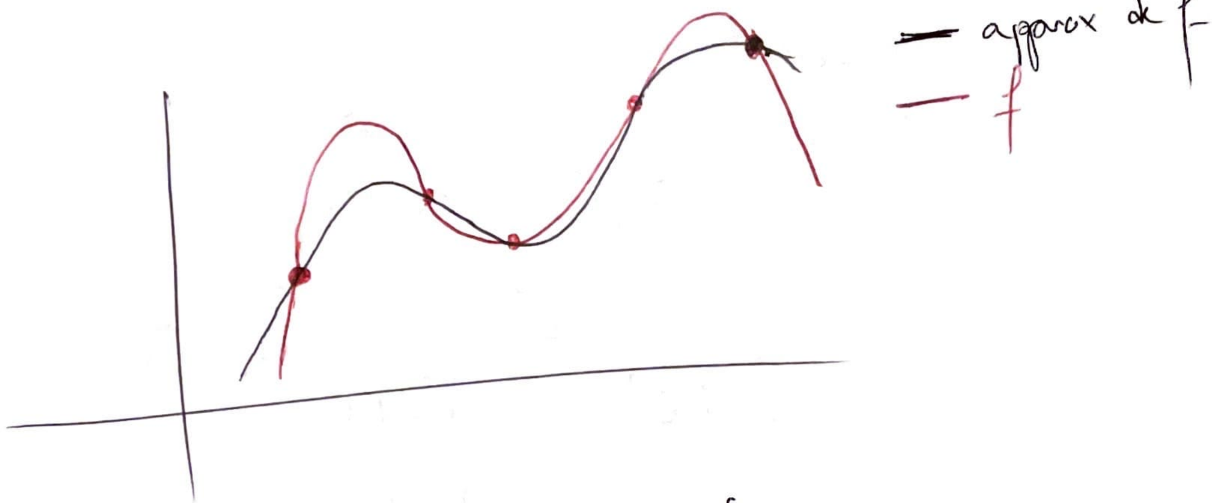
①

Interpolation

<u>But de l'interpolation</u> : approximer une fonction f sur tout un intervalle en ne disposant que de quelques points par lesquels f passe :

$(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $y_i = f(x_i)$ $\forall i$.



I. Interpolation Lagrangienne.

→ On cherche à approximer f par un polynôme. On dispose des $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ où $y_i = f(x_i)$.

~~Supposons~~

I.1) Polynômes de Lagrange.

À partir des points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ on peut construire n polynômes de Lagrange $(L_i)_{i=1,\dots,n}$

On a $L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On remarque que L_i s'annule $n-1$ fois, c'est donc un polynôme de degré au moins $n-1$.

Construction des polynômes de Lagrange

Rappel : Si p est un polynôme ayant pour racine α, alors p s'écrit $p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$, q un polynôme : $\deg q = \deg p - 1$.

L_i a pour racines les $(x_j)_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}}$.

$$\Rightarrow \text{Si } L_i(x) = \alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

alors on a bien $L_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i$.

Maintenant, il faut que $L_i(x_i) = 1$.

$$\Rightarrow 1 = \alpha \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

$$\Rightarrow \alpha = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

$$\Rightarrow L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

② (5 min) <u>Exercice</u> : Si $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2)$

Calculer L_1, L_2, L_3.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x(x-2)}{3}$$

etc...

<u>approximation de f avec les polynômes de Lagrange</u>

On cherche donc, en utilisant les polynômes de Lagrange à construire un polynôme p interpolant f.

p doit donc vérifier :

$$p(x_i) = y_i = f(x_i) \quad \forall i.$$

En posant $p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x)$, on a bien ce qu'il faut. En effet

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(x_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j \delta_{ij}$$

$$= y_i \quad \checkmark.$$

Ainsi on approxime f par p qui est un polynôme de deg $\leq n-1$.

Ex 1 (5 min) $x = [-2, 0, 1, 2]$, $y = [4, 0, 0, 4]$.

1. $P_1(X) = X^4 - 2/3 X^3 - 3X^2 + 8/3 X$
2. $P_2(X) = 4/3 X^2 - 4/3$
3. $P_3(X) = 1/3 X^3 + X^2 - 4/3 X$.

Parmi les polynômes suivants lequel est le polynôme d'interpolation P aux points x, y ?

Ex 2 : 1) Montrer qu'il existe une infinité de polynômes ~~passant~~ ~~P~~ de deg 2 passant par $(0,0)$ et $(1,0)$.

~~2) Montrer~~

Inconvénient de l'interpolation lagrangienne :

→ Dès qu'on rajoute un point (x_{n+1}, y_{n+1}), on doit reconstruire tous les polynômes.

II. Interpolation Newtonienne.

Étant donnés n points $(x_0, \dots, x_{n-1})$, l'interpolation polynômiale de Newton est une combinaison linéaire de polynômes appartenant à cette base.

$$N(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j n_j(x) \quad , \text{ où } n_j(x) = \prod_{0 \leq i < j} (x - x_i) \quad \forall j = 0, \dots, n-1.$$

En particulier, $n_0(x) = 1$.

(3) et les coefficients a_j égaux aux différences divisées

$$a_j = [y_0, \cdots, y_j].$$

$$\Rightarrow N(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + \cdots + [y_0, \cdots, y_{k-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{k-2})$$

→ On voit bien qu'on peut rajouter un point sans avoir à tout recalculer.

Différences divisées:

$$[y_0] = y_0$$

$$[y_0, \cdots, y_k] = \frac{[y_1, \cdots, y_k] - [y_0, \cdots, y_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

ex:

x_k	$[y_k]$	$[y_k, y_{k+1}]$	$[y_k, y_{k+1}, y_{k+2}]$
-1	0 a_0		
1	0	0 a_1	
2	6	6	2 a_2

$$\Rightarrow N(x) = 0 + 0 \times (X+1) + 2(X-1)(X+1) = 2(X-1)(X+1)$$

~~Rajouter le~~

Exo : rajouter le point $(4, -2)$

x_k	$[y_k]$	$[y_k, y_{k+1}]$	$[y_k, y_{k+1}, y_{k+2}]$	$[y_k, \dots, y_{k+3}]$
-1	0 a_0			
1	0	0 a_1		
2	6	6	2 a_2	
4	-2	-4	$-10/3$	$-16/15$ a_3

$$N(X) = 2(X-1)(X+1) - \frac{16}{15}(X-2)(X-1)(X+1).$$

II) CUBIC SPLINES

Étant donnés $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$. On souhaite construire une approximation $S(x)$ de $f(x)$. Cette méthode s'appelle la cubic spline interpolation et vérifie

$S(x)_{|[x_i, x_{i+1}]} = S_i(x)$ ← cubic polynomial. $\forall i = 0, \dots, n-1$

(1) $S_i(x_i) = f(x_i)$ $\quad \forall i = 0, \dots, n-1$

(2) $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ $\quad \forall i = 0, \dots, n-1.$

(3) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad \forall i = 0, \dots, n-2$

(4) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad \forall i = 0, \dots, n-2$

et 1. $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n)$ (5'a) (condition au bord libre)

et $S'_0(x_0) = S'_{n-1}(x_n)$ (5'b)

ou

(5) 2. $S'_0(x_0) = f'(x_0)$ et $S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$

Déterminer les coefficients des polynômes cubiques

Chaque S_i s'écrit

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3.$$

$\Rightarrow 4n$ inconnues

et $n + n + (n-1) + (n-1) + 2 = 4n$ conditions!

On note $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Déterminer les conditions sur les coefficients.

(1) $\Rightarrow S_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow a_i = f(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, n-1$

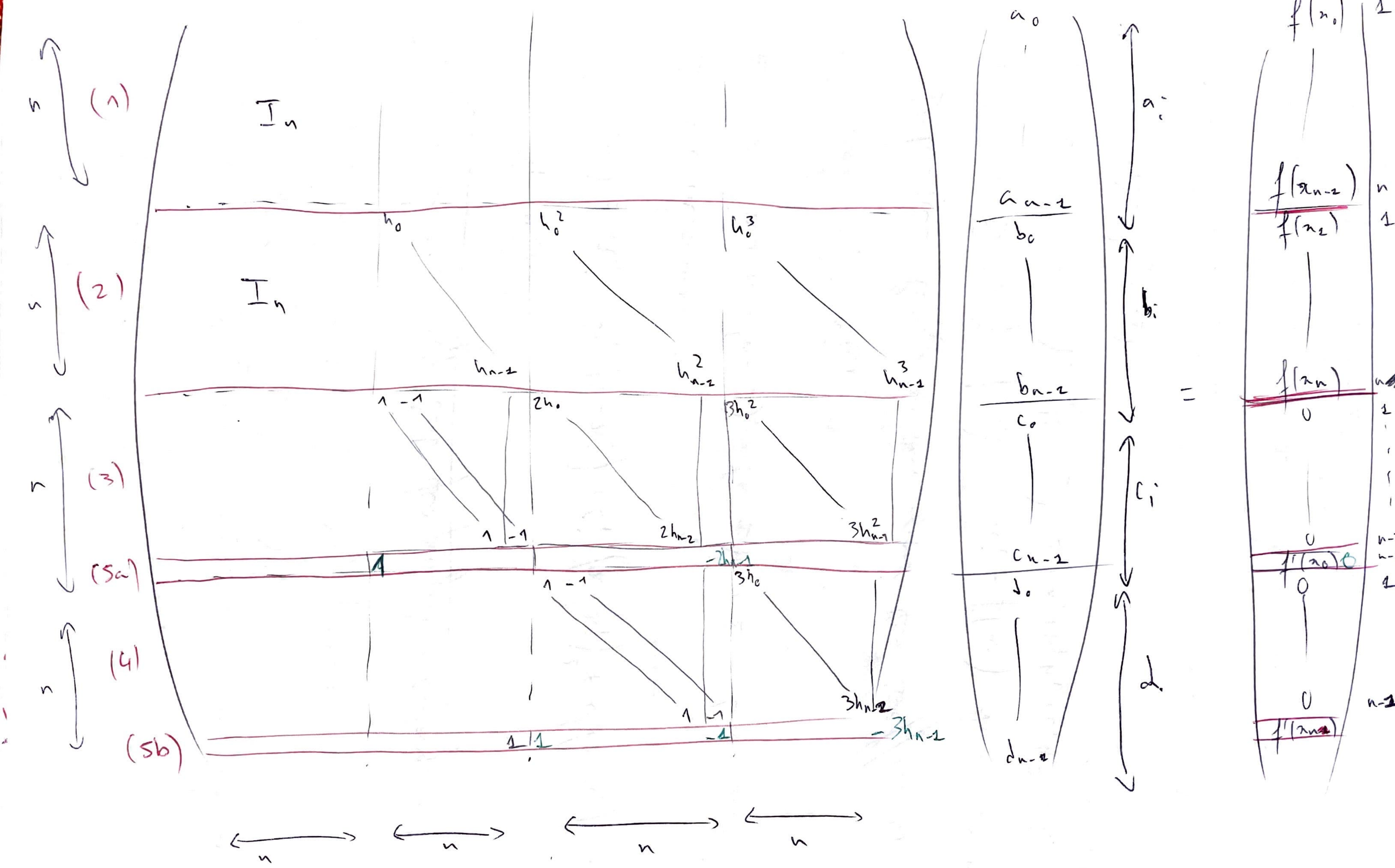
(2) $\Rightarrow S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \Rightarrow a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f(x_{i+1})$
$\forall i = 0, \dots, n-1$

(3) $\Rightarrow S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$

$\Rightarrow b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i = b_{i+1} \quad \forall i = 0, \dots, n-2$

(4) $\Rightarrow c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \quad \forall i = 0, \dots, n-2$

(5) $\Rightarrow \underbrace{b_0 = f'(x_0)}_{(5a)}, \quad \underbrace{b_{n-1} = f'(x_n)}_{(5b)}.$

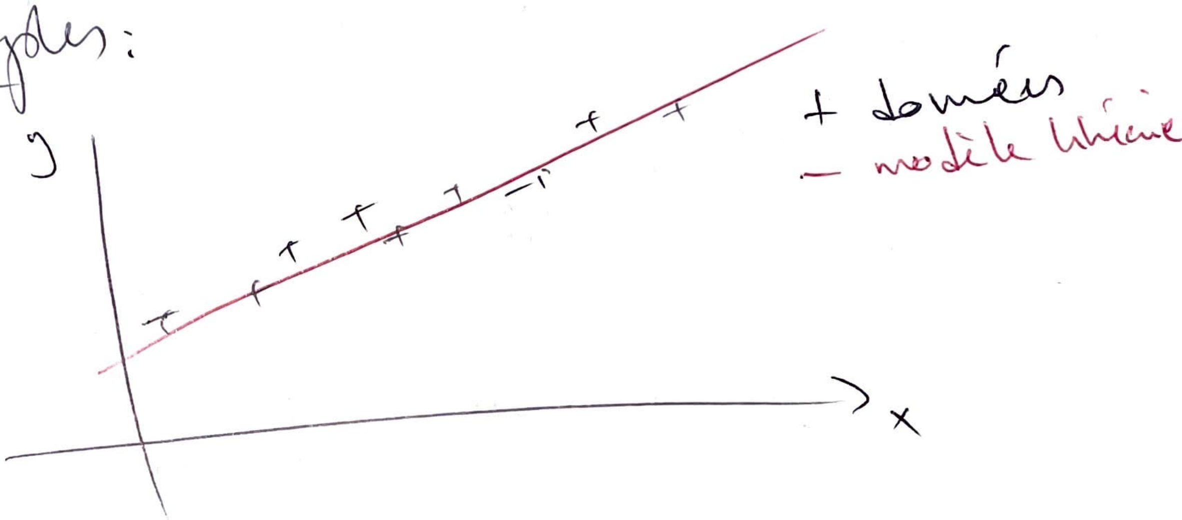


(1)
(2)
(3)
(5a)
(4)
(5b)
n
I_n
h_0
h_{n-1}
h_0^2
h_{n-1}^2
h_0^3
h_{n-1}^3
1 -1
2h_0
2h_{n-1}
3h_0^2
3h_{n-1}^2
-2h_{n-1}
3h_0
3h_{n-1}
-3h_{n-1}
a_0
a_{n-1}
a_i
b_0
b_{n-1}
b_i
c_0
c_{n-1}
c_i
d_0
d_{n-1}
d_i
=
f(x_0)
f(x_{n-1})
f(x_1)
f(x_n)
0
f'(x_0)
f'(x_n)
n-2
n-1

(5) III. Régression linéaire

But : ~~On dispose de données qui semblent présenter une certaine logique.~~
Établir une relation linéaire entre des variables explicatives et une variable, dite expliquée.

Exemples :



On se concentre sur le cas à une variable explicative : $x \in \mathbb{R}$

Régression linéaire : On cherche à expliquer la relation entre (x, y) par un modèle de la forme

$$Y = aX + b + \xi \quad , \quad \xi \text{ bruit}$$

Disposant de données $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$

On cherche à trouver les meilleurs coefficients a et b.

~~l'erreur de prédiction peut être~~

On peut définir l'erreur de prédiction suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2$$

$\xi_i = (a x_i + b) - y_i$ est appelé un résidu.

$$E = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

↳ On cherche à minimiser E en jouant sur a et b.

E est fonction de a et b : $E = E(a, b)$.

E est convexe, comme somme de fonctions convexes.

$\Rightarrow$ si (a_*, b_*) vérifie $\nabla E(a_*, b_*) = \vec{0}$ alors (a_*, b_*) minimise l'erreur de prédiction $\Rightarrow$ ce sont les meilleurs paramètres.

6) Ex : calculer $\frac{\partial E}{\partial a}$, $\frac{\partial E}{\partial b}$

(10/15 min).

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i (a x_i + b - y_i) = 2n\left(a\overline{x^2} + b\bar{x} - \overline{yx}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum (a x_i + b - y_i) = 2n(a\bar{x} + b - \bar{y})$$

$$DE = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial E/\partial a = 0 \\ \partial E/\partial b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\overline{x^2} + b\bar{x} - \overline{xy} = 0 \\ a\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases}$$

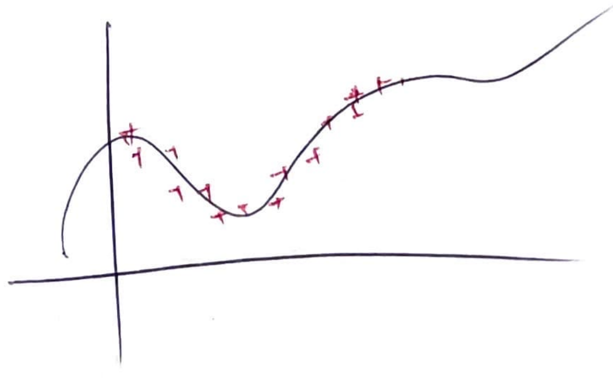
↳ à résoudre.

Régression polynômiale

$Y = P_q(X) + \xi$.

avec $P_q(x) = \sum_{i=0}^{q} a_i x^i$

$$E = E(a_0, \dots, a_q) = \sum_{i=1}^{n} \left(P_q(x_i) - y_i\right)^2$$



$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{q} a_j x_i^j - y_i\right) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{i=1}^{n} a_j x_i^j - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^k\left(\sum_{j=0}^{q} a_j x_i^j - y_i\right) = \sum_{j=0}^{q} a_j \sum_{i=1}^{n} x_i^k x_i^j - \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i$$

$k > 0$

$k = 1, \dots, q$

$$\nabla E = 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} j=0 & & & & j=q \end{array} \\ \begin{array}{c} k=0 \\ k=1 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} & \overline{x^2} & \cdots & \overline{x^q} \\ \overline{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} & \cdots & \overline{x^{q+1}} \\ \vdots & & \overline{x^4} & \ddots & \vdots \\ \overline{x^q} & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{x^{2q}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \\ \overline{x^2 y} \\ \vdots \\ \overline{x^q y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{j=0}^{q} a_j \sum_{i=1}^{n} x_i^j - \sum y_i = n\left(\sum_{j=0}^{q} a_j \overline{x^j} - \overline{y}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = n\left(\sum_{j=0}^{q} a_j \overline{x^{k+j}} - \overline{x^k y}\right)$$

E est ainsi appelé SSE (Sum of the squared errors).