(1)

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

~~Forme générale~~

Définition : une équation différentielle est une équation où intervient une fonction $y(x)$ de la variable réelle x et une ou plusieurs de ses dérivées y', y'' etc... ainsi qu'éventuellement la variable x elle-même.

Exemples :

- $y' = 2y$
- $yy' + x = 1$
- $(y')^2 + y + x = 0$
- $y'' = y' - xy^2$

Toutes ces équations peuvent s'écrire

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Solution d'une ED :

u est sol^o de $F(x, y, y', \dots) = 0$ ssi

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots) = 0$$

par exemple, $u(x) = x - 1$ est solution de

$y' + y - x = 0$

ED du premier ordre

→ Ce sont les ED ne faisant intervenir que x, y et y'.

ex : $y' = y$, $yy' = 1$, $y' - xy = 0$.

ED du second ordre

idem avec x, y, y' et y''.

ex : $y'' + xy' + y = 0$, $y'' = -xy$.

Situations modélisables par des ED

cas simple : $y' = ay$, a une constante, peut représenter :

- l'évolution d'une population à taux d'accroissement constant
- l'évolution d'un avoir placé à ~~taux~~ taux d'intérêts fixe

etc...

modélisation plus raffinées.

- la modélisation par $\frac{y'}{y} = a$ trouve rapidement ses limites. En pratique, la croissance d'une population est limitée par sa taille (contraintes de ressources). On peut modéliser cette situation en ajoutant un taux de mortalité

$$\frac{y'}{y} = a - by \Leftrightarrow y' = ay - by^2.$$

② Cette équation porte le nom d'équation logistique et est beaucoup utilisée en économie.

ED d'ordre 1

$(1) : y' = f(x, y)$

Une solution de (1) est une fonction dérivable $y = u(x)$ définie sur un intervalle I, tq $\forall x \in I$:

$u'(x) = f(x, u(x))$.

exercice : 1) Vérifier que $u(x) = x - 1$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = x + y$.

2) Vérifier que $v(x) = Ce^{x} + x - 1$ est aussi solution

Rq : Il y a une infinité de solution.
C'est un phénomène général pour une ED.
En revanche, dès que l'on ajoute une condition en un point donné, ex : $u(1) = 0$, la solution devient unique (on détermine la valeur de C).

Domaine de définition des solutions

Soit (1) $y' = f(x,y)$ une ED, f définie sur un certain domaine de $\mathbb{R}^2$.

Une solution $u(x)$ de 1 est toujours définie sur un sous-intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ càd : - $\mathbb{R}$

- $]-\infty, a[$ ou $]a, \infty[$
- ou $]a, b[$.

Cela dépend de la situation

ex1 $f(x,y) = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = y/x$

n'est pas définie pour $x=0$, ainsi les solutions non plus ne peuvent pas être définies en $x = 0$.

il y aura une solution sur $]-\infty, 0[$ et une autre sur $]0, +\infty[$

ex2 : la solution tend vers $\pm\infty$ en un point.

$y' = -y^2$. Ici $f(x,y) = y^2$ est bien défini sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, mais la solution, de la forme $u(x) = \dfrac{1}{x-c}$ n'est pas définie en $x = c$.

(3) ED linéaires d'ordre 1 :

elles sont de la forme :

(E) $y' + a(x)y = b(x)$.

Méthode de résolution : 1) Trouver les solutions de l'équation homogène

(EH) : $y' + a(x)y = 0$.

que l'on appelle $y_h(x)$.

2) Deux alternatives :

- ~~soit on trouve une solution particulière à (E) → on cherche y~~

- si a est une constante, on cherche y_p sous la même forme que $b(x)$ (polynôme, cosinus, sinus etc). C'est la solution particulière y_p, puis, $y = y_h + y_p$

- ou alors : appliquer la méthode de la variation de la constante.

Cela consiste à chercher $y(x)$ sous la forme $y(x) = \lambda(x) y_h(x)$, l'insérer dans (E) et déterminer $\lambda(x)$.

Exercice : Trouver les solutions homogènes des ED suivantes :

a → $y' + 2y = 1$ (E_a)

b → $10y' - y = x^2$ (E_b)

c → $2y' - 3y = \cos(x)$ (E_c)

d → $y' + y = e^{-x}$. (E_d)

Exercice 3 Trouver des solutions particulières à $(E_a), \dots (E_d)$

Ex 2 : ~~Montrer~~ **Énoncé :** Une équation linéaire d'ordre 1 s'écrit

$$y' + a y = b.$$

- Mq si u_1 et u_2 sont deux solutions homogènes, alors $u_1 + u_2$ est aussi solution homogène
- Mq si u est s.h, alors $\lambda \times u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est s.h.

(4) Résolution d'ED d'ordre 1

ED 1 à coefficients constants

de la forme :
$$ay' + by = c \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $y' + a(x)\, y = 0$.

$\boxed{\text{Rq}}$ $y \equiv 0$ est solution

$\Rightarrow$ toutes les autres solutions ne s'annulent jamais

$\Rightarrow$ elles sont soit strictement > 0, soit < 0.

$\boxed{> 0 :}$ $y(x) = e^{g(x)}$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\Rightarrow g'(x)\, e^{g(x)} + a(x)\, e^{g(x)} = 0$

$\Rightarrow g'(x) = -a(x)$

$\Rightarrow g(x) = -A(x) + C$ où $A' = a$

$\Rightarrow y(x) = K e^{-A(x)}$, $K > 0$, $A' = a$

Cas $\boxed{y<0}$: $y(x) = -e^{g(x)}$

$\Rightarrow -g'(x)e^{g(x)} - a(x)e^{g(x)} = 0$

$\Rightarrow g'(x) = -a(x)$

$\Rightarrow g(x) = -A(x) + C$

$\Rightarrow y(x) = Ke^{-A(x)}$ où $K \cancel{>0} <0$, $A' = a$.

En résumé, les solutions de $y' + a(x)y = 0$ s'écrivent $y(x) = Ke^{-A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$, $A' = a$

5

~~Résolution~~ Exercices :

résoudre

(E1) $y' - xy = 0$ sur $\mathbb{R}$

(E2) $y' + \cos(2x)\, y = 0$ sur $\mathbb{R}$

(E3) $\begin{cases} y' + x^2 y = 0 & \text{sur } \mathbb{R}. \\ \text{avec } y(0) = 1. \end{cases}$

(E4) : $xy' + y = 0$

distinguer <0, >0.

TODO : continuer avec la méthode de variation de la constante.