Базовые характеристики графов

25 апреля 2025 г.

1 Распределение степеней вершин

Если распределение степеней вершин имеет вид степенного закона $f(k) \sim k^{-\gamma}$ (распределение Парето), то говорят, что сеть является *scale-free*. Это название идет от свойства масштабной инвариантности степенного закона (инвариантность формы закона относительно $k \to \alpha k$) — ни один из масштабов (имеется в виду масштаб связности, в нашем случае степени вершин) не доминирует в сети, и чем больше масштаб, тем больше вероятность его обнаружить. Это приводит к характерной особенности scale-free сетей — наличию в них хабов.

2 Меры центральности

Центральность вершины характеризует ее важность в данном графе. Мера центральности является вещественнозначным выражением центральности. Так как "важность"может пониматься по-разному, существуют несколько мер:

- степень вершины
- степень близости (*closeness centrality*)
- степень посредничества (*betweenness centrality*)
- степень влиятельности (*eigenvector centrality*)
- PageRank

2.1 Степень близости (closeness centrality)

Для вершины $v \in V$ графа $G = (V, E)$:

$$C(v) = \frac{1}{\sum\limits_{u \in V} \mathrm{dist}(v, u)},$$

где $\mathrm{dist}(\cdot, \cdot)$ — функция кратчайшего расстояния. При сравнении в разных графах эту меру нормируют коэффициентом $1/|V|$.

2.2 Степень посредничества (betweenness centrality)

$$C(v) = \sum_{\substack{s \neq t \neq v \\ s,t \in V}} \frac{\sigma(s,t|v)}{\sigma(s,t)},$$

где $\sigma(s,t|v)$ — количество кратчайших путей из s в t через v, а $\sigma(s,t)$ — общее количество кратчайших путей.

2.3 Степень влиятельности (eigenvector centrality)

$$C(v) = \frac{1}{\lambda} \sum_{u \in \mathrm{Nei}(v)} C(u) = \frac{1}{\lambda} \sum_{u \in V} a_{v,u} C(u),$$

где $a_{v,u}$ — элементы матрицы смежности $\mathbf{A}$.

В матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

По теореме Перрона-Фробениуса подходящее собственное число λ является наибольшим по модулю.