⚠ généralement, la multiplication matricielle n'est pas commutative, càd $A \times B \neq B \times A$.

→ calculer $A \times B$ et $B \times A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Résolution de systèmes avec les matrices

2.1 La matrice identité

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\}\, n \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

~~l'équivalent du 1~~

$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad A \times I_n = A$

$\forall B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad I_n \times B = B$

$\forall C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad I_n \times C = C \times I_n = C$.

Rq : Matrices carrées : $\mathbb{R}^{n \times n}$.

2.2 Inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifie $AB = BA = I_n$, alors B est "l'inverse de A", noté $B = A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Toutes les matrices ne sont pas inversibles !

2.3. Résolution de systèmes avec les matrices

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ connues (données d'un problème) et $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ un vecteur d'inconnues vérifiant $AX = B$. Si A est inversible, alors le système admet une solution donnée par $X = A^{-1}B$.

mini-preuve : $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_n X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

exo (3 min) : Soit A vérifiant $A^3+2A^2-3A+I=0$
déterminer, ~~si possible~~, une expression pour l'inverse de A
s'il existe.

$$A^3+2A^2-3A+I=0$$
$$\Leftrightarrow A(A^2+2A-3I)=-I$$
$$\Leftrightarrow A(-A^2-2A+3I)=I$$
$$\Rightarrow \underline{A^{-1}=-A^2-2A+3I}.$$

2.4 Déterminant d'une matrice

2.4.1 ~~Def~~ Le det ~~permet~~ d'une matrice permet de dire si les lignes d'une matrice sont "linéairement indépendantes" càd qu'il n'y a pas d'information redondantes entre elles. Explications : je cherche à retrouver le prix de trois articles que je note x, y, z.

Par exemple, je sais que $x+y+z=14$. Il s'agit d'une première information indiquant que la ~~somme~~ qu'acheter les 3 articles coûte 14€.

Je sais aussi que $x+z=12$. Je peux en déduire que $(x+y+z)+(x+z)=14+12=26$,
$\Leftrightarrow 2x+y+2z=26$
mais je n'ai en aucun cas ~~ajouté de~~ créé une nouvelle information ! ~~Si~~ Le déterminant de la matrice ~~des~~ $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}$ vaudra alors 0, mettant en évidence la redondance d'informat° entre les lignes de la matrices. En revanche, si je remplace la dernière ligne par celle prenant en compte une dernière info $x+y=7$,

alors le det de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$!

J'ai donc maintenant 3 information indépendantes pour un problème à 3 inconnues $\Rightarrow$ ~~je peux résoudre~~.
det $\neq 0 \Rightarrow$ je peux résoudre.

Sinon, 2 info indep, 3 inco $\Rightarrow$ det $= 0$, je ne peux pas résoudre !

moralité $\boxed{\det A \neq 0 \iff A \text{ inversible}}$.

2.4.2 Det 2x2 ~~et~~ et inverse matrice 2x2

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Dire si $A = \begin{pmatrix} 2.5 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.4.3 Det matrice 3x3

Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $\bar{A}_{ij}$ la matrice de taille 2x2 correspondant à A privé de la ligne i et de la colonne j.

~~$\det A = a_{23}\ a_{21}\ a_{31}$~~ On choisit la colonne / ligne que l'on veut, disons la 3ème colonne et on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \det(\bar{A}_{13}) - a_{23} \det(\bar{A}_{23}) + a_{33} \det(\bar{A}_{33})$$

$$= a_{21} \det(\bar{A}_{21}) + a_{22} \det(\bar{A}_{22}) - a_{23} \det(\bar{A}_{23})$$

= -1

= 1

③ exo : (7-8 min) Calculer les det de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -8 & 4 & -6 \end{pmatrix} -2(L_1+L_2) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.4. Déterminant matrice n×n

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et qu'on l'on développe par exemple sur la première ligne, on a

~~det A~~

$$\det A = a_{11} \det(\overline{A_{11}}) - a_{12} \det(\overline{A_{12}}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\overline{A_{1n}})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\overline{A_{1j}}).$$

et $\det(a_{ij}) = a_{ij}$.

↑ un réel

exo : 20 min : proposer une fonction écrite en python ou en pseudo-code calculant le déterminant d'une matrice n×n. Vous disposez d'une fonction

- ~~det~~ réduit (A, i, j) qui renvoie la matrice A privée de la i-ème ligne j-ème colonne.
- taille_matrice_carrée(A) qui renvoie l'entier correspondant à la taille de la matrice carrée A

~~def det(A):~~
~~if ~~format~~ taille_matrice_carree == 1:~~
~~return A[1,1]~~

else

```
def det A:
  taille_A = taille_matrice_carree(A)
  if taille_A == 1:
    return A[1,1]

  else:
    somme = 0
    for k allant de 1 à taille_A:
      somme += (-1)^(1+k) A[1,k] det(réduit(A,1,k))
```

2.5 Inversion d'une matrice par la méthode du Pivot de Gauss.

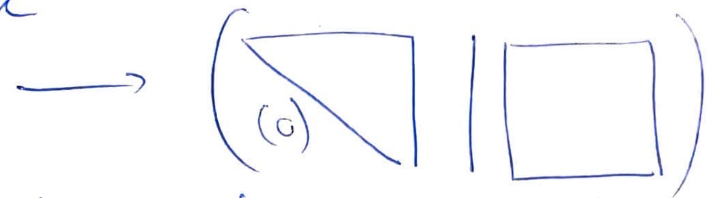
<u>ex</u>: matrice à inverser : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On met dans un même tableau $(P \mid I_3)$

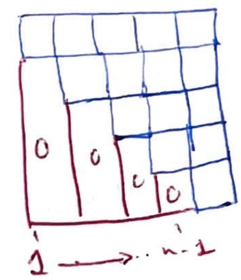
<u>But</u> : En choisissant les bonnes $\in 3\times 6$ combinaisons linéaires sur les lignes du tableau $(P \mid I_3)$, le transformer en $(I_3 \mid P^{-1})$.

④ Algo :

Etape 1) Mettre des zéros dans le triangle inférieur côté gauche

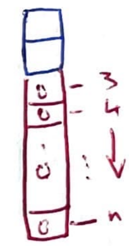


→ En avançant en colonnes depuis la gauche vers la droite

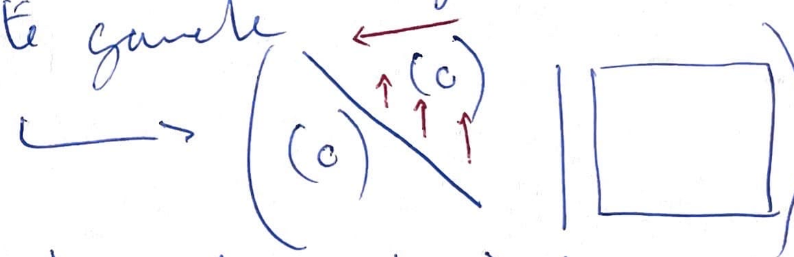


→ Dans chaque colonne, en procédant du haut vers le bas

Colonne 2 :



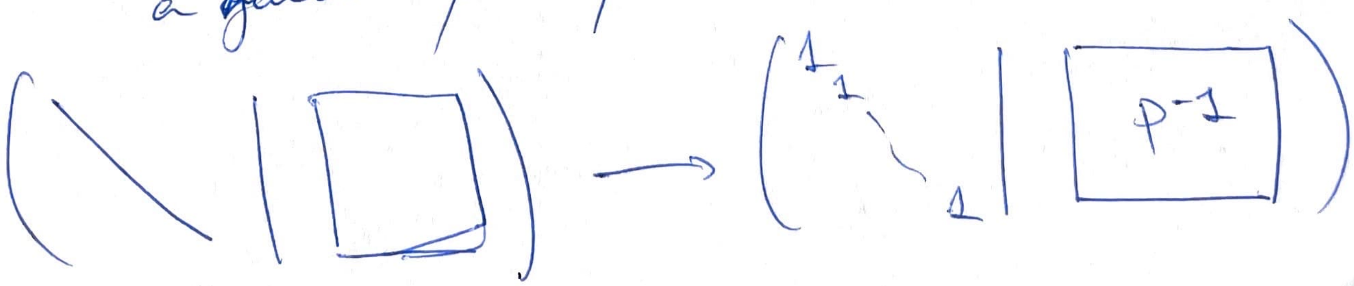
Etape 2) Mettre des zéros dans le triangle supérieur côté gauche



→ En avançant en colonnes depuis la droite vers la gauche

→ En avançant du bas vers le haut dans chaque colonne

Etape 3) Normaliser ~~chaque~~ la matrice diagonale à gauche pour qu'elle devienne identité



(5) **Exemple :**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & \\ 0 & -2 & -2 & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & -2 & -2 & & & 1 \end{array}\right) L_1+L_2 \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) L_3+2L_2 \quad ,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{4} & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) 2L_1+L_3 \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) L_1-4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & & & 2 & 1 & 1/2 \\ & \boxed{1} & & 1 & 1 & \\ & & \boxed{1} & -1 & -1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{P^{-1}}$$

Exos (20 min) : 1) Inverser par la méthode du Pivot de Gauss la matrice

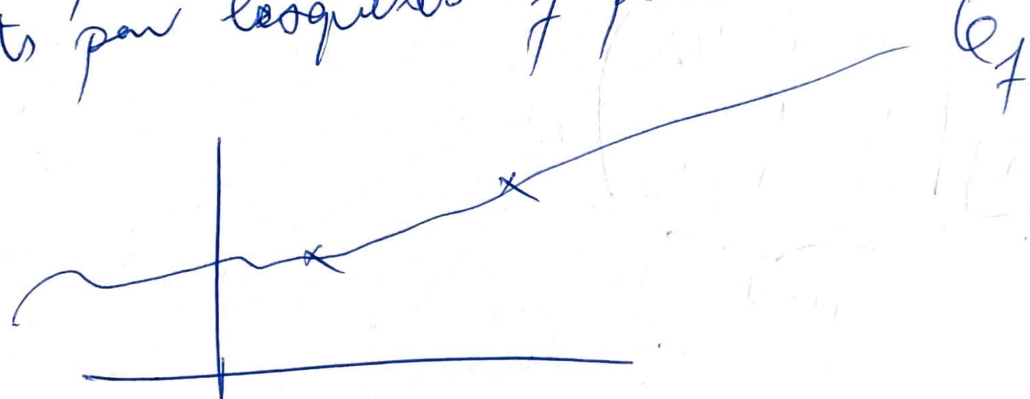
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre $\begin{cases} x - z = 3 \\ 2x - 3z = 2 \\ 4x + 2y + z = -1 \end{cases}$

3) Proposer un algorithme en pseudo-code ou en python ~~implémentant le pivot de Gauss~~ qui calcule l'inverse d'une matrice par la méthode du Pivot de Gauss.

2.6) Exercice : Interpolation d'une fonction

But : on cherche à approximer une fonction f par un polynôme p, en ~~sachant~~ ~~que f passe par~~ connaissant quelques points par lesquels f passe.



Si on a ... 1 point, $p = \text{cste}$
2 —, $p = ax+b$
3 , $p = ax^2+bx+c$ ...

À chaque fois, les inconnues sont les coefficients du polynôme !

(6) On considère qu'on a n points de coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $y_i = f(x_i)$.

et $x_i \neq x_j$ $\forall i,j$.

~~Par~~ Dans le plan $\mathbb{R}^2$, par 1

par deux points distincts passe ... une droite

— 3 ———— un polynôme de degré 2

4 3

n $n-1$.

Ainsi on cherche le polynôme p de deg $n-1$ passant par les points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Questions :

1) Comment s'écrit généralement un polynôme de deg $n-1$? $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

2) Quelles sont les conditions que p doit vérifier ?

3) Traduire ces conditions sur p en condition sur les coefficients $(a_i)_{i=0,\dots,n-1}$

4) Écrire le système matriciel correspondant.

5) Dans ~~Ja~~ un jupyter notebook