① **Discrétisation équation de transport, différences finies.**

Soit $u : [0,1[\times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

et $c : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^+$.

et u vérifie l'équation de transport :

(1) $\partial_t u + c\, \partial_x u = 0$

$\iff \quad \partial_t u(x,t) = -c(x)\, \partial_x u(x,t)$

Si – u représente la concentration d'un polluant,

– $[0,1[$ le domaine dans lequel u évolue (et c)

– c un champ de vitesse (de vent typiquement)

→ Cette équation signifie que le polluant u est transportée par le vent c sur le domaine $[0,1[$.

$\partial_t u$: variation dans le temps de u

$\partial_x u$: ——— dans l'espace de u.

⇒ Simuler cette équation nous permet donc de prédire l'évolution de la concentration du polluant à tout point du domaine et à tout temps.

Comment simuler ce problème numériquement ?

Le domaine spatio-temporel $[0,1[\times \mathbb{R}^+$ contient une infinité de valeurs. Numériquement, cela est impossible à représenter, il faut discrétiser.

Discrétisation

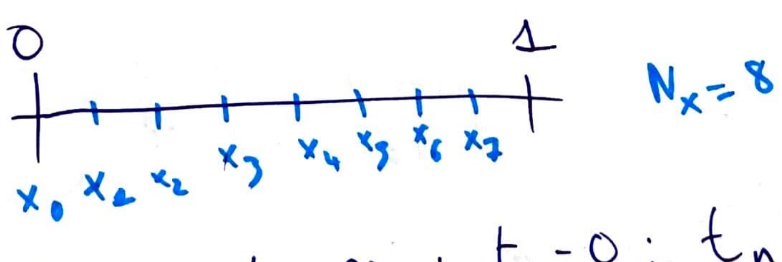
~~spatiale~~ Au lieu ~~d'estimer~~ d'essayer d'estimer u à tout (x,t) de $[0,1[\times \mathbb{R}^+$, on l'estimera seulement sur une grille de points $(x_i, t_n)_{i,n}$

Schéma :

Discrétisation spatiale : on peut choisir par exemple de discrétiser le segment $[0,1[$ en N_x points, les $(x_i)_{i=0,\dots,N_x-1}$ où

$x_0 = 0$

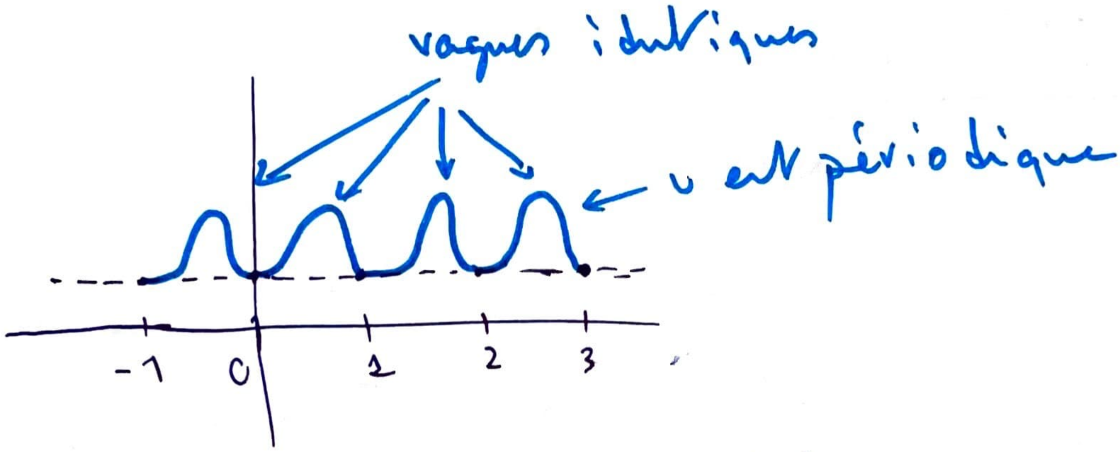
$x_i = x_0 + i\,\Delta x$ avec $\Delta x = \frac{1}{N_x}$, Δx : taille de la maille, résolution spatialle



idem dans le temps : $t_0 = 0$; $t_n = t_0 + n\Delta t$

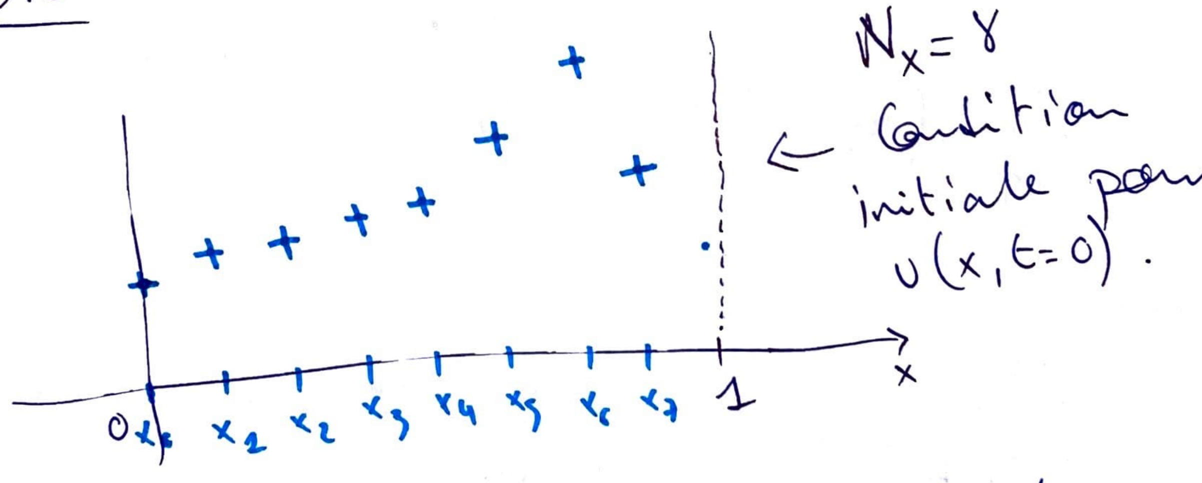
Δt : pas de temps.

② **Note** : On n'inclut pas le point d'abscisse $x=1$ car on va considérer des conditions au bord périodiques, c'est à dire que $x=1$ s'identifiera (ou se superposera) avec $x=0$.



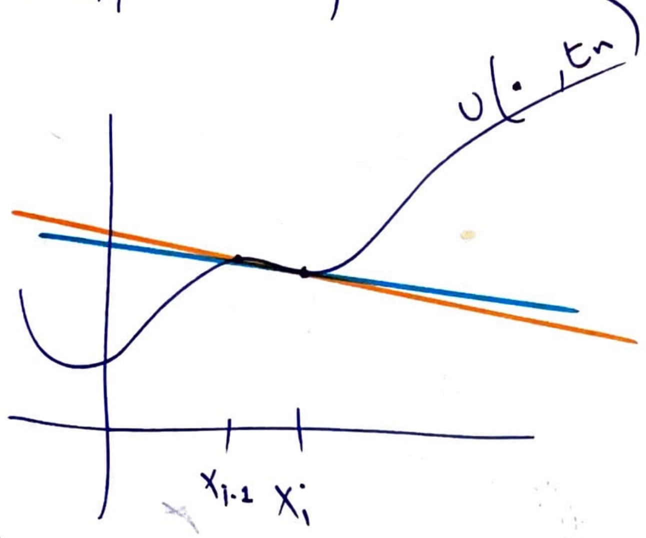
On imposera dans notre problème que $u(0,t)=u(1,t)$, car il faut bien dire ce qu'il se passe si le polluant est transporté hors du domaine $[0,1[$.

Solution : discrétisation spatiale à $t_0=0$:

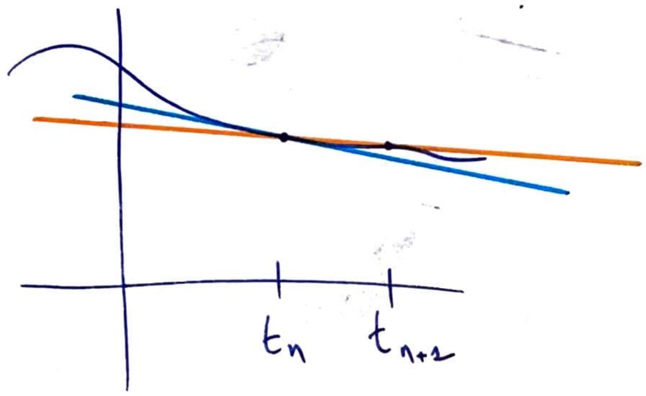


Rq : Il faut préciser une condition initiale pour u à $t=0$, car si on ne sait pas quelle est la concentration du polluant sur le domaine dès le départ, impossible de prédire quoi que ce soit.

__Différences finies__ : On fait les approximations suivantes :



$$\boxed{\partial_x u(x_i)} \approx \boxed{\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x}}$$



$$\boxed{\partial_t u(t_n)} \approx \boxed{\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\Delta t}}$$

On remplace dans l'équation originale

(2) $\partial_t u_i^n + c_i \partial_x u_i^n = 0 \qquad (u_i^n = u(x_i, t_n))$

par nos approximations en différences finies, ce qui donne :

(3) $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c_i \dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \qquad \forall i = 0, \dots, N_x - 1$

$\forall n \geq 0$.

③ Que l'on peut ré-écrire

$$(4) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - c_i \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u_{i+1}^n - u_i^n \right) \quad \forall i = 0, \dots, N_x - 1$$
$$\forall n \geq 0 .$$

Pour que le problème soit bien posé et qu'on puisse faire la simulation, il faut

- donner une condition initiale pour u à $t = 0$, notée $u_0(x)$
  $$u(t=0, x) = u_0(x)$$
- préciser les conditions aux bords du domaine
  → on choisira des conditions périodiques
  $$u(t, x=0) = u(t, x=1).$$
- préciser ce que vaut le champ de vitesses $c(x)$.

<u>Écriture sous forme matricielle:</u>

$$U^n = \underbrace{\left(u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N_x-2}^n, u_{N_x-1}^n \right)^T}_{N_x} \in \mathbb{R}^{N_x \times 1}$$

Alors on a une relation entre U^{n+1} et U^n imposée par l'équa° (4).

Exo : Déterminer la matrice M permettant de passer de U^n à U^{n+1} $\left(U^{n+1} = M U^n\right)$.

Rq : Comme on a choisit des conditions aux bords périodiques, on a que :

$$\partial_x (u_0) \simeq \frac{u_0 - u_{N_x - 1}}{\Delta x}.$$

→ Exos Jupyter.