Верхняя оценка на интеграл кривизны

А. М. Петрунин

Аннотация

Для интеграла скалярной кривизны замкнутого риманова многообразия получена врхняя оценка на интеграл кривизны в зависимости от размерности, диаметра и нижней грани секционных кривизн.

1 Введение.

Наш главный результат:

1.1. Теорема. *Для любой точки p m-мерного риманова многообразия M с секционными кривизнами $K_M \geqslant -1$ выполняется неравенство*

$$\int_{B_1(p)} \mathrm{Sc} \leqslant \mathrm{Const}(m),$$

где $B_1(p)$ — единичный шар с центром $p \in M$, а Sc — скалярная кривизна.

Следующий пример показывает, что результат в некотором смысле оптимален: рассмотрим выпуклый многогранник $P \subset \mathbb{R}^{m+1}$, обозначим через ∂P_ε поверхность его ε-окрестности (при желании ∂P_ε можно C^∞-сгладить). Поверхности ∂P_ε являются римановыми многообразиями неотрицательной кривизны. Интеграл $\int_{\partial P_\varepsilon} \mathrm{Sc}$ почти постоянен при малых ε. При этом для произвольного $\theta > 0$

$$\int_{\partial P_\varepsilon} |\,\mathrm{Sc}\,|^{1+\theta} \to \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Отметим, что если P — вырожденный многогранник коразмерности 2 или 3, то это построение даёт пример коллапса римановых многообразий ∂P_ε с $\int_{\partial P_\varepsilon} \mathrm{Sc} \geqslant \mathrm{Const} > 0$. Из Следствия 1.3, в частности, вытекает: если при коллапсе размерность падает на 3 и более, то интеграл скалярной кривизны идет к нулю.

1.2. Вариации и обобщения. Из неравенства Бишопа — Громова следует, что шар радиуса R в полном m-мерном римановом многообразии M с кривизнами $K_M \geqslant -1$ может быть покрыт $\exp(4mR)$ единичными шарами. Отсюда следует, что в условиях теоремы верна оценка

$$\int_{B_R(p)} \mathrm{Sc} \leqslant \mathrm{Const}(m) \exp(4mR).$$

С другой стороны, применяя теорему к раздутию M, получаем, что при $R<1$

$$\int_{B_R(p)} \mathrm{Sc} \leqslant \mathrm{Const}(m) R^{m-2}.$$

Эти два неравенства дают

1.3. Следствие. *Пусть M есть m-мерное риманово многообразие с секционной кривизной $K_M \geqslant -1$ и $p \in M$. Тогда*

$$\int_{B_R(p)} \mathrm{Sc} \leqslant \mathrm{Const}(m) R^{m-2} \exp(4mR).$$

Легко видеть, что если секционные кривизны $\geqslant -1$, то для нормы тензора кривизны Rm верно неравенство

$$|\,\mathrm{Rm}\,| \leqslant \mathrm{Sc} + m^2.$$

Таким образом, следствие влечет также оценку

$$\int_{B_R(p)} |\,\mathrm{Rm}\,| \leqslant \mathrm{Const}'(m) R^{m-2} \exp(4mR).$$

1.4. Мне кажется, что вопрос можно ли оценить интеграл скалярной кривизны через диаметр и нижнюю грань секционной кривизны был задан мне М. Л. Громовым в 1996-ом году, но через 10 лет я не могу быть уверен, что тогда он спросил именно это.

Мое доказательство похоже на доказательство Г. Я. Перельмана непрерывности функционала интеграла скалярной кривизны

$$\mathcal{F}(M) = \int_M \mathrm{Sc}$$

на множестве m-мерных римановых многообразий ограниченной снизу кривизны. Его доказательство основано на исчерпывании многообразия выпуклыми гиперповерхностями и применении формулы Гаусса (это доказательство содержится в Дополнении к [P-2003]). С помощью его идеи легко доказать основную теорему в случае отсутствия коллапса, т.е. при следующем дополнительном ограничении на объём шара:

$$\mathrm{vol}(B_1(p)) \geqslant v_0 > 0.$$

Я привлекаю к доказательству формулу Бохнера (см. 2.2); похожая идея использовалась С. В. Буяло для нижней оценки на интеграл скалярной кривизны [Буяло]. Эта формула даёт возможность оценивать кривизну не только в касательном, но и в ортогональном направлении к поверхностям (это нужно для того, что бы доказательство работало в случае коллапса). Мне также приходится применять исчерпывание с помощью почти вогнутых гиперповерхностей, что влечет дополнительные технические трудности.

Остальная часть доказательства — это обычная в геометрии Александрова комбинация раздутий и перехода к пределу по Громову — Хаусдорфу.

1.5. Схема доказательства. Рассуждая от противного, мы предполагаем, что существует такая последовательность m-мерных многообразий (M_n, p_n) с $K_{M_n} \geqslant -1$, что

$$\int_{B_1(p_n)} \mathrm{Sc} \to \infty.$$

Ввиду теоремы Громова о компактности мы можем предположить, что последовательность (M_n, p_n) сходится по Громову — Хаусдорфу к пространству Александрова (A, p). Далее, используя индукционное предположение (то, что некоторое более общее утверждение верно в низших размерностях) мы доказываем, что скалярная кривизна M_n слабо сходится к некоторой мере на A; последняя везде конечна за исключением конечного числа точек. Далее, выбираем одну из таких точек $s \in A$ и раздуваем M_n с аккуратно выбранными близкими к s отмеченными точками $s_n \in M_n$ так, чтобы сделать распределение кривизны вокруг s_n видимым. Переходим к новому предельному пространству (A', p'). Повторяем для (A', p') ту же процедуру, что для (A, p) и т. д. Теорема следует из того, что может быть не более, чем конечное число таких повторений. Последнее следует из того, что (A', p') в некотором определённом смысле на фиксированную величину больше, чем (A, p); однако оно не может быть больше, чем $(\mathbb{R}^m, 0)$.

1.6. Я хотел бы поблагодарить Ю. Д. Бураго и Н. Д. Лебедеву за их комментарии к предварительной версии этой статьи и указания на ошибки.

2 Формула Бохнера.

Здесь мы доказываем вариант формулы Бохнера, связывающий скалярную кривизну семейства гиперповерхностей с интегралом кривизны Риччи в нормальном направлении.

2.1. Обозначения. Пусть M^{m+1} есть $(m+1)$-мерное риманово многообразие и $f : M^{m+1} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция без критических значений на интервале $[a, b] \subset \mathbb{R}$, линии уровня $L_t = f^{-1}(t)$ которой компактны для всех $t \in [a, b]$. Пусть

(i) $u = \nabla f / |\nabla f|$, поле ортов к L_t;

(ii) $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_m\}$ — ортонормированный репер, такой что $e_0 = u$ и e_i для $i > 0$ идёт в главном направлении $L_{f(x)}$ в x так, что соответствующие главные кривизны $\kappa_i = \langle \nabla_{e_i} u, e_i \rangle$ подмногообразия L_t образуют неубывающую последовательность

$$\kappa_1(x) \leqslant \kappa_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \kappa_m(x).$$

(iii) $H(x) = \kappa_1(x) + \kappa_2(x) + \cdots + \kappa_m(x)$ — средняя кривизна $L_{f(x)}$ в $x \in L_{f(x)}$,

(iv) $G(x) = 2\sum_{i<j}\kappa_i(x)\kappa_j(x)$ — внешнее слагаемое в формуле Гаусса для скалярной кривизны L_t, т.е.

$$\mathrm{Sc}_{L_t} = 2\sum_{i<j}\langle R_M(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle + G = \mathrm{Sc}_M - 2\,\mathrm{Ric}_M(u,u) + G.$$

2.2. Формула Бохнера. *Используя приведённые обозначения, формулу Бохнера можно переписать следующим образом:*

$$\int_{f^{-1}([a,b])}\mathrm{Ric}_M(u,u) = \int_{f^{-1}([a,b])} G + \int_{L_a} H - \int_{L_b} H \qquad (*)$$

Доказательство. Напишем относительную формулу Бохнера для векторного поля $u = \nabla f/|\nabla f|$ в области $f^{-1}([a,b])$:

$$\int_{f^{-1}([a,b])}\langle Du,Du\rangle - \langle\nabla u,\nabla u\rangle = \int_{f^{-1}([a,b])}\mathrm{Ric}_M(u,u) - \int_{L_a} H + \int_{L_b} H.$$

Поскольку $e_0 = u$ и $\langle\nabla_u u,u\rangle = 0$, то

$$Du = \sum_{i=0}^{m} e_i\cdot\nabla_{e_i}u = \sum_{i=1}^{m}\kappa_i e_i\cdot e_i + u\cdot\nabla_u u = \sum_{i=1}^{m}\kappa_i + u\wedge\nabla_u u.$$

Здесь через « $\cdot$ » обозначено умножение Клиффорда. Учитывая снова, что $\langle\nabla_u u,u\rangle = 0$, получаем

$$\langle Du,Du\rangle = \left(\sum_{i=1}^{m}\kappa_i\right)^2 + |\nabla_u u|^2.$$

С другой стороны,

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{m}\kappa_i e_i\otimes e_i + \nabla_u u\otimes u$$

и, значит,

$$\langle\nabla u,\nabla u\rangle = \sum_{i=1}^{m}\kappa_i^2 + |\nabla_u u|^2.$$

Таким образом,

$$\langle Du,Du\rangle - \langle\nabla u,\nabla u\rangle = 2\sum_{i<j}\kappa_i\kappa_j = G.$$

Отсюда следует $(*)$. □

3 Построения в геометрии Александрова.

В этой части мы заготавливаем технические результаты в геометрии Александрова, в основном связанные с так называемыми «угловыми поверхностями». Эти «угловые поверхности» являются обобщением почти выпуклых поверхностей на все коразмерности. Грубо говоря, они определяются как пересечение почти выпуклых поверхностей под острыми углами друг к другу.

Эти поверхности используются так же, как выпуклые поверхности в доказательстве Перельмана.

На протяжении всей этой части мы используем обозначения и соглашения из [P-2007].

Формальное определение похоже на определение распертых точек [БГП], но я применяю его для подмногообразий и добавляю параметр ℓ, который характеризует, как широко расставлены распорки.

3.1. Определение. *Подмножество M пространства Александрова N является (k,δ,ℓ)-*угловой поверхностью*, если существует набор $1/\ell$-вогнутых функций $f_i, g_i : N \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,..,k\}$ (называемых* распорками M*), определённых в ℓ-окрестности M и таких, что*

$$M = \{x \in N | f_i(x) = 0 \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant k\},$$

и, кроме того, набор $f_i, g_i : N \to \mathbb{R}$ является δ-распертым, т.е.

(i) все f_i, g_i — 1-липшицевы,

(ii) для любых $i \neq j$

$$|df_i(\nabla g_j)|,\ |dg_i(\nabla f_j)|,\ |dg_i(\nabla g_j)|,\ |df_i(\nabla f_j)| \leqslant \delta,$$

(iii) $df_i(\nabla g_i)$, $dg_i(\nabla f_i) \leqslant -1+2\delta$

и набор $f_i : N \to \mathbb{R}$ тугой, т.е.

(iv) для любой $x \in M$ и произвольных $i \neq j$,

$$df_i(\nabla f_j) \leqslant 0.$$

Если N является римановым многообразием и все функции $\{f_i\}$ гладкие, то M называется гладкой (k,δ,ℓ)-угловой поверхностью.

Замечания. В этом определении допускается $k = 0$, в этом случае $M = N$.

Условия (i) — (iv) гарантируют, что функции f_i не имеют критических точек, и их линии уровня пересекаются под острыми углами близкими к прямым.

Отметим, что если раздуть метрику пространства N с коэффициентом λ, то (k,δ,ℓ)-угловая поверхность M становится $(k,\delta,\lambda\ell)$-угловой в λN с распорками $\{\lambda f_i, \lambda g_i\}$.

3.2. Пределы угловых поверхностей. Пусть (N_n, p_n) — последовательность q-мерных римановых многообразий с кривизнами $K_{N_n} \geqslant -1$, а $M_n \subset N_n$ — последовательность (k,δ,ℓ)-угловых поверхностей с распорами

$$\{f_{i,n},\ g_{i,n}\},\quad i \in \{1,\dots,k\},\quad f_{i,n},\, g_{i,n} : N_n \to \mathbb{R}.$$

Переходя к подпоследовательности индексов n, можно предположить следующие сходимости:

(i) $(N_n, p_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (N, p)$,

(ii) $M_n \xrightarrow{\mathrm{GH}} M \subset N$,

(iii) для каждого $i \in \{1,\dots,k\}$, $f_{i,n} \to f_i : N \to \mathbb{R}$ и $g_{i,n} \to g_i : N \to \mathbb{R}$.

Очевидно, N есть пространство Александрова размерности $\leqslant q$ и кривизной $\geqslant -1$, а M — (k,δ,ℓ)-угловая поверхность с распорками $f_i, g_i : N \to \mathbb{R}$.

Более того, если M — компактно и $m = q - k$, то

$$\operatorname{vol}_m M = \lim_{n\to\infty} \operatorname{vol}_m M_n.$$

Это утверждение может быть доказано аналогично теореме [БГП, 10.8].

3.3. Инвариант, похожий на размерность. Здесь мы определяем инвариант пространства Александрова, похожий на размерность, но более чувствительный.

Пусть A — пространство Александрова размерности $\leqslant q$. Для $\theta > 0$ определим $\operatorname{dir}_\theta A$ равенством

$$\operatorname{dir}_\theta A = \min_{x\in A} \operatorname{pack}_\theta \Sigma_x A,$$

где $\Sigma_x A$ есть пространство направлений в точке $x \in A$, а $\operatorname{pack}_\theta \Sigma_x A$ обозначает максимальное число точек в $\Sigma_x A$ на расстоянии $\geq \theta$ друг от друга.

Очевидно, $\operatorname{dir}_\theta A$ — целое число и

$$\operatorname{dir}_\theta A \leqslant \operatorname{Const}(\theta, \dim A) \leqslant \operatorname{pack}_\theta S^q.$$

3.4. Подъём точек. Здесь мы вводим способ поднятия точек из пространства Александрова в близкое риманово многообразие. Более точно: поднятие вершины (см. ниже) (k,δ,ℓ)-угловой поверхности из пространства Александрова в близкую (k,δ,ℓ)-угловую поверхность в близком римановом многообразии.

Этот способ поднятия точек будет использован только раз, в самом конце доказательства импликации $\mathrm{B}_m \Rightarrow \mathrm{A}'_m$ (пункт 4.6 доказательства леммы-монстра 4.3).

Пусть $N_n \xrightarrow{\mathrm{GH}} N$ есть последовательность q-мерных римановых многообразий с кривизной $\geqslant -1$, сходящаяся к пространству Александрова N, а $\delta > 0$ достаточно мало. Пусть, далее, $M_n \subset N_n$ есть последовательность (k, δ, ℓ)-угловых поверхностей, сходящаяся к $M \subset N$ (см. 3.2).

Рассмотрим функцию $b : M \to \mathbb{R}$, принимающую максимальное значение $b(x)$ такое, что

$$\left|\nabla_y \operatorname{dist}_x\right| > 1 - \delta \text{ для любого } y \in B_{2b(x)}(x) \backslash \{x\} \text{ и } 2b(x) \leqslant \max\{1, \delta\ell\}.$$

Очевидно, что $b : M \to \mathbb{R}$ — положительна.

3.5. Определение. *Точка x на (k, δ, ℓ)-угловой поверхности называется* вершиной*, если для любой точки $y \in M$, $y \neq x$, имеем $b(y) \leqslant |xy|$.*

Покажем что если $x \in M$ есть вершина M, то существует последовательность $x_n \in M_n$, сходящаяся к $x \in M$ и обладающая следующим свойством:

3.6. Свойство. *Пусть a_n — такое минимальное число, что*

$$|\nabla_y \operatorname{dist}_{x_n}| > 1 - \delta \text{ для всех таких точек } y \in N_n, \text{ что } a_n < |x_n y| \leqslant b.$$

Тогда или $a_n = 0$ для произвольно больших n, или, если (N', x') есть частный предел последовательности $(\frac{1}{a_n} N_n, x_n)$, то

$$\operatorname{dir}_\delta N' > \operatorname{dir}_\delta N \quad (\text{см. } 3.3).$$

3.7. Построение. Для любой точки $\tilde{x}_n \in N_n$ определим $a(\tilde{x}_n) = a_{\delta,b}(\tilde{x}_n)$ как такое наименьшее число, что

$$|\nabla_y \operatorname{dist}_{\tilde{x}_n}| > 1 - \delta \quad \text{если} \quad a(\tilde{x}_n) < |\tilde{x}_n y| \leqslant b.$$

Заметим, что для любой последовательности $M_n \ni \bar{x}_n \to x$ и $M_n \ni y_n \to y$, где $y \neq x$, мы имеем

$$\varliminf_{n \to \infty} |\nabla_{y_n} \operatorname{dist}_{\bar{x}_n}| \geqslant |\nabla_y \operatorname{dist}_x|.$$

Таким образом, $a(\bar{x}_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Зафиксируем одну такую последовательность $\bar{x}_n \to x$ и достаточно малый радиус $r > 0$. Пусть $x_n \in M_n \cap B_r(\bar{x}_n) \subset N_n$ — точка с минимально возможной $a(x_n)$.

Поскольку x — вершина, получаем $x_n \to x$, и в частности, $(N_n, x_n) \to (N, x)$.

Остаётся показать, что построенная последовательность удовлетворяет условию 3.6.

Предположим, что $a_n = a(x_n) > 0$ при всех больших n. Перейдём к такой подпоследовательности, что $(\frac{1}{a_n} N_n, x_n) \xrightarrow{\text{GH}} (N', x')$. Для любого $\theta > 0$

$$\operatorname{dir}_\theta N' \geqslant \operatorname{pack}_\theta \Sigma_x N \geqslant \operatorname{dir}_\theta N.$$

Значит, достаточно показать, что при $\theta = \delta$ первое из неравенств строгое.

Если неравенство обращается в равенство, то существует такая точка $p \in N'$, что $\operatorname{pack}_\delta \Sigma_p N' = \operatorname{pack}_\delta \Sigma_x N = s$. Мы покажем, что если $p_n \in \frac{1}{a_n} N_n$ есть последовательность, сходящаяся к p, то $\frac{1}{a_n} a(p_n) \to 0$. В частности, при больших n имеем $a(p_n) < a(x_n)$, что противоречит выбору x_n (здесь мы обозначаем через p_n как точку в $\frac{1}{a_n} N_n$, так и соответствующую точку в N_n).

Выберем точки $q_1, q_2, .., q_s \in N$ так, что $\angle q_i x q_j > \delta$ при $i \neq j$. Для каждого $i \in \{1, 2, .., s\}$ выберем последовательность $q_{i,n} \in N_n$, сходящуюся к $q_i \in N$. Пусть $y_n \in N$ — такая точка, что $|p_n y_n|_N \to 0$ и $|\nabla_{y_n} \operatorname{dist}_{p_n}| \leqslant 1 - \delta$. Тогда, как легко видеть, $\angle y_n p_n q_n \geqslant 2\delta$ при больших n. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\operatorname{pack}_\delta \Sigma_x N > s$. Противоречие.

4 Доказательство теоремы.

Теорема 1.1 следует из теоремы 4.2 для $k = 0$.

4.1. Обозначение. Для произвольной вещественнозначной функции f введём обозначение
$$f^{\pm} = \max\{0, \pm f\}.$$

Пусть X — риманово многообразие. Для $x \in X$ и — двумерного направления σ в касательном пространстве в точке x через $K_X(\sigma)$ обозначим секционную кривизну многообразия X в направлении σ. Введём обозначение
$$K_X^{\pm}(x) = \max\{0, \max_\sigma\{\pm K(\sigma)\}\},$$
где σ пробегает все двумерные направления в x.

4.2. Теорема. *Существует такое $\delta = \delta(q,k) > 0$, что если N есть q-мерное риманово многообразие с секционными кривизнами $K_N \geqslant -1$ и $M \subset N$ — полная гладкая (k, δ, ℓ)-угловая поверхность, то*
$$\int_{M \cap B_1(x)} \operatorname{Sc}_M^+ \leqslant \operatorname{Const}(q,k,\ell) \left[1 + \int_{M \cap B_2(x)} K_M^- \right]$$
для любого $x \in N$.

Если $\dim M \geqslant 3$, то теорема 4.2 следует из A'_k леммы-монстра 4.3; в случае $\dim M = 2$ теорема следует из трёхмерного случая для $M \times S^1 \subset N \times S^1$.

4.3. Лемма-монстр. *Существуют такие постоянные $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}(q,k,\ell)$, $\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}'(q,k,\ell)$, $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}(q,k,\ell)$ и такая последовательность $\delta_k > 0$, $k \in \{0, 1, .., q-3\}$, что если*

N есть q-мерное риманово многообразие с кривизной $\geqslant -1$,

$M \subset N$ полная гладкая (k, δ_k, ℓ)-угловая поверхность,

то для любого $k \in \{0, 1, .., q-3\}$ *верны следующие утверждения:*

A_k. *Если* $\operatorname{diam} M \leqslant 1$, *то*

$$\int_M \mathrm{Sc}_M^+ \leqslant \mathcal{A}_k \left[1 + \int_M K_M^-\right].$$

A'_k. *Для любого* $x \in N$

$$\int_{M \cap B_1(x)} \mathrm{Sc}_M^+ \leqslant \mathcal{A}'_k \left[1 + \int_{M \cap B_2(x)} K_M^-\right].$$

B_k. *Предположим, что для некоторого* $x \in M$ *выполняется* $|\nabla_y \operatorname{dist}_x| > 1 - \delta_k$ *для всех таких* $y \in N$, *что* $a < |xy| < 2b < \max\{1, \delta\ell\}$. *Тогда*

$$\int_{\operatorname{dist}_x^{-1}([2a,b]) \cap M} \mathrm{Sc}_M^+ \leqslant \mathcal{B}_k \left[1 + \int_{\operatorname{dist}_x^{-1}([a,2b]) \cap M} K_M^-\right].$$

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{A}'_k \Rightarrow \mathrm{A}_k$. Таким образом, достаточно доказать утверждение A_{q-2} и импликации $\mathrm{A}_k \Rightarrow \mathrm{B}_{k-1}$, $\mathrm{B}_k \Rightarrow \mathrm{A}'_k$ для каждого k.

4.4. $\mathbf{A_{q-2}}$. В этом случае $\dim M = 2$, таким образом $\mathrm{Sc}_M^\pm = 2K_M^\pm$, и утверждение следует из формулы Гаусса — Бонне:

$$\int_M K_M^+ = \int_M K_M + \int_M K_M^- \leqslant 4\pi \left(1 + \int_M K_M^-\right).$$

Т.е. можно взять $\mathcal{A}_{q-2} = 8\pi$. □

4.5. $\mathbf{A_k \Rightarrow B_{k-1}}$. Пусть $\{f_i, g_i\}$, $i = \{1, \ldots, k-1\}$ суть распорки M. Рассмотрим функцию $f : M \to \mathbb{R}$,

$$f(y) = (1 - \delta_k)\widetilde{\operatorname{dist}}_x(y) + \frac{\delta_k}{k} \sum_{i=1}^{k-1} (g_i(y) - g_i(x)),$$

где через $\widetilde{\operatorname{dist}}_x$ обозначена сглаженная функция расстояния до x. Очевидно, на множестве $\operatorname{dist}^{-1}([a, 2b]) \cap M$ выполняется

$$1 - 2\delta_k \leqslant \frac{f(y)}{\operatorname{dist}_x y} < 1.$$

Таким образом, нам достаточно доказать существование постоянной $\mathcal{B}(q, k, \ell)$, для которой

$$\int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}_M^+ \leqslant \mathcal{B}(q, k, \ell) \left[1 + \int_{f^{-1}([a, \frac{3}{2}b])} K_M^-\right] \qquad (**)$$

На множестве $\mathrm{dist}^{-1}([a,2b])\cap M$ функция f ведёт себя похоже на dist_x, но она ещё и гладкая, и её поверхности уровня образуют угловые поверхности в N (т.е. мы можем применить к ним A_k). Более того, верно следующее (сравни с [БГП, 11.8]):

Функция f почти вогнута в окрестности $f^{-1}([a,\frac{3}{2}b])$ и для некоторого $\alpha=\alpha(q,k,\ell)>0$ имеем

(i) $1\geqslant|\nabla f|>1/\alpha$ везде в $f^{-1}([a,\frac{3}{2}b])$ на M. В частности $f:M\to\mathbb{R}$ не имеет критических значений в $[a,\frac{3}{2}b]$.

(ii) Для любого $t\in[a,\frac{3}{2}b]$ множество уровня $L_t=f^{-1}(t)$ образует компактную гладкую $(k,\delta_k,t/\alpha)$-угловую поверхность в N, и если $m=\dim L_t=q-k$, то имеем

a) $A(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{vol}_m L_t\leqslant\alpha t^m$.

b) $\mathrm{diam}\,L_t\leqslant\alpha t$,

c) главные кривизны L_t в M не превосходят α/t.
Более точно: если $u=\nabla f/|\nabla f|\in TM$, то для любого касательного к L_t единичного вектора v имеем $\langle\nabla_v u,v\rangle\leqslant\alpha/t$, где через ∇ обозначена связность Леви-Чивита на M.

Чтобы доказать, что $L_t=f^{-1}(t)$ образует $(k,\delta_k,t/\alpha)$-угловую поверхность в N, достаточно дополнить набор распоров M, взяв $f_k=f$ и $g_k=\mathrm{dist}_{L_{(1+\varepsilon)t}}$ для достаточно малой постоянной $\varepsilon>0$. Среди остальных условий не вполне очевидна лишь оценка на объём. Её можно получить, рассуждая от противного, используя свойство объёма угловых поверхностей при переходе к пределу, см. 3.2. Проверку деталей я щедро предоставляю читателю.

Обозначения.

(i) $\kappa_1(y)\leqslant\kappa_2(y)\leqslant\ldots\leqslant\kappa_m(y)$ — главные кривизны $L_t\subset M$ в точке $y\in L_t$ относительно нормали u;

(ii) $\beta:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ — верхняя грань главных кривизн поверхности L_t, т.е. $\kappa_m(y)\leqslant\beta_t$ для всех $y\in L_t$ (по условию (ii) можно взять $\beta(t)=\alpha/t$, но для упрощения формул мы сделаем эту подстановку только в самом конце);

(iii) $H(y)=\kappa_1(y)+\kappa_2(y)+\ldots+\kappa_m(y)$ — средняя кривизна L_t в $y\in L_t$ и через
$$H^{\pm}(y)=\max\{0,\pm H(y)\}$$
обозначены положительная и отрицательная части $H(y)$.

Отметим, что знаки κ_i выбраны так, что выполняется равенство
$$A'(t)=\int_{L_t}H/|\nabla f|.$$

(iv) $G(y) = 2\sum_{i<j}\kappa_i\kappa_j$ — внешнее слагаемое в формуле Гаусса для скалярной кривизны L_t, т.е.

$$\operatorname{Sc}_L = 2\sum_{i<j}\langle R_M(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle + G = \operatorname{Sc}_M - 2\operatorname{Ric}_M(u,u) + G$$

для ортонормированного репера $\{e_i\}$ касательного пространства уровня L.

Тривиальные неравенства.

(i) Пусть $L\subset M$ — гиперповерхность. По формуле Гаусса

$$\operatorname{Sc}_L = \operatorname{Sc}_M - 2\operatorname{Ric}_M(u,u) + G.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Sc}^+_M \leqslant \operatorname{Sc}^+_L + m(m-1)K^-_M + 2\operatorname{Ric}_M(u,u) - G \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Sc}^+_L + m^2K^-_M + 2\operatorname{Ric}_M(u,u) - G.$$

Также получаем

$$G \leqslant \operatorname{Sc}^+_L + (m-1)(m-2)K^-_M \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Sc}^+_L + m^2K^-_M.$$

(ii) Снова по формуле Гаусса

$$K^-_L \leqslant K^-_M + (H^- + m\beta)\beta.$$

(iii) Очевидно, $H^+(y)\leqslant m\beta_t$ для любого $y\in L_t$, значит

$$\int_{L_t} H^+ \leqslant m\beta_t A(t).$$

Таким образом,

$$\int_{L_t} H^- \leqslant \int_{L_t} H^-/|\nabla f| = \int_{L_t} H^+/|\nabla f| - \int_{L_t} H/|\nabla f| \leqslant$$
$$\leqslant m\alpha\beta_t A(t) - A'(t).$$

Промежуточное неравенство. Докажем, что

$$\int_{f^{-1}([a,b])} \operatorname{Sc}^+_L \leqslant \operatorname{Const}(q,k,\ell)\left[1 + \int_{f^{-1}([a,b])} K^-_M\right]. \qquad (\diamondsuit)$$

Действительно, поскольку $|\nabla f| \geqslant 1/\alpha$,

$$\int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}_L^+ \leqslant \alpha \int_a^b dt \int_{L_t} \mathrm{Sc}_L^+ \leqslant$$

(применяем A_k для L_t)

$$\leqslant \mathcal{A}(q,k,\ell)\alpha \int_a^b dt \left(1 + \int_{L_t} K_{L_t}^-\right) \leqslant$$

(применяем тривиальные неравенства)

$$\leqslant \mathcal{A}(q,k,\ell)\alpha \int_a^b dt \left(1 + \int_{L_t} [K_M^- + (H^- + m\beta_t)\beta_t]\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{A}(q,k,\ell)\alpha \left[(b-a) + \int_{f^{-1}([a,b])} K_M^- + m(1+\alpha)\int_a^b A(t)\beta_t^2 - \int_a^b A'(t)\beta_t\right].$$

Отсюда и из того, что $0 < a < b \leqslant 1$, $\alpha = \alpha(q,k,\ell)$, $\beta_t = \alpha/t$ и $A(t) \leqslant \alpha t^m$, получаем $(\diamondsuit)$.

Основное неравенство.

$$\int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}_M^+ \leqslant$$

$$\leqslant \int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}_L^+ + m^2 \int_{f^{-1}([a,b])} K_M^- + 2\int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Ric}(u,u) - \int_{f^{-1}([a,b])} G \leqslant$$

(по формуле Бохнера)

$$\leqslant \int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}_L^+ + m^2 \int_{f^{-1}([a,b])} K_M^- + \int_{f^{-1}([a,b])} G + 2\int_{L_a} H - 2\int_{L_b} H \leqslant$$

(применяем тривиальное неравенство (i))

$$\leqslant 2\int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}_L^+ + 2m^2 \int_{f^{-1}([a,b])} K_M^- + 2\int_{L_a} H^+ + 2\int_{L_b} H^- \leqslant$$

применяем промежуточное неравенство $(\diamondsuit)$ и оценки на $H^\pm$)

$$\leqslant \mathrm{Const}(q,k,\ell)\left[1 + \int_{f^{-1}([a,b])} K_M^-\right] + m\beta_a A(a) + m\alpha\beta_b A(b) - A'(b) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Const}(q,k,\ell)\left[1 + \int_{f^{-1}([a,b])} K_M^-\right] - A'(b).$$

В частности, для любого $\tau \in [b, \frac{3}{2}b]$ имеем

$$\int_{f^{-1}([a,b])} \mathrm{Sc}^+_M \leqslant \mathrm{Const}(q,k,\ell)\left[1 + \int_{f^{-1}([a,\frac{3}{2}b])} K^-_M\right] - A'(\tau).$$

Поскольку $0 \leqslant A(t) \leqslant \alpha t^m$ (см. стр. 10), получаем, что для некоторого $\tau \in [b, \frac{3}{2}b]$ выполняется $(-A'(\tau)) \leqslant 2\alpha b^{m-1}$. Отсюда получаем $(**)$. □

4.6. $\mathbf{B}_k \Rightarrow \mathbf{A}'_k$. Предположим, A'_k не верно. Тогда можно найти последовательность q-мерных римановых многообразий с отмеченными точками (N_n, x_n), с кривизной $K_{N_n} \geqslant -1$ и с такими (k, δ_k, ℓ)-угловыми поверхностями $M_n \subset N_n$, что

$$\frac{\int_{M_n \cap B_1(x_n)} \mathrm{Sc}^+_{M_n}}{1 + \int_{M_n \cap B_2(x_n)} K^-_{M_n}} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \qquad (\bigstar)$$

Обозначим через $\{f_{n,i}, g_{n,i}\}$ распорки M_n. Перейдём к подпоследовательности N_n, чтобы иметь следующие сходимости (см. 3.2):

(i) $(N_n, x_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (N, x)$, где N есть пространство Александрова размерности $\leqslant q$ с кривизнами $\geqslant -1$;

(ii) $f_{i,n} \to f_i : N \to \mathbb{R}$ и $g_{i,n} \to g_i : N \to \mathbb{R}$ для каждого $i \in \{1, \cdots, k\}$;

(iii) $M_n \to M \subset N$, где M есть (k, δ_k, ℓ)-угловая поверхность с распорками $f_i, g_i : N \to \mathbb{R}$.

Случай без вершин. Предположим, что M не имеет вершин (см. 3.5). Поскольку множество $M \cap \bar{B}_1(x) \subset N$ компактно, его можно покрыть конечным числом «колец»

$$\mathrm{Ann}_{x_i} = \{y \in M | 0 < |x_i y| < b(x_i)\}, \ i = \{1, 2, .., s\}.$$

Для каждого $i \in \{1, 2, .., s\}$ выберем последовательность $x_{i,n} \in M_n$ сходящуюся к $x_i \in M$. Введем краткие обозначения: $b_i = b(x_i)$ и $a_{i,n} = a_{\delta_k, b_i}(x_{i,n})$ (см. 3.7). Как было показано в 3.7, $a_{i,n} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, если n достаточно велико, применив B_k для каждого $x_{i,n}$ с парой $(a_{i,n}, b_i)$, получаем

$$\begin{gathered}\int_{M_n \cap B_1(x_n)} \mathrm{Sc}^+_{M_n} \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{s} \int_{\{y \in M_n | 2a_{i,n} < |x_{i,n} y| < b_i\}} \mathrm{Sc}^+_{M_n} \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{s} \mathcal{B}_k \left[1 + \int_{\{y \in M_n | a_{i,n} < |x_{i,n} y| < 2b_i\}} K^-_{M_n}\right] \leqslant \\ \leqslant \mathcal{B}_k s \left[1 + \int_{M_n \cap B_2(x_n)} K^-_{M_n}\right].\end{gathered}$$

Таким образом, приходим к противоречию с $(\bigstar)$.

Случай с вершинами. Заметим, что из $M\cap\bar B_1(x)$ можно вырезать конечное число вершин (см. 3.4) так, что оставшуюся часть можно покрыть конечным числом колец:

$$(M\backslash\{x_1,x_2,\dots,x_s\})\cap\bar B_1(x)\subset\bigcup_{i=1}^{S}\mathrm{Ann}_{x_i},\quad S\geqslant s.$$

Здесь центры x_i при $i\leqslant s$ — вершины, а при $i>s$ — нет. Применяя ту же оценку, что раньше, получаем

$$\int_{M_n\cap B_1(x_n)}\mathrm{Sc}^+_{M_n}-\sum_{i=1}^{s}\int_{\{y\in M_n\colon\ |\tilde x_{i,n}y|<2a_{i,n}\}}\mathrm{Sc}^+_{M_n}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{S}\int_{\{y\in M_n\colon\ 2a_{i,n}<|\tilde x_{i,n}y|<b_i\}}\mathrm{Sc}^+_{M_n}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{S}\mathcal B_k\left[1+\int_{\{y\in M_n\colon\ a_{i,n}<|\tilde x_{i,n}y|<b_i\}}K^-_{M_n}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\mathcal B_k S\left[1+\int_{M_n\cap B_2(x_n)}K^-_{M_n}\right].$$

Из ($\bigstar$) следует, что найдётся $i\leqslant s$ такое, что

$$\frac{\int_{M_n\cap B_{2a_{i,n}}(\tilde x_{i,n})}\mathrm{Sc}^+_{M_n}}{1+\int_{M_n\cap B_{4a_{i,n}}(\tilde x_{i,n})}K^-_{M_n}}\to\infty.$$

В этом случае $a_{i,n}>0$ для всех больших n и $a_{i,n}\to0$ при $n\to\infty$.

Выберем такое i и введем более короткие обозначения:

$$x:=x_i,\ b:=b_i,\ x_n:=x_{i,n},\ a_n:=a_{i,n}\ \text{и т. д..}$$

Рассмотрим раздутия $N'_n=\frac{1}{2a_n}N_n$. Обозначим через M'_n образ M_n при естественном отображении $N_n\to N'_n$, в остальном будем использовать те же обозначения как для объектов в N_n, так и для их образов в N'_n. Отметим, что

$$\int_{M'_n\cap B_1(x_n)}\mathrm{Sc}^+_{M'_n}=\frac{1}{(2a_n)^{n-2}}\int_{M_n\cap B_{2a_n}(x_n)}\mathrm{Sc}^+_{M_n},$$

$$\int_{M'_n\cap B_2(x_n)}K^-_{M'_n}=\frac{1}{(2a_n)^{n-2}}\int_{M_n\cap B_{4a_n}(x_n)}K^-_{M_n}.$$

Поскольку $a_n\to0$, получаем, что

$$\frac{\int_{M_n\cap B_{2a_n}(\tilde x_n)}\mathrm{Sc}^+_{M_n}}{1+\int_{M_n\cap B_{4a_n}(\tilde x_n)}K^-_{M_n}}\to\infty\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Таким образом

$$\frac{\int_{M'_n\cap B_1(\tilde{x}_n)} \mathrm{Sc}^{+}_{M'_n}}{1+\int_{M'_n\cap B_2(\tilde{x}_n)} K^{-}_{M'_n}} \to \infty \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

Перейдя к подпоследовательности, можно предположить что

$$(N'_n, x'_n) \xrightarrow{\mathrm{GH}} (N', x').$$

Повторим для N' то же рассуждение, что для N. Остаётся только показать следующее

4.7. Предложение. *Таких шагов может быть только конечное число. Другими словами, после конечного числа повторений мы приходим к случаю без вершин.*

Это предложение следует из того, что $\operatorname{dir}_{\delta_k} N' > \operatorname{dir}_{\delta_k} N$ (см. свойство 3.6) плюс то, что $\operatorname{dir}_{\delta_k} N$ — целое и $\operatorname{dir}_{\delta_k} N \leqslant \operatorname{dir}_{\delta_k}(\mathbb{R}^q) < \infty$, см. 3.3.

Список литературы

[БГП] Ю. Д. Бураго, М. Л. Громов, Г. Я. Перельман, *Пространства А. Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами,* УМН, 47 (1992), №2, 3—51; английский перевод в Russian Math. Surveys 47 (1992), №2, 1–58.

[Буяло] С. В. Буяло, *Некоторые аналитические свойства выпуклых множеств в римановых пространствах,* Мат. Сб. (Н.С.) 107(149) (1978), №1, 37—55.

[P-2003] A. Petrunin, *Polyhedral approximations of Riemannian manifolds,* Turkish J. Math., 27, (2003), №1, 173–187.

[P-2007] A. Petrunin, *Semiconcave functions in Alexandrov's geometry,* Surveys in Differential Geometry, **11** (2007) pp. 135–202.