① ETS : Étude de problème multi facteurs

I. Fonction de plusieurs variables

Dans la vie, les fonctions de plusieurs variables sont plus courantes que celle d'une variable.

Exemples :

- la température en fonction de la position sur la carte : $\Theta(\text{lat}, \text{lon})$
- + en fct de l'altitude $\Theta(\text{lat}, \text{lon}, \text{alt})$.
- l'énergie cinétique d'un corps : $E_C = \frac{1}{2} m v^2$
  $E_C = E_C(m, v)$.

Toutes ces ~~exemples~~ de fonction prennent en entrée plusieurs variables et renvoient une valeur réelle. Il se peut aussi qu'elles renvoient plusieurs valeurs. Exemples :

- la vitesse et la direction du vent en fonction d'un position sur terre : $v(\theta, \varphi, z) = \begin{pmatrix} v_\theta \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix}$

va de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Plus généralement, une fonction peut aller de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

Si $p = 1$ on parle de champ scalaire (un scalaire = un nombre réel)

Si $p>1$: on parle de champ vectoriel

~~I.1)~~ ~~2~~ II) Champs scalaires

On s'attache à l'étude des champs scalaires, càd des fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

II 1) Les normes

~~II.1~~ A) La fonction norme euclidienne.

La fonction norme euclidienne est un champ scalaire sur $\mathbb{R}^2$. On la note $\|\cdot\|_2$ et $\forall x \in \mathbb{R}^2$ noté $x=(x_1, x_2)$, on a

$$\|x\|_2 = \|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} .$$

B) La norme 1

si $x \in \mathbb{R}^n$, $x=(x_1, \dots, x_n)$,

$$\|x\|_1 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$n=2 \Rightarrow \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| .$$

c) La norme ∞

$x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

↳ Il y a plusieurs façons de mesurer les distances des $\mathbb{R}^n$! Mais les normes restent équivalentes entre elles, càd que

$$\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_\infty \leq C_3 \|x\|_1 .$$

donc elles se comportent toutes ~~[illegible]~~ de la même manière !

② II.2) les boules dans $\mathbb{R}^n$

Une boule ~~est~~ dans $\mathbb{R}^n$ est définie par
- une norme
- un centre
- un rayon.

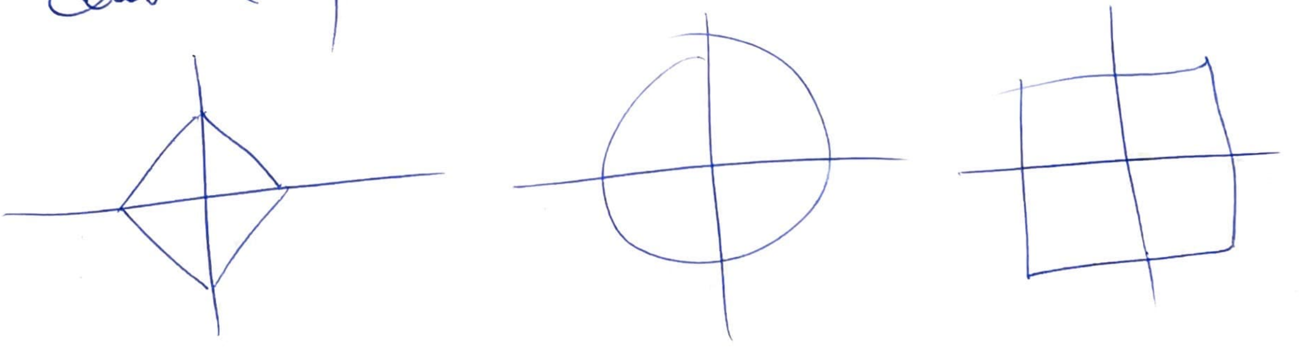
II.2 boules ouvertes: B

$$B_{\|\cdot\|}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$

boules fermées :

$$\overline{B}_{\|\cdot\|}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Exercices (10-15 min)
Dessiner la boule unité $(B(0,1))$ ~~pour~~ dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $1, 2$ et ∞.



Rq : $\forall \|\cdot\|, \ \|x\| = 0 \implies x = 0.$

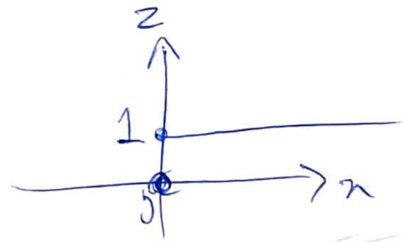
II.3) Limites et continuité

Limites : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\ell \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ tq
$\|x - x_0\| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

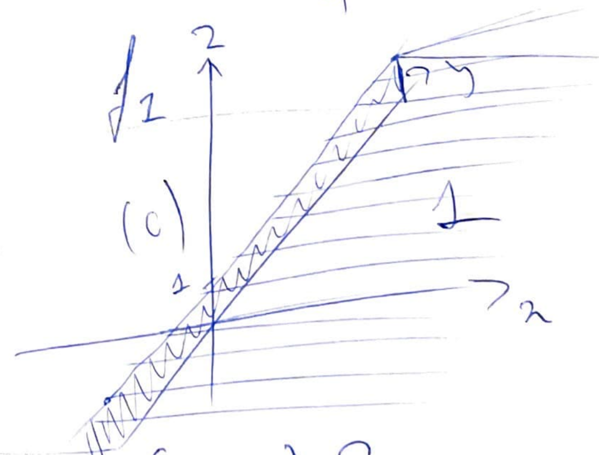
$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$
$\forall x \in B_{\|\cdot\|}(x_0, \eta),$
$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$

Continuité en un point : f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Exercice (45 min) :

1) $f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



a) Dessiner f_1.
b) f_1 est-elle continue en $(0,0)$?
c) Donner l'ensemble des discontinuités de f_1

③ 2) $f_2(x,y) = \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}$

a) Donner l'ensemble de définition de f_2, D_{f_2}

b) On pose $\tilde{f}_2(x,y) = \begin{cases} f_2(x,y) & \text{si } (x,y) \in D_{f_2} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

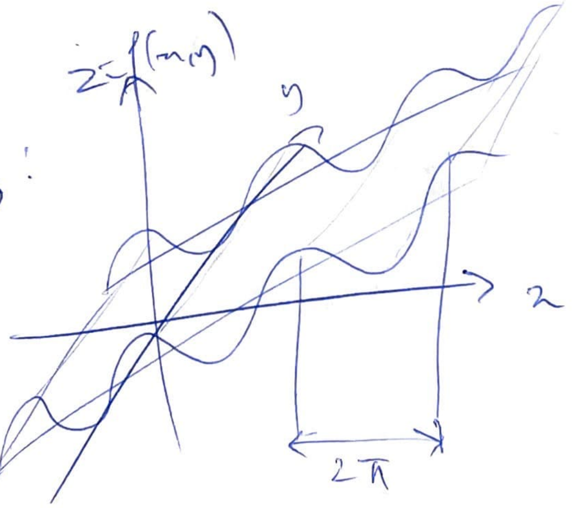
$\tilde{f}_2$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^n$?

Aide : si $z \to 0$, $\sin(z) \to z - \dfrac{z^3}{6}$

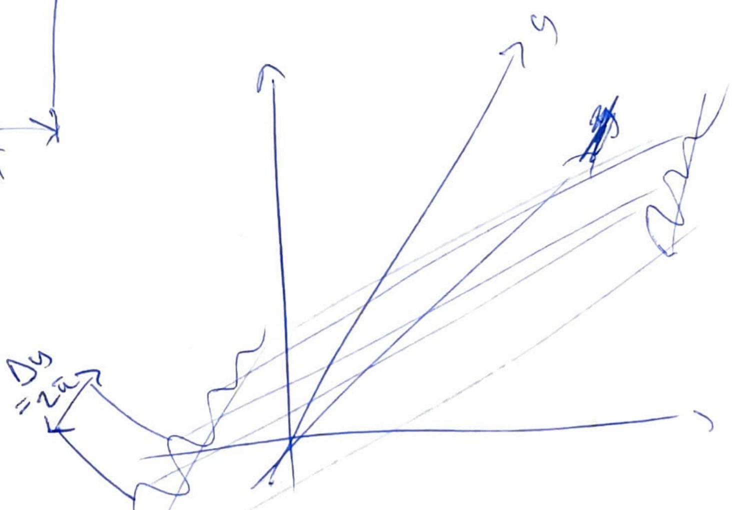
3) a) Représenter $f_3(x,y) = x + \sin x$

b) $f_4(x,y) = x + \sin y$

f_3 :



f_4 :



I.4) Dérivées partielles

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

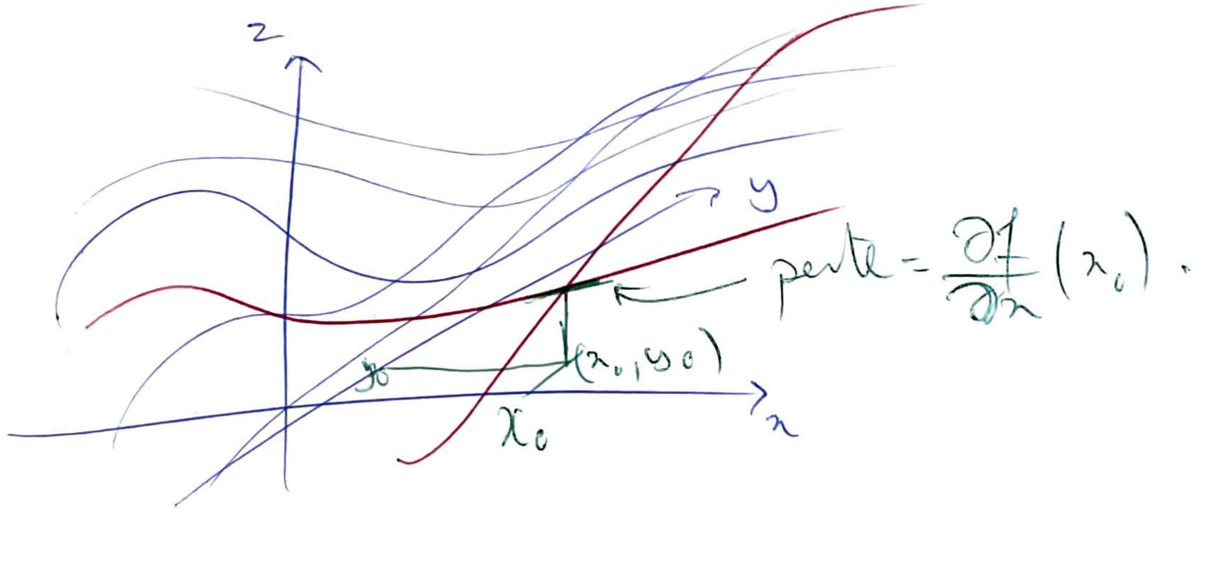
On appelle dérivée partielle de f en x_0 par rapport à la k-ième variable la quantité notée (lorsqu'elle existe)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + t e_k) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R} \, !$$

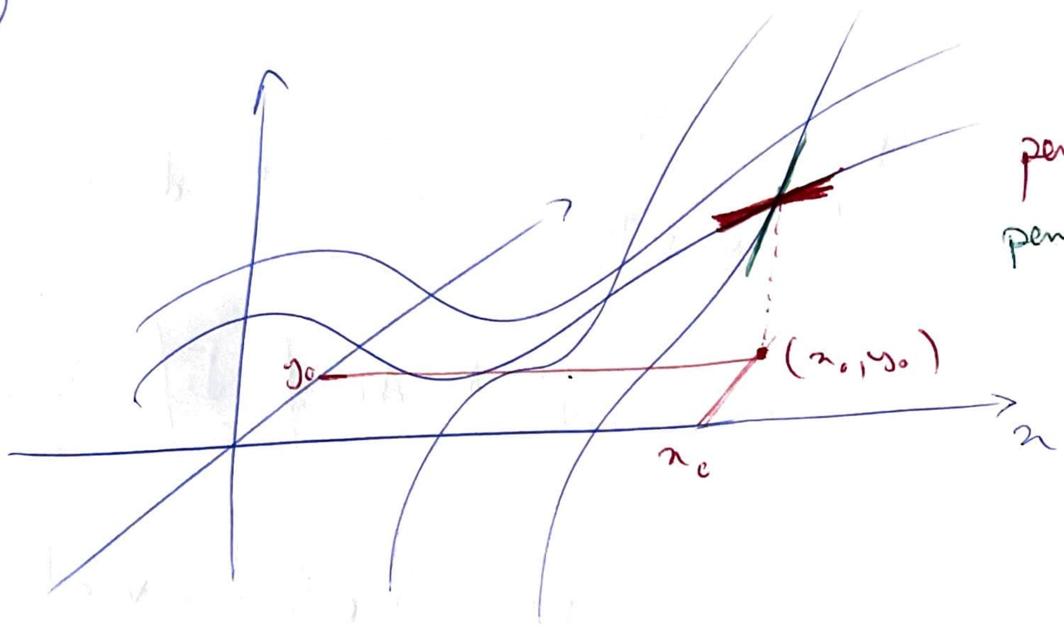
où $e_k = \overbrace{(0, \dots, \underset{k-1}{0}, \underset{k}{1}, \underset{k+1}{0}, \dots, 0)}^{n}$

<u>ex</u> : dans $\mathbb{R}^2$ $x = (x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$



(4)



pente — $= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

pente — $= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

~~II. 8) Gradient~~

~~Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$~~

Exo : (15 min) Calculer les dérivées partielles de

1) $f_1(x, y) = x \sin(y)$

2) $f_2(x, y) = x^2 - 3y$

3) $f_3(x, y, z) = 2x + \frac{1}{2} y - 10 z$.

~~4) $f_4(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$~~

II.5) Gradient.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ (toutes ses dérivées partielles existent et sont définies sur $\mathbb{R}^n$).

On note ∇f le gradient de f défini par

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$\nabla f(x_0)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ indiquant la direction de plus forte pente pour f.

~~Ex.~~

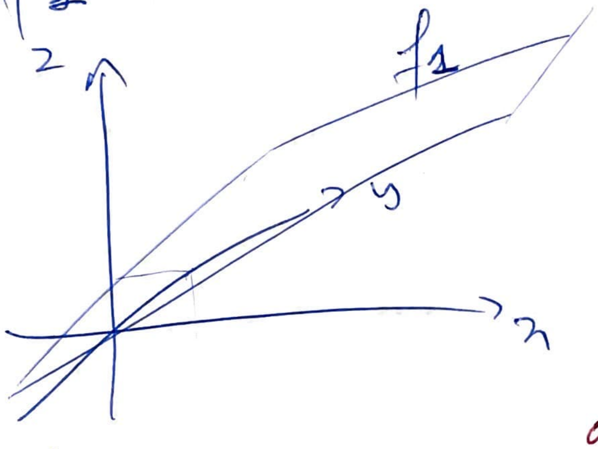
$\cancel{f(x,y) = x}$:

C à d que $\nabla f : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$!

∇f n'est pas un champ scalaire, c'est un champ vectoriel (ou champ de vecteurs).

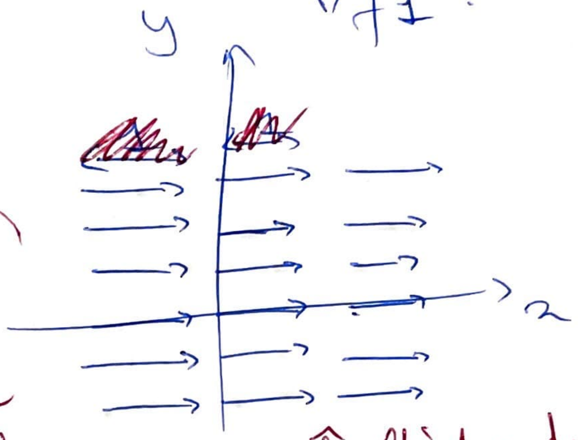
(5) exemples :

$f_1(x,y) = x$



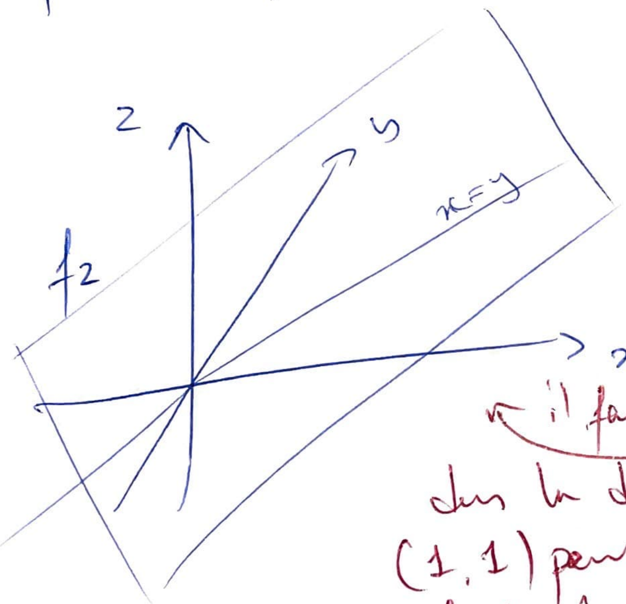
il faut aller dans la direction (1,0) pour augmenter le plus vite possible

∇f_1 :

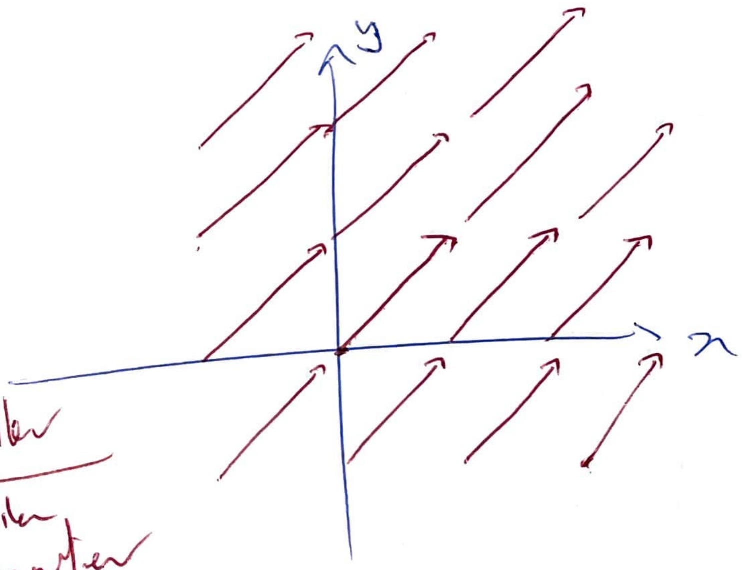


← flèches de longueur 1

$f_2(x,y) = x+y$



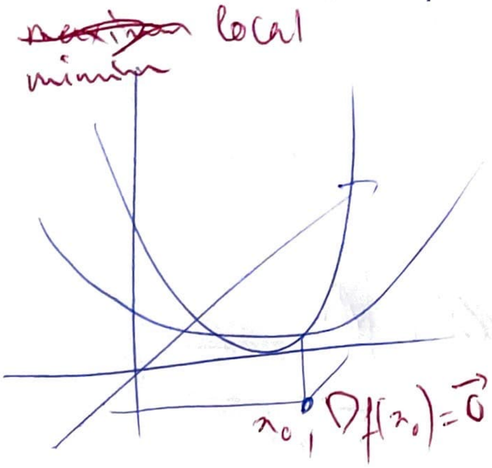
il faut aller dans la direction (1,1) pour augmenter f_2 le plus vite possible.

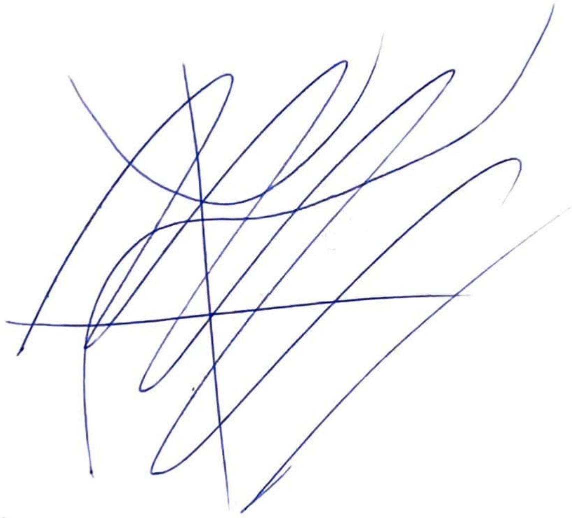


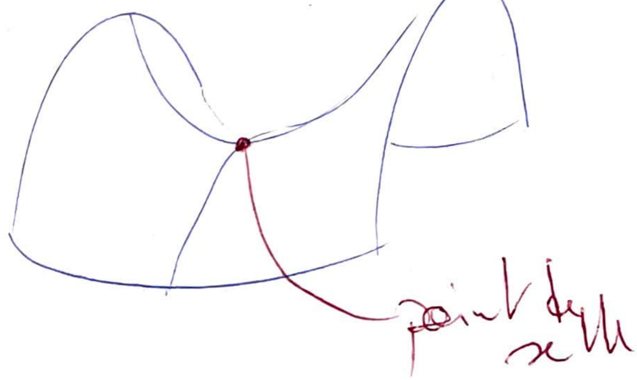
Un gradient qui s'annule en x_0 peut signifier...

→ un extremum local (minimum ou maximum)

→ un point de selle.







II.6) Minimisation de fonction avec l'algorithme de descente de gradient

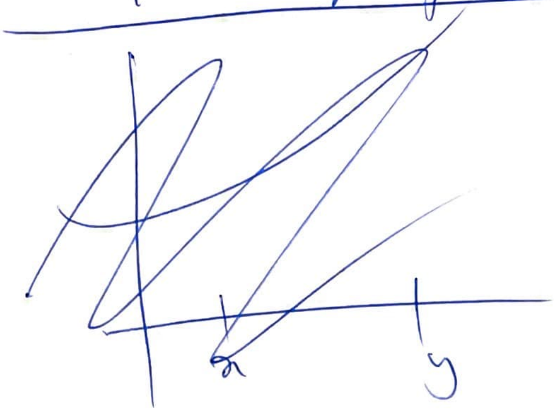
II.6.1) Fonctions convexes

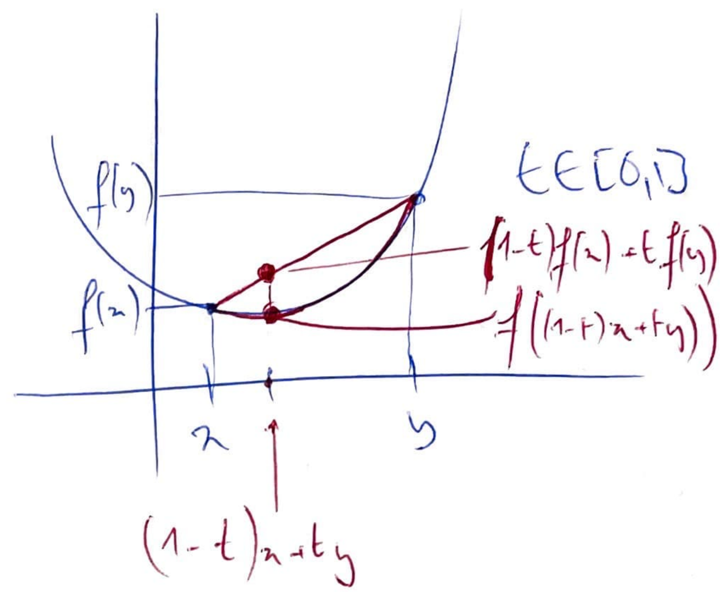
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,1]$,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

⑥ Ce qui signifie visuellement :





Dans $\mathbb{R}^{n+1}$: le graphe de f se situe au dessus de ses plans tangents

$\boxed{\text{Exos jupyter.}}$

II.6.2) Minimum d'une fonction strictement convexe

Soit f convexe sur $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1$.

Si $\nabla f(x_0) = \vec{0}$, alors x_0 est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

II.6.3) Algorithme de descente de gradient

L'algorithme suivant permet de trouver les $x \in \mathbb{R}^n$ pour lequel une fonction f est minimale.

On se donne :

- un point de départ $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- une fonction f strictement convexe et son gradient ∇f
- une tolérance sur la quasi-nullité du gradient η
- une taille de pas α.

$k = 0$

Tant que $\|\nabla f(x_k)\| > \eta$:

$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$
$k = k + 1$

retourner x_k.

Rq : Si $\nabla f(x)$ est la direction de plus forte montée au point x, $-\nabla f(x)$ ——— descente !