1. Les matrices

Une matrice est un "tableau" de nombres qui peuvent être entiers, réels, complexes.

Une matrice a également un format.

ex: $A = \begin{pmatrix} 22/7 & 10 \\ 0 & -1.5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

→ matrice carrée de taille 2, de nombres réels

Plus généralement, on note $\mathbb{R}^{n\times m}$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de format $n \times m$ (n lignes, m colonnes).

ex: $B = \begin{pmatrix} 12 & -3.7 & 0.1 \\ 2 & 6.1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Opération sur les matrices

Multiplication par un scalaire (un nombre réel)

On peut multiplier une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

ex: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0.3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$

$\lambda \times A = \begin{pmatrix} -4 & 0.6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Additions de matrices

On ne peut additionner que des matrices de même format :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

L'addition est commutative.

Multiplication de matrices

La multiplication $A \times B$ n'est autorisée que si

~~si~~ ~~$A(m, n) \times B(n, p) \longrightarrow (m, p)$~~ ~~format~~

$$A(m, n) \times B(n, p) \longrightarrow (A \times B)(m, p)$$

nb col A = nb ligne B

On observe que si $p \neq m$, $B \times A$ n'existe pas. L'opération de multiplication n'est pas commutative pour les matrices.

$$(A \times B)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, p$$

② ~~Ainsi~~ Si A et $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (matrices carrées de taille n) $A\times B$ et $B\times A$ est toujours possible. En revanche, on a généralement pas $A\times B = B\times A$.

<u>ex</u> : calculer $A\times B$ et $B\times A$

pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

~~Inverse d'une matrice.~~

~~Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est telle~~

<u>La matrice identité</u>.

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n .$$

$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A\times I = A$

$\forall B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B\times I = B$.

$\forall C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $IC = CI = C$.

Inverse d'une matrice.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifie

$A \times B = B \times A = I_n$, alors B est

"l'inverse de A", notée $B = A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

⚠ Toutes les matrices ne sont pas inversibles !

exemple d'application : Résolution d'un système

$$\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{A}\ \underset{\mathbb{R}^{n\times 1}}{X} = \underset{\mathbb{R}^{n\times 1}}{B}$$

A, B : données du pb.

X : vecteur d'inconnues.

La solu° est donnée par $X = A^{-1}B$

puisque

$$A X = B$$

$$\Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B$$

$$\Rightarrow I_n X = A^{-1} B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} B.$$

③ Inverse d'une matrice 2x2 :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, Si $\det A = ad - bc \neq 0$,

alors A est inversible ~~et~~ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

<u>exo</u> : résoudre à l'aide des matrices le système

$$\begin{cases} \frac{15}{2}x - 3y = 2 \\ x + \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$$

<u>À voir</u> : faire exo 1 - PARTIE A
15/20 min.

2) Vérifier que $A^3 = 6A^2 - 11A + 6I$.

~~[illegible] gauss.~~ ~~Pivot de gauss.~~

— Puissance d'une matrice diagonale

$D = (d_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ avec $d_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

$D = \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}}_{n}$

↳ $D^n = (d_{ij}^n)_{ij}$.

Calcul de l'inverse d'une matrice avec la méthode du pivot de Gauss

matrice à inverser $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On met dans un même tableau

$$\left(\begin{array}{c|c} P & I_3 \end{array}\right)$$

~~On peut ut~~ ~~Can~~

But : À gauche : transformer P en I_3 en utilisant des CL

1) D'abord par $\begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

2) Enfin par $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & \\ 0 & -2 & -2 & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

1) Dans le triangle inférieur

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & -2 & -2 & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

Pour mettre à zéros les colonnes en allant de la gauche vers la droite

④

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3+2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2L_1+L_3 \\ \\ L_3/-2 \end{array}$$

Dans le triangle supérieur : mettre les colonnes à zéro de la droite vers la gauche.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ & 1 & & 1 & 1 & \\ & & 1 & -1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1-4L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & -1 & 1/2 \\ & 1 & & 1 & 1 & \\ & & 1 & -1 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/2 \\ \\ \\ \end{array}$$

P^{-1}

Binôme de Newton

et $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

$$P_n : \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k}, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si A, B des matrices carrées telles que $AB = BA$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} \qquad C_n^k = C_n^{n-k}$$

Triangle de Pascal

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1

$k \longrightarrow$

$C_n^k = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}$: combinaison de k objets parmi n

Parler de A_n^k

Preuve : Par récurrence :

Initialisation : Pour $n=1$, $(a+b)^1 = a+b$

$$= C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1.$$

$$= \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k.$$

La prop est vraie au rg 1.

Hérédité : On suppose (P_n) vraie à n fixé.

Montrons P_{n+1} est vraie.

5) $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$

$\overset{HR}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$

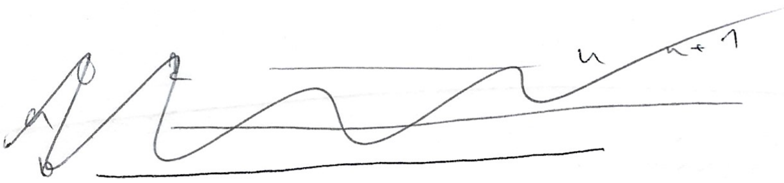
$k' = k+1$

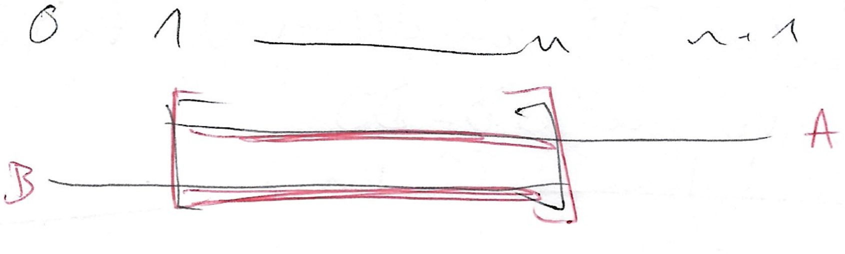
k	0	1		n
$n-k:$	$n,$	$n-1,$	$\dots,$	0
d' :	1			$n+1$

$:(n+1)-1$
$= n$

$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{(n+1)-k}}_{A}$

$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{(n+1)-k}}_{B}$

1) 



$= \left[\sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) a^k b^{(n+1)-k}\right] + \underbrace{a^{n+1}}_{A\, k=n+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{B\, k=0}$

$= \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{(n+1)-k} + C_{n+1}^{n+1} a^{(n+1)} b^{(n+1)-(n+1)}$

$+ C_{n+1}^0 a^0 b^{(n+1)-0}$

$$\cancel{= a^{n+1} + \sum_{k=0}}$$

$$\cancel{+ \left(b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^k \right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} a^k b^{(n+1)-k}$$

HR vérifiée au rg $n+1$,

P_n est donc vraie $\forall n$.

<u>Ex2</u> . 45min.

5) a) Calculer J^2, en déduire J^n $\forall n \geq 2$.

b) Vérifier que $JD = DJ$

c) En déduire T^n $\forall n$.

<u>Ex3</u> : Bonus ou à la maison.

Exo chaînes de Makov !

(6)

Chaîne de Markov

~~Soient~~ ~~Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$~~

~~Soit~~ Soient $X = (X_0, \dots, X_n)$ une suite de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans $E = \{x_1, \dots, x_p\}$.

Si $\forall n$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{i_{n+1}} \mid X_n = x_{i_n}, \dots, X_0 = x_{i_0})$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{i_{n+1}} \mid X_n = x_{i_n})$$

Alors X est une chaîne de Markov.

On dit que le processus ~~Karg~~ est sans mémoire :

~~L'état~~ L'information utile pour la prédiction de l'état futur X_{n+1} est entièrement contenue dans l'état présent X_n et n'est pas dépendante des états antérieurs $(X_0, \dots, X_{n-1})$.

~~Déf~~ ~~Déf~~ Matrice de transition

~~Soit Q une matrice~~

La matrice de transition Q est la matrice définie par

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_j \mid X_n = x_i) \quad \forall_{i,j} 1 \dots p$$

↳ c'est une matrice carrée de taille p = le nombre d'états possible.

Question : Que vaut $\sum_j Q_{ij} \quad \forall i$?

Loi initiale :

On désigne par $\pi_0 \in \mathbb{R}^p$ la loi initiale ~~de~~ ~~X~~ de la chaîne de Markov X.

Elle est définie par

$$(\pi_0)_i = \mathbb{P}(X_0 = x_i).$$

ex : $\pi_0 = (1/6, 1/3, 1/2)$

À l'instant initial, X_0 a 1/6 — état 1

etc..

(7) Le couple (π_0, Q) caractérise la chaîne de Makov X. En effet, si π_n est la loi de X_n à n fixé,

alors ~~$\pi_{n+1} = Q \cdot X_n$~~ $\boxed{\pi_{n+1} = \pi_n \times Q}$

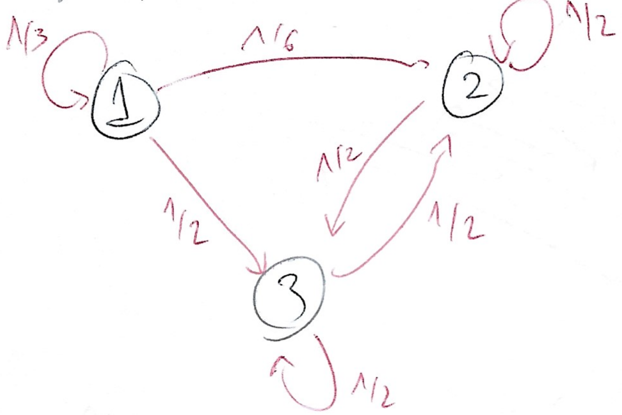
~~$\pi_{n+1} = Q \cdot \pi_n$~~ fournit la loi de X_{n+1}. Par récurrence immédiate, on a que

$$\pi_n = Q^n \cdot \pi_0 .$$

~~Graphe de la~~

Graphe d'une chaîne de Makov:

Dans les cas simples, on peut dessiner le graphe associée à une matrice de transition



$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Rq : • ~~Une fois~~ Dans ce cas que si $X_n \notin \{1\}$

alors $X_i \notin \{1\}$ $\forall i \geq n$.

• $\pi_n \xrightarrow{n \to \infty} (0, 1/2, 1/2)$.

Exo :

On considère la marche aléatoire suivante :
Un internaute navigue sur 3 pages web différentes A, B et C. On sait que :

S'il est sur A : il reste en A : 72 %
B : 12 %

B : → B : 72 %
→ C : 16 %

C : → A : 12 %
→ C : 72 %

Au départ, on est en A.

1. Dessiner le graphe associé
2. Construire la matrice de transition Q correspondante.

~~3. On admet que $Q = PDP^{-1}$~~

~~$\pi_n = Q^n \pi_0$~~

3. Donner π_0.
4. On admet que $\pi_n = \pi_0 Q^n$

$$= \left(3/10 + \frac{7}{10} \times 0{,}6^n , \frac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110} , \gamma_n \right)$$

⑧ 5. Déterminer ~~les limites de~~

$\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$.

6. Sur quelle page web a-t-on le plus de chance de trouver l'utilisateur après un grand nombre d'itérations ?..

(Sujet Maths – ex spé maths
BAC 2015)