \mu + \gamma_p f_p$ est le vecteur des returns qui prends en compte le score ESG de chaque asset.

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Les extensions du modele PST : Le modèle Avromov-Cheng-Lioui-Tarelli 1

Dans ce modèle, les scores ESG aussi sont considérés comme des variables aléatoires :

$$\begin{bmatrix} R \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \mu_{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma_{\mu,\mu_{\mathbf{S}}} \\ \Sigma_{\mu_{\mathbf{S}},\mu} & \Sigma_{\mu_{\mathbf{S}}} \end{bmatrix} \right) \tag{5}$$

ACLT Solution

Ce modèle possède une solution qui peut se distinguer en deux parties pour un agent p :

$$x_p^\star = \underbrace{\Gamma_p^{-1}\Omega_p(\mu + \alpha_p \mu_{\mathbf{S}})}_{\text{ESG uncertainty}} + \underbrace{\Gamma_p \Sigma^{-1}(\mu + \alpha_p \mu_{\mathbf{S}})}_{\text{PST solution}} \tag{6}$$

où $\Gamma_p = \frac{1}{\gamma_p} W_p$ qui le facteur d'aversion au risque nominal.

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Les extensions du modele PST : Le modèle Pedersen-Fitzgibbons-Pomorski 2

- $\tilde{R} = R - r = (\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n)$ avec $\tilde{R} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Sigma})$
- $\mathbf{S} = (S_1, .., S_n)$ le vecteur contenant le score ESG de chaque asset.
- La fonction d'utilité prise est la fonction d'utilité mean-variance :

$$\mathcal{U}(\tilde{W}_j, w_j) = (1 + r + w^\top \pi - \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w + \zeta(w^\top \mathbf{S}))W$$

Pedersen Optimization Problem

$$\mathbf{x}^\star\left(\bar{\sigma}, \bar{S}\right) = \text{argmax } \mathbf{x}^\top \pi$$
$$\text{s.t. } \begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{x} & = 1 \\ \mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x} - \bar{\sigma}^2 & = 0 \\ \mathbf{x}^\top \left(\boldsymbol{S} - \bar{S}\mathbf{1}\right) & = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Où π représente la prime de risque du portefeuille.

Theorie de l'Optimisation de Portefeuille

Le tracking Error

- Score du Benchmark :$S(b) = \sum_{i \in \mathcal{I}} b_i S_i$ avec S_i le score ESG de l'actif
- Différence de score :$\mathbf{S}(\mathbf{x}|b) = (\mathbf{x} - b)^T * \mathbf{S}$
- L'expected excess return $\mu(\mathbf{x}|b) = (\mathbf{x} - b)^T * \mu$
- La volatility tracking error : $\sigma(\mathbf{x}|b) = \sqrt{(\mathbf{x} - b)^T * \Sigma(\mathbf{x} - b)}$
- L'Information Ratio : $IR = \frac{\mu(\mathbf{x}|b)}{\sigma(\mathbf{x}|b)}$

TE Optimization Problem

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\sigma^2(\mathbf{x}|b) - \gamma S(\mathbf{x}|b)$$
$$\text{s.t} \quad \begin{cases} \mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1 \\ 0 \leq \mathbf{x} \leq 1 \end{cases} \tag{8}$$

Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

Le marché considéré

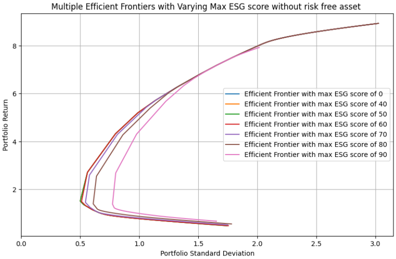
- Dates : 2020-01-01 (début) - 2023-12-01 (fin)
- Taux sans risque : 0.02
- **Actifs disponibles** dont les scores ESG et de controverse ont été récupéré sur le site de MSCI:

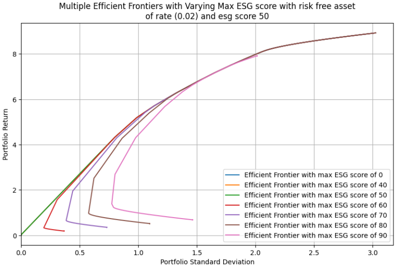
Secteurs	**Tickers**
Communication Services	DIS, GOOGL
Consumer Cyclical	AMZN, TSLA, F
Consumer Defensive	WMT, PG, COST, KO, PEP
Energy	XOM, CVX, BP, TTE
Financial Services	BAC, MA, JPM, V
Healthcare	JNJ, PFE, MRK, ABT, UNH
Industrials	GE, BA, MMM, CAT, HON
Technology	AAPL, MSFT, NVDA

Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

Résultat pour γ-Markowitz

- Sans actif sans risque : l'augmentation de la contrainte ESG entraîne un décalage de la frontière efficiente vers la droite et atténue son amplitude (des ratios de sharpe moins élevés)
- Avec actif sans risque : l'augmentation de la contrainte ESG entraîne un décalage de la frontière efficiente vers la droite et créée une courbure de la capital market line

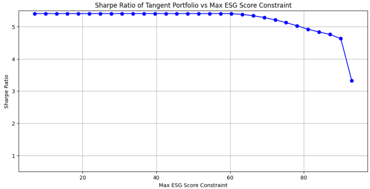


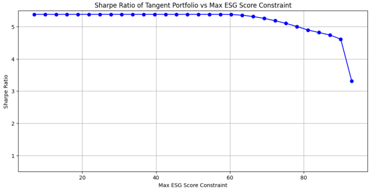


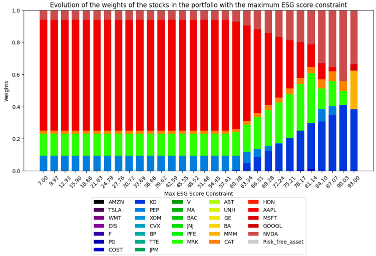
Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

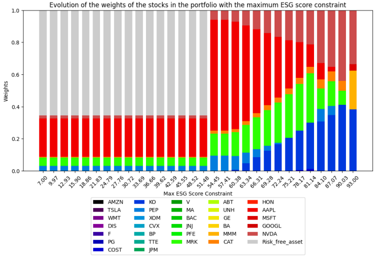
Evolution du sharpe ratio du portefeuille optimal

Disparition de l'actif sans risque (de score 50) à partir d'un certain seuil ESG (supérieur à 50) et convergence vers le marché sans actif sans risque.









Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

Résultat méthode de Pederson

La courbe atteint un pic: il existe un score ESG optimal offrant le meilleur ratio de Sharpe. Au-delà de ce pic, le ratio de Sharpe diminue avec l'augmentation du score ESG: une focalisation excessive sur les critères ESG peut réduire la performance.

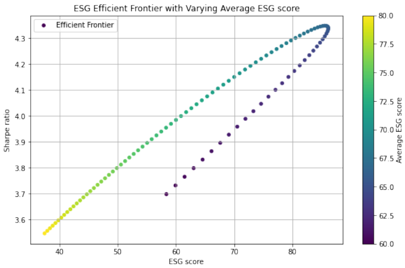


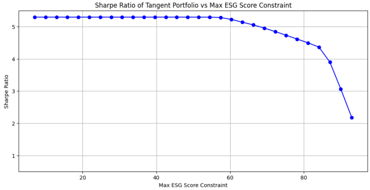
Figure: Frontière efficiente entre Sharpe ratio et scores ESG par modèle Pedersen

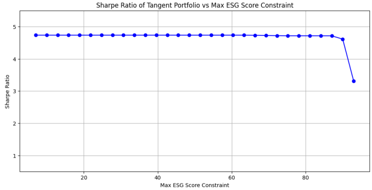
Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

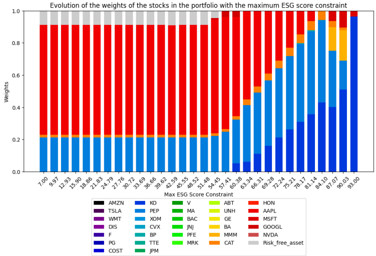
Méthode de sélection et d'exclusion

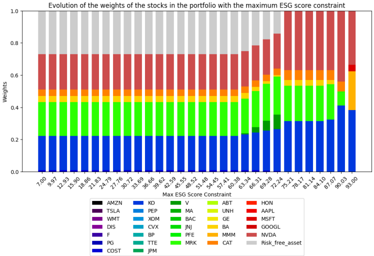
Sélection globale: $\begin{cases} s_i \geq q_\alpha(S), & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha \in (0,1) \end{cases}$

Sélection sectorielle: $\begin{cases} s_i \geq q_\alpha(S_j), & \text{pour } (i, \text{asset}_i) \in 1, 2, \ldots, n \times S_j \quad \text{et } S_j \in S \\ \alpha \in (0,1) \end{cases}$









Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

L'allocation contrainte à des minimums sur secteur

$$\left\{ \sum_{asset_i \in S_j} x_i s_i \geq PoidsMinimum_j, \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, J \right.$$

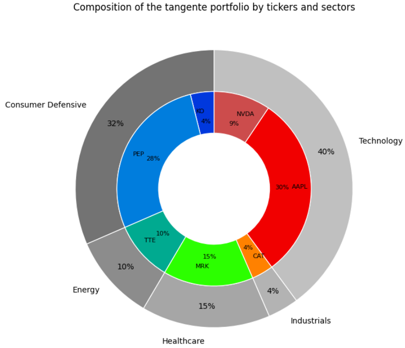
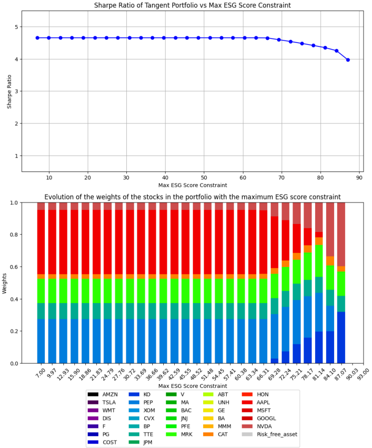


Figure: Composition du portefeuille optimale avec un score ESG minimale de 70 et un poids minimum de 10% pour le secteur de l'énergie et de 10% sur le médical, en présence d'un actif sans risque de score ESG 50.

Intégration des contraintes ESG et premiers résultats

L'allocation contrainte à des minimums sur secteur 2

L'actif sans risque n'est plus dans le portefeuille optimal. Il n'existe pas de portefeuille solution du problème pour une contrainte ESG supérieure à 87.07. La composition du portefeuille paraît plus stable au cours de l'évolution de la contrainte ESG.



Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode du minimum gaussien 1

L'idée est de réduire le score ESG selon une variable aléatoire gaussienne tout en conservant un score entre 0 et le score précédent

Algorithm 1: Pseudo-code méthode du minimum gaussien

Data:
$esg = (esg_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores esg des tickers
$c = (c_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores de controverse des tickers
Result:
$\tilde{esg} = (\tilde{esg}_i)_{i=1:n}$ correspond au score esg

```
for i in 1...n do
    ê̂sg_i = N(esg_i, c_i)
    ẽsg_i = max(min(esg_i, ê̂sg_i), 0)
end
```

$$\hat{esg}_i = \mathcal{N}(esg_i, c_i)$$
$$\tilde{esg}_i = max(min(esg_i, \hat{esg}_i), 0)$$

Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode du minimum gaussien 2

Avec cette méthode le quantile 0.5 est le score ESG initial et que la variance du score ESG augmente avec la valeur du score de controverse.

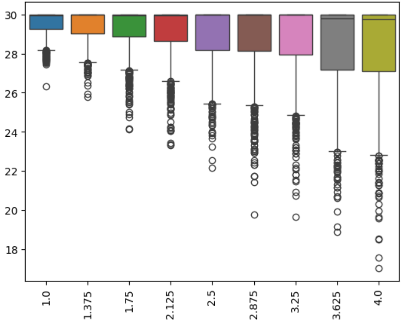


Figure: Représentation par boîte a moustache de l'effet boostrapé de la méthode du minimum gaussien pour un score esg de 30 et en fonction du score de controverse (allant de 1 à 4).

Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode probabiliste 1

On veut ici avoir davantage de contrôle sur la probabilité de diminution du score ESG sachant le score de controverse, où un faible score de controverse entraine très rarement une diminution du score ESG et un fort score de controverse implique de manière plus importante une diminution du score ESG retenu.

Algorithm 2: Pseudo-code méthode probabilistique gaussienne

Data:
$esg = (esg_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores esg des tickers
$c = (c_i)_{i=1:n}$ correspond aux scores de controverse des tickers
Result:
$\widetilde{esg} = (\widetilde{esg}_i)_{i=1:n}$ correspond au score esg

for *i in 1...n* **do**
    $\widehat{esg}_i = \mathcal{N}(esg_i, c_i)$
    $\widetilde{esg}_i = esg_i - |X|\mathbf{1}_{controverse|c_i}$
end

Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode probabiliste 2

De rares changemetns pour les actifs avec un score de controverse inférieur à 2.5 et des modifications plus significatives dès lors. On remarque aussi que la médiane reste au niveau du score ESG.

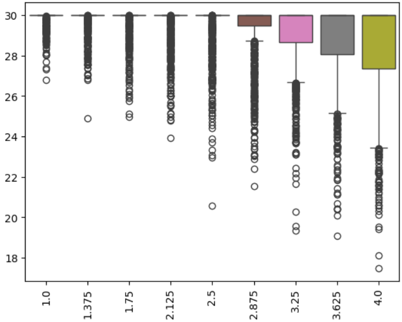


Figure: Représentation par boîte a moustache de l'effet boostrapé de la méthode par probabilité gaussienne pour un score esg de 30 et en fonction du score de controverse (allant de 1 à 4).

Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode d'intervalle de confiance gaussien 1

Mesurer la sensibilité suivante :

$$\frac{\partial SR(\mathbf{x}^\star)}{\partial S_i} < (>) 0?$$

- $\tilde{R} = R - r = (\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n)$
- $\mathbf{S} = (S_1, .., S_n)$ le vecteur contenant le score ESG **sustainalytics** de chaque asset.
- $\tilde{\mathbf{S}} = (\tilde{S}_1, .., \tilde{S}_n)$ où $\tilde{S}_i \sim \mathcal{N}(S_i, SC_i)$ représente la simulation du score ESG de l'asset i
- $\mathbf{S}_{\pm 3\sigma} = (S_{\pm 3\sigma,1}, .., S_{\pm 3\sigma,n})$ où $S_{\pm 3\sigma,i} = S_i \pm 3 * \sqrt{SC_i}$

Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode d'intervalle de confiance gaussien 2

Démarche appliquée : 3 séries de simulations

- Série 1: On fait varier le score ESG d'un asset en prenant $\tilde{S}_i$
- Série 2: On fait varier le score ESG d'un asset en prenant $S_{+3\sigma,i}$
- Série 3: On fait varier le score ESG d'un asset en prenant $S_{-3\sigma,i}$

Prise en compte de l'incertitude et des scores de controverse

Méthode d'intervalle de confiance gaussien 3

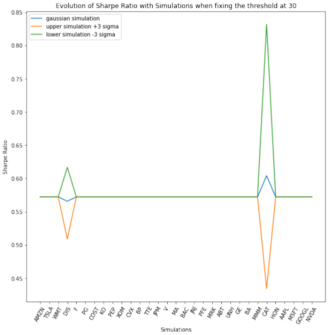


Figure: Résultat de l'étude d'intervalle de confiance gaussien

Conclusion

Les analyses ont démontré que les scores ESG apportent une valeur ajoutée significative en termes de gestion des risques et de durabilité.
Il est également apparu que les contraintes ESG peuvent être intégrées de différentes manières, selon l'aversion au risque de l'investisseur et ses objectifs spécifiques.
En conclusion, notre étude confirme l'importance croissante de l'ESG dans la finance moderne et souligne la nécessité de développer des outils et des modèles plus raffinés pour évaluer l'impact ESG. L'intégration réussie de ces critères nécessite une compréhension approfondie des nuances des scores ESG et une collaboration étroite entre les investisseurs, les analystes et les régulateurs pour améliorer la transparence et la fiabilité des évaluations ESG.