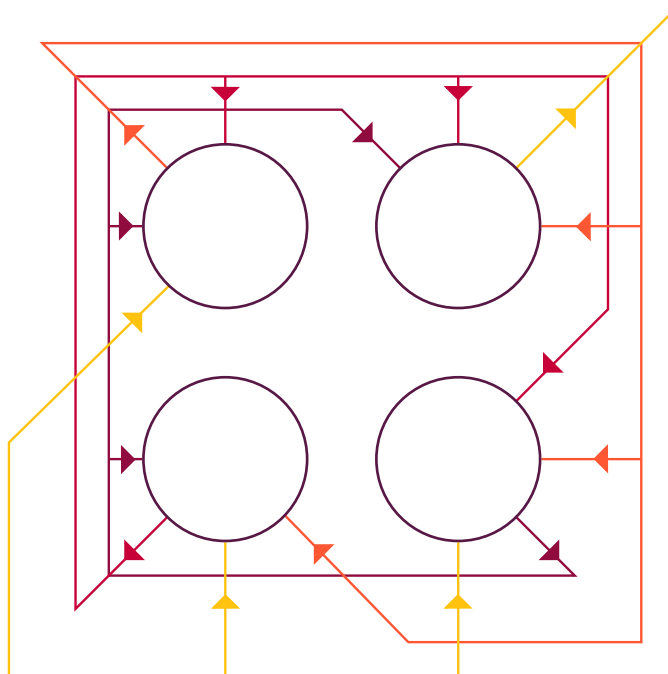


Modelo de Hopfield

Ejercicio voluntario Física Computacional

Antonio Jesús Rivera Pérez

3 Julio de 2023



Física computacional

Grado en Física - Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)



Índice

1. Introducción	3
1.1. Fundamento teórico	3
1.2. Descripción del problema	4
1.3. Simulación	6
2. Resultados	6
2.1. Funcionamiento para un solo patrón	6
2.1.1. Estado inicial aleatorio	6
2.1.2. Estado inicial utilizando el patrón deformado	7
2.1.3. Solapamiento en función de la temperatura	8
2.2. Funcionamiento para varios patrones	11
2.2.1. Estado inicial aleatorio	11
2.2.2. Estado inicial utilizando el patrón deformado	13
2.2.3. Solapamiento en función de la temperatura	14
3. Capacidad de memoria de la red	17
4. Conclusiones	19
5. Anexo	21

Resumen

En este informe se explicará y se expondrán los resultados obtenidos tras simular una red de Hopfield. Se estudiará como esta red es capaz de recordar patrones, que son configuraciones que minimizan su energía. Se comprobará mediante el algoritmo de metrópolis cómo al aumentar la temperatura el sistema no evoluciona a la configuración de mínima energía y hace que aparezcan estados aleatorios igual que en el modelo de Ising. Entre la mínima temperatura estudiada, en la que converge al patrón de forma perfecta, y en la que se obtiene un resultado aleatorio existen temperaturas intermedias en las que se obtienen configuraciones similares al patrón pero estas están distorsionadas. Se ha representado también como actúa el modelo dando distintas configuraciones iniciales. Por un lado se han probado condiciones iniciales aleatorias y por otro se ha comprobado que al iniciar la red partiendo de los patrones deformados el sistema converge más rápido a los patrones ya que el solapamiento inicial es mayor. Se ha visto que son estados estables de la red tanto el patrón almacenado como el antipatrón, llamado también estado espúreo. Las simulaciones se han realizado tanto para un patrón como para para varios patrones almacenados. En los que se ve que cuantos más patrones se tengan almacenados más le cuesta el sistema recordarlos todos y suele evolucionar de forma que la configuración final es una superposición de algunos o todos los patrones almacenados.

1. Introducción

1.1. Fundamento teórico

Una red de Hopfield es un tipo de red neuronal artificial monocapa capaz de recordar patrones que representan un mínimo en su configuración.

Una red neuronal artificial es un conjunto de neuronas dispuestas en capas interconectadas entre si cada una con un peso y un umbral de disparo. Si la salida de un nodo está por encima del umbral mencionado la neurona se activa y pasa sus datos a la siguiente capa. Los pesos de los nodos se deben ajustar para obtener los datos deseados. Para ello las redes neuronales se entrenan con datos para que puedan aprender y ajustarse de forma precisa para resolver el problema deseado. Las redes neuronales artificiales nos permiten crear herramientas que podemos utilizar en el desarrollo de inteligencia artificial y tienen diversos usos como el reconocimiento y ordenación de datos de forma muy rápida y eficiente.

Este tipo de red solo cuenta con una capa de neuronas no recurrentes, eso significa que las neuronas no están conectadas consigo mismas, eso lo veremos mas adelante cuando definamos los pesos y veamos que estos se anulan en el caso de una neurona consigo misma. Esta red trabaja con valores binarios entre los que se suelen utilizar -1 y 1 o 0 y 1 que es nuestro caso.

Para ver como están conectados los nodos se suele utilizar la representación gráfica que vemos en la Figura 1

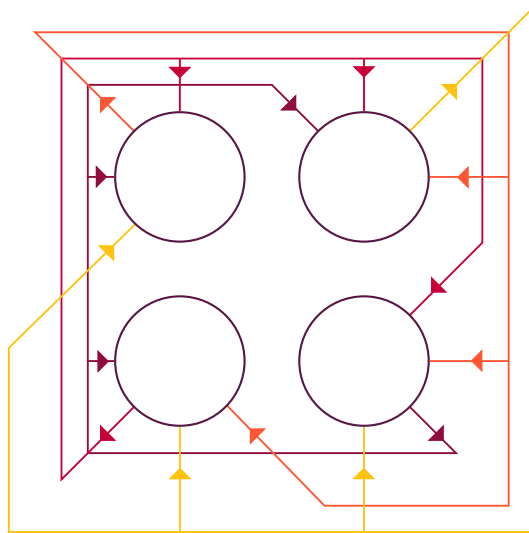


Figura 1: Representación de una red de Hopfield

En esta figura se ve cómo todos los nodos de la red están conectados entre sí menos consigo mismos. Por ello se dice que esta red es una red con conexiones de largo alcance totalmente conectada.

Como hemos dicho en la red de Hopfield consideraremos una red cuadrada con $N \times N$ neuronas. Cada una de las neuronas (i,j) se considera activa si $s_{i,j}=1$ e inactiva si es 0. El Hamiltoniano para cada configuración del sistema $s=s_{i,j}$ se expresa como:

$$H(s) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^N \omega_{ij,kl} s_{i,j} s_{k,l} + \sum_{i,j=1}^N \theta_{i,j} s_{i,j}$$

$\omega_{ij,kl}$ representa los pesos sinápticos que representarían las conexiones entre las neuronas. Estos toman la expresión:

$$\omega_{ij,kl} = \begin{cases} \frac{1}{N^2} \sum_{\mu=1}^P (\xi_{i,j}^{\mu} - a^{\mu})(\xi_{k,l}^{\mu} - a^{\mu}), & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 0, & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases}$$

Como vemos las neuronas están conectadas con las otras neuronas pero en el caso de una neurona consigo misma $\omega_{ij,ij}=0$ ya que no tienen conexión. a^{μ} sería el porcentaje de neuronas activadas del patrón que queremos recordar. Es decir, se calcula:

$$a^{\mu} = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \xi_{i,j}^{\mu}$$

El término $\theta_{i,j}$ del Hamiltoniano corresponde con el umbral de disparo y se calcula a partir de los pesos sinápticos:

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N \omega_{ij,kl} \quad (1)$$

Así quedaría completamente definida nuestra red neuronal. Para su evolución se utilizará el algoritmo de metrópolis. Con este algoritmo se recorrerán diferentes estados de la red y se evolucionará al de menor energía en caso de temperaturas bajas. Para la implementación de este algoritmo se elegirá un punto al azar de la red y se calculará la variación de energía que tendría el sistema al variar ese nodo de la red. De esta forma si la variación de energía es favorable hacia una configuración menos energética y la temperatura es baja el nodo elegido es mas probable que se cambie al otro estado. Como hemos explicado los patrones representan un mínimo del Hamiltoniano por lo que a temperaturas bajas se recuperará esa configuración.

1.2. Descripción del problema

Para la simulación del programa se utilizará el algoritmo de metrópolis para simular el funcionamiento de la red neuronal de Hopfield. Para ello se utilizará el Hamiltoniano explicado en la sección anterior. El mínimo del Hamiltoniano está definido por los patrones que se introducirán en cada caso. Para agilizar la ejecución del programa se buscará una expresión de ΔH para no tener que calcular $H(s')-H(s)$ de forma explícita todas las veces. Esta expresión quedaría como:

$$\Delta H = (-1)^{s_{n,m}} \left(- \sum_{i,j=1}^N \omega_{ij,nm} + \theta_{n,m} \right)$$

De esta forma obtendremos la variación de energía al cambiar el estado de la neurona con la posición (n,m). Para estudiar el funcionamiento de la red neuronal se probarán distintas temperaturas y distintas

configuraciones iniciales. Los patrones que se le introducirán a la red neuronal se pueden consultar en las imágenes de la Figura 2. La red se define de tamaño $N \times N$ donde N se ha elegido 100. Por lo tanto la red tendrá 10^4 neuronas, esto hará que las simulaciones sean más lentas pero se pueden estudiar patrones con más precisión. Primero se utilizará la primera imagen para estudiar el comportamiento de la red para un solo patrón. El resto de patrones se utilizarán en el caso de estudiar varios patrones a la vez. Se han elegido de esa forma los patrones para que se puedan distinguir los patrones fácilmente en caso que se superpongan al evolucionar la red.

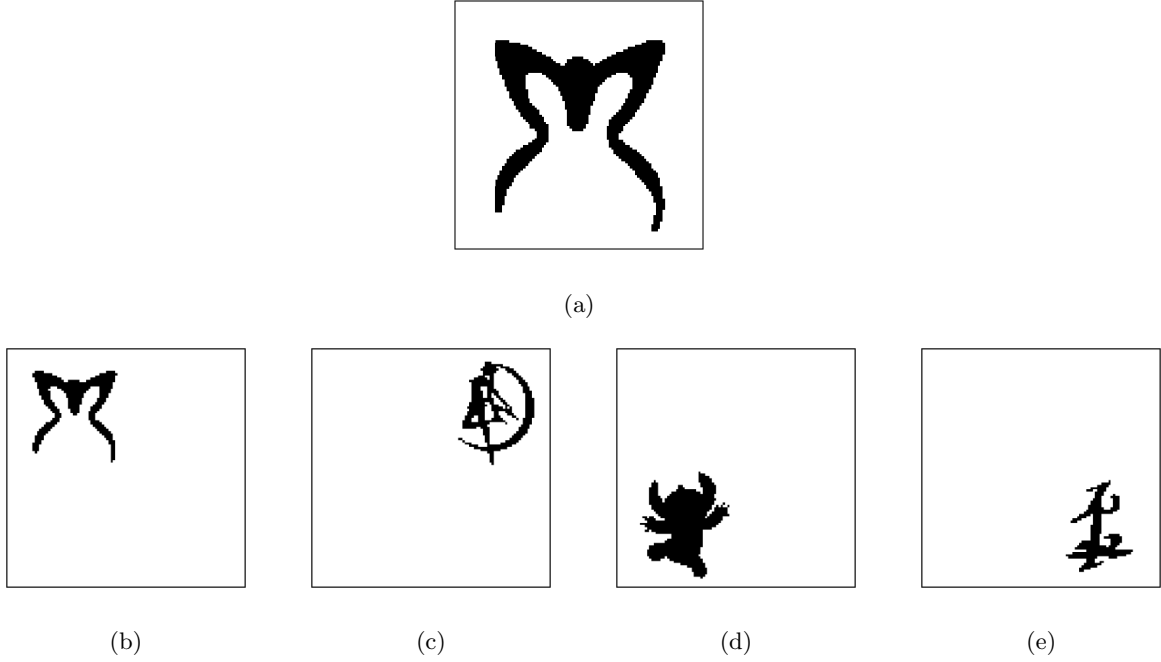


Figura 2: Imagen (a): Patrón almacenado para el caso de simular con un solo patrón. Imagen (b), (c) y (d): Patrones almacenados en la red a la hora de realizar la simulacion con varios patrones

Para el estudio del funcionamiento de la red se simulará realizando 100 pasos Monte Carlo en el algoritmo de metrópolis y se estudiará en cada caso la configuración final de la red. También se representará en cada caso el solapamiento de cada patrón para ver si la red evoluciona correctamente a los patrones almacenados. El solapamiento de la imagen μ se puede calcular como:

$$m^\mu(s) = \frac{1}{N^2 a^\mu (1 - a^\mu)} \sum_{i,j=1}^N (\xi_{i,j}^\mu - a^\mu)(s_{i,j} - a^\mu)$$

El solapamiento está acotado entre 1 y -1. Cuanto más cercano a 0 el patrón no se recuerda y no se puede distinguir. Por otro lado cuando el solapamiento es 1 se recuerda perfectamente. Cuando se obtiene -1 es que el sistema ha evolucionado a la configuración completamente contraria al patrón, que se conoce como estado espúreo.

Finalmente se comprobará la capacidad de recordar de la red en función de los patrones introducidos. Este procedimiento se explicará con más detalle en la última sección.

1.3. Simulación

Para la simulación se ha repetido el algoritmo de metrópolis repitiéndolo 100 pasos Monte Carlo. Se han representado los resultados obtenidos en cada paso Monte Carlo y se ha utilizado una red de 10^4 neuronas es decir una red cuadrada de 100×100 . Para el caso del estudio de ver cuantos patrones puede recordar la red se han utilizado otros parámetros que se explicarán mas adelante. Para la generación de números aleatorios se ha hecho uso de la librería gsl. Esta librería es un poco más difícil de implementar en Windows. Por ello, para las simulaciones realizadas en el ordenador se ha instalado Linux como un subsistema de Windows con WSL. En concreto se ha descargado la distribución Ubuntu. Descargarla como subsistema hace que esté mejor integrada y presenta ventajas respecto al uso de una máquina virtual tradicional. Este método es preferible ya que el sistema invitado accede directamente el hardware de la máquina. De esta forma no se necesita un software adicional que sobrecargue el sistema. El código y los resultados obtenidos y representados se pueden encontrar en el link https://github.com/antojrp/Ejercicios-extra/tree/main/Modelo_de_Hopfield.

2. Resultados

2.1. Funcionamiento para un solo patrón

Con el objetivo de determinar el funcionamiento del modelo de Hopfield se verá cómo esta red es capaz de recordar y reproducir un patrón. Para ello partiendo de diferentes condiciones iniciales se irá viendo si es capaz de recordar el patrón introducido. Para comprobar con que bondad se acerca el resultado deseado se hará uso de la función solapamiento explicada anteriormente y se estudiará como evoluciona según se va utilizando el algoritmo de metrópolis.

2.1.1. Estado inicial aleatorio

Partiendo de una condición inicial aleatoria en la que los nodos tienen la misma probabilidad de ser 0 o 1 se ha aplicado el algoritmo en tres ocasiones y los resultados obtenidos después de realizar 100 pasos Monte Carlo son los mostrados en la Figura 3.

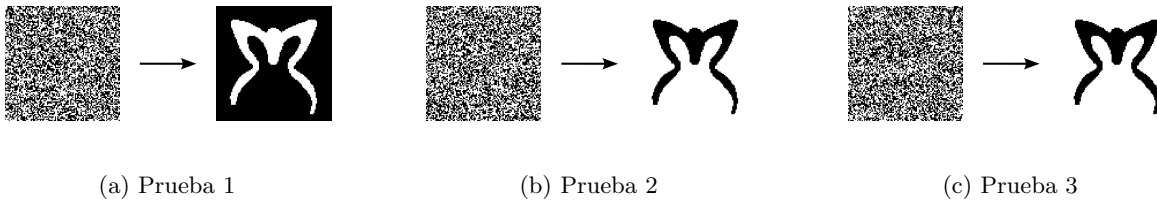


Figura 3: Imagen de partida y final tras aplicar el algoritmo de Hopfield con una temperatura $T=0.0001$ y estado inicial aleatorio

El solapamiento en cada caso se ha representado en función de los pasos Monte Carlo realizado y se pueden consultar en la gráfica 4

Como vemos al tener una temperatura muy baja el sistema evoluciona rápidamente al mínimo de energía que corresponde al patrón introducido. Una cosa interesante es que como vemos en el primer caso un solapamiento de -1 corresponde también al mínimo de energía. Este caso corresponde con la imagen que se le proporciona pero a la inversa. En la gráfica también se observa que la prueba 2 y 3 que evolucionan

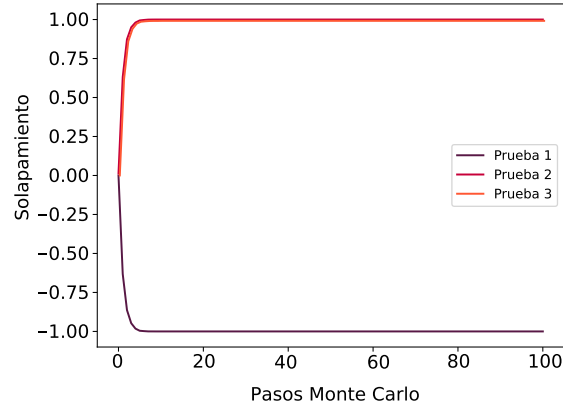


Figura 4: Evolución del solapamiento para las pruebas con un solo patrón y estado inicial aleatorio

a la misma imagen el solapamiento en cada paso es prácticamente el mismo ya que evoluciona tan rápido a 1 que la gráfica es casi igual.

2.1.2. Estado inicial utilizando el patrón deformado

Por otro lado también se ha comenzado con un patrón similar al patrón introducido pero que cuenta con una deformación para ver en este caso cómo evoluciona. Se ha partido del patrón inicial cambiando en un 20 % un 30 % y un 50 % de los nodos del patrón inicial de forma aleatoria. En la Figura 5 se puede ver de los patrones de los que se parte.



(a) Deformación 20 %



(b) Deformación 30 %



(c) Deformación 50 %

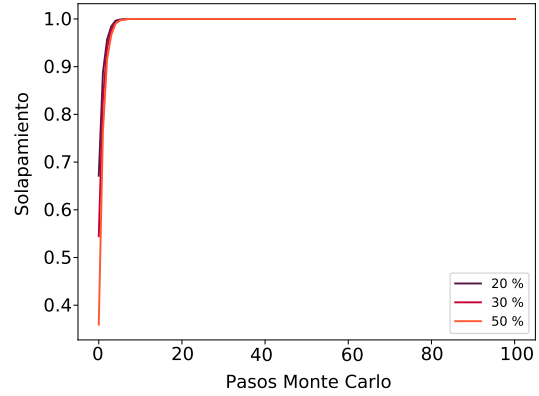
Figura 5: Condiciones iniciales usadas que cuentan con un 20 %, 30 % y 50 % de deformación con respecto al patrón almacenado

En la Figura 6 se puede observar la imagen final a la que se llega en los tres casos. En los tres casos se llega a la misma y corresponde con el patrón que corresponde con el mínimo introducido previamente. En la misma figura se puede observar una gráfica de como evoluciona el solapamiento en cada uno de los casos.

Como vemos en este caso la red también evoluciona rápidamente al caso en el que el solapamiento es total. La única diferencia entre los tres casos es que cuanto más deformación inicial haya menor es el solapamiento del que se parte.



(a) Estado final de la red.



(b) Evolución del solapamiento para distintas deformaciones y un solo patrón.

Figura 6: Configuración final obtenida en la red y evolución del solapamiento.

2.1.3. Solapamiento en función de la temperatura

Ahora se verá cómo afecta la temperatura al patrón final obtenido y cómo afecta al solapamiento. Para ello se ha simulado la red a diferentes temperaturas y se ha obtenido el solapamiento tras 100 pasos Monte Carlo. Además, se ha representado cómo evoluciona el solapamiento para las temperaturas más características y se ha representado el estado final de la red al finalizar.

Estado inicial aleatorio

La primera forma de tratar este problema será partiendo de un estado aleatorio para las diferentes temperaturas. En concreto el estado del que se parte es el representado en la Figura 7

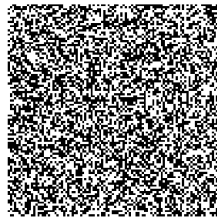


Figura 7: Estado aleatorio del que parte la red en las simulaciones a diferentes temperaturas de esta sección.

Como nos encontramos en la Figura 8, a medida que va aumentando la temperatura más le cuesta a la red converger al patrón introducido. Se puede ver que por ejemplo para una temperatura de 0.05 ya es imposible distinguir el patrón por lo que además el solapamiento en este caso es aproximadamente nulo y el estado de la red es aleatorio. Entre el caso de $T=0.0001$ y $T=0.05$ vemos cómo se va distinguiendo menos el patrón progresivamente.

Si nos fijamos detalladamente en la Figura 9 podemos ver cómo varía el solapamiento en función de la

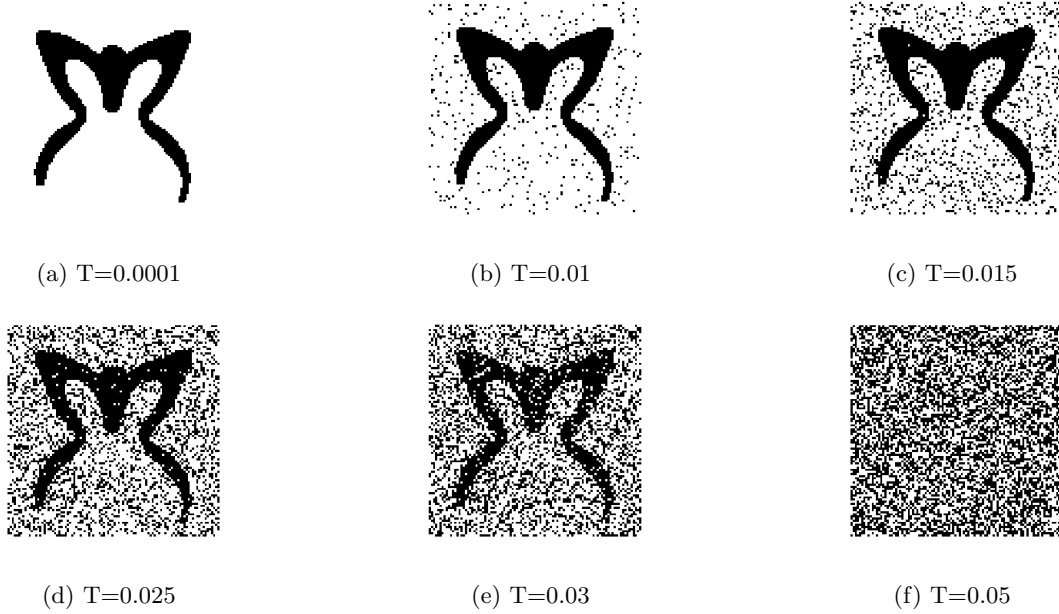


Figura 8: Configuraciones finales de la red a algunas temperaturas comenzando con un patrón aleatorio

temperatura. Este comienza en 1 para temperaturas bajas en que la red converge perfectamente al patrón introducido pero según aumenta la temperatura el solapamiento disminuye de forma rápida hasta que a partir de 0.04 aproximadamente el solapamiento se puede considerar nulo. A partir de esta temperatura el estado de la red es aleatorio y no coincide con el patrón.

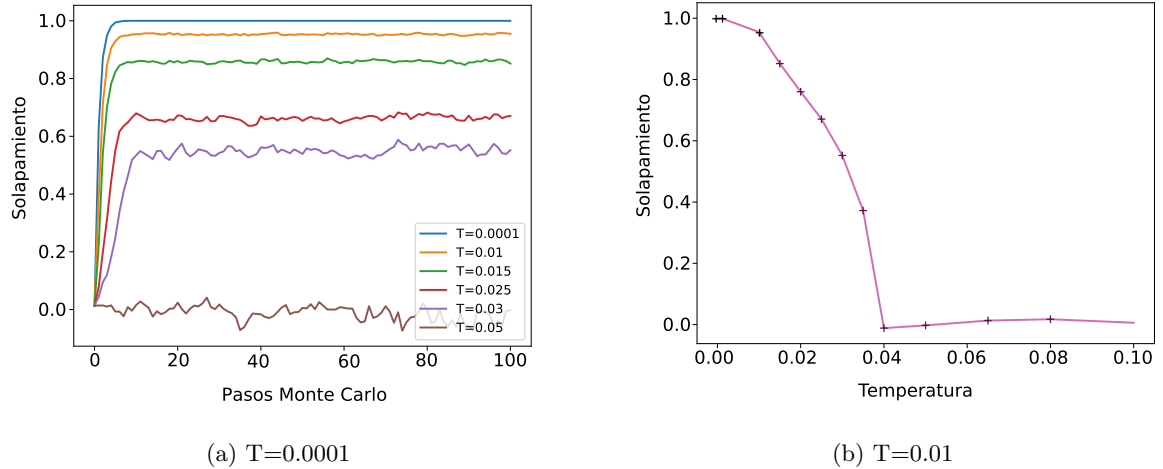


Figura 9: A la izquierda se encuentra la gráfica de como evoluciona el solapamiento para algunas temperaturas estudiadas, a la derecha se encuentra una gráfica de como varia el solapamiento después de los 100 pasos en función de la temperatura

También podemos ver cómo el solapamiento va evolucionando. Como vemos parte de un valor cercano a

0 ya que se trata de un estado aleatorio pero según va avanzando este evoluciona hacia un valor alrededor del que fluctúa. Vemos que cuanto más baja es la temperatura más fluctúa dicho valor. Además cuánto más baja es la temperatura más rápido evoluciona hasta el valor en el que se estabiliza.

Estado inicial utilizando el patrón deformado

Ahora veremos como varía el solapamiento si en vez de que el estado inicial sea aleatorio sea deformando el patrón. El estado inicial se puede ver en la figura Figura 10.



Figura 10: Estado inicial de la red en las simulaciones para diferentes temperaturas de esta sección

Igual que en el caso anterior se ha representado en la Figura 11 el estado final de la red para diferentes temperaturas. Al igual que en el caso anterior vemos cómo al aumentar la temperatura se ve con menos claridad el dibujo del patrón.

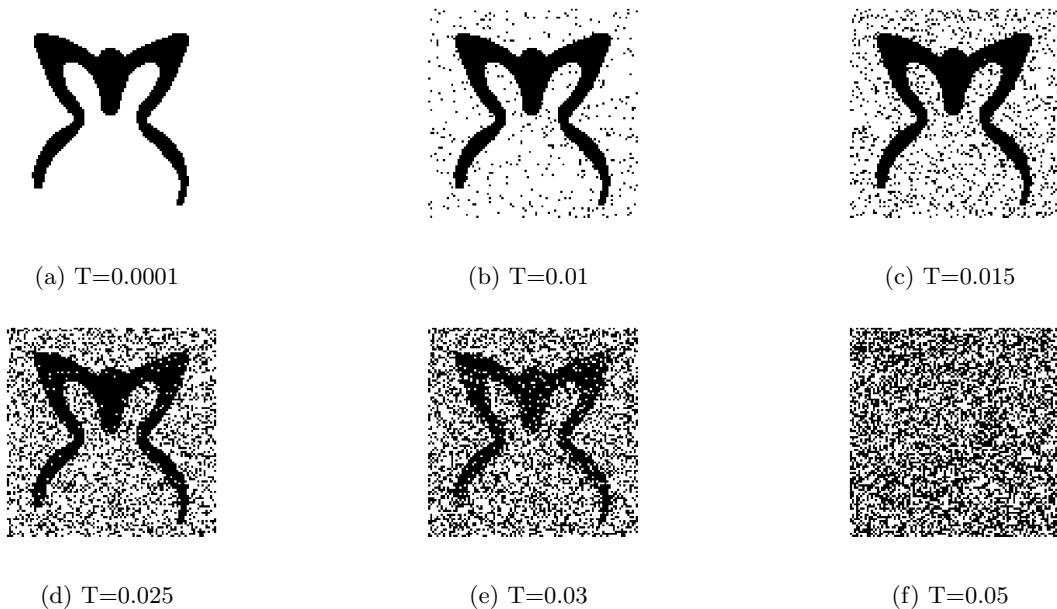


Figura 11: Configuraciones finales de la red a algunas temperaturas comenzando con un patrón deformado.

En la figura Figura 12 se puede ver cómo en este caso el solapamiento inicial es distinto de 0 ya que se empieza con un patrón deformado. También se ve que como según la temperatura el solapamiento

evoluciona hasta un valor más o menos estable alrededor del que fluctúa. En la gráfica (b) Vemos un caso muy parecido al anterior en el que el solapamiento comienza en 1 para temperaturas bajas y este disminuye según va aumentando la temperatura. A partir de la temperatura de 0.04 el patrón es irreconocible y por ello el solapamiento es muy bajo, cercano a 0.

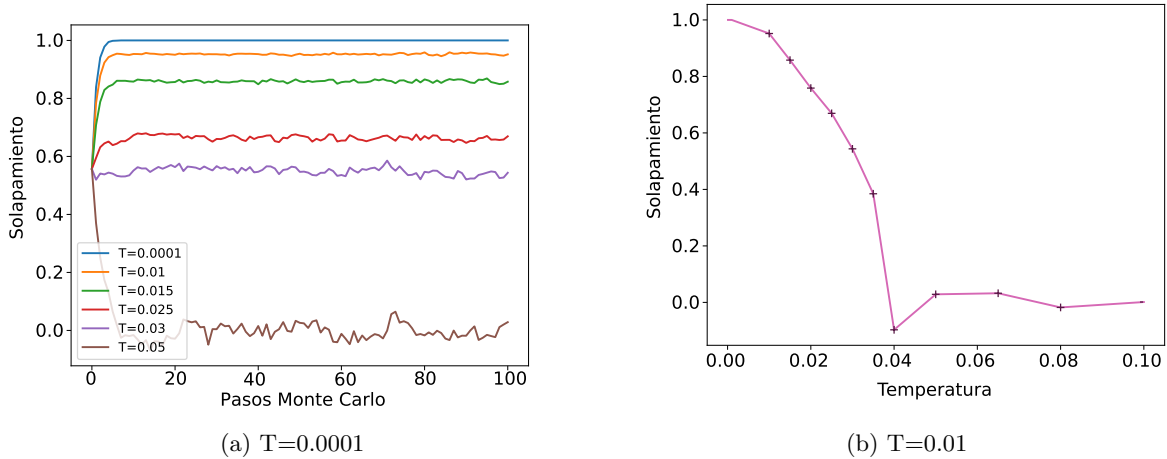


Figura 12: A la izquierda se encuentra la gráfica de como evoluciona el solapamiento para algunas temperaturas estudiadas, a la derecha se encuentra una gráfica de como varía el solapamiento después de los 100 pasos en función de la temperatura

2.2. Funcionamiento para varios patrones

En esta sección estudiaremos como funciona la red de Hopfield en el caso que se introduzcan varios patrones. Como se ha explicado en la introducción se han introducido en concreto cuatro patrones que corresponden a cuatro imágenes cada una en un cuadrante. Se estudiará primeramente cómo evoluciona la red a una temperatura de 0.0001 comenzando en distintos estados y se estudiará cómo evoluciona.

2.2.1. Estado inicial aleatorio

Primero se repetirá el proceso tres veces comenzando en un estado aleatorio y se llega tras 100 pasos Monte Carlo a los resultados representados en la figura Figura 13.

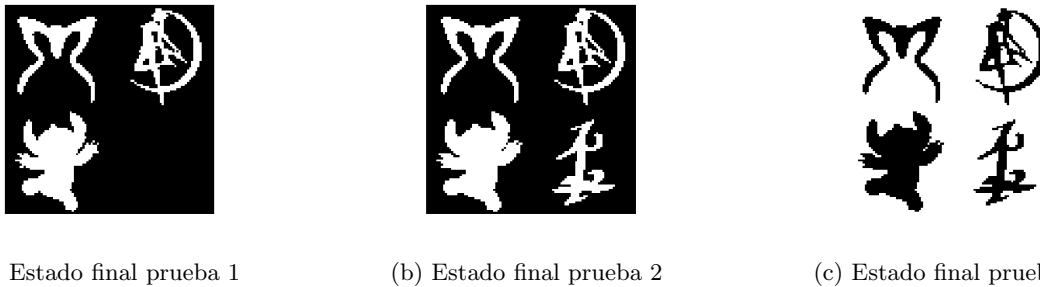
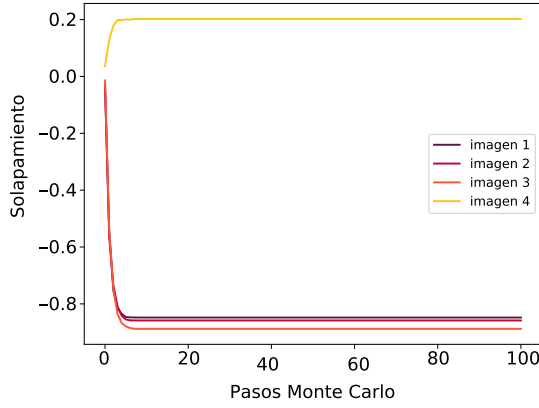
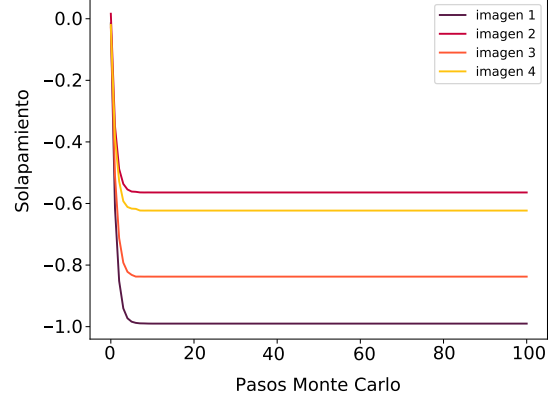


Figura 13: Configuración final de la red de tres pruebas diferentes comenzando con patrones aleatorios

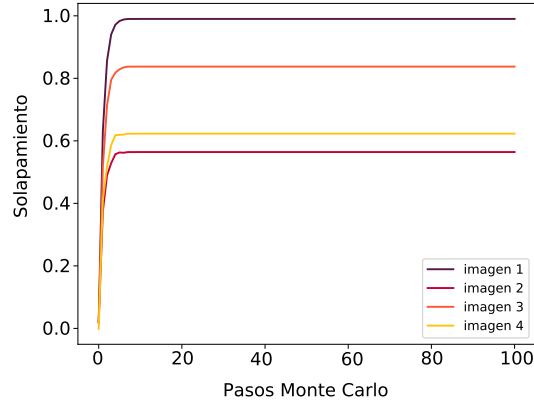
Como vemos en los dos últimos casos la red evoluciona de forma que el estado final es una superposición de los patrones de partida. La diferencia entre la segunda prueba y la tercera es que en las dos primeras se llega al estado espúreo que correspondería con solapamientos negativos y la tercera tendría solapamientos positivos. En la primera prueba se llega a un caso curioso. Debido a como empiezan los solapamientos, con el estado aleatorio, no todas las imágenes evolucionan tendiendo a un solapamiento -1. En concreto la red evoluciona de forma que la cuarta imagen acaba teniendo un solapamiento positivo cercano a 0.2 y la imagen no se es capaz de distinguir. En conclusión, nos encontramos que en la primera prueba solo se distinguen los tres primeros patrones que son los que el solapamiento evoluciona a un valor mayor, sin tener en cuenta el signo. La evolución del solapamiento se puede consultar en las gráficas de la figura Figura 14 en cada una de las gráficas se puede ver como evoluciona el solapamiento de cada imagen y cada una representa un caso.



(a) Evolución del solapamiento en la prueba 1



(b) Evolución del solapamiento en la prueba 2



(c) Evolución del solapamiento en la prueba 3

Figura 14: Evolución del solapamiento para las diferentes pruebas planteadas

Como vemos al ser la temperatura tan baja la red evoluciona rápidamente al estado de mínima energía con solapamiento máximo posible (o mínimo en los casos espúreos) y se estabiliza. El solapamiento no llega a ser 1 o -1 en ningún caso porque como he explicado antes el estado final es una superposición de estados por lo que no es exactamente ninguno de los patrones introducidos.

2.2.2. Estado inicial utilizando el patrón deformado

Después de comenzar de forma aleatoria se empezará la simulación en un estado deformado de alguno de los patrones. Como podemos ver en la figura Figura 15 el primer estado corresponde a la superposición de todos los patrones deformados y el segundo y tercer caso se ha elegido solo un patrón en cada caso que se ha deformado.

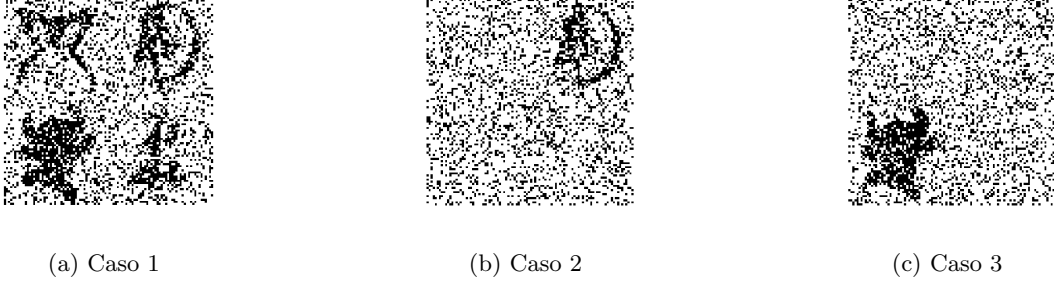


Figura 15: Representación de las configuraciones iniciales de la red en cada una de las pruebas

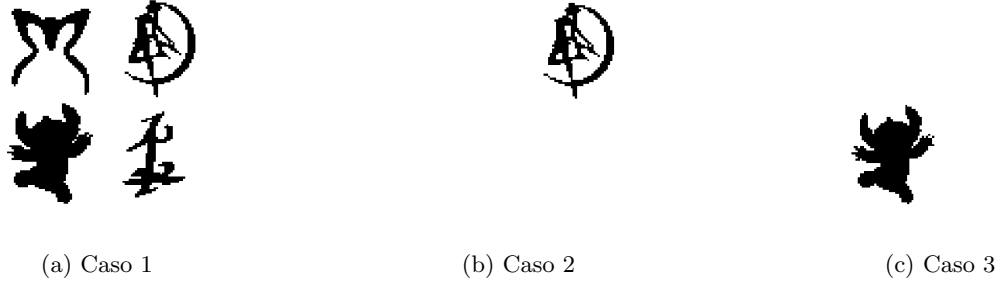
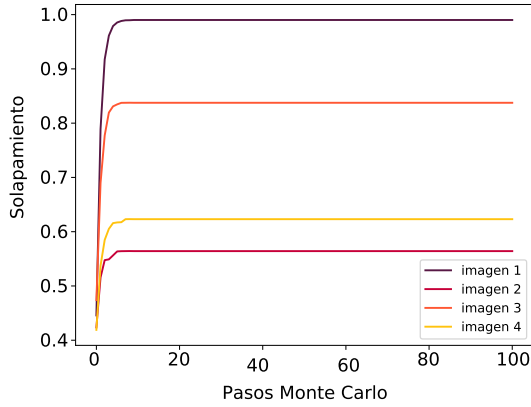


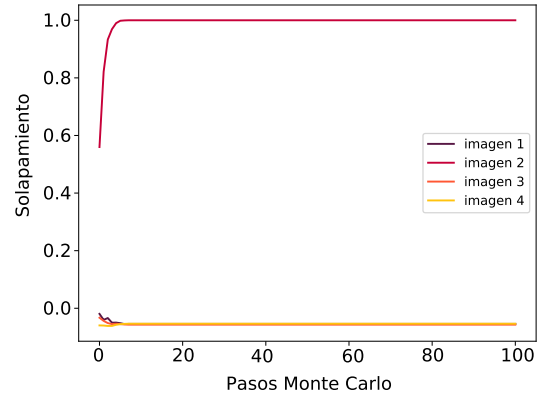
Figura 16: Configuraciones finales a las que evoluciona la red en cada una de las pruebas

El sistema evoluciona correctamente y se llegan a las configuraciones mostradas en la figura Figura 16. Como vemos en el primer caso la configuración final es la superposición de los patrones en las que todos los dibujos se ven claramente. En el segundo y tercer caso se puede ver que el sistema evoluciona de forma que solo se puede distinguir el patrón con el que la red ha empezado deformado. Para entenderlo mejor debemos estudiar la evolución del solapamiento.

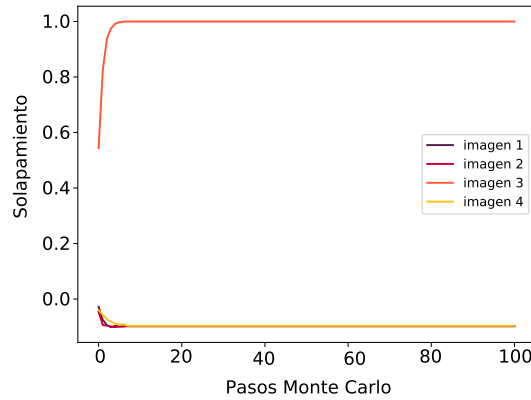
En la figura Figura 17 se ha representado la evolución del solapamiento para cada una de las imágenes en tres gráficas distintas. En el primer caso nos encontramos algo ya ya habíamos predicho. El sistema comienza con un solapamiento distinto de 0 para los tres patrones ya que no se empieza del todo aleatorio. Vemos cómo el sistema evoluciona rápidamente al estado final en el que los solapamientos se maximizan intentando buscar que todos los patrones se distingan. Por otro lado en las otras dos gráficas nos encontramos algo diferente. Como vemos los solapamientos de las imágenes comienzan en 0 salvo el de la imagen con la que se ha comenzado deformada. Si vemos como evoluciona el sistema el patrón que se ha elegido para deformar progresa rápidamente llegando el solapamiento a 1 mientras que los demás patrones mantienen su solapamiento negativo muy cercano al 0 lo que causa que no se distingan al hacer una imagen de la configuración.



(a)



(b)



(c) Patrón 3 deformado

Figura 17

2.2.3. Solapamiento en función de la temperatura

Se ha visto como se comporta la red para varios patrones a una temperatura muy baja y ahora se verá como influye la variación de la temperatura.

Estado inicial aleatorio

Como se ha procedido en anteriores ocasiones se partirá primero de un estado aleatorio. Utilizando esta configuración se hará operar a la red a distintas temperaturas. En la figura Figura 18 se puede observar el estado de la red después de 100 pasos MC se han representado solo algunos con temperaturas más interesantes para el estudio del comportamiento de la red. Esos estados finales son los que se pueden ver en la figura Figura 19. Como vemos para temperaturas bajas se distingue perfectamente la superposición de patrones pero según aumenta la temperatura van desapareciendo algunas figuras hasta que finalmente a una temperatura de 0.025 no vemos nada. Como podemos intuir el solapamiento en de cada patrón varía de forma diferente según la temperatura.



Figura 18: Caption



(a) $T=0.0001$



(b) $T=0.0035$



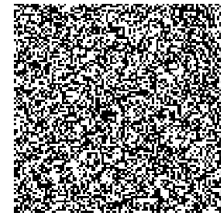
(c) $T=0.005$



(d) $T=0.01$



(e) $T=0.015$



(f) $T=0.025$

Figura 19: Estado final de la red para diferentes temperaturas, distintos patrones comenzando de forma aleatoria

Para poder entender mejor estas imágenes y como evoluciona el solapamiento podemos ver en la figura 20 una gráfica donde se ha representado cómo varía el solapamiento según la temperatura. Como vemos para valores de temperatura bajos el solapamiento es mínimo y bastante cercano a -1, por esto a temperaturas bajas hemos podido distinguir las figuras de los patrones perfectamente. Según va subiendo la temperatura el solapamiento aumenta acercándose a 0 que representa en estado donde no se distingue nada y la red tiene una configuración aleatoria. Si nos fijamos, una cosa curiosa que podemos distinguir es que las imágenes 2,3 y 4 tienen solapamiento positivo bastante alto (superior a 0,2) en torno a temperaturas de 0,005 o 0,01 y si nos fijamos en las imágenes presentadas anteriormente podemos ver que para estas temperaturas esos patrones pasan de estar de esos estados espúreos (inversos) a sus estados normales y en vez de verse las figuras blanco se consiguen entrever de forma difícil en negro.

También podemos consultar en el anexo como evoluciona el solapamiento de cada patrón en las diferentes temperaturas que se han representado en la figura 19. En el anexo se ve claramente como para temperaturas determinadas el solapamiento no es negativo como ocurre a temperaturas muy bajas con

esa configuración aleatoria inicial.

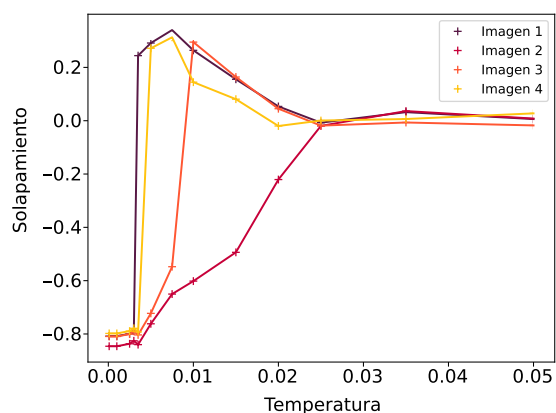


Figura 20: Solapamiento en función de la temperatura para cada uno de los patrones en caso de comenzar de forma aleatoria.

Estado inicial utilizando el patrón deformado

Después de estudiar el proceso comenzando aleatoriamente se pasa a la representación de los resultados utilizando como punto de partida una imagen deformada compuesta por la superposición de los cuatro patrones utilizados. Esta configuración deformada es la que está representada en la figura Figura 21.



Figura 21: Estado inicial deformado con el que se simularán diferentes temperaturas

Se ha representado en la Figura 22 las configuraciones finales de algunas de las temperaturas finales. Vemos que como en otros casos al ir aumentando la temperatura se van viendo menos nítidamente los patrones. En este caso en concreto los patrones van desapareciendo al mismo ritmo al aumentar la temperatura. A una temperatura de 0.05 ya no es posible distinguir ningún patrón.

Si nos fijamos en los solapamientos representados en la Figura 23 podemos ver como efectivamente el solapamiento va disminuyendo según aumenta la temperatura. En este caso en concreto a diferencia del anterior el solapamiento va disminuyendo más o menos al mismo ritmo en todas las imágenes y no hay saltos tan bruscos. a partir de una temperatura de 0.05 ya no es posible distinguir ningún patrón y se puede ver para las cuatro imágenes que el solapamiento es muy pequeño.

Si queremos ver más detalladamente como evoluciona el solapamiento en cada caso se puede consultar en las gráficas del anexo.

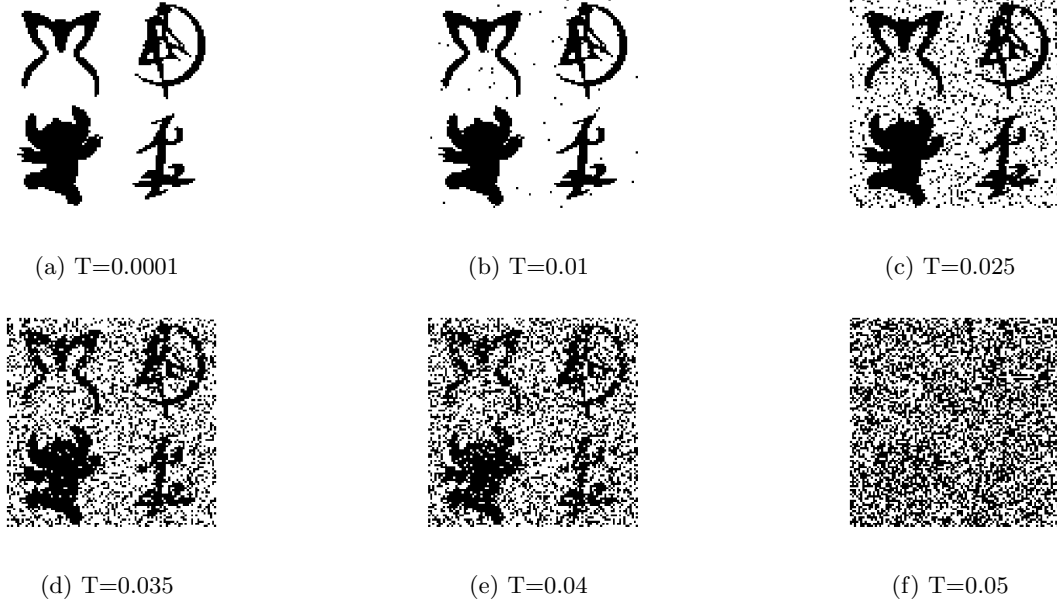


Figura 22: Configuración final de la red para las temperaturas estudiadas más significativas

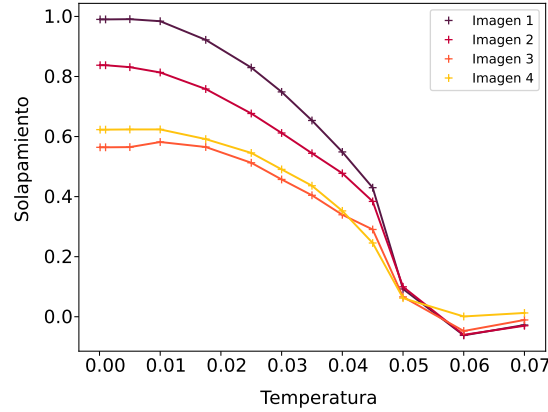


Figura 23: Solapamiento en función de la temperatura para cada uno de los patrones en caso de comenzar con el patrón deformado

3. Capacidad de memoria de la red

Para probar la capacidad de memoria de la red de Hopfield se comprobará como disminuye el número de patrones que recuerda en función del número de patrones almacenados previamente. Para ello se considerará una red de 400 neuronas y una temperatura baja de 10^{-4} por un lado se representará el número de patrones recordados en función de los almacenados y por otro se calculará la fracción máxima de patrones que la red podrá almacenar. Esto se calculará como $\alpha_c = P_c/N^2$

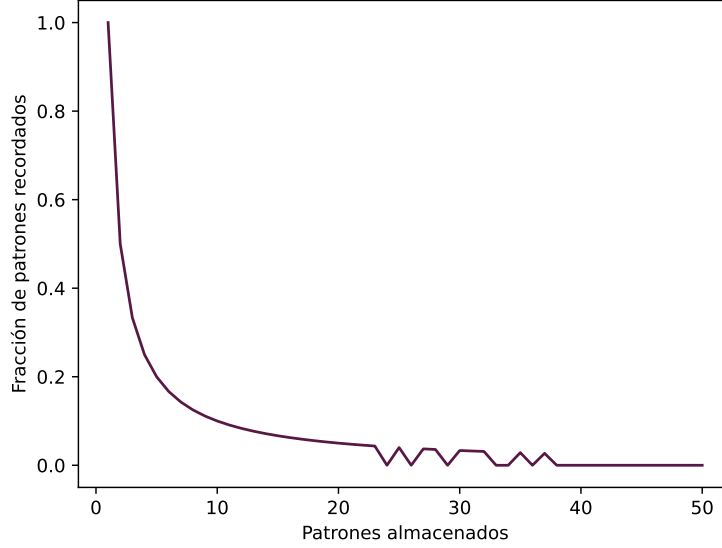


Figura 24: Fracción de patrones recordados en función de los almacenados

En la figura 24 se puede consultar una gráfica de patrones recordados en función de los almacenados. Como vemos es una gráfica que con valores pequeños de patrones almacenados se comporta como $1/x$ esto se debe a que se encuentra que si iniciamos los patrones de forma aleatoria en general solo recuerda un patrón o 0 si el número de patrones es muy alto. No es un resultado muy interesante ya que por ejemplo hemos visto con las imágenes propuestas para las simulaciones en anteriores apartados la red podía recordar más de un patrón. Este fenómeno puede deberse a que si los patrones se generan de forma aleatoria estos no suelen tener mucho en común como les pasaba a las imágenes que compartían bastante parte del fondo blanco. Por esto mismo en este apartado a la red de Hopfield le cuesta más evolucionar a una superposición de los patrones en los que el solapamiento sea alto para todos. En su lugar solo evoluciona a uno de ellos o ninguno. Con el resultado obtenido la fracción máxima α_c de patrones recordados de forma que se recuerden los patrones no tendría mucho sentido calcularla ya que sería $1/20^2$.

4. Conclusiones

En conclusión hemos visto que haciendo evolucionar una red de Hopfield mediante el algoritmo de metrópolis esta converge al mínimo de energía a temperaturas bajas. Esos mínimos de energías están determinados por el patrón o patrones introducidos. En todos los casos hemos visto que al aumentar la temperatura al sistema le costaba más evolucionar a la configuración de menor energía. Es por esto que encontraba algún estado estable más o menos cercano al patrón almacenado según la temperatura. También hemos podido ver como afecta la configuración inicial de la red al estado final. Las redes que empezaban con un estado inicial tomando un patrón deformado convergían más rápido al estado estable ya que estaba más cercano. En general también ha ocurrido que estas redes convergían mejor a más altas temperaturas en las que las redes que se iniciaban aleatorias terminaban con un solapamiento muy bajo. El estudio del solapamiento ha permitido cuantificar lo bien que se acercaba la red al patrón almacenado. Con un patrón almacenado, a partir de una temperatura de aproximadamente 0.4 el solapamiento se estabilizaba y era casi nulo. Por otro lado con varios patrones esto ocurría a una temperatura menor, entre 0.02 y 0.03 con estado inicial aleatorio y 0.05 aproximadamente con un estado inicial deformado.

Otra conclusión que hemos podido obtener es que al introducir varios patrones a la red para recordar el sistema solía converger a una mezcla de estos. Esto es debido a que el sistema intentaba maximizar todos los solapamientos pero al no ser posible que todos fueran 1 o -1 llegaba a un punto en el que todos fueran los máximos posibles. En general se ha llegado a un sistema final compuesto por el solapamiento entre todos los patrones. Se han encontrado casos también en los que el estado al que ha evolucionado el sistema estaba compuesto solo por uno o dos de los patrones porque ese sería el mínimo de energía más cercano de la red. El mínimo al que converge la red depende de la configuración inicial y los eso se han probado diferentes casos. Lo que si que se aprecia es que a partir de 40 patrones ya no es capaz de recordar prácticamente ninguno.

Finalmente la capacidad de memoria de la red al meter varios patrones de forma aleatoria es muy baja ya que solo recuerda 1 patrón o 0 en caso de muchas imágenes almacenadas.

Referencias

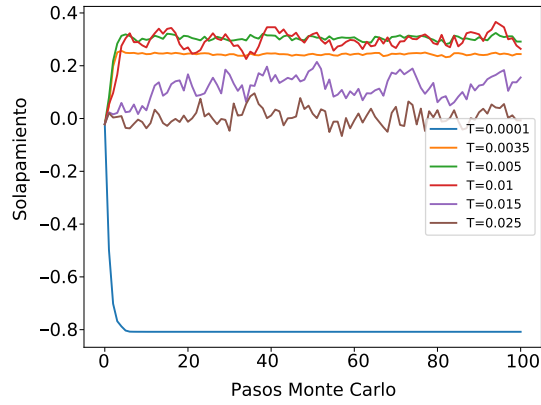
- [1] Antonio Jesús Rivera Pérez
Github,
https://github.com/antojrp/Ejercicios-extra/tree/main/Modelo_de_Hopfield
- [2] IBM
¿Qué son las redes neuronales?,
<https://www.ibm.com/es-es/topics/neural-networks>
- [3] Avellano,
Redes de Hopfield,
<http://avellano.fis.usal.es/~lalonso/RNA/introHOP.htm>
- [4] netfirms,
la Red de Hopfield,
<https://web.archive.org/web/20100128050308/http://www.redes-neuronales.netfirms.com/tutorial-redes-neuronales/red-de-hopfield.htm>
- [5] Wikipedia,
Hopfield (RNA),
[https://es.wikipedia.org/wiki/Hopfield_\(RNA\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Hopfield_(RNA))

- [6] Wikipedia,
Red neuronal artificial,
https://es.wikipedia.org/wiki/Red_neuronal_artificial

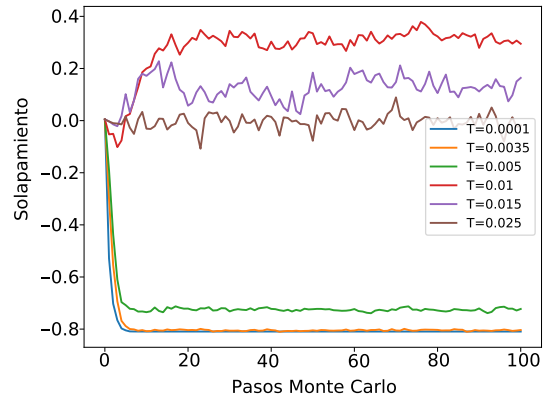
5. Anexo

Evolución del solapamiento para varios patrones y varias temperaturas

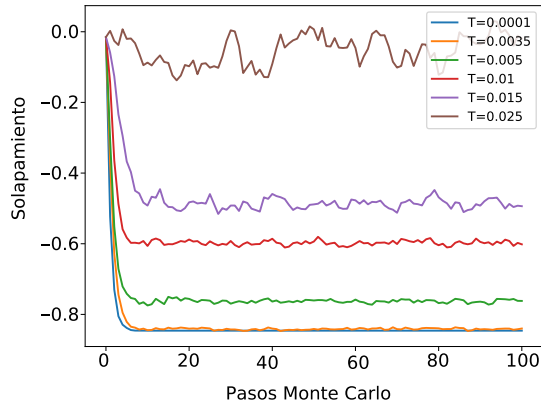
Estado inicial aleatorio



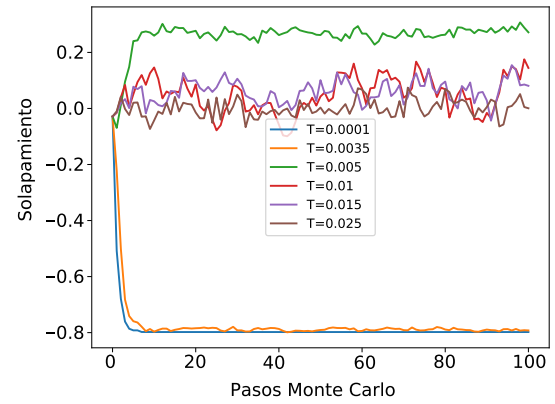
(a) Solapamiento imagen 1



(b) Solapamiento imagen 2



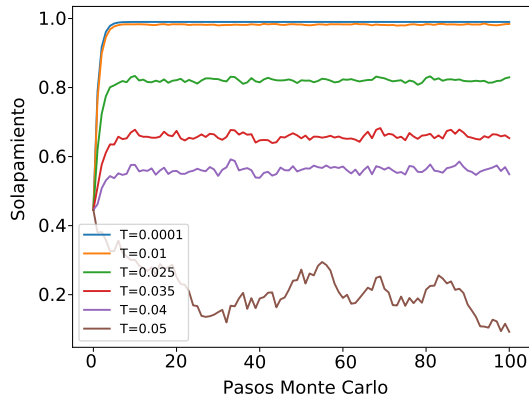
(c) Solapamiento imagen 3



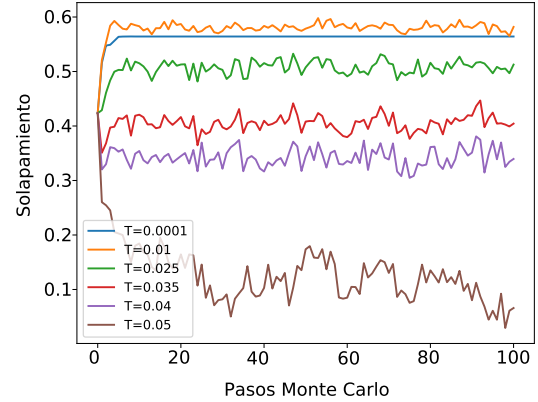
(d) Solapamiento imagen 4

Figura 25

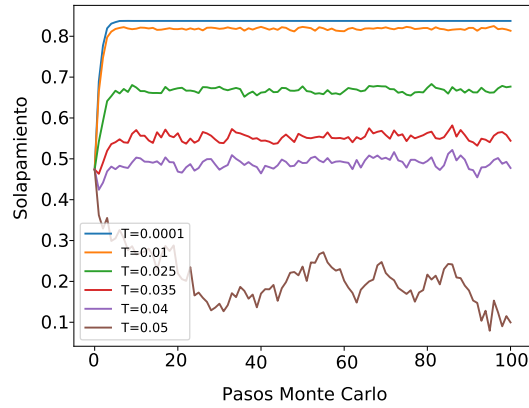
Estado inicial deformado



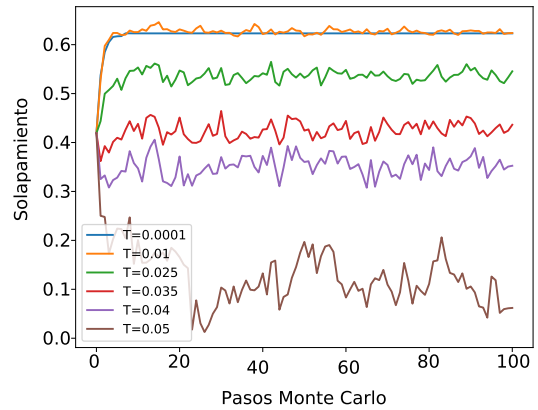
(a) Solapamiento imagen 1



(b) Solapamiento imagen 2



(c) Solapamiento imagen 3



(d) Solapamiento imagen 4

Figura 26