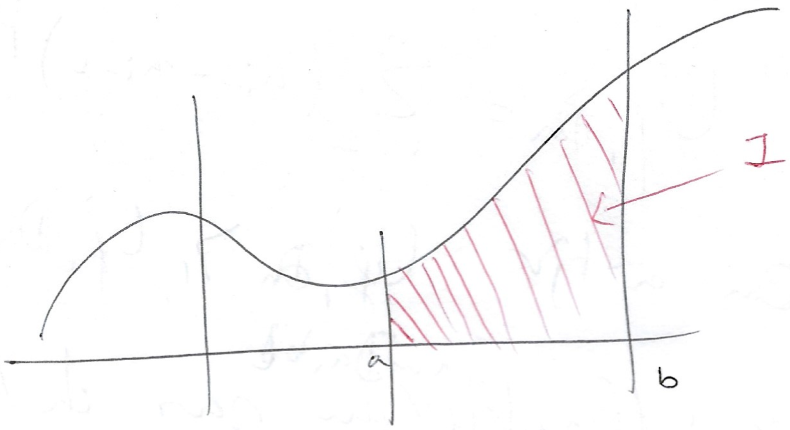
Intégration numérique

But : approcher numériquement la valeur de

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



Rappel : Intégrale de Riemann (celle vue en terminale)

Définition de l'intégrabilité de Riemann.

~~f est intégrable au sens de Riemann si~~

Soient ~~(x_n)~~

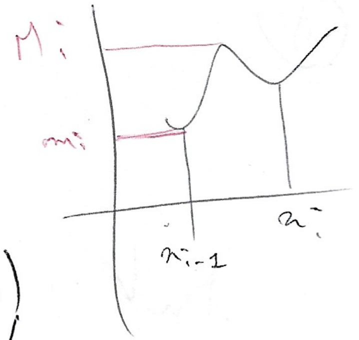
$D_n = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

une subdivision / discrétisation de $[a,b]$.

On note $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

(inférieurs et supérieurs)



les sommes de Darboux associées à la subdivision D_n sont

$$L_{f,D_n} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

$$U_{f,D_n} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i$$

Rq : On a tjr $U_{f,D_n} \geq L_{f,D_n}$.

Déf : f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Riemann si $\lim_{n\to\infty} L_{f,D_n} = \lim_{n\to\infty} U_{f,D_n}$.

Dans ce cas, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L_{f,D_n} = \lim_{n\to\infty} U_{f,D_n}$

détermine la valeur de l'intégrale.

ex : $x \longrightarrow \mathbb{1}_{x\in\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann mais au sens de Lebesgue seulement.

② Les méthodes d'intégration numérique

Rq : Si l'on sait approcher une intégrale sur $[0,1]$, on sait approcher ~~sur~~ $\forall [a,b]$.

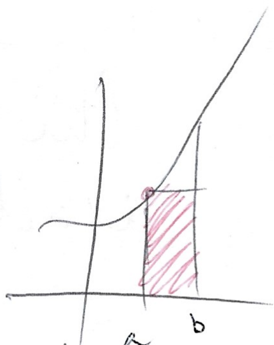
En effet : $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_{y=0}^{1} f(a+y(b-a))\,dy$.

→ on travaillera donc sur $[0,1]$.

Comment approcher $I=\int_a^b f(x)\,dx$?

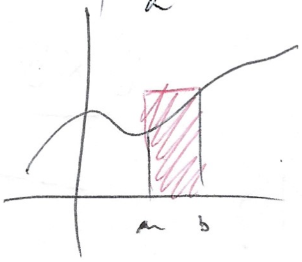
→ Rectangle à gauche : $I \approx f(a)\times(b-a)$

Ordre 1



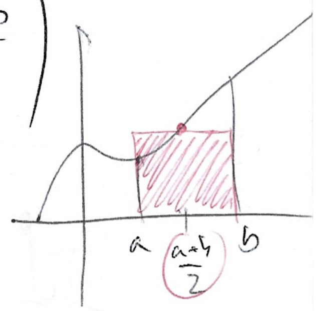
→ à droite $I \approx f(b)\times(b-a)$

Ordre 1



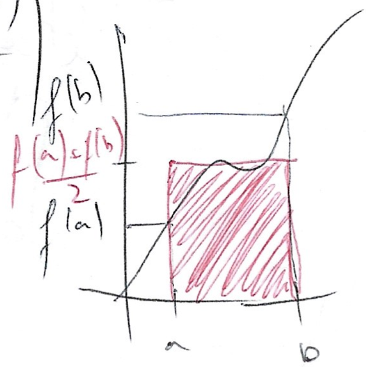
→ Méthode du point milieu : $I \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Ordre 2



Ordre 2

→ Méthode du trapèze : $I \approx (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$



Dire selon vous, quelle méthode est la meilleure entre trapèze et point milieu ?

→ Méthode de Simpson $I \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

Ordre 4

Idée : Approcher f par un polynôme de second degré passant par $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ et $(b, f(b))$, puis intégrer ensuite ce polynôme sur $[a,b]$.

Une méthode est d'ordre $p+1$ si elle est exacte pour les polynômes de deg $\leq p$.

Exo : Il faut vérifier avec les monômes.

15 min

— vérifier que rectangle est d'ordre 1

— simpson est d'ordre 4.

Déf : Une formule de quadrature à s étages est donnée par

$$\int_e f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i), \quad b_i : \text{poids}, \quad c_i : \text{noeuds}$$

~~Exo~~

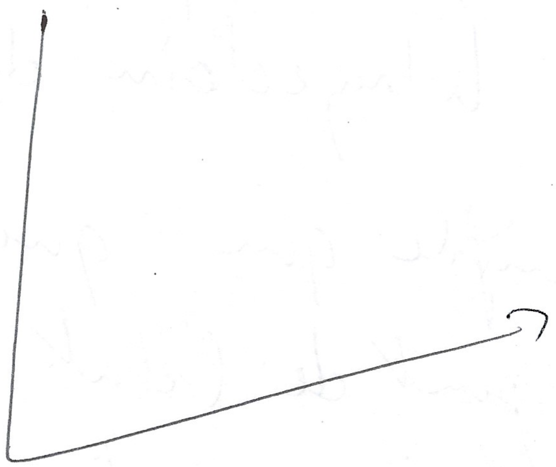
③ Ainsi, une formule de quadrature à s étages est d'ordre ~~p~~ au moins $s+1$ ssi

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \quad \forall q \in \{1, \dots, s\}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1^{s-1} & \cdots & \cdots & c_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/s \end{pmatrix}.$$

Exo : Déterminer une formule de quadrature aux nœuds $c_1 = 1/3$, $c_2 = 2/3$ d'ordre au moins 2. La formule est-elle d'ordre 3 ? (Non) !

$(b_1 = 1/2,\ b_2 = 1/2)$.



Systèmes dynamiques

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Où : $x \in \mathbb{R}^n$ représente le système étudié

$x_0 = x(t_0)$ l'état initial du système à l'instant initial t_0.

$f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur qui dicte l'évolution/la trajectoire de x.

(S) signifie que que le système x part de l'état x_0 et est guidé par f dans sa trajectoire.

④ Exemples d'application :

~~météorolo~~

Prévisions météorologiques :

- x est un vecteur contenant les différentes variables météo (carte de pression, des vents, humidité, couverture nuageuse etc)

- f : un modèle de prévision.

Chimie

- x : concentraᵒ des différentes espèces à l'étude

- f : modèle chimique (réaction entre les espèces)

Modèle de croissance exponentielle

- x : une population d'une certaine espèce ~~que~~ dont rien empêche la prolifération

- $f(t,x) = r > 0$ ~~se~~ ~~sont~~ taux de reproduction.

modèle $x'(t) = r\,x(t)$.
$x(t_0) = x_0$.

Solution analytique $x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$

En général, on ne dispose pas de solution analytique nous permettant de prévoir l'évolution ~~de~~ du système étudié. On ~~fait~~ ~~donc~~ utilise alors des méthodes de résolution numérique. En effet :

Si $x'(t) = f(x(t), t)$
$x(t_0) = x_0$

et sachant que
$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)\, d\tau .$$

On a vu précédemment des méthodes pour approcher ~~le calcul~~ la valeur des intégrales.

~~Po~~ Pour cela, on introduit une discrétisation temporelle : $t_n = t_0 + n\Delta t$

où Δt est le pas de temps

On note l'approximation de x au temps t_n par $x_n \approx x(t_n)$.

⑤ À présent, nous allons voir différents schémas temporels permettant d'approximer

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,x(t))\,dt .$$

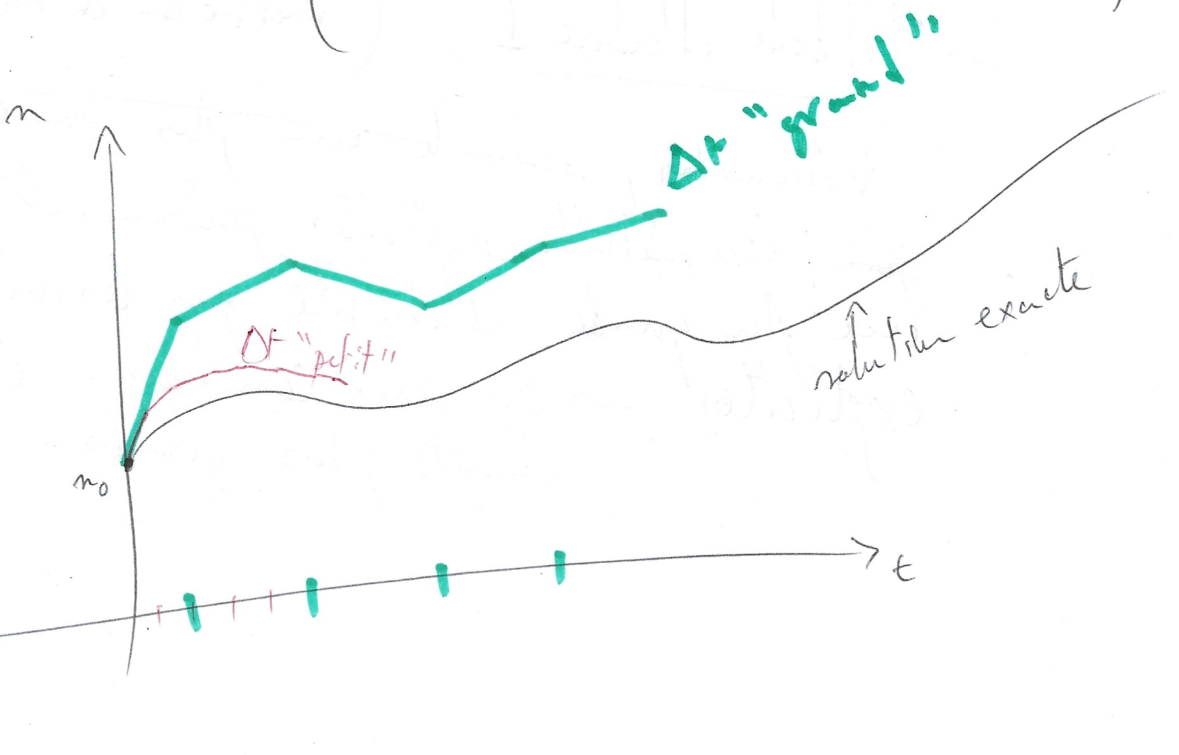
1. Méthode Euler explicite

→ adaptation des rectangles à gauche,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,x(t))\,dt \approx (t_{n+1}-t_n)\, f(t_n, x(t_n))$$
$$= \Delta t\, f(t_n, x_n) .$$

schéma complet : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t\, f(t_n, x_n) \\ x_0 = x(0) \end{cases}$

Méthode d'ordre 1 : l'erreur commise sur un pas de temps de longueur Δt est proportionnelle à Δt^2. $\left(\| x(t_{n+1}) - x_{n+1} \| \leqslant C \cdot \Delta t^2 \right)$.



→ Méthode très facile à mettre en œuvre.

Méthode d'Euler implicite

→ adaptation des rectangles à droite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))\,dt \approx (t_{n+1} - t_n)\, f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))$$

$$= \Delta t \cdot f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

⚠ problème : on ne connaît pas x_{n+1} à ce stade.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t\, f(t_{n+1}, x_{n+1}) \\ x_0 = g^x(0) \end{cases}$$

Dans certains cas, x_{n+1} peut...

→ être calculé par résolution de système (si f est linéaire)

→ être approché par méthode itérative (itération de point fixe).

→ Méthode d'ordre 1 (méthode de rectangle)

Néanmoins, ~~présente une plus grande stabilité~~ les méthodes implicites présentent en général une plus grande stabilité que les méthodes explicites → on peut considérer des pas de temps plus grands.

(6)

→ les méthodes explicites sont plus simples à mettre en œuvre en cela que la construction des points futurs repose uniquement sur les points déjà connus.

→ les méthodes implicites, au prix d'une complexité plus grande, permettent une bien meilleure stabilité (possibilité de considérer des pas de temps plus longs) que les méthodes explicites. Elles sont préférées pour les problèmes dits "raides"

<u>Ex</u> : À MF, le transport de certaines quantités par le vent est résolu en utilisant des méthodes implicites ($\Delta t \simeq 15$ min) là où des méthodes explicites ne sont pas envisageables ($\Delta t \simeq$ seconde) → coût opérationnel
→ ~~[illegible]~~ fournir les prévisions en des temps raisonnables

On continue sur les méthodes explicites

~~[illegible]~~ Approximer à la main $x(0.4)$ et $\Delta t = 0.1$.

avec $\begin{cases} f(t,x) = 1 - x \\ x_0 = 1/2 \end{cases}$

$x_1 = x_0 + \Delta t\, f(x_0) = 1/2 + 0.1 \cdot 1/2 = 0.55$ ...

Runge-Kutta 2

$\int \rightarrow$ adaptation de la méthode des trapèzes

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))\,dt \approx \frac{(t_{n+1}-t_n)}{2}\Big(f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))\Big)$$

$$= \Delta t \;\frac{f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))}{2}$$

$\rightarrow$ ~~l'intégrale~~ l'approximation de l'intégrale dépend de x_n et $x(t_{n+1})$, que l'on ne connait pas, mais que l'on va approcher par la méthode d'Euler explicite : $x(t_{n+1}) \approx x_n + \Delta t\, f(t_n, x_n)$

le schéma itératif s'écrit alors :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

avec
$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + \Delta t,\ x_n + \Delta t\, k_1) \\ x_0 = x(0) \end{cases}$$

⑦ <u>méthode d'ordre 2</u> : l'erreur commise en un pas de temps de longueur Δt est proportionnelle à Δt^3

<u>Runge-Kutta 4 (RK4)</u>

→ ~~adaptation~~ application de la formule de Simpson

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,x(t))\,dt \approx \frac{\Delta t}{6}\left[f(t_n,x_n) + 4f(t_{n+1/2},x(t_{n+1/2})) + f(t_{n+1},x(t_{n+1}))\right]$$

→ on ne connaît pas $x(t_{n+1/2})$, ni $x(t_{n+1})$

<u>Étapes</u> :

1). On décompose $4f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2})$ en $2f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2}) + 2f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2})$

2) Dans le premier terme, on remplace $x_{n+1/2}$ par x_n approximé par EE ~~...~~ $x^a_{n+1/2}$

$$x^a_{n+1/2} = x_n + \Delta t/2\, f(t_n, x_n)$$

3) Dans le second, on remplace $x_{n+1/2}$ par son appr. par EI

$$x^b_{n+1/2} = x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n+1/2}, x^a_{n+1/2})$$

EI et EE ayant des erreurs quasi-opposées, on espère minimiser l'erreur totale en procédant ainsi.

4/ ~~Ensuite~~ on approche $\cancel{x_{n+1}}$ x_{n+1} par la méthode du point milieu $\cancel{x_{n+1}} \simeq \cancel{x_n} + h\, f(t_{n+1/2}, \cancel{x_{n+1/2}})$

$$\simeq \cancel{x_n} + \Delta t\, f(t_{n+1/2}, x^b_{n+1/2})$$

Finalement, on obtient le schéma RK4 :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

avec
$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + \Delta t/2,\ x_n + \Delta t\, k_1) \\ k_3 = f(t_n + \Delta t/2,\ x_n + \Delta t\, k_2) \\ k_4 = f(t_n + \Delta t,\ x_n + \Delta t\, k_3) \end{cases}$$

Méthode d'ordre 4.