



M1 Mathématiques et Applications

Mémoire de Mathématiques

## Estimation statistique de la volatilité

*Antoine Robquin*  
*Grégoire Lormand*  
*Raphaël Krief*

Encadrant : *Marc Hoffmann*

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>La volatilité et ses paradoxes</b>	<b>5</b>
3.1	Définitions des différentes volatilités . . . . .	5
3.2	Différents estimateurs de la volatilité . . . . .	6
3.3	Les paradoxes empiriques . . . . .	6
3.3.1	La volatilité réalisée en haute fréquence . . . . .	6
3.3.2	Le Epps effect . . . . .	7
3.3.3	Mean Reversion: La cause de ces paradoxes . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Modélisation des prix</b>	<b>10</b>
4.1	Processus de Poisson . . . . .	10
4.2	Processus de Hawkes . . . . .	11
4.3	Construction des prix . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Estimateur de Fourier</b>	<b>14</b>
5.1	Problèmes récurrents des estimateurs classiques . . . . .	14
5.2	Construction de l'estimateur . . . . .	15
5.3	Estimateur de la volatilité instantanée . . . . .	23
5.4	Estimateur de la volatilité intégrée . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>

# 1 Remerciements

Nous tenons à remercier chaleureusement Monsieur Marc Hoffmann qui a su se rendre disponible tout au long de ce mémoire pour nous conseiller, nous expliquer les notions complexes étudiées et nous aider lors des différents moments de blocage.

# 2 Introduction

La volatilité est une mesure statistique de la dispersion des rendements d'un titre ou d'un indice boursier donné. Son rôle majeur est de quantifier les risques de rendements et de prix des actifs financiers. La volatilité d'un actif financier sera d'autant plus forte selon que les cours des marchés sont instables: plus la volatilité d'un produit est élevée, plus fort sera le risque associé à ce produit. C'est donc un indicateur indispensable à la bonne compréhension des variations d'un actif. Le premier modèle ayant pris en compte la volatilité d'un actif est le modèle de Black-Scholes où celle-ci est supposée constante. Cependant, on s'est rapidement rendu compte que cette modélisation était limitée. Elle a donc été l'objet de multiples papiers de recherche. Au cours des dernières décennies nous avons connu plusieurs périodes de fluctuations de la volatilité sur les marchés. Les années 90 ont été caractérisées par des niveaux très hauts de volatilité avant qu'une accalmie se fasse ressentir au début des années 2000. Depuis, c'est une tendance à la hausse qui semble se dégager des marchés, phénomène amplifié par différentes crises telles que la crise du Covid-19 ou encore plus récemment, par celle du conflit Ukraine-Russie ce qui invite à porter une attention toute particulière à l'étude de la volatilité.

Ce papier s'intéresse à l'estimation statistique de la volatilité mais aussi à la modélisation d'un processus de prix que l'on pourrait observer sur les marchés financiers. Pour cela, nous commençons par donner une définition rigoureuse de la volatilité d'un processus de prix dans la sous-partie 3.1, pour ensuite présenter quelques estimateurs de la volatilité en sous-partie 3.2 et finalement énoncer différents paradoxes empiriques qui nous poussent à modéliser les processus de prix d'une certaine manière dans la sous-partie 3.3. Pendant longtemps, il était d'usage d'assimiler le comportement d'un processus de prix à celui d'une diffusion brownienne. Cependant, les paradoxes observés ont remis en cause cette caractéristique. C'est pourquoi de nouvelles modélisations ont vu le jour, notamment celle étudiée dans [3], permettant de représenter le plus fidèlement possible l'évolution d'un prix: c'est ce qui est observé dans la section 4. Nous nous sommes aussi intéressés à l'estimation statistique de la volatilité par la méthode de Fourier présentée dans [5]. Nous expliquerons en détails les fondements particuliers de cette méthode, se basant sur une identité liant le prix d'un actif et sa volatilité. Bien que celle-ci repose sur l'assomption brownienne, nous verrons qu'elle conserve de bonnes propriétés par rapport à d'autres estimateurs en sous-partie 5.1. Notre objectif est alors de mettre à profit l'estimateur obtenu en sous-partie 5.4 pour estimer la volatilité de notre processus de prix modélisé

selon la section 4 qui sera au coeur de notre partie sur la simulation numérique. La partie numérique a été réalisée sur le logiciel de programmation R, où nous avons utilisé le package [6] afin de simuler notre processus de prix. La faible documentation de ce package R a entraîné de nombreuses difficultés mais nous avons finalement réussi à obtenir les résultats espérés qui sont présentés dans la partie 6.

### 3 La volatilité et ses paradoxes

#### 3.1 Définitions des différentes volatilités

Pour introduire au mieux les notions qui vont suivre, il convient de commencer par rappeler quelques définitions.

**Définition d'une filtration:** Une filtration est une famille  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  de tribus telles que:  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  pour tout  $0 \leq s \leq t$ . Si l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est muni d'une filtration  $\mathbb{F}$ , on parlera de l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ .

**Définition continuité d'un processus:** On dit qu'un processus stochastique  $\{X_t, t \geq 0\}$  est presque-sûrement continu à droite, respectivement continu à gauche, si l'évènement

$$\left\{ \omega \in \Omega : \forall t \in \mathbb{R}_+, X_t(\omega) = \lim_{s \downarrow 0} X_{t+s}(\omega) \right\},$$

respectivement l'évènement

$$\left\{ \omega \in \Omega : \forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, X_t(\omega) = \lim_{s \downarrow 0} X_{t-s}(\omega) \right\},$$

appartient à  $\mathcal{F}$  et a probabilité 1. On dit que  $\{X_t, t \geq 0\}$  est presque-sûrement continu s'il est continu à droite et à gauche.

**Définition d'un processus adapté:** On dit que  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est  $\mathbb{F}$ -adapté si: pour tout  $t \geq 0$ , la variable aléatoire  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Définition d'un mouvement brownien:** On appelle mouvement brownien sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un processus  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  vérifiant les trois propriétés suivantes:  
-  $B$  est à trajectoires continues,  
- pour tout  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\sigma(B_u, u \leq s)$ ,  
- pour tout  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ ,  
où  $\mathcal{N}(0, t - s)$  désigne une loi normale de moyenne 0 et de variance  $t - s$ .

On suppose que l'évolution d'un prix  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est donnée selon l'équation suivante:

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dB_t, \tag{1}$$

avec  $\mu$  et  $\sigma$  continus,  $\mathbb{F}$ -adaptés et vérifiant:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\mu(s))^2 ds \right] &< \infty, \\ \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\sigma(s))^4 ds \right] &< \infty. \end{aligned} \tag{H}$$

Ici  $\mu$  est la composante de drift,  $\sigma$  est la volatilité instantanée du processus de prix  $X$ ,  $B$  est un mouvement brownien standard, c'est-à-dire un mouvement brownien démarré en 0 et  $T$  est l'horizon de temps sur lequel on observe le prix. Il nous est donc maintenant possible d'introduire l'objet le plus important de notre mémoire: la volatilité.

Commençons par définir la volatilité instantanée, notée  $\text{Vol}(X)(t)$ , au temps  $t$ :

$$\text{Vol}(X)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left[ \frac{(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2}{\varepsilon} \mid \mathcal{F}_t \right] = \sigma^2(t). \quad (2)$$

Néanmoins en pratique, nous aurons plutôt tendance à utiliser la volatilité intégrée, notée  $\text{IV}(t)$ , définie de la manière suivante:

$$\text{IV}(t) = \int_0^t \sigma^2(s) ds.$$

La volatilité intégrée est plus facilement approchable de par sa forme intégrale et a été l'objet de nombreuses recherches comme dans [8],[2], [7] ou encore [4], ce qui motive la partie suivante.

### 3.2 Différents estimateurs de la volatilité

Soit  $\{t_0 = 0, \dots, t_n = T\}$  une subdivision de  $[0, T]$ , l'intervalle de temps sur lequel on observe un actif. Soit  $\Delta = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ .

L'approche la plus intuitive pour approximer la volatilité intégrée de notre processus de prix  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  est d'utiliser le carré des accroissements de  $X$ , d'où l'estimateur  $\text{RV}(T)$ , communément appelé volatilité réalisée et donné par:

$$\text{RV}(T) = \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2. \quad (3)$$

C'est un estimateur consistant lorsque  $\Delta \rightarrow 0$ . Différents chercheurs ont donc essayé de trouver des estimateurs plus performants, principalement lorsque l'intervalle d'échantillonnage devient petit. En effet, des problèmes tels qu'un plus grand biais dans l'estimation et un manque de robustesse ont été observés dans ce cas. De tels estimateurs ont été présentés dans [8] ou [5]. Nous avons porté notre attention sur l'estimateur par la méthode de Fourier décrit dans [5] dont nous décrirons les caractéristiques dans une autre partie.

### 3.3 Les paradoxes empiriques

#### 3.3.1 La volatilité réalisée en haute fréquence

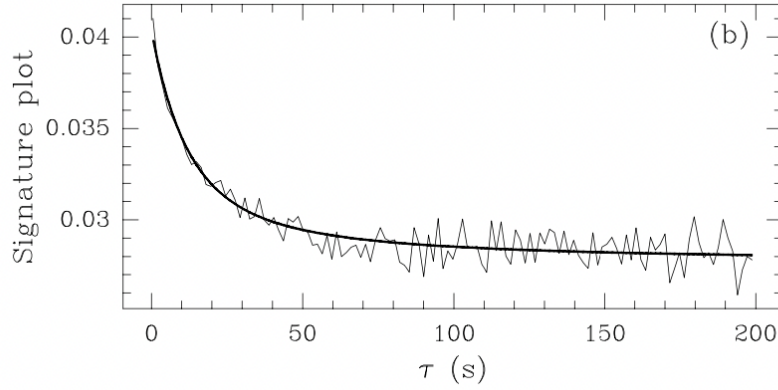
La révolution numérique et le développement d'ordinateurs de plus en plus puissants nous a permis de collecter une quantité nettement supérieure de données. Ainsi, il est devenu possible d'observer l'évolution du prix d'un actif sur des périodes de temps de plus en plus courtes. Donc en disposant de plus

de données, il est intuitif d'imaginer obtenir une meilleure précision sur nos estimateurs. Cependant un premier paradoxe apparaît. En effet, on s'est rendus compte que notre estimateur de la volatilité intégrée a tendance à diverger lorsque l'on réduit l'échelle de temps. La nécessité de prendre en compte le changement d'échelle nous invite à modifier (3) par:

$$RV(T, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T/\tau} |X_{(i+1)\tau} - X_{i\tau}|^2,$$

où  $\tau \in ]0, +\infty[$  et représente la période de temps entre l'observation de deux prix consécutifs, généralement mesurée en secondes.

Ce phénomène est observable sur la **Figure 3.1** ci-contre.



**Figure 3.1**-Valeur de  $RV(T, \tau)$  suivant l'évolution de  $\tau$ .  
(Source: [3], Figure 1 b))

### 3.3.2 Le Epps effect

En pratique, lorsqu'on investit sur les marchés financiers, diversifier son portefeuille est une nécessité. On est donc amené à établir le lien entre deux actifs différents. Pour  $X$  et  $Y$  deux processus de prix vérifiant (1), ce lien est expliqué par la corrélation entre  $X$  et  $Y$ , définie par:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}},$$

avec  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ .

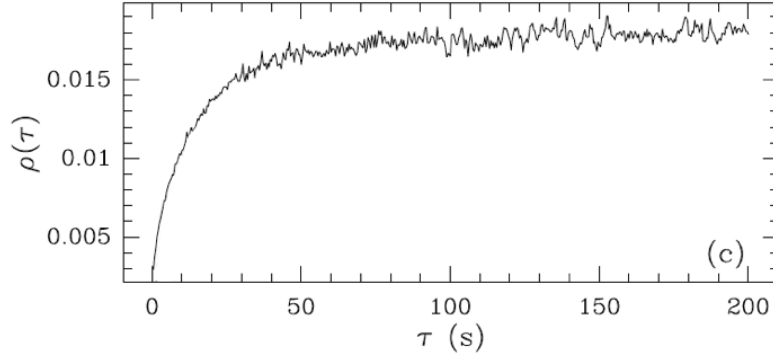
La corrélation étant à valeurs dans  $[-1, 1]$ , si cette dernière est dans  $]0, 1]$ , alors les deux actifs auront tendance à évoluer dans le même sens. À l'inverse si elle est dans  $[-1, 0[$ , une hausse de l'un aura tendance à entraîner la baisse de l'autre. À nouveau, comme cette définition ne prend pas en compte la dépendance à l'échelle de temps, il est donc nécessaire de l'adapter par:

$$\rho(X,Y,\tau) = \frac{RV_{XY}(T,\tau)}{\sqrt{RV_X(T,\tau)RV_Y(T,\tau)}},$$

où

$$RV_{XY}(T,\tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T/\tau} [X_{(i+1)\tau} - X_{i\tau}] [Y_{(i+1)\tau} - Y_{i\tau}].$$

Empiriquement, lorsque l'on trace  $\rho(X,Y,\tau)$  pour deux actifs que l'on sait corrélés, on observe que la corrélation s'estompe à mesure que  $\tau$  diminue, comme on peut le voir sur la **Figure 3.2**.

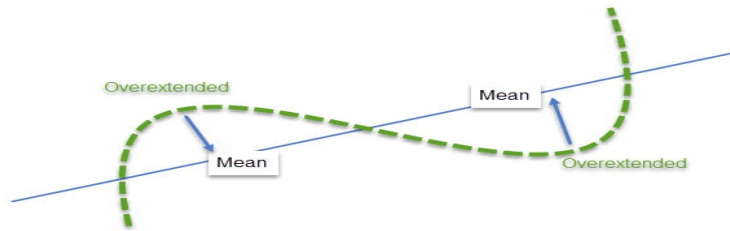


**Figure 3.2**-Valeur de  $\rho(X,Y,\tau)$  suivant l'évolution de  $\tau$ .  
(Source: [3], Figure 7 c))

### 3.3.3 Mean Reversion: La cause de ces paradoxes

Il est naturel de s'interroger sur l'origine de ces paradoxes. En observant nos prix à petite échelle, on remarque qu'ils ont tendance à osciller autour d'une certaine moyenne, c'est ce qu'on appelle la *Mean Reversion*. Ce phénomène est propre à cette échelle de temps et disparaît afin de retrouver une diffusion brownienne à mesure que  $\tau$  augmente. Ainsi, notre simulation de prix aura tout intérêt à prendre en compte ce comportement essentiel à la bonne compréhension du marché.





**Figure 3.3**-Représentation de la *Mean Reversion*.

## 4 Modélisation des prix

Une des façons de créer de la *Mean Reversion* est d'utiliser un type de processus particuliers, appelés processus de Hawkes. Afin d'introduire au mieux cet outil, il est primordial de définir les objets nécessaires à sa construction, notamment les processus de Poisson, qui sont à la base des processus de Hawkes. Pour en apprendre plus sur les processus de Hawkes, nous avons utilisé le document [1].

### 4.1 Processus de Poisson

Dans l'optique de présenter les processus de Poisson, nous devons introduire une classe élémentaire de processus: les processus de comptage. Pour cela, nous rappelons quelques définitions.

**Définition d'un processus croissant:** On dit que  $\{X_t, t \geq 0\}$  est presque-sûrement croissant si l'évènement

$$\{\omega \in \Omega : \forall t > s \geq 0, X_t(\omega) \geq X_s(\omega)\}$$

appartient à  $\mathcal{F}$  et a probabilité 1.

**Définition d'un processus de comptage:** Un processus  $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus de comptage si  $\mathbb{P}$ -p.s:

- $N_0 = 0$ ,
- $N$  est croissant et continu à droite,
- $N_t \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  pour tout  $t \geq 0$ .

Les temps de saut d'un processus de comptage  $N$  sont définis comme la suite de variables aléatoires

$$T_n := \inf \{t \geq 0 : N_t \geq n\}, \quad n \geq 0,$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ . Remarquons que  $T_0 = 0$  et  $\{T_n, n \geq 0\}$  est croissante,  $\mathbb{P}$ -p.s.

Nous pouvons donc maintenant introduire les processus de Poisson, qui font partie de la classe des processus de comptage.

**Définition des temps de séparation:** Soit un processus de comptage  $N$  et sa suite de temps de sauts  $\{T_n, n \geq 0\}$ . On appelle

$$\delta_n := T_n - T_{n-1}, \quad n \geq 1$$

les temps de séparation de  $N$ .

**Définition d'un processus de Poisson:** Soit  $\lambda > 0$ . Un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  est un processus de comptage dont les éléments de la suite des

temps de séparation sont i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ . Si  $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus de Poisson, alors ses évènements se produisent aléatoirement avec une intensité constante égale à  $\lambda$ .

Ceci n'est pas suffisant pour modéliser nos processus de prix puisque nous avons besoin de faire varier cette intensité avec le temps. On définit alors la fonction d'intensité conditionnelle.

**Définition de la fonction d'intensité conditionnelle:** Soit  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  la filtration usuelle. On appelle intensité conditionnelle du processus  $N$  la fonction  $\lambda^*$  définie par:

$$\lambda^*(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N_{t+h} - N_t \mid \mathcal{F}_t]}{h}.$$

Cette fonction donne le risque conditionnel de l'occurrence d'un événement au temps  $t$  sachant les réalisations du processus sur l'intervalle  $[0, t[$ .

## 4.2 Processus de Hawkes

Les processus de Hawkes ont été introduits pour la première fois par Alan G. Hawkes en 1971 pour modéliser les phénomènes sismiques. En effet, on sait que l'arrivée d'un événement peut avoir une influence sur la probabilité d'apparition d'un événement postérieur: c'est cette propriété que les processus de Hawkes mettent en valeur. Cette caractéristique provient de la forme particulière de leur fonction d'intensité conditionnelle.

**Définition d'un processus de Hawkes:** Un processus de Hawkes  $\{N_t, t \geq 0\}$  est un processus de comptage, défini par sa fonction d'intensité conditionnelle  $\lambda^*$ :

$$\lambda^*(t) = \lambda + \sum_{\{i, t_i < t\}} \mu(t - t_i),$$

où  $(t_i)_{i \geq 1}$  est la suite des observations des temps de saut,  $\lambda$  est un réel qui représente l'intensité de base et  $\mu : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est la fonction d'excitation.

Il est aussi important de noter que si  $N$  est un processus de Hawkes, alors  $\forall t, h > 0$ :

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0 \mid \mathcal{F}_t) = 1 - \lambda^*(t)h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = n \mid \mathcal{F}_t) = o(h), \quad \forall n > 1,$$

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1 \mid \mathcal{F}_t) = \lambda^*(t)h + o(h).$$

La fonction d'excitation  $\mu$  permet de donner la contribution des événements arrivés à la fonction d'intensité  $\lambda^*$ .

Une fonction  $\mu$  décroissante implique alors que l'influence des événements récents

est plus importante que celle des évènements antérieurs.  
Usuellement on choisit  $\mu$  de la manière suivante:

$$\mu(t) = \alpha e^{-\beta t} 1_{\mathbb{R}^+}(t), \quad (4)$$

où on doit avoir  $0 \leq \alpha < \beta$  pour que le processus soit bien défini.  
Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires à la construction de nos prix.

### 4.3 Construction des prix

Comme évoqué en partie 3.3.3, il est nécessaire de représenter le phénomène de *Mean Reversion* en petite échelle et de le voir disparaître en grande échelle pour modéliser le plus fidèlement possible nos processus de prix. Pour cela, les auteurs de [3] ont eu l'idée d'utiliser des processus de Hawkes qui de part leur nature particulière nous permettent de représenter l'oscillation autour de sa moyenne caractéristique de l'évolution du prix d'un actif. Tout ce qui suit est basé sur leur papier de recherche.

Soient  $N^1$  et  $N^2$  deux processus de Hawkes représentant simultanément les sommes des sauts positifs et négatifs d'un certain actif  $X$  sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . On a alors:

$$X_t = N_t^1 - N_t^2.$$

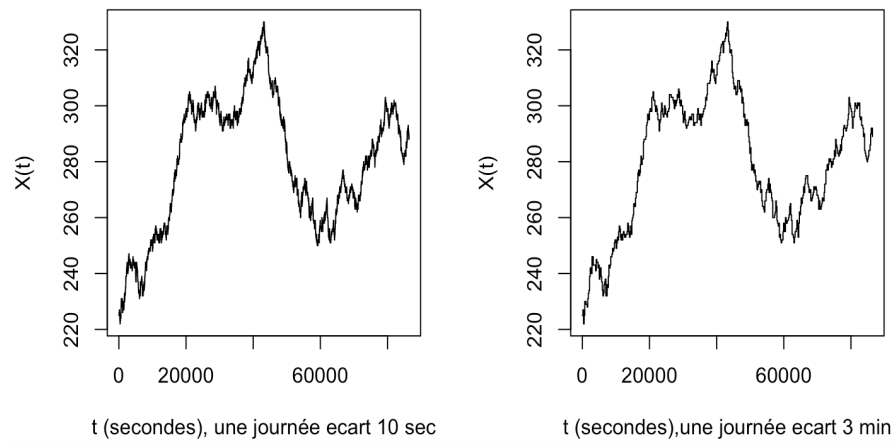
Les processus  $N^1$  et  $N^2$  ont pour fonctions d'intensité conditionnelle respectives:

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(t) &= \lambda + \int_{-\infty}^t \mu(t-s) dN^2(s), \\ \lambda_2^*(t) &= \lambda + \int_{-\infty}^t \mu(t-s) dN^1(s). \end{aligned}$$

On observe que  $\lambda_1^*$  est fonction de  $N^2$  et de même  $\lambda_2^*$  est fonction de  $N^1$ . Cette propriété est bien représentative de la *Mean Reversion* car une augmentation de  $X$  représentée par une augmentation de  $N^1$  entraîne l'excitation de  $\lambda_2^*$  et donc une hausse de  $N^2$  ce qui aboutit à une diminution de  $X$ .

Un choix standard pour  $\mu$  est alors de prendre la fonction définie en (4), appelée en général forme exponentielle de  $\mu$  et telle que

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1.$$



**Figure 4.1**-Représentation des prix simulés avec des processus de Hawkes sur une journée.

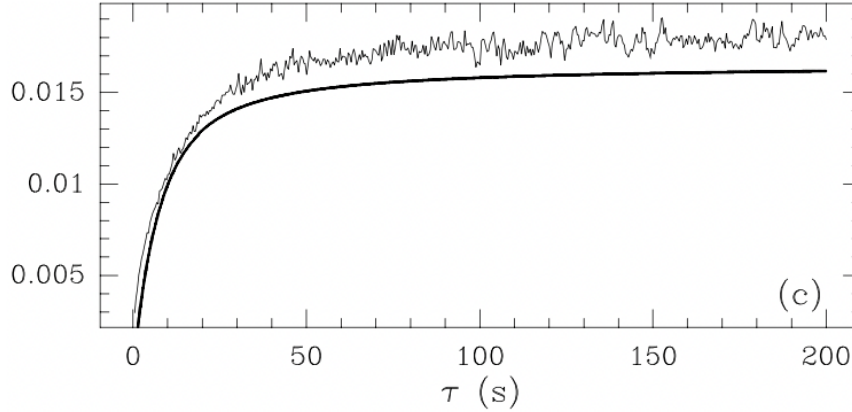
## 5 Estimateur de Fourier

Après avoir modélisé au mieux nos prix, nous allons maintenant nous intéresser à l'estimation de la volatilité, aux performances des différents estimateurs et notamment de celui décrit dans [5] sur lequel est basé tout le paragraphe. Tous les résultats énoncés ont été adaptés au cas d'un actif simple mais peuvent être étendus au cas de deux ou plusieurs actifs comme ce qui est fait dans le papier de recherche.

### 5.1 Problèmes récurrents des estimateurs classiques

Parmi la famille des estimateurs de la volatilité, trois principaux problèmes sont observés:

-Dans un premier temps, on souhaite observer le comportement d'un actif à la fréquence maximale. Cependant, cette fréquence n'étant pas universelle mais dépendante de chacun des actifs, un problème de désynchronisation est alors observé. Il faut donc utiliser des méthodes de synchronisation pour rendre robustes nos estimateurs car autrement ils souffrent d'un problème de biais.



**Figure 5.1**-Observation du biais de l'estimateur de la co-volatilité.

(Source: [3], Figure 7 c))

-Le calcul numérique de quantités telles que (2) nécessite de réaliser une sorte de dérivation numérique qui, combinée à la méthode d'approximation, entraîne une grande instabilité des résultats.

-Finalement, de part la forme des marchés financiers, on observe toujours une discrétisation des prix, d'où un manque de précision dans l'utilisation de nos estimateurs qui dépendent d'une limite jamais atteignable.

L'estimateur que nous allons présenter permet de pallier les deux premiers problèmes car il utilise toutes les données disponibles et n'est pas inquiété par des problèmes de synchronisation grâce à sa structure. De plus, il reste compétitif en terme d'erreur quadratique moyenne par rapport aux autres estimateurs concernant le troisième point.

## 5.2 Construction de l'estimateur

L'estimateur que nous avons choisi se base sur les méthodes de séries de Fourier. Introduisons alors les objets que nous utiliserons tout au long de la section. Quitte à effectuer un changement d'échelle, on suppose dans tout ce qui suit que  $T = 2\pi$ .

**Définition de la transformée de Fourier:** Soit  $g$  une fonction sur le tore  $S^1$ , on appelle transformée de Fourier de  $g$ , la fonction définie sur  $\mathbb{Z}$  par:

$$\mathcal{F}(g)(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-ikx) dx \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

On définit aussi le produit de convolution de Bohr.

**Définition du produit de convolution de Bohr:** Soient deux fonctions  $f$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{Z}$ , on dit que le produit de convolution de Bohr existe si la limite suivante est finie pour tout entier  $k$ :

$$(f *_B h)(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N f(s)h(k-s).$$

**Théorème de Parseval:** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur le tore. Alors on a l'égalité suivante:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(n)|^2.$$

La pierre angulaire de l'estimateur repose sur la relation fondamentale entre la transformée de Fourier du processus de prix et de sa volatilité.

**Théorème:** Soit  $X$  vérifiant (1), on a alors:

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\sigma^2)(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} \mathcal{F}(dX)(s) \mathcal{F}(dX)(k-s).$$

Pour démontrer le théorème nous aurons besoin d'utiliser différents résultats de calcul stochastique que nous exposons ici.

**Définition d'un temps d'arrêt:** Une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est un temps d'arrêt par rapport à la filtration  $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$  si:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

**Définition d'une martingale locale:** Un processus  $X$  est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts  $\{\tau_n, n \geq 0\} \rightarrow +\infty$  telle que pour tout  $n$ , le processus  $\{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$  est une martingale.

**Définition de la variation quadratique:** Soient  $X$  et  $Y$  deux martingales locales continues. Pour toute suite de subdivisions  $\Delta_n = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  de  $[0, T]$  et tout  $t$ , on pose:

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}).$$

**Proposition 5.1** (*Isométrie d'Itô*): Soit  $X$  un processus  $\mathbb{F}$ -adapté, on a:

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T X_t^2 dt \right].$$

**Proposition 5.2** (*Martingale et processus d'Itô*): Soit  $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u$  un processus d'Itô vérifiant (H). Alors,  $X$  est une  $\mathbb{F}$ -martingale si et seulement si le processus  $\alpha$  est presque sûrement nul.

**Proposition 5.3** (*Formule d'intégration par parties*): Soient  $X, Y$  deux processus d'Itô vérifiant (H). Alors:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

**Proposition 5.3** (*Inégalité de Burkholder-Gundy*): Soit  $X$  une martingale locale débutée en 0 et  $\tau$  un temps d'arrêt. Alors pour tout  $1 \leq p < \infty$ , il existe des constantes positives  $c_p$  et  $C_p$  telles que:

$$c_p \mathbb{E} \left[ (\langle X \rangle_\tau)^{\frac{p}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left( \sup_{s \leq \tau} |X_s| \right)^p \right] \leq C_p \mathbb{E} \left[ (\langle X \rangle_\tau)^{\frac{p}{2}} \right].$$

Dans le cas particulier où  $p = 2$ , on a alors  $c_2 = 1$  et  $C_2 = 4$ .

Voici un lemme qui sera utile à la démonstration du théorème, celle-ci étant basée sur la démonstration réalisée dans [5] mais adaptée au cas d'un actif simple:

**Lemme:** Soit une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{Z}$  et soit la semi-norme  $L^2$  de Bohr

$$\|u\|_{BL^2}^2 := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (u(k))^2.$$

Alors

$$\|u *_B v\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{BL^2} \|v\|_{BL^2}.$$



**Démonstration du lemme:** On définit le produit scalaire de Bohr

$$\langle u, v \rangle_{BL^2} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u(k) \overline{v(k)}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que:

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N u(k) \overline{v(k)} \leq \left( \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (u(k))^2 \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (v(k))^2 \right)^{1/2}.$$

Comme pour tout  $a \in \mathbb{Z}$

$$(u *_B v)(a) = \langle u, \overline{v(a - \cdot)} \rangle_{BL^2}$$

et

$$\|\overline{v(a - \cdot)}\|_{BL^2} = \|v\|_{BL^2},$$

on trouve alors pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ :

$$(u *_B v)(a) \leq \|u\|_{BL^2} \left\| \overline{v(a - \cdot)} \right\|_{BL^2}.$$

Donc pour tout  $a \in \mathbb{Z}$

$$(u *_B v)(a) \leq \|u\|_{BL^2} \|v\|_{BL^2}.$$

D'où le résultat.

Démontrons maintenant le théorème.

*Démonstration. Première étape:* Montrons qu'on peut supposer  $\mu(t) \equiv 0$  sans perte de généralité dans (1).

En effet, on a par la linéarité de la transformée de Fourier:

$$\mathcal{F}(dX)(k) = \mathcal{F}(\mu)(k) + \mathcal{F}(d\sigma)(k),$$

où

$$d\sigma(t) := \sigma(t) dBt.$$

Notons  $\phi_\mu(h) := \mathcal{F}(\mu)(h)$  et  $\phi_\sigma(k) := \mathcal{F}(d\sigma)(k)$ . On trouve alors:

$$\mathcal{F}(dX) *_B \mathcal{F}(dX) = (\phi_\mu + \phi_\sigma) *_B (\phi_\mu + \phi_\sigma).$$

Montrons que:  $(\phi_\mu + \phi_\sigma) *_B (\phi_\mu + \phi_\sigma) = \phi_\sigma *_B \phi_\sigma$ .

On a en développant le produit de convolution le résultat suivant:

$$(\phi_\mu + \phi_\sigma) *_B (\phi_\mu + \phi_\sigma) = \phi_\mu *_B \phi_\mu + \phi_\mu *_B \phi_\sigma + \phi_\sigma *_B \phi_\mu + \phi_\sigma *_B \phi_\sigma. \quad (*)$$

Pour alléger les notations on pose:  $A(k) := (\phi_\mu *_B \phi_\mu)(k)$ .

Ainsi on a par définition:  $A(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} \phi_\mu(s) \phi_\mu(k-s)$ .

Donc par le lemme précédent on en déduit:

$$\|A\|_\infty \leq \|\phi_\mu\|_{BL^2} \|\phi_\mu\|_{BL^2} = \|\phi_\mu\|_{BL^2}^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|k| \leq N} (\phi_\mu(k))^2.$$

On peut alors appliquer le théorème de Parseval à  $\mu$  pour obtenir que:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\phi_\mu(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mu(t)|^2 dt.$$

Finalement on trouve:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &\leq \|\phi_\mu\|_{BL^2}^2 = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N (\phi_\mu(k))^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} |\mu(t)|^2 dt = 0. \end{aligned}$$

On voit donc que la contribution de A dans \* est nulle.

En notant:  $D(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} \phi_\mu(s) \phi_\sigma(k-s) = (\phi_\mu *_B \phi_\sigma)(k)$ , on obtient de nouveau par le lemme:

$$\|D\|_\infty \leq \|\phi_\mu\|_{BL^2} \|\phi_\sigma\|_{BL^2} = 0,$$

car on a montré que  $\|\phi_\mu\|_{BL^2}^2 = 0$  et par conséquent  $\|\phi_\mu\|_{BL^2} = 0$ . Donc la contribution de D dans \* est nulle. Par symétrie on obtient le même résultat pour le dernier terme dans \*.

**Deuxième étape:** On suppose donc que  $\mu(t) \equiv 0$ . On rappelle que notre processus est alors de la forme:  $dX_t = \sigma(t)dB_t$ .

Nous allons introduire un nouvel élément:

$$\Gamma_k(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-iks} dX_s.$$

On peut réécrire ce dernier sous la forme suivante:

$$d\Gamma_k(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-ikt} \sigma(t) dB_t.$$

On sait par la proposition 5.2 que le processus  $\Gamma_k$  est une  $\mathbb{F}$ -Martingale, et de plus par la formule de l'intégration par parties on a la relation suivante:

$$d(\Gamma_l \Gamma_r)(t) = \Gamma_l(t) d(\Gamma_r)(t) + \Gamma_r(t) d(\Gamma_l)(t) + d\langle \Gamma_l, \Gamma_r \rangle_t.$$

Or, on a aussi par définition de la variation quadratique:

$$d \langle \Gamma_l, \Gamma_r \rangle_t = \frac{1}{2\pi} e^{-ilt} \sigma(t) dt \times \frac{1}{2\pi} e^{-irt} \sigma(t) dt = \frac{1}{4\pi^2} e^{-i(l+r)t} \sigma^2(t) dt.$$

Ceci nous donne donc en intégrant sur  $[0, 2\pi]$  que:

$$\Gamma_l(2\pi)\Gamma_r(2\pi) = \int_0^{2\pi} \Gamma_l(t) d\Gamma_r(t) + \int_0^{2\pi} \Gamma_r(t) d\Gamma_l(t) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2} e^{-i(l+r)t} \sigma^2(t) dt.$$

En notant alors:  $C(l, r) := \int_0^{2\pi} \Gamma_l(t) d\Gamma_r(t) + \int_0^{2\pi} \Gamma_r(t) d\Gamma_l(t)$ ,  
on obtient en posant  $l=s$  et  $r=k-s$  la relation:

$$\Gamma_s(2\pi)\Gamma_{k-s}(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\sigma^2)(k) + C(s, k-s).$$

Ainsi on a:

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \Gamma_s(2\pi)\Gamma_{k-s}(2\pi) = \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\sigma^2)(k) + \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N C(s, k-s)$$

qui est équivalent à:

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \Gamma_s(2\pi)\Gamma_{k-s}(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\sigma^2)(k) + \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N C(s, k-s).$$

Maintenant, si nous arrivons à montrer que:

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N C(s, k-s) = 0$  en probabilité,  
alors on aura:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \Gamma_s(2\pi)\Gamma_{k-s}(2\pi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\sigma^2)(k) \text{ en probabilité,}$$

ce qui veut dire que:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \mathcal{F}(dX)(s) \mathcal{F}(dX)(k-s) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\sigma^2)(k) \text{ en probabilité.}$$

Ainsi ceci conclurait notre preuve.

**Troisième étape:** Montrons que:

$$C^N := \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N C(s, k-s) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

On a:

$$\begin{aligned}
C^N &= \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \int_0^{2\pi} \Gamma_s(t) d\Gamma_{k-s}(t) + \Gamma_{k-s}(t) d\Gamma_s(t) \\
&= \frac{2}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \int_0^{2\pi} \Gamma_{k-s}(t) d\Gamma_s(t) \quad (\text{Par symétrie}) \\
&= \frac{2}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \int_0^{2\pi} d\Gamma_s(t_1) \int_0^{t_1} d\Gamma_{k-s}(t_0).
\end{aligned}$$

Introduisons maintenant le noyau de Dirichlet ajusté, noté  $D_N(t)$ , et défini par:

$$D_N(t) := \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N e^{ist} = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}
C^N &= \frac{2}{2N+1} \sum_{s=-N}^N \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-ist_1} dX_{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{2\pi} e^{-i(k-s)t_0} dX_{t_0} \\
&= \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dX_{t_1} \int_0^{t_1} e^{-ikt_0} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N e^{is(t_0-t_1)} dX_{t_0} \quad (\text{Par Fubini}) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} dX_{t_1} \int_0^{t_1} e^{-ikt_0} D_N(t_0 - t_1) dX_{t_0}.
\end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$\begin{aligned}
\alpha(t_1) &:= \int_0^{t_1} \cos(kt_0) D_N(t_0 - t_1) \sigma(t_0) dB_{t_0}, \\
\beta(t_1) &:= \int_0^{t_1} \sin(kt_0) D_N(t_0 - t_1) \sigma(t_0) dB_{t_0}.
\end{aligned}$$

Par la formule d'isométrie d'Itô on trouve alors:

$$4\pi^4 \mathbb{E} \left[ (C^N)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} (\alpha^2(t_1) + \beta^2(t_1)) (\sigma(t_1))^2 dt_1 \right].$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$\left( 4\pi^4 \mathbb{E} \left[ (C^N)^2 \right] \right)^2 \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(t_1)^4 dt_1 \right] \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} (\alpha^2(t_1) + \beta^2(t_1))^2 dt_1 \right].$$

Comme  $(\alpha^2(t_1) + \beta^2(t_1))^2 \leq 4(\alpha^4(t_1) + \beta^4(t_1))$ , on a finalement que:

$$\left( 4\pi^4 \mathbb{E} \left[ (C^N)^2 \right] \right)^2 \leq 4 \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(t_1)^4 dt_1 \right] \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} (\alpha^4(t_1) + \beta^4(t_1)) dt_1 \right]. \quad (5)$$

On sait par (H) que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(t_1)^4 dt_1 \right] < +\infty$ , il nous reste alors à montrer que le terme de droite dans (5) tend vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ .  
Pour cela nous allons utiliser l'inégalité de Burkholder-Gundy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \alpha(t_1)^4 dt_1 \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} (\alpha(t_1)^2)^2 dt_1 \right] \\ &\leq 4\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \langle \alpha(t_1)^2 \rangle dt_1 \right]. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t_1)^2 \rangle &= \int_0^{t_1} \cos(kt_0)^2 D_N(t_0 - t_1)^2 \sigma(t_0)^2 \cos(kt_0)^2 D_N(t_0 - t_1)^2 \sigma(t_0)^2 dt_0 \\ &= \int_0^{t_1} \cos(kt_0)^4 D_N(t_0 - t_1)^4 \sigma(t_0)^4 dt_0 \\ &\leq \int_0^{t_1} D_N(t_0 - t_1)^4 \sigma(t_0)^4 dt_0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x)^4 \leq 1$ . On en déduit donc que:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \alpha(t_1)^4 dt_1 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} D_N(t_0 - t_1)^4 \sigma(t_0)^4 dt_0 dt_1 \right].$$

Faisons alors le changement de variables suivant:

$$\begin{aligned} \Psi : [0, t_1] \times [0, 2\pi] &\rightarrow [0, t_1] \times [-2\pi, 2\pi] \\ (t_0, t_1) &\mapsto (u, v) \end{aligned}$$

avec  $u = t_0$  et  $v = t_1 - t_0$ .

$\Psi$  réalise un  $C^1$  difféomorphisme et on trouve par la formule de changement de variables:  $4\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} D_N(t_0 - t_1) \sigma(t_0)^4 dt_0 dt_1 \right]$

$$\begin{aligned} &= 4\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} D_N^4(-v) \sigma(u)^4 du dv \right] \\ &= 4\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(u)^4 du \right] \mathbb{E} \left[ \int_{-2\pi}^{2\pi} D_N^4(-v) dv \right] \\ &= 4\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(u)^4 du \right] 2 \int_0^{2\pi} D_N^4(v) dv \quad (\text{Par symétrie de } D_N) \\ &= 8\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(u)^4 du \right] \int_0^{2\pi} D_N^4(v) dv. \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\begin{aligned}
|D_N(t)| &= \left| \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N e^{ist} \right| \\
&\leq \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N |e^{ist}| \\
&\leq \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N 1 = 1,
\end{aligned}$$

on trouve finalement:

$$\int_0^{2\pi} D_N^4(v) dv \leq \int_0^{2\pi} D_n^2(v) dv.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} D_N^2(v) dv &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^N e^{isv} dv \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} e^{i(k-N)v} dv \\
&= \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0}^{2n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-N)v} dv \quad (\text{Par Fubini}) \\
&= \frac{2\pi}{2N+1},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé à la troisième ligne l'identité  $\int_0^{2\pi} e^{i(k-N)v} dv = \begin{cases} 0 & \forall k \neq N \\ 2\pi & \text{pour } k = N. \end{cases}$

Finalement, on a donc obtenu que:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \alpha(t_1)^4 dt_1 \right] \leq 8 \mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(u)^4 du \right] \frac{2\pi}{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

On montre ainsi symétriquement de même que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^{2\pi} \beta(t_1)^4 dt_1 \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .

Le terme de droite dans (5) tend alors bien vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$ . Ceci montre donc que  $C^N$  tend vers 0 en norme  $L^2$  ce qui implique la convergence de  $C^N$  vers 0 en probabilité, d'où le résultat.  $\square$

D'après le théorème, on voit que l'on obtient tous les coefficients de Fourier de la volatilité par le produit de convolution de Bohr des transformées de Fourier du processus de prix. On peut alors retrouver la valeur de  $\sigma^2$  en utilisant la somme de Fourier-Féjer. En effet, en posant pour tout  $k \in [-2N, 2N]$

$$\phi(k) := \mathcal{F}(dX)(k),$$

puis

$$\psi(k) := \frac{1}{2N+1} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \phi(s) \phi(k-s),$$

on obtient par la somme de Fourier-Féjer, presque-partout, que:

$$\sigma^2(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \psi(k) \exp(ikt) \quad \text{pour tout } t \in [0, 2\pi].$$

### 5.3 Estimateur de la volatilité instantanée

Fort de la dernière égalité trouvée, on peut maintenant en déduire un estimateur de la volatilité instantanée. Soit  $\mathcal{T}_n := \{t_j, j = 0, \dots, n\}$  les temps de trade de notre actif  $X$ . On suppose que  $t_0 = 0$  et  $t_n = 2\pi$ . Posons  $\Delta(n) = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$ . On doit avoir que  $\Delta(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On note les rendements par  $\delta_i(X) := X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ . Pour tout entier  $k$  tel que  $|k| \leq 2N$ , soit:

$$c_k(dX_n) := \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \exp(-ikt_i) \delta_i(X).$$

Posons de plus

$$c_k(\sigma^2) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \sigma^2(t) dt.$$

Soit pour tout  $|k| \leq N$

$$\alpha_k(N, X_n) := \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} c_s(dX_n) c_{k-s}(dX_n).$$

Finalement, définissons

$$\hat{\sigma}_{n,N}^2(t) := \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \alpha_k(N, X_n) e^{ikt}.$$

La fonction  $\hat{\sigma}_{n,N}^2$  est appelée estimateur de Fourier de la volatilité instantanée de  $\sigma^2$ . De plus, cet estimateur a le bon goût de converger en probabilité. (Le lecteur peut se référer à [5] pour une preuve.)

### 5.4 Estimateur de la volatilité intégrée

Nous avons porté une attention plus particulière à l'étude de la volatilité intégrée. Pour en obtenir un estimateur grâce à la méthode de Fourier, il suffit de regarder le coefficient  $k = 0$  qui donne:

$$2\pi \mathcal{F}(\sigma^2)(0) = \int_0^{2\pi} \sigma^2(t) dt.$$

Ainsi, par tout ce qui a été fait précédemment, on en déduit un estimateur, lui aussi consistant, de la volatilité intégrée, donné par:

$$\hat{\sigma}_{n,N}^2 := \frac{(2\pi)^2}{2N+1} \sum_{|s| \leq N} c_s(dX_n) c_{-s}(dX_n).$$

Il en existe une version plus stable numériquement en présence de bruits de microstructure utilisant le noyau de Féjer:

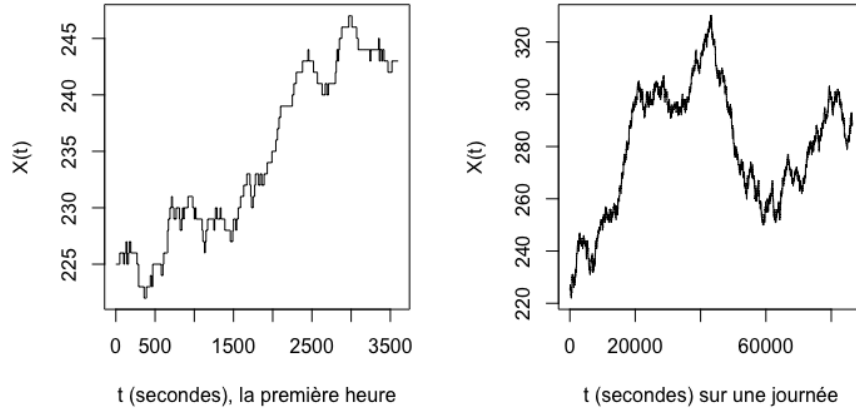
$$\tilde{\sigma}_{n,N}^2 := \frac{(2\pi)^2}{N+1} \sum_{s=-N}^N \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) c_s(dX_n) c_{-s}(dX_n).$$

En résumé, notre estimateur de Fourier utilise toutes les données disponibles et contrairement aux autres estimateurs, il ne souffre pas de biais causé par des bruits de microstructure en choisissant des fréquences plus faibles entre les prix. Il est donc parfaitement adapté à l'étude de la volatilité en petite échelle de temps.



## 6 Simulations numériques

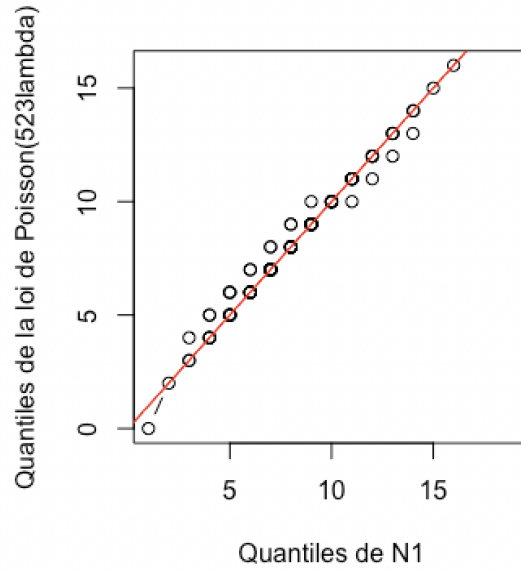
Comme expliqué précédemment, nous avons donc commencé notre travail numérique par la simulation de processus de prix. Pour ceci, nous avons utilisé le package `hawkes` sur R, dont la documentation est disponible dans [6]. Il existe différents packages permettant de simuler des processus de Hawkes, cependant la très grande majorité d'entre eux ne permettent que de simuler des processus de Hawkes univariés, alors que nous avons besoin de processus de Hawkes multivariés afin de représenter la dépendance si importante entre les fonctions d'intensités. Notre choix s'est donc naturellement porté sur ce package qui renvoie les temps de sauts associés aux processus. Nous avons donc pu à partir de ceux-ci, obtenir la valeur du processus de prix à n'importe quel instant. Voici une simulation de notre processus de prix avec la méthode des Hawkes.



**Figure 6.1-** Observation de la simulation de notre prix sur 24 heures, avec un zoom sur la première heure.

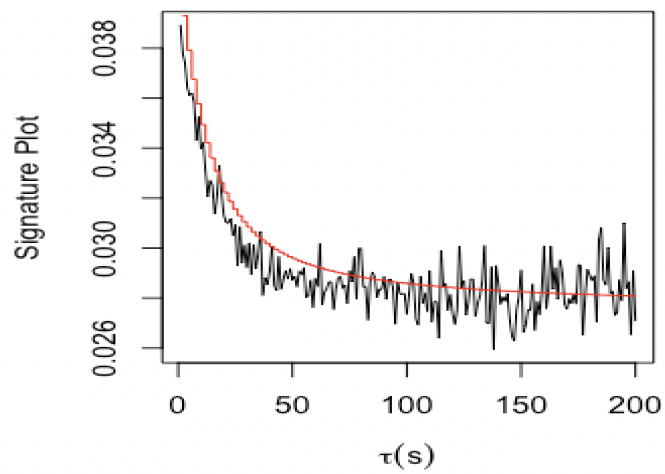
Puis l'étape suivante a été alors de s'assurer que le package ne renvoie pas d'absurdités. Pour ceci, nous avons dans un premier temps vérifié que pour le paramètre  $\alpha = 0$ , nous obtenions bien un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Nous avons alors décidé de regarder notre processus  $N^1$  en  $t = 523$ , choisi arbitrairement, afin de vérifier que nous obtenions bien une loi de Poisson de

paramètre  $523\lambda$ . Nous avons pour cela réalisé un diagramme quantile-quantile.



**Figure 6.2-** Diagramme Quantile-Quantile.

Celui-ci nous conforte dans l'idée que le package semble bien renvoyer des processus de Hawkes. Nous rappelons que le signature plot est usuellement le graphique de la volatilité réalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage. Un moyen de plus de vérifier nos résultats était alors de retrouver la forme particulière du Signature plot observée dans la **Figure 3.1**.

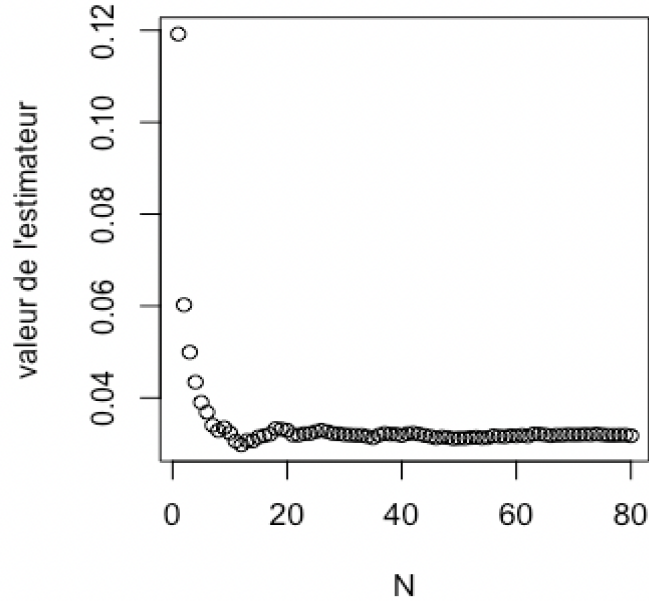


**Figure 6.3-** Signature Plot obtenu avec nos réalisations.

Ces résultats ont été obtenus en prenant les mêmes paramètres que dans [3], c'est à dire  $\lambda = 0.016$ ,  $\alpha = 0.024$  et  $\beta = 0.11$ . La courbe rouge représente quant à elle la valeur analytique du signature plot, trouvée dans le même article que précédemment, dans le cas d'une fonction d'excitation exponentielle. Une fois cette étape réalisée nous avons pu nous consacrer à la construction de l'estimateur de la volatilité intégrée par la méthode de Fourier. Pour coder au mieux celui-ci, nous avons utilisé le fait que :

$$c_{-k}(dX_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \exp(ikt_i) \delta_i(X) = \overline{c_k(dX_n)}.$$

Ensuite un des premiers objectifs est de choisir le paramètre  $N$  qui représente le nombre de coefficients de Fourier utilisés pour la construction de l'estimateur. Pour cela nous avons regardé la valeur de notre estimateur par rapport à la valeur de  $N$ .

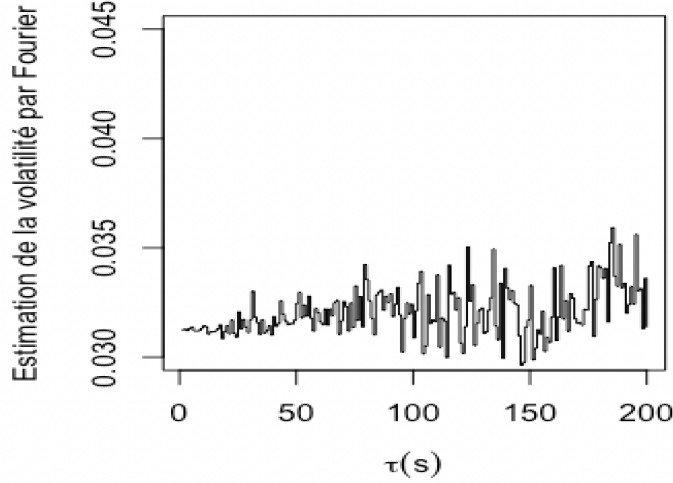


**Figure 6.4-** Valeur de l'estimateur en fonction de  $N$ .

Nous pouvons remarquer qu'assez rapidement un plateau se forme pour le choix de  $N$ . Nous avons donc décidé de prendre  $N = 500$ , ce choix de l'hyper-paramètre suffisamment grand nous permettra de rendre l'estimateur de Fourier le plus stable possible. Maintenant que celui-ci est fixé, nous pouvons regarder l'impact des changements d'échelle sur l'estimateur de Fourier.

Voici ci-contre l'évolution de notre estimateur en fonction de la fréquence

d'échantillonnage.



**Figure 6.5-** Valeur de l'estimateur en fonction de la fréquence d'échantillonnage.

On observe que notre estimateur répond bien à nos attentes. Nous voulions un estimateur plus stable en basse fréquence, qui ne soit pas affecté par la *Mean Reversion*, et ici, contrairement à la **Figure 6.3**, nous constatons une plus grande stabilité dans les petites échelles.

## 7 Conclusion

Ce travail a consisté à établir dans un premier temps une expression mathématique de la volatilité afin d'en comprendre les différentes subtilités. De cela, différentes problématiques et différents paradoxes tels que la modélisation du processus de prix ainsi que la façon de s'adapter à la petite échelle ont émergé. Notre travail a donc eu pour ligne directrice l'analyse et la résolution de ces problèmes. Les processus de prix ont été étudiés selon la méthode de [3], cette représentation ayant l'avantage de régler le problème des bruits de micro-structure tout en conservant une diffusion brownienne à grande échelle. Ainsi, elle permet d'établir une simulation qui se rapproche le plus des prix réellement observés. L'idée naturelle après avoir simulé nos prix de cette manière était alors d'en étudier la volatilité. Pour le choix de l'estimateur de la volatilité, nous avons opté pour l'estimateur basé sur les méthodes de séries de Fourier notamment pour ses performances à haute fréquence et ses caractéristiques qui en font un estimateur particulièrement robuste et compétitif. Une étude poussée du résultat de l'estimateur dit de Fourier, a été réalisée en partie 5. Une attention a été portée sur l'estimation de la volatilité intégrée, autant sur le plan théorique que numérique. Sur R, nous avons alors mis en lien la construction

du processus de prix avec l'étude de sa volatilité intégrée. Nous avons pu retrouver les résultats obtenus dans [3], et les avons comparé avec ceux propres à la méthode de Fourier. Notre regard s'est penché sur l'étude des paramètres de cet estimateur en **Figure 6.4** et **Figure 6.5** afin d'en comprendre au mieux ses caractéristiques. La stabilité à haute fréquence de l'estimateur de Fourier a donc pu être observée comme la théorie le prévoyait. Depuis quelques années, la question du perfectionnement des estimateurs de la volatilité a fait couler beaucoup d'encre pour répondre aux nouvelles attentes des marchés financiers. De même, des chercheurs ont mis au point des méthodes de simulation encore plus précises utilisant notamment des mouvements browniens dits fractionnaires ou multifractionnaires, ouvrant ainsi une nouvelle voie d'étude.

## Références

- [1] Loubna Ben Allal. “Processus de Hawkes”. PhD thesis. Ecole des Mines de Nancy, 2020.
- [2] Torben G Andersen, Dobrislav Dobrev, and Ernst Schaumburg. “Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation”. In: *Journal of Econometrics* 169.1 (2012), pp. 75–93.
- [3] Emmanuel Bacry et al. “Modelling microstructure noise with mutually exciting point processes”. In: *Quantitative finance* 13.1 (2013), pp. 65–77.
- [4] Ole E Barndorff-Nielsen et al. “Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise”. In: *Econometrica* 76.6 (2008), pp. 1481–1536.
- [5] Paul Malliavin and Maria Elvira Mancino. “A Fourier transform method for nonparametric estimation of multivariate volatility”. In: *The Annals of Statistics* 37.4 (2009), pp. 1983–2010.
- [6] Riadh Zaatour. *hawkes package*. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/hawkes/index.html>.
- [7] Lan Zhang. “Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: A multi-scale approach”. In: *Bernoulli* 12.6 (2006), pp. 1019–1043.
- [8] Lan Zhang, Per A Mykland, and Yacine Ait-Sahalia. “A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data”. In: *Journal of the American Statistical Association* 100.472 (2005), pp. 1394–1411.