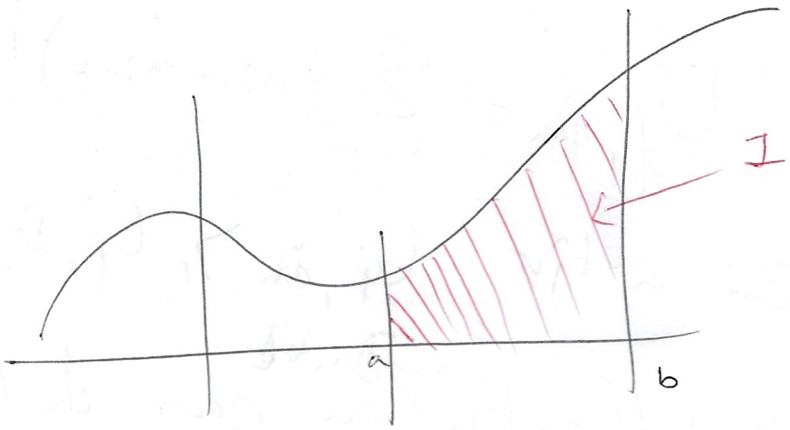
(1)

Intégration numérique

But : approcher numériquement la valeur de

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



Rappel : Intégrale de Riemann (celle vue en terminale)

Définition de l'intégrabilité de Riemann.

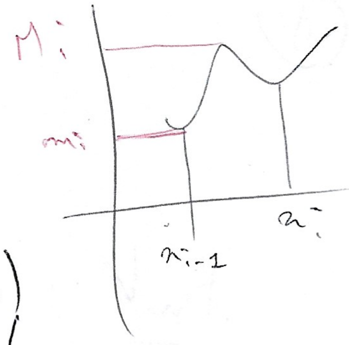
~~f est intégrable au sens de Riemann si~~

Soient ~~Δ_n~~

$\mathcal{D}_n = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

une subdivision / discrétisation de $[a, b]$.

~~Et~~ On note $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$



$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

(inférieures et supérieures)

les sommes de Darboux associées à la subdivision D_n sont

$$L_{f,D_n} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$

$$U_{f,D_n} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i$$

Rq : On a tjr $U_{f,D_n} \geq L_{f,D_n}$.

Déf : f est intégrable sur $[a,b]$ au sens de Riemann si $\lim_{n \to \infty} L_{f,D_n} = \lim_{n \to \infty} U_{f,D_n}$.

Dans ce cas, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} L_{f,D_n} = \lim_{n\to\infty} U_{f,D_n}$.

détermine la valeur de l'intégrale.

ex : $x \longrightarrow \mathbb{1}_{x \in \mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann mais au sens de Lebesgue seulement.

② Les méthodes d'intégration numérique

Rq : Si l'on sait approcher une intégrale sur $[0,1]$, on sait approcher ~~entre~~ $\forall [a,b]$.

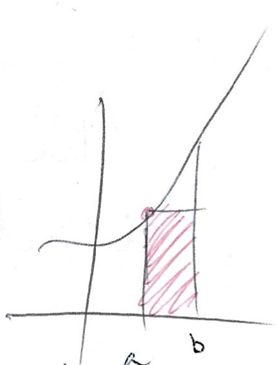
En effet : $$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_{y=0}^{1} f(a+y(b-a))\,dy.$$

→ on travaillera donc sur $[0,1]$.

Comment approcher $I = \int_a^b f(x)\,dx$?

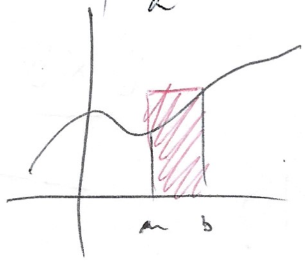
→ Rectangle à gauche : $I \simeq f(a)\times(b-a)$

Ordre 1



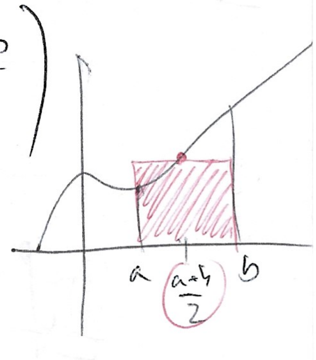
→ à droite $I \simeq f(b)\times(b-a)$

Ordre 1



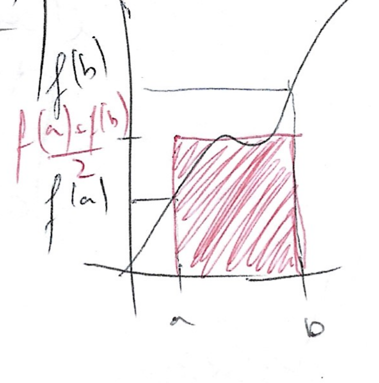
→ Méthode du point milieu : $I \simeq (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Ordre 2



Ordre 2

→ Méthode du trapèze : $I \simeq (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$



Dire selon vous, quelle méthode est la meilleure entre trapèze et point milieu ?

→ Méthode de Simpson $I \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

Ordre 4

<u>Idée</u> : Approcher f par un polynôme de second degré passant par $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ et $(b, f(b))$, puis intégrer ensuite ce polynôme sur $[a,b]$.

Une méthode est d'ordre $p+1$ si elle est exacte pour les polynômes de deg $\leq p$.

<u>Exo</u> : Il faut vérifier avec les monômes.

15 min

— vérifier que rectangle est d'ordre 1

— simpson est d'ordre 4.

<u>Déf</u> : Une formule de quadrature à s étages est donnée par

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i), \quad \begin{array}{l} b_i : \text{poids} \\ c_i : \text{noeuds} \end{array}$$

Exo

③ Ainsi, une formule de quadrature à s étages est d'ordre $\geq$ au moins $s+1$ ssi

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \quad \forall q \in \{1, \dots, s\}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1^{s-1} & \cdots & \cdots & c_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \\ 1/s \end{pmatrix}.$$

Exo : Déterminer une formule de quadrature aux nœuds $c_1 = 1/3$, $c_2 = 2/3$ d'ordre au moins 2. La formule est-elle d'ordre 3 ? (Non) !
$(b_1 = 1/2, b_2 = 1/2)$.