① ETS : Matrices et systèmes.

Déf : une matrice est un "tableau" de nombres qui peuvent être entiers, réels, complexes.

. Une matrice a également un format, exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 22/7 & 10 \\ 0 & -1{,}5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \leftarrow \text{matrices réelle 2 lignes 2 col.}$$

Notation : . On peut désigner l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes par $\mathbb{R}^{m\times n}$ ou bien $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R})$.

. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, on peut relier A et ses coefficients par $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$; où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

1. Opération élémentaires sur les matrices

1.1 Addition : valide pour deux matrices de même format, A et $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ donne $(A+B) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et

$$B + A = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} .$$

1.2 Multiplication par un scalaire : On peut multiplier $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ de la façon suivante : $(\alpha \times A) = (\alpha \times a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

1.3 Multiplication de matrices :

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ alors $A\times B$ existe et $\in \mathbb{R}^{m\times p}$, de plus $(A\times B) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{ij}$

⚠ généralement, la multiplication matricielle n'est pas commutative, càd $A \times B \neq B \times A$.

→ calculer $A \times B$ et $B \times A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Résolution de systèmes avec les matrices

2.1 La matrice identité

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\updownarrow n \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

~~l'équivalent du 1~~

$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \times I_n = A$

$\forall B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $I_n \times B = B$

$\forall C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $I_n \times C = C \times I_n = C$.

Rq : Matrices carrées : $\mathbb{R}^{n \times n}$.

2.2 Inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifie $AB = BA = I_n$, alors B est "l'inverse de A", noté $B = A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Toutes les matrices ne sont pas inversibles !

2.3. Résolution de systèmes avec les matrices

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ connues (données d'un problème) et $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ un vecteur d'inconnues vérifiant $AX = B$. Si A est inversible, alors le système admet une solution donnée par $X = A^{-1}B$.

mini-preuve : $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_n X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

② exo (5 min) : Soit A vérifiant $A^3+2A^2-3A+I=0$, déterminer, ~~si possible~~, une expression pour l'inverse de A s'il existe.

$$A^3+2A^2-3A+I=0$$
$$\Leftrightarrow A(A^2+2A-3I)=-I$$
$$\Leftrightarrow A(-A^2-2A+3I)=I$$
$$\Rightarrow \underline{A^{-1}=-A^2-2A+3I}.$$

2.4 Déterminant d'une matrice

2.4.1 ~~Déf~~ Le det ~~permet~~ d'une matrice permet de dire si les lignes d'une matrice sont "linéairement indépendantes" c.à.d qu'il n'y a pas d'informations redondantes entre elles. Explications : je cherche à retrouver le prix de trois articles que je note x, y, z.

Par exemple, je sais que $x+y+z=14$. Il s'agit d'une première information indiquant que le ~~???~~ qu'acheter les 3 articles coûte 14€.

Je sais aussi que $x+z=12$. Je peux en déduire que $(x+y+z)+(x+z)=14+12=26$,
$\Leftrightarrow 2x+y+2z=26$
mais je n'ai en aucun cas ~~ajouté de~~ créé une nouvelle information ! ~~Si~~ Le déterminant de la matrice ~~???~~ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vaudra alors 0, mettant en évidence la redondance d'information entre les lignes de la matrice. En revanche, si je remplace la dernière ligne par celle prenant en compte une dernière info $x+y=7$,

alors le det de $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \neq 0$!

J'ai donc maintenant 3 information indépendantes pour un problème à 3 inconnues $\Rightarrow$ ~~je peux résoudre~~. $\det \neq 0 \Rightarrow$ je peux résoudre.

Sinon, 2 info indep, 3 inco $\Rightarrow \det = 0$, je ne peux pas résoudre.

moralité $\boxed{\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ inversible}}$.

2.4.2 Det 2x2 et inverse matrice 2x2

$\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = ad-bc$. Dire si $A=\begin{pmatrix}2.5&-1\\0&-2\end{pmatrix}$ est inversible.

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, et $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

2.4.3 Det matrice 3x3

Soit $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ et $\bar{A}_{ij}$ la matrice de taille 2x2 correspondant à A privé de la ligne i et de la colonne j.

On choisit la colonne/ligne que l'on veut, disons la 3ème colonne, alors on a

$$\det A = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} = a_{13}\det(\bar{A}_{13}) - a_{23}\det(\bar{A}_{23}) + a_{33}\det(\bar{A}_{33})$$

$$= a_{21}\det(\bar{A}_{21}) + a_{22}\det(\bar{A}_{21}) - a_{23}\det(\bar{A}_{23})$$

$\square = -1$

$\square = 1$

(3) ~~Exo~~ : (7-8 min) Calculer les det de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -8 & 4 & -6 \end{pmatrix} -2(L_1+L_2) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.4. Déterminant matrice $n \times n$

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et qu'on l'on développe par exemple sur la première ligne, on a

$$\det A = a_{11} \det(\bar{A}_{11}) - a_{12} \det(\bar{A}_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(\bar{A}_{1n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\bar{A}_{1j}).$$

et $\det(a_{ij}) = a_{ij}$.
un réel

Exo : 20 min : proposer une fonction écrite en python ou en pseudo-code calculant le déterminant d'une matrice $n \times n$. Vous disposez d'une fonction

- réduit (A, i, j) qui renvoie la matrice A privée de la i-ème ligne j-ème colonne
- taille_matrice_carrée(A) qui renvoie l'entier correspondant à la taille de la matrice carrée A

```
def det (A):
    if taille_matrice_carree == 1:
        return A[1,1]
    else
```

```
def det A:
    taille_A = taille_matrice_carree(A)
    if taille_A == 1:
        return A[1,1]
    else:
        somme = 0
        for k allant de 1 à taille_A:
            somme += (-1)^(1+k) A[1,k] det(réduit(A,1,k))
```

2.5 Inversion d'une matrice par la méthode du Pivot de Gauss.

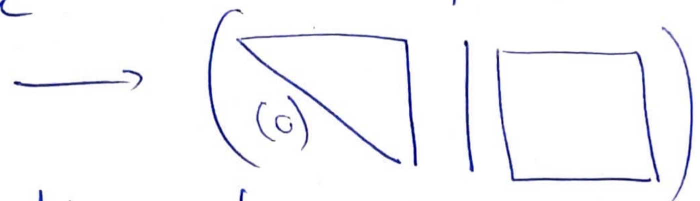
ex : matrice à inverser : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On met dans un même tableau $(P \mid I_3)$

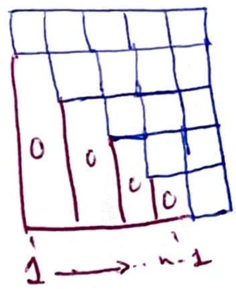
But : En choisissant les bonnes $\in 3\times 6$ combinaisons linéaires sur les lignes du tableau $(P \mid I_3)$, le transformer en $(I_3 \mid P^{-1})$.

④ Algo :

Etape 1) Mettre des zéros dans le triangle inférieur côté gauche

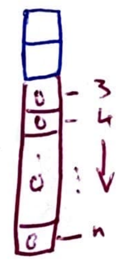


→ En avançant en colonnes depuis la gauche vers la droite

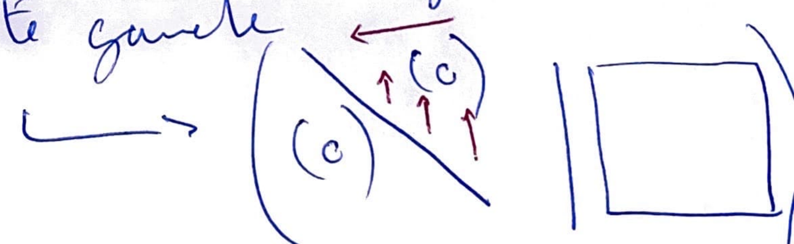


→ Dans chaque colonne, en procédant du haut vers le bas

colonne 2 :



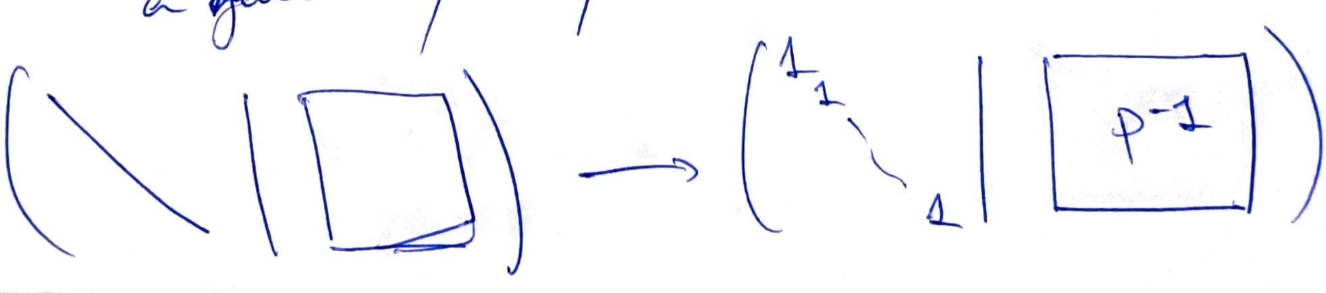
Etape 2) Mettre des zéros dans le triangle supérieur côté gauche



→ En avançant en colonnes depuis la droite vers la gauche

→ En avançant du bas vers le haut dans chaque colonne

Etape 3) Normaliser ~~chaque~~ la matrice diagonale à gauche pour qu'elle devienne identité



⑤ <u>Exemple</u> :

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ \boxed{-1} & -1 & -1 & & 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & -2 & & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & & \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & -2 & & & 1 \end{array}\right) L_1+L_2 \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boxed{2} & \boxed{1} & 1 & & \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & \\ \boxed{0} & \boxed{0} & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) L_3+2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{4} & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) 2L_1+L_3 \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) L_1-4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & & & 2 & 1 & 1/2 \\ & \boxed{1} & & 1 & 1 & \\ & & \boxed{1} & -1 & -1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{P^{-1}}$$

<u>Exos</u> (20 min) : 1) Inverser par la méthode du Pivot de Gauss la matrice

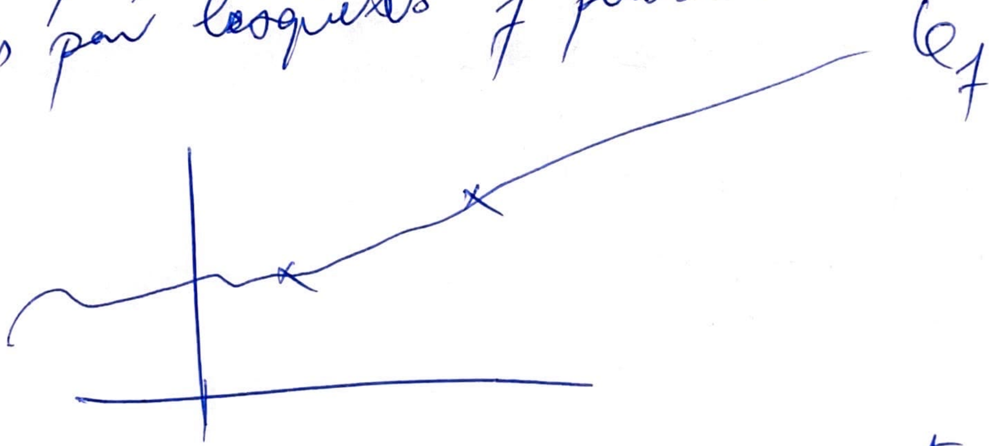
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Résoudre $\begin{cases} x - z = 3 \\ 2x - 3z = 2 \\ 4x + 2y + z = -1 \end{cases}$

3) Proposer un algorithme en pseudo-code ou en python implémentant le pivot de Gauss qui calcule l'inverse d'une matrice par la méthode du Pivot de Gauss.

2.6) Exercice : Interpolation d'une fonction

But : on cherche à approximer une fonction f par un polynôme p, en ~~sachant~~ ~~que f passe par~~ connaissant quelques points par lesquels f passe.



Si on a ... 1 point, $p =$ cste

2 $\longrightarrow$, $p = ax+b$

3 ; $p = ax^2+bx+c$ ...

À chaque fois, les inconnues sont les coefficients du polynôme !

(6) On considère qu'on a n points de coordonnées $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $y_i = f(x_i)$.

et $x_i \neq x_j \; \forall i, j$.

~~Par~~ Dans le plan $\mathbb{R}^2$, par 1

par deux points distincts passe ... une droite

— 3 ———————— un polynôme de degré 2

4 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 3

n $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $n-1$.

Ainsi on cherche le polynôme p de deg $n-1$ passant par les points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Questions :

1) Comment s'écrit généralement un polynôme de deg $n-1$? $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

2) Quelles sont les conditions que p doit vérifier ?

3) Traduire ces conditions sur p en condition sur les coefficients $(a_i)_{i=0,\dots,n-1}$

4) Écrire le système matriciel correspondant.

5) Dans ~~[illegible]~~ un jupyter notebook