das Präfix die Allzeichen für $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ und die Existenzzeichen für $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-k}}$, so hat man $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ als Parameter aufzufassen und die obige Formel besagt, daß für beliebige Werte der Parameter Lösungen $x_{i_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-k}}$ existieren, wobei der Wert von x_{j_r} nur abhängt von den Werten derjenigen Parameter, die x_{j_r} im Präfix vorangehen.

(Bemerkung während der Drucklegung):

Es läßt sich übrigens zeigen, das eine Funktion, die in einem der Systeme S_i oder auch in einem System transfiniter Stufe berechenbar ist, schon in S_1 berechenbar ist, so daß also der Begriff „berechenbar" in gewissem Sinn „absolut" ist, während fast alle sonst bekannten metamathematischen Begriffe (z. B. beweisbar, definierbar etc.) sehr wesentlich vom zu Grunde gelegten System abhängen.

93. Kolloquium (25. VI. 1935).

Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen. Von A. Wald.

Im folgenden geben wir eine neue koordinatenlose Begründung der Flächentheorie im Sinne des Mengerschen Programms einer allgemeinen koordinatenlosen metrischen Geometrie. Menger hat in zahlreichen Abhandlungen und Vorträgen seit Jahren die Ansicht entwickelt, daß zur Untersuchung der lokalen Eigenschaften von Raumgebilden die Darstellung der Punkte und Gebilde durch Koordinaten bzw. differenzierbare Funktionen und Gleichungen ein Hilfsmittel bildet, das sich zwar als sehr fruchtbar erwiesen hat, aber weder den einzigen, noch den allgemeinsten, noch auch den dem geometrischen Kern des Problemes angemessensten Weg darstellt. Einer rein metrischen und koordinatenlosen Behandlung gelinge es *erstens,* die Theorie von vielen überflüssigen Voraussetzungen zu befreien, insbesondere von zahlreichen Differenzierbarkeitsannahmen, die vielfach lediglich zum Zwecke der Anwendbarkeit analytischer Methoden erforderlich sind, ohne mit dem geometrischen Kern des Problemes etwas zu tun zu haben, während in den Fällen, wo Differenzierbarkeitsannahmen erforderlich sind, durch die metrischen Methoden ihre geometrische Bedeutung aufgeklärt werde; *zweitens* gelinge ihr durch Schaffung neuer Methoden, für zahlreiche klassische Sätze einfache und anschauliche Beweise zu erbringen und darüber hinaus Probleme zu behandeln, die den klassischen Methoden prinzipiell unzugänglich sind.

Eine metrische Theorie der *Kurvenkrümmung* hat bekanntlich Menger selbst gegeben, indem er sich lediglich auf die Betrachtung von Punktetripeln und ihren Abstandstripeln stützt [1]). Im Zusammenhang damit hat Menger das Problem formuliert, die *Flächenkrümmung* durch bloße Betrachtung von Punktequadrupeln und

[1]) Mathem. Annalen *103*.

ihren Abstandssextupeln zu definieren und zu behandeln. Diese Aufgabe wird im folgenden vollständig gelöst[2]).

Wir betrachten *metrische Räume* im Sinne von Fréchet, d. h. Mengen von irgend welchen Elementen („Punkten"), in denen je zwei Punkten p und q ein Abstand $pq = qp \geqq 0$, zugeordnet ist, wobei $pq = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $p = q$, und wobei die Dreiecksungleichung $pq + qr \geqq pr$ erfüllt ist. Jede Teilmenge eines metrischen Raumes ist ein metrischer Raum. Zwei metrische Räume heißen *kongruent,* wenn sie eineindeutig und abstandstreu aufeinander abbildbar sind. Ist R mit einer Teilmenge von R' kongruent, so nennen wir R in R' *einbettbar.* Mit Menger nennen wir die in die euklidische Gerade einbettbaren Mengen *linear,* die mit den Intervallen der Geraden kongruenten Mengen *Strecken.*

Von großer Bedeutung für diese Arbeit sind folgende Begriffsbildungen der Mengerschen Konvexitätstheorie[3]): Ein Punkt q liegt *zwischen* den Punkten p und r, wenn $p \neq q \neq r$ und $pq + qr = pr$. (Z. B. sind drei paarweise verschiedene Punkte dann und nur dann linear, wenn einer zwischen den beiden anderen liegt.) Ein metrischer Raum heißt *konvex,* wenn zu je zwei Punkten $p \neq r$ mindestens ein Punkt zwischen p und r existiert. Oft verwenden wir folgendes Theorem von Menger[4]): Ein konvexer vollständiger (z. B. kompakter) Raum enthält zu je zwei verschiedenen Punkten mindestens eine sie verbindende Strecke.

Ein besonders wichtiges Beispiel konvexer Räume ist für jede reelle Zahl k der S_k. So nennen wir für $k > 0$ die Oberfläche einer Kugel der Krümmung k, also vom Radius $1/\sqrt{k}$, in der je zwei Punkten als Abstand die Länge des kürzeren sie verbindenden Großkreisbogens zugeordnet wird, für $k = 0$ die euklidische Ebene, für $k < 0$ die hyperbolische Ebene der Krümmung k. Die linearen Teilmengen von S_k sind für $k \leqq 0$ die Teilmengen der Geraden, für $k > 0$ die Teilmengen von halben Großkreisen.

Wir definieren nun: Der metrische Raum R hat im Punkt p die **Flächenkrümmung $k(p)$,** *wenn keine Umgebung von p linear ist und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß jedes Quadrupel von Punkten, die von p einen Abstand $< \delta$ haben, in einen S_k mit $|k - k(p)| < \varepsilon$ einbettbar ist.*

Nach einigen Hilfssätzen über den S_k im Kapitel I zeigen wir im Kapitel II, daß man, wenn ein kompakter konvexer Raum in einem Punkt p eine Flächenkrümmung besitzt, in einer Umgebung von p Polarkoordinaten einführen kann, durch welche die Umgebung auf eine Teilmenge der Ebene topologisch abgebildet wird. In Kapitel III zeigen wir, daß, wenn der Raum in jedem Punkt eine Flächenkrümmung besitzt, das Bogenelement eingeführt werden kann,

---

[2]) Hauptresultate finden sich in meiner Note C. R. Paris 18. XI. 1935. Der von mir im Heft *6* dieser Ergebnisse entwickelte Krümmungsbegriff wird im folgenden modifiziert, wodurch die Theorie beträchtlich vereinfacht wird.

[3]) Mathem. Annalen *100,* S. 76.

[4]) l. c., S. 89.

so daß der Raum als Gaußsche Fläche erwiesen ist. Die Gaußsche Krümmung derselben ist, wie wir sehen werden, in jedem Punkt mit der Flächenkrümmung des Raumes identisch. In Kapitel IV zeigen wir, daß umgekehrt eine Gaußsche Fläche in jedem Punkt eine Flächenkrümmung besitzt, die mit der Gaußschen Krümmung identisch ist. Diese Resultate lassen sich zusammengenommen aussprechen als folgendes

Fundamentaltheorem der Flächentheorie. *Damit ein metrischer Raum R eine Gaußsche Fläche sei, ist notwendig und hinreichend, daß R kompakt und im Mengerschen Sinne konvex sei und in jedem Punkt eine Flächenkrümmuug im oben definierten Sinn besitze. Dieselbe stimmt dann für jeden Punkt mit der Gaußschen Krümmung überein.*

Diesem Theorem zufolge dient also unsere Definition einerseits einer neuen einfachen und anschaulichen Einführung der Gaußschen Krümmung (nämlich einer metrischen, die nur auf die Betrachtung von Punktequadrupeln beruht), andererseits einer Grundlegung für den koordinatenlosen Aufbau der Differentialgeometrie der Flächen.

I. Hilfssätze über S_k.

Sind $p \neq q \neq r$ Punkte von S_k, so bezeichnen wir den kleineren der beiden Winkel, welche die Strecken qp und qr miteinander einschließen, mit $\sphericalangle pqr$. Es gilt dann also stets $0 \leqq \sphericalangle pqr \leqq \pi$. Sind p, q, r linear, so gilt $\sphericalangle pqr = 0$ oder $= \pi$. Umgekehrt sehen wir:

1. *Ist $\sphericalangle pqr = \pi$ für p, q, r von S_k, so liegt q zwischen p und r, es sei denn, daß $k > 0$ und $pq + qr + rp = u(k)$ gilt, wo $u(k)$ die Länge des Großkreises von S_k bezeichnet.*

2. *Sind p, a, b drei nicht lineare Punkte von S_k und ist c ein Punkt im Innern des Winkelraumes zwischen den Strecken pa und pb für den $cp = bp$, so ist $ac < ab$.*

3. *Ist a', b', c' ein nicht lineares Tripel in S_k, und a'', b'', c'' ein Tripel in S_k'', so daß $k' < k''$, $a'b' = a''b''$, $a'c' = a''c''$ und $\sphericalangle b'a'c' = \sphericalangle b''a''c''$ gilt, dann ist $b'c' > b''c''$.* Führen wir auf S_k geodätische Polarkoordinaten r, φ ein, wobei $r \geqq 0$ und, wenn $k > 0$, überdies $r < u(k)/2$ gilt, so hat das Bogenelement auf S_k bekanntlich die Gestalt $ds^2 = dr^2 + G_k^2(r,\varphi)\, d\varphi^2$, wo $G_k(r, \varphi) = G_k(r) = \sin \sqrt{k}\, r / \sqrt{k}$. Die Ableitung von $G_k(r)$ nach k ist negativ. Ist $\sphericalangle b'a'c' = \pi$, so ist nach **1**: $a'b' + b'c' + c'a' = u(k) > u(k'') = a''b'' + b''c'' + c''a''$, also $b'c' > b''c''$. Zum Beweis von **3** genügt es daher offenbar zu zeigen, daß zu jedem nichtlinearen Tripel a, b, c von S_k, wobei $\sphericalangle bac \neq \pi$ ist, ein Zahl $\varepsilon > 0$ existiert mit folgender Eigenschaft: Ist $k - \varepsilon < k^* < k + \varepsilon$, und a^*, b^*, c^* ein Tripel von S_{k^*}, so daß $a^*b^* = ab$, $a^*c^* = ac$, $\sphericalangle b^*a^*c^* = \sphericalangle bac$, dann gilt $bc \gtreqless b^*c^*$, je nachdem $k \lesseqgtr k^*$. Um dies einzusehen, führen wir in S_k und S_{k^*} Polarkoordinaten mit den Zentren a bzw. a^* ein, so daß b und c dieselben Koordinaten in S_k haben, wie b^* und c^* in S_{k^*}. Da a, b, c nicht linear sind, so sind keine zwei dieser drei Punkte diametral gegenüberliegend. Ist

$r = r(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2)$ die Gleichung des geodätischen Bogens B zwischen b und c in S_k, so existiert daher, wenn ε hinlänglich klein ist, in S_{k^*} der b^* und c^* verbindende Bogen mit der Gleichung $r = r(\varphi)$ und hat, da G_k monoton abnimmt, eine größere bzw. kleinere Länge als B, je nachdem $k > k^*$ oder $< k^*$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

4. *Sind die nichtlinearen Tripel a', b', c' von $S_{k'}$, und a'', b'', c'' von $S_{k''}$ kongruent und ist $k' < k''$, so ist jeder der drei Winkel des ersten Tripels kleiner als der entsprechende Winkel des zweiten Tripels.* Kein Winkel des Tripels ist $= \pi$, da sonst **1** zufolge, $k' > 0$ und $a'b' + b'c' + c'a' = u(k')$ gelten würde und kein zu a', b', c' kongruentes Tripel in $S_{k''}$ existieren könnte. Wir wählen nun einen Punkt d'' in $S_{k''}$ derart, daß $b''d'' = b''c''$ und $\sphericalangle a''b''d'' = \sphericalangle a'b'c'$. Nach **3** ist dann $a'c' > a''d''$. Da $a''c'' = a'c'$, also $a''c'' > a''d''$, so folgt aus **2**, daß $\sphericalangle a''b''c'' > \sphericalangle a''b''d'' = \sphericalangle a'b'c'$.

5. *Sei $Q' = \{a', b', c', d'\}$ ein echtes*[5]) *nichtlineares Quadrupel auf S_k, für welches $a'b' + b'c' = a'c'$ gilt, und $Q'' = \{a'', b'', c'', d''\}$ ein Quadrupel $S_{k''}$, wobei $k' < k''$ gilt und a'', b'', c'' mit a', b', c' kongruent sind. Dann behaupten wir:*

α_1) *Aus $a'd' = a''d''$ und $b'd' = b''d''$ folgt $c'd' > c''d''$.*
α_2) *Aus $c'd' = c''d''$ und $b'd' = b''d''$ folgt $a'd' > a''d''$.*
β) *Aus $a'd' = a''d''$ und $c'd' = c''d''$ folgt $b'd' < b''d''$.*

α_1) Ist a', b', d' nicht linear, dann ist $\sphericalangle a'b'd' < \sphericalangle a''b''d''$ nach **4**. Für die Nebenwinkel gilt also $\sphericalangle c'b'd' > \sphericalangle c''b''d''$, woraus nach **3** und **2** sich $c'd' > c''d''$ ergibt. Ist zweitens a', b', d' linear, so muß, da Q' nicht linear ist, a' zwischen b' und d' liegen. Dann sieht man, daß $\sphericalangle c'a'd' = \sphericalangle b'a'd' = \pi$, also gilt nach **1**:

$$(+) \qquad k' > 0 \text{ und } a'c' + c'd' + d'a' = u(k').$$

Da andererseits $a'c' + c''d'' + d'a' = a''c'' + c''d'' + d''a'' \leqq u(k'') < u(k')$ gilt, so folgt wiederum $c'd' > c''d''$, wie α_1) behauptet. Analog beweist man α_2). Um β) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß weder a', b', d' noch a', c', d' linear ist. Denn wäre a', b', d' linear, so müßte a' zwischen b' und d' liegen und $(+)$ gelten, was wegen $a'c' + c'd' + d'a' = a''c'' + c''d'' + d''a'' \leqq u(k'') < u(k')$ unmöglich ist. Wäre a', c', d' linear, so müßte, da Q' nicht linear ist, d' zwischen a' und c' liegen. Es wäre $k' > 0$ und a' und c' wären diametral gegenüberliegend in $S_{k'}$, was wegen $a'c' = a''c''$ und $k' < k''$ unmöglich ist. Ist nun erstens a'', b'', d'' linear, so muß, da das mit a', c', d' kongruente Tripel a'', c'', d'' nicht linear ist, a'' zwischen b'' und d'' liegen, d. h. $b''a'' + a''d'' = b''d''$ gelten. Da a', b', d' nicht linear ist, also $b'a' + a'd' > b'd'$ gilt, ist $b'd' < b''d''$. Ist zweitens a'', b'', d'' nicht linear, so sei d^* ein Punkt von $S_{k'}$, so daß $a'd^* = a''d''$ und $b'd^* = b''d''$. Wegen des bereits bewiesenen Satzes 5α) ist dann $c'd^* > c''d'' = c'd'$. Wegen **2** ist daher $\sphericalangle b'a'd^*$

---

[5]) Ein n-Tripel von Punkten heiße **echt**, falls je zwei seiner Punkte einen Abstand $\neq 0$ haben.

$> \sphericalangle b' a' d'$ und mithin $b' d' < b' d^* = b'' d''$, womit 5 in allen Stücken bewiesen ist. Es folgt als Korollar:

6. *Ein echtes nichtlineares Quadrupel, das ein lineares Tripel enthält, ist für höchstens eine Zahl k in S_k einbettbar.*

Gilt für die Punkte a, b, c, d von S_k, daß $\sphericalangle bac + \sphericalangle bad + \sphericalangle cad = 2\pi$, so wollen wir sagen, a liege auf S_k *zwischen* b, c, d. Wir beweisen dann:

7. *Es sei $Q = \{a, b, c, d\}$ ein echtes Quadrupel des S_k. Liegt einer der vier Punkte zwischen den drei anderen, so ist Q für kein $k'' > k$ in $S_{k''}$ einbettbar. Liegt keiner der vier Punkte zwischen den drei anderen, so ist Q für kein $k' < k$ in $S_{k'}$ einbettbar*[6]. Wäre nämlich im ersten Fall a'', b'', c'', d'' ein zu Q kongruentes Quadrupel in $S_{k''}$ mit $k'' > k$, dann enthielte Q nach **6** kein lineares Tripel und es müßte wegen 4 offenbar $\sphericalangle b'' a'' c'' + \sphericalangle b'' a'' d'' + \sphericalangle c'' a'' d'' > 2\pi$ gelten, was unmöglich ist. Wäre im zweiten Fall a', b', c', d' ein zu Q kongruentes Quadrupel in $S_{k'}$ mit $k' < k$, so kann Q nach **6** kein lineares Tripel enthalten; es gäbe ferner, da keiner der vier Punkte von Q zwischen den drei anderen liegt, zwei gegenüberliegende Strecken, etwa ab und cd, die sich in einem inneren Punkt e schneiden würden. Es sei e' ein Punkt von $S_{k'}$ zwischen a' und b' so, daß $a' e' = ae$. Wegen 5β) wäre dann $c' e' < ce$ und $d' e' < de$, also $c' e' + e' d' < ce + ed = cd$. Da $c' d' \leq c' e' + e' d'$ ist, so gilt erst recht $c' d' < cd$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Kongruenz. Die damit bewiesene Behauptung **7** enthält offenbar als Korollar:

8. *Ein echtes nichtlineares metrisches Quadrupel Q ist für höchstens zwei verschiedene Zahlen $k' < k''$ sowohl in $S_{k'}$ als auch in $S_{k''}$ einbettbar. Gibt es zwei solche Zahlen, so enthält jedes zu Q kongruente Quadrupel von $S_{k''}$ einen Punkt zwischen den drei übrigen, dagegen enthält kein zu Q kongruentes Quadrupel in $S_{k'}$ einen zwischen den drei übrigen Punkten liegenden Punkt.*

II. Über metrische Räume, welche in einem Punkt eine Flächenkrümmung besitzen.

Wir ziehen vor allem einige unmittelbare Folgerungen aus den bewiesenen Hilfssätzen auf Grund des bekannten Theorems von Menger[7], daß ein mehr als vier Punkte enthaltender metrischer Raum, von dem je drei Punkte linear sind, linear ist. Als *Umgebung* eines Punktes p eines metrischen Raumes werden wir im folgenden stets die Menge aller Punkte des Raumes bezeichnen, die für irgend eine Zahl $\rho > 0$ von p einen Abstand $< \rho$ haben; genauer nennen wir diese Menge die *Umgebung von p vom Radius ρ*.

Ein konvexer metrischer Raum R besitzt in einem Punkt p höchstens eine Flächenkrümmung. Sei U irgend eine Umgebung von p. Ist U linear, dann hat R in p keine Flächenkrümmung. Ist U nicht linear, so existieren dem erwähnten Mengerschen Theorem

[6]) Die Beweise der Sätze 7 und 8 hat mir J. Groiß geliefert.

[7]) Mathem. Annalen *100*, S. 128.

zufolge drei nicht lineare Punkte q, r, s von U. Wegen der Konvexität von R existiert ein Punkt t zwischen r und s. Dann sind q, r, s, t ein nicht lineares, aber ein lineares Tripel enthaltendes Quadrupel. Die Behauptung folgt dann aus **6**[8]).

Wir nennen die Umgebung U von p vom Radius ρ *regulär*, wenn jedes Quadrupel von U einbettbar ist in S_k mit $|k| < \pi^2/16\rho^2$. Die untere Schranke K aller Zahlen k, für welche jedes Quadrupel von U in $S_{k'}$ mit $|k'| \leqq k$ einbettbar ist, nennen wir die *Krümmungsschranke* von U. Aus der Definition der Flächenkrümmung folgt unmittelbar: *Wenn R in p eine Flächenkrümmung besitzt, so ist jede Umgebung von p mit hinlänglich kleinem Radius regulär.* Wir zeigen weiter: In einem kompakten konvexen Raum hat jede reguläre Umgebung U eines Punktes p, in dem R eine Flächenkrümmung besitzt, folgende Eigenschaften:

1. *Jedes echte Quadrupel Q von U, das zwei lineare Tripel enthält, ist linear.* Q ist mit einem Quadrupel Q' von S_k mit $k < \pi^2/16\rho^2$ kongruent, das zwei lineare Tripel enthält. Ist $k \leqq 0$, so liegt Q' auf einer Geraden. Ist $k > 0$, so liegt Q' auf einem halben Großkreis von S_k, da je zwei Punkte von Q' als Bilder von zwei Punkten der Umgebung U vom Radius ρ einen Abstand $< 2\rho < \pi/2\sqrt{k}$ haben. Jedenfalls ist also Q' linear.

2. *Es existieren zwei Punkte a, b von U, so daß p, a, b nicht linear sind.* Anderenfalls wäre wegen Eigenschaft 1. jedes Tripel von U linear. Da U wegen der Konvexität von R mehr als vier Punkte enthält, wäre dann nach dem eingangs erwähnten Theorem von Menger U linear, was unmöglich ist, da R in p eine Flächenkrümmung besitzt.

3. *U ist konvex.* Seien $a \neq b$ zwei Punkte von U. Sind p, a, b linear, so liegt jeder Punkt zwischen a und b in U. Es seien p, a, b nicht linear; wäre x ein Punkt zwischen a und b, der nicht in U liegt, für den also $px \geqq \rho$, so existierten wegen der Konvexität von R zwei Punkte $y_1 \neq y_2$ zwischen a und b derart, daß $pa < py_1 = py_2 < \rho$. Das Quadrupel $Q = \{p, a, y_1, y_2\}$ wäre mit einem Quadrupel $Q' = \{p', a', y_1', y_2'\}$ von S_k mit $|k| < \pi^2/16\rho^2$ kongruent. Da a, y_1, y_2 linear sind und a nicht zwischen y_1 und y_2 liegt, so ist dies für $k \leqq 0$ wegen $pa < py_1$ unmöglich; für $k > 0$ wäre dies nur möglich, wenn das gleichschenkelige Dreieck p', y_1', y_2' eine Höhe $\geqq \pi/2\sqrt{k}$ hätte, was aber nicht der Fall ist, da diese Höhe $< 2\rho$ ist. Aus den Eigenschaften 1. und 3. folgt nach bekannten Sätzen von Menger[9]) als *Korrolar:*

Je zwei Punkte von U sind durch genau eine Strecke (d. h. mit einem Intervall der Geraden kongruente Menge) *verbunden und dieselbe verläuft in U.*

---

[8]) Erwähnen wir noch, daß analog aus 8 folgt, *daß jeder beliebige metrische Raum in keinem seiner Punkte mehr als zwei Flächenkrümmungen besitzen kann.*

[9]) Mathem. Annalen *100*, S. 103—113.

Einführung des Winkelbegriffes. R habe im Punkt p die Flächenkrümmung $k(p)$ und es seien a und b zwei Punkte $\neq p$ in einer regulären Umgebung U von p. Bezeichnen wir dann für jede Zahl λ, die kleiner als pa und pb ist, mit $a(\lambda)$ bzw. $b(\lambda)$ den zwischen p und a bzw. b im Abstand λ von p liegenden Punkt und nennen wir $\delta(\lambda)$ den Abstand von $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$, so behaupten wir: *Es existiert* $\lim\, \delta(\lambda)/\lambda$ *für* $\lambda \to 0$.

Vor allem sehen wir, daß, wenn p, a, b linear sind, $\delta(\lambda) = 2\lambda$ bzw. $= 0$ für jedes λ gilt, je nachdem ob p zwischen a und b liegt oder nicht, daß dann also der fragliche Limes existiert und $= 2$ bzw. $= 0$ ist. Wir nehmen nun an, p, a, b seien nicht linear. K sei die Krümmungsschranke von U. Wir wählen zwei Zahlen $k' < -K$ und $k'' > K$ und irgend ein λ_0, das kleiner als pa und pb ist. Wir bilden zu p, $a(\lambda_0)$, $b(\lambda_0)$ zwei kongruente Tripel p', $a'(\lambda_0)$, $b'(\lambda_0)$ und p'', $a''(\lambda_0)$, $b''(\lambda_0)$ auf $S_{k'}$ bzw. auf $S_{k''}$. Wir bezeichnen sodann für jedes $\lambda \leqq \lambda_0$ mit $a'(\lambda)$ bzw. $b'(\lambda)$ den zwischen p' und $a'(\lambda_0)$ bzw. $b'(\lambda_0)$ im Abstand λ von p' liegenden Punkt von $S_{k'}$, nennen $\delta'(\lambda)$ den Abstand der Punkte $a'(\lambda)$ und $b'(\lambda)$ und definieren analog $a''(\lambda)$, $b''(\lambda)$, $\delta''(\lambda)$. Wir zeigen nun, daß $\delta'(\lambda) < \delta(\lambda)$ für jedes $\lambda < \lambda_0$. Da das Quadrupel p, $a(\lambda_0)$, $b(\lambda_0)$, $a(\lambda)$ von U in eine S_{k_1} mit $k_1 > k'$ einbettbar ist, während p', $a'(\lambda_0)$, $b'(\lambda_0)$, $a'(\lambda)$ in $S_{k'}$ liegen, so folgt aus 5β, daß $b'(\lambda_0)\,a'(\lambda) < b(\lambda_0)\,a(\lambda)$ gilt. Das Quadrupel p, $b(\lambda_0)$, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ von U ist in eine S_{k_2} mit $k_2 > k'$ einbettbar. Es sei p^*, $b^*(\lambda_0)$, $a^*(\lambda)$ ein zu p, $b(\lambda_0)$, $a(\lambda)$ kongruentes Tripel $S_{k'}$ und $b^*(\lambda_0)$ der zwischen p und $b^*(\lambda_0)$ im Abstand λ von p^* liegende Punkt. Dann folgt aus 5β, daß $a^*(\lambda)\,b^*(\lambda) < a(\lambda)\,b(\lambda) = \delta(\lambda)$. Wegen $b'(\lambda_0)\,a'(\lambda) < b(\lambda_0)\,a(\lambda) = b^*(\lambda_0)\,a^*(\lambda)$ folgt aus 2, daß $\sphericalangle b^*(\lambda_0)\,p^*\,a^*(\lambda) > \sphericalangle b'(\lambda_0)\,p'\,a'(\lambda)$, mithin $a^*(\lambda)\,b^*(\lambda) > a'(\lambda)\,b'(\lambda) = \delta'(\lambda)$ und demnach $\delta'(\lambda) < \delta(\lambda)$ gilt. Analog beweist man $\delta''(\lambda) > \delta(\lambda)$ und hat also $\delta'(\lambda) < \delta(\lambda) < \delta''(\lambda)$ für jedes $\lambda < \lambda_0$. Nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie gilt:

$\dfrac{\sin \sqrt{k'}\,\delta'(\lambda)/2}{\sin \sqrt{k'}\,\lambda} = \dfrac{\sin \sqrt{k'}\,\delta'(\lambda_0)/2}{\sin \sqrt{k'}\,\lambda_0} = L'(\lambda_0)$ für jedes $\lambda \leqq \lambda_0$, also $\lim \delta'(\lambda)/\lambda = 2\,L'(\lambda_0)$ für $\lambda \to 0$. Analog definiert man $L''(\lambda_0)$ und hat $\lim \delta''(\lambda)/\lambda = 2\,L''(\lambda_0)$. Zwischen den Zahlen $2\,L'(\lambda_0)$ und $2\,L''(\lambda_0)$, die zwischen 0 und 2 liegen, müssen alle Häufungswerte von $\delta(\lambda)/\lambda$ liegen. Da, wie man leicht sieht $\lim\,(L'(\lambda_0) - L''(\lambda_0)) = 0$ für $\lambda_0 \to 0$, so muß $\delta(\lambda)/\lambda$ konvergieren, w. z. b. w.

Wir definieren nun:

$\sphericalangle apb = 2 \text{ Arc sin } \frac{1}{2} \lim\limits_{\lambda=0} \frac{\delta(\lambda)}{\lambda}$, wo Arc sin den zwischen 0 und $\pi/2$ gelegenen Wert von arc sin bedeutet, dann geht aus unseren Überlegungen hervor:

9. *Für je zwei Punkte* $a \neq p \neq b$ *von* U *ist* $0 \leqq \sphericalangle apb \leqq \pi$, *wobei eines der Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn* p, a, b *linear sind. Ist* $pa = pb$, *so gilt* $\sphericalangle apb = 0$ *dann und nur dann, wenn* $a = b$.

10. *Es seien $a \neq p \neq b$ Punkte der regulären Umgebung U von p mit der Krümmungsschranke K und a', p', b' bzw. a'', p'', b'' Tripel in $S_{k'}$ bzw. $S_{k''}$, wobei $k' < -K$, $k'' > K$, so gilt, wenn die Tripel mit p, a, b kongruent sind, $\sphericalangle a'p'b' \leqq \sphericalangle apb \leqq \sphericalangle a''p''b''$; wenn dagegen $pa = p'a' = p''a''$, $pb = p'b' = p''b''$, $\sphericalangle apb = \sphericalangle a'p'b' = \sphericalangle a''p''b''$, so gilt $a'b' \geqq ab \geqq a''b''$.*

Einführung von Polarkoordinaten. Ist U eine reguläre Umgebung von p, so können wir wegen Eigenschaft 2. der Regularität zwei Punkte p_1 und p_2 wählen, so daß p, p_1, p_2, nicht linear sind. Wir ordnen nun jedem Punkt $s \neq p$ von U die zwei Zahlen zu: $r(s) = ps$ und $\varphi(s) = \sphericalangle spp_1$ bzw. $2\pi - \sphericalangle spp_1$ je nachdem $|\sphericalangle p_1pp_2 - \sphericalangle spp_1| = \sphericalangle spp_2$ oder $\neq \sphericalangle spp_2$ ist und beweisen, daß U folgende wichtige Eigenschaft hat:

4. *Bildet man den Punkt p der regulären Umgebung U auf das Zentrum p' eines Polarkoordinatensystems der euklidischen Ebene ab und jeden Punkt $s \neq p$ auf den Punkt s' der Ebene mit den Polarkoordinaten $r(s)$, $\varphi(s)$, so wird hiedurch U topologisch abgebildet auf eine Teilmenge der Ebene. Sind a' und b' zwei Punkte dieser ebenen Menge U', so daß p', a', b' nicht linear sind, so existiert ein $\lambda > 0$ derart, daß jeder Punkt im Winkelraum zwischen den Strecken $p'a'$ und $p'b$, der von p' einen Abstand $> \lambda$ hat, in U' liegt.*

Wir beginnen mit einer Hilfsüberlegung: $p_1, \ldots p_n$ seien n Punkte $\neq p$ von U. Für jedes λ, das nicht größer als die kleinste der Zahlen $pp_1, \ldots, pp_n$ ist, bezeichnen wir mit $p_i(\lambda)$ den zwischen p und p_i im Abstand λ von p liegenden Punkt $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und setzen $p_0(\lambda) = p$ für jedes λ. Dann ist für jedes λ das Quadrupel $p_{i_1}(\lambda), \ldots, p_{i_4}(\lambda)$ mit einem Quadrupel Q^* von S_k kongruent, wo k von λ und i_1, i_2, i_3, i_4 abhängt und mit $\lambda \to 0$ gegen $k(p)$ konvergiert. Da Q^* von S_k mit $\lambda \to 0$ unbegrenzt klein wird, so nähern sich die Abstandsverhältnisse der Punkte von Q^* unbegrenzt den Abstandsverhältnissen eines Quadrupels der euklidischen Ebene. Dasselbe gilt für vier Punkte, deren Abstände gleich dem λ-ten Teil der Abstände der entsprechenden Punkte von Q^* sind. Setzen wir $d_{ij} = \lim p_i(\lambda)p_j(\lambda)/\lambda$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, so existiert also für je vier Zahlen $i_1, \ldots, i_4$ ein Quadrupel $p''_{i_1}, \ldots, p''_{i_4}$ der euklidischen Ebene, in welchem erstens p''_i und p''_j den Abstand d_{ij} haben und zweitens $\sphericalangle p''_i p'' p''_j = \sphericalangle p_i p p_j$ gilt. Aus der ersten Bemerkung folgt auf Grund Mengerscher Sätze über die Ebene[10], daß $n+1$ Punkte $p''_0, p''_1, \ldots, p''_n$ der Ebene existieren, von denen p''_i und p''_j den Abstand d_{ij} haben $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ aus der zweiten, daß $\sphericalangle p''_i p''_0 p''_j = \sphericalangle p_i p_0 p_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ gilt. Wenden wir dies auf die Punkte p_1 und p_2 von U an, welche zur Einführung der Polarkoordinaten in U verwendet wurden, und auf irgend zwei von p verschiedene Punkte p_3 und p_4 von U, wobei wir in p''_0 das Zentrum eines ebenen Koordinatensystems, durch

[10]) Mathem. Annalen *100*, S. 128.

p_1'' dessen Halbstrahl $\varphi=0$ legen und das wir so orientieren, daß $\varphi(p_2'')<\pi$, so folgt aus der zweiten Bemerkung: Es gilt $\varphi(p_i'')=\varphi(p_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ und $\sphericalangle p_3'' p_0'' p_4''=\sphericalangle p_3 p p_4$. Hieraus ergibt sich für die Abbildung von U auf die ebene Menge U', wenn man in der Ebene das eben betrachtete Koordinatensystem wählt, der *Hilfssatz:*

$$\varphi(p_i')=\varphi(p_i'')\ (i=1, 2, 3, 4) \text{ und } \sphericalangle p_3' p_0' p_4'=\sphericalangle p_3'' p_0'' p_4''=\sphericalangle p_3 p_0 p_4.$$

Hieraus folgt: Die Abbildung von U auf U' ist *eineindeutig*. Denn sind s und t zwei verschiedene Punkte von U, so ist entweder $ps \neq pt$, also $r(s')\neq r(t')$ oder es ist $ps=pt\neq 0$, also nach **9**, da $s\neq t$ gilt, $\sphericalangle spt>0$, woraus nach dem Hilfssatz $\varphi(s')\neq\varphi(t')$ folgt. Jedenfalls also folgt $s'\neq t'$ aus $s\neq t$. Ferner ist die Abbildung von U auf U' *stetig*. Dies ist evident im Punkte p. Ist $\{q_i\}$ eine Folge von Punkten von U mit $\lim q_i=q\neq p$, so gilt wegen der Stetigkeit der Metrik $\lim r(q_i)=r(q)$. Wir zeigen ferner: $\lim \varphi(q_i)=\varphi(q)$, abgesehen davon, daß $\varphi(q)=0$ mit $\lim \varphi(q_i)=2\pi$ verträglich ist. Setzen wir $\Delta\varphi_i=\sphericalangle q_i p q$, so genügt es nach dem Hilfssatz, zu zeigen: $\lim \Delta\varphi_i=0$. Sei s ein fester Punkt zwischen p und q, und s_i der Punkt zwischen p und q_i, für den $ps_i=ps$, dann gilt wegen der Eindeutigkeit der Strecken zwischen den Punkten von U offenbar $\lim s_i=s$. Betten wir r, s_i, s in $S_{k'}$ bzw. $S_{k''}$ ein, wo $k'<K$ und $k''>K$, und bezeichnen wir die Winkel der Bildtripel, deren Scheitel der Bildpunkt von p ist, mit $\Delta\varphi_i'$ bzw. $\Delta\varphi_i''$ so gilt nach **10** $\Delta\varphi_i'\leqq\Delta\varphi_i\leqq\Delta\varphi_i''$. Aus $\lim s_i=s$, folgt $\lim \Delta\varphi_i'=\lim\Delta\varphi_i''=0$, also $\lim \Delta\varphi_i=0$. Da R kompakt ist, ist die Abbildung von U auf U' also *topologisch*.

Um noch die behauptete Eigenschaft von U' zu erweisen, bezeichnen wir, wenn p', a', b' in U' nicht kollinear sind, mit a und b die Urbildpunkte in U von a' und b'. Es ist $0\neq\sphericalangle a'p'b'\neq\pi$, also ist $0\neq\sphericalangle apb\neq\pi$ und p liegt somit nicht zwischen a und b. Die Strecke S zwischen a und b hat somit von p einen Abstand $\lambda>0$. Das Bild S' von S in U' hat den Abstand λ von p. Jede Strecke zwischen p' und einem Punkt von S' liegt in U'. Zum Beweis der behaupteten Eigenschaft von U' haben wir also nur zu zeigen, daß S' im Winkelraum zwischen den Strecken $p'a'$ und $p'b'$ verläuft. Mit diesen beiden Strecken hat S', da je zwei Punkte von U durch genau eine Strecke verbunden sind, nur a' bzw. b' gemein. Läge S' nicht im Winkelraum zwischen den Strecken $p'a'$ und $p'b'$, so läge S' also ganz im äußeren Winkelraum. Dann enthielte S' aber einen Punkt c' (mit einem Urbild c in U), so daß p' zwischen a' und c' läge. Dann läge aber p zwischen a und c, was, da a, c, b linear und a, p, b nicht linear sind, der Eigenschaft 1 der Regularität von U widerspräche.

Wir bezeichnen mit Menger[11]) einen Punkt q des Raumes R als *Schalenpunkt* bezüglich p, wenn kein Punkt r von R existiert,

[11]) Mathem. Annalen *100,* S. 102.

so daß q zwischen p und r liegt, und zeigen, daß die reguläre Umgebung U folgende Eigenschaft besitzt:

5) *Sind a und b Punkte von U, von denen mindestens einer (etwa b) kein Schalenpunkt bezüglich p ist, so ist kein Punkt der Strecke zwischen a und b Schalenpunkt bezüglich p.* Ist p, a, b linear, so ist 5) evident. Sind p, a, b nicht linear, so existiert ein Punkt b^* von U, so daß b zwischen p und b^* liegt. Ist c irgend ein Punkt zwischen a und b, so existiert auf der Strecke zwischen a und b^* genau ein Punkt c^*, so daß $\sphericalangle c^*pa = \sphericalangle cpa$ gilt. Wegen Eigenschaft 1) der regulären Umgebung U ist $c^* \neq c$. Läge c^* zwischen p und c, so müßten wegen Eigenschaften 3) und 4) von U die Strecken b^*c^* und bc sich schneiden, also hätten die Strecken ab und ab^* einen Punkt $\neq a$ gemein, was wegen Eigenschaft 1) von U unmöglich ist. Also liegt c zwischen p und c^* und ist daher kein Schalenpunkt w. z. b. w.

Daß jede Umgebung eines Punktes p, deren Radius hinlänglich klein ist, die Eigenschaften 1)—5) besitzt, hat sich aus der bloßen Annahme ergeben, daß R in p eine Flächenkrümmung besitzt. Herr Menger hat bemerkt, daß sich alle Schlüsse sogar schon aus folgender schwächeren Annahme ziehen lassen; es existiert eine Zahl $k(p)$ derart, daß jedes Quadrupel von U, *das ein lineares Tripel enthält,* in S_k einbettbar ist, wo $|k-k(p)|$ beliebig klein ist, wenn das Quadrupel hinreichend nahe an p liegt. (Ein solches Quadrupel ist nach **6** (S. 28), wenn es nicht linear ist, in höchstens ein S_k einbettbar.) Die Frage von Herrn Menger, ob auch die Sätze des folgenden Kapitels giltig bleiben, wenn man in jedem Punkt die Existenz einer Flächenkrümmung in diesem schwächeren Sinne annimmt, bleibt unentschieden.

III. Einführung des Bogenelementes in Räumen, die in jedem Punkt eine Flächenkrümmung besitzen.

Wir bezeichnen als *Gaußsche Fläche* einen kompakten konvexen metrischen Raum, zu dem eine Zahl $\rho_0 > 0$ existiert derart, daß jede Umgebung jedes Punktes, deren Radius $< \rho_0$ ist, die Eigenschaften 1)—5) besitzt, und in dem eine stetige Funktion $\varkappa(p)$, genannt die *Gaußsche Krümmung*, definiert ist, derart, daß, wenn U eine Umgebung eines Punktes mit einem Radius $< \rho_0$ ist und die stetig differenzierbaren Funktionen $r(t)$, $\varphi(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ eine Kurve in U darstellen, die Länge dieser Kurve gegeben ist durch

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dr^2 + G^2(r, \varphi) d^2\varphi},$$

wo $G(r, \varphi)$ die den Bedingungen $G(0, \varphi) = 0$ und $\partial G(0, \varphi)/\partial r = 1$ genügende Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r, \varphi) + \varkappa(r, \varphi) G(r, \varphi) = 0$ ist. In diesem Kapitel beweisen wir das Theorem: *Jeder kompakte konvexe metrische Raum, der in jedem Punkt eine Flächenkrümmung* *besitzt, ist eine Gaußsche Fläche, für welche in jedem Punkt die Gaußsche Krümmung mit der Flächenkrümmung identisch ist.*

Wir setzen also voraus, R sei ein kompakter konvexer Raum, der in jedem Punkt p eine Flächenkrümmung $k(p)$ besitzt und beweisen vor allem[12]):

$k(p)$ ist eine stetige Funktion von p. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $\delta > 0$ derart, daß jedes nicht lineare Quadrupel, das ein lineares Tripel enthält und von p einen Abstand $< \delta$ hat, in S_k mit $|k - k(p)| < \varepsilon/2$ einbettbar ist. Ist q ein Punkt mit $qp < \delta/2$, so existiert wegen der Eigenschaften 1), 2), 3) der regulären Umgebungen in einem Abstand $< \delta/2$ von q nicht lineares Quadrupel, das ein lineares Tripel enthält und in S_k mit $|k - k(q)| < \varepsilon/2$ einbettbar ist. Mit Rücksicht auf **6** folgt aus $qp < \delta/2$, daß $|k(p) - k(q)| < \varepsilon$. — Wegen der Kompaktheit von R, existiert also eine endliche obere Schranke K der Zahlen $|k(p)|$ für alle Punkte p von R.

11. *Ist in einer regulären Umgebung U von p eine Folge $\{a_i, b_i\}$ von Punktpaaren gegeben, $a_i \neq b_i$, $pa_i = pb^i = r_i \neq 0$ für jedes i und setzen wir $\psi_i = \sphericalangle a_i p b_i$, so hat $a_i b_i / r_i \psi_i$ eine endliche obere und eine positive untere Schranke.* Bilden wir nämlich zwei Tripel p', a_i' b_i' und p'', a_i'', b_i'' auf S_{-K} bzw. S_K derart, daß $p'a_i' = p'b_i' = p''a_i'' = p''b_i'' = r_i$ und $\sphericalangle a_i' p' b_i' = \sphericalangle a_i'' p'' b_i'' = \psi_i$, so gilt nach **10**, daß $a_i' b_i' \geqq a_i b_i \geqq a_i'' b_i''$. Da sowohl $a_i' b_i' / r_i \psi_i$ als auch $a_i'' b_i'' / r_i \psi_i$ eine endliche obere und eine positive untere Schranke besitzt, folgt **11**.

Wir werden ferner die zwei folgenden Bemerkungen über S_k verwenden, wobei wir den Flächeninhalt des Dreiecks a, b, c in S_k mit $F(a, b, c)$ bezeichnen.

12. *Liegt a_i, b_i, c_i in S_{k_i} ($i = 1, 2, \ldots$ ad inf.), und konvergiert der Durchmesser von a_i, b_i, c_i gegen 0, so ist, wenn $|k_i|$ beschränkt ist, auch $\dfrac{F(a_i, b_i, c_i)}{a_i b_i \cdot b_i c_i}$ beschränkt.*

12'. *Sind a_i, b_i, c_i in S_{k_i} und a_i', b_i', c_i' in $S_{k_i'}$ für jedes natürliche i kongruent, konvergiert der Durchmesser von a_i, b_i, c_i gegen 0, ist $|k_i|$ beschränkt und $\lim |k_i - k_i'| = 0$, dann ist $\lim F(a_i, b_i, c_i) / F(a_i', b_i', c_i') = 1$.*

Ist nun U eine reguläre Umgebung von p, so nennen wir *Polartrapez* ein nicht lineares echtes geordnetes Quadrupel $T = \{a, b, c, d\}$ derart, daß 1) a zwischen p und d liegt und b zwischen p und c liegt und 2) $ap = bp$, $cp = dp$ gilt. Wir bezeichnen diese Zahlen stets mit r bzw. $r + \rho$. Offenbar ist $r > 0$ und wegen 1) gilt $ad = bc = \rho > 0$. Wir nennen $\sphericalangle apb$ den *Polwinkel* von T und bezeichnen ihn stets mit ψ. Als Quadrupel einer regulären Umgebung kann T für mindestens ein k in S_k, nach Hilfssatz **8** für höchstens

[12]) Der Beweis ist analog einem Beweis von F. Alt dafür, daß die Mengersche Kurvenkrümmung eine stetige Funktion ist.

zwei k' und k'' in $S_{k'}$ und $S_{k''}$ eingebettet werden. Wir bezeichnen als die T zugeordnete Krümmung k diejenige[13]), von den Zahlen k' und k'', die an $k(a)$ näher liegt, wo $k(a)$ die Flächenkrümmung von R im Punkt a von T bezeichnet. Als *Bildquadrupel* von T werden wir stets ein mit T konkruentes Quadrupel $T' = \{a', b', c', d'\}$ in diesem S_k bezeichnen. Jedes Bildquadrupel eines Polartrapezes ist echt, nicht linear und $a'd' = b'c'$. Die Winkel

$$\alpha = \sphericalangle b'a'd' - 90^0, \ \beta = \sphericalangle a'b'c' - 90^0, \ \gamma = 90^0 - \sphericalangle b'c'd', \\ \delta = 90^0 - \sphericalangle c'd'a'$$

nennen wir die vier T *zugeordneten Winkel*. Von besonderer Wichtigkeit wird der Winkel $\eta = |\alpha - \beta|$ sein. Man beachte, daß α, β, γ, δ, η in S_k erklärt sind, dagegen ψ in R. Die Abstände ab und und cd werden wir stets mit σ bzw. τ bezeichnen.

13. *Ist T_i $(i = 1, 2, \ldots, ad\ inf.)$ eine Folge von Polartrapezen, für welche $\lim \rho_i = \lim r_i = 0$ so gilt*

1) $$\lim \frac{\xi_i - \psi_i/2}{\psi_i} = 0 \textit{ für } \xi_i = \alpha_i, \ \beta_i, \ \gamma_i, \ \delta_i.$$

2) $$\eta_i = \lambda_i \, (r_i + \rho_i)^2 \psi_i, \textit{ wo } \lim \lambda_i = 0.$$

Wegen **10** gibt es für jedes i offenbar eine Zahl k_i^*, so daß $\lim k_i^* = k(p)$ und $\sphericalangle a_i^* p^* b_i^* = \psi_i$ gilt, wobei a_i^*, b_i^*, p^* ein zu a_i, b_i, p kongruentes Tripel in $S_{k_i^*}$ bedeutet. Es sei

a_i, b_i, d_i, p kongruent mit a_i^1, b_i^1, d_i^1, p^1 in S_k mit $k = k_i^1$;

$a_i, b_i, c_i\, p$ kongruent mit a_i^2, b_i^2, c_i^2, p^2 in S_k mit $k = k_i^2$.

Nach trigonometrischen Formeln haben wir, wenn wir $\sphericalangle a_i^l p_i^l b_i^l = \psi_i^l (l = 1, 2)$ setzen und mit a_i', b_i', c_i', d_i' das Bildquadrupel T_i' von T_i bezeichnen:

$$2 \sphericalangle b_i^1 a_i^1 d_i^1 = \pi + \psi_i^1 - k_i^1 F(p^1, a_i^1, b_i^1),$$
$$2 \sphericalangle a_i^2 b_i^2 c_i^2 = \pi + \psi_i^2 - k_i^2 F(p^2, a_i^2, b_i^2),$$
$$|\sphericalangle b_i' a_i' d_i' - \sphericalangle b_i^1 a_i^1 d_i^1| \leqq |k_i F(a_i' b_i' d_i') - k_i^1 F(a_i^1 b_i^1 d_i^1)|,$$
$$|\sphericalangle a_i' b_i' c_i' - \sphericalangle a_i^2 b_i^2 c_i^2| \leqq |k_i F(a_i', b_i', c_i') - k_i^2 F(a_i^2, b_i^2, c_i^2)|,$$
$$|\psi_i - \psi_i^l| \leqq |k_i^* F(p^*, a_i^*, b_i^*) - k_i^l F(p^l, a_i^l, b_i^l)|; \ (l = 1, 2).$$

Aus **11** folgt, daß $a_i b_i / r_i \psi_i$ beschränkt ist. Wegen **12** sind die Ausdrücke $F(p^l, a_i^l, b_i^l)/r_i^2 \psi_i$, $F(a_i', b_i', d_i')/r_i \rho_i \psi_i$ und $F(a_i', b_i', c_i')$, $r_i \rho_i \psi_i$ beschränkt. Unter Berücksichtigung von **12'** folgen nun, da $\lim k_i = \lim k_i^1 = \lim k_i^2 = \lim k_i^* = k(p)$ gilt, die Behauptungen 2) und 1) für $\xi_i = \alpha_i$, β_i. Für $\xi_i = \gamma_i$, δ_i beweist man 1 analog.

---

[13]) Bzw. irgend eine der Zahlen k', k'', falls $k(a)$ ihr arithmetisches Mittel ist.

Wir wollen eine reguläre Umgebung U von p *trapezregulär* nennen, wenn für jedes Polartrapez T in U der Betrag jedes der vier zugeordneten Winkel, α, β, γ, δ zwischen dem $^3/_8$fachen und dem $^5/_8$fachen des Polwinkels ψ liegt. Aus Behauptung 1) von **13** ergibt sich dann unmittelbar: *Jede reguläre Umgebung von p mit hinlänglich kleinem Radius ist trapezregulär.*

14. *Ist U eine trapezreguläre Umgebung von p und T_i ($i=1, 2, \ldots,$ ad inf.) eine nicht gegen die Begrenzung von U sich häufende Folge von Polartrapezen für welche 1) $\rho_i < r_i$, 2) ρ_i/ψ_i eine positive untere und eine endliche obere Schranke hat, 3) $\lim\ \rho_i = \lim\ \psi_i = 0$ gilt, dann ist $\lim\ \eta_i/r_i^2\psi_i = 0$.*

Es genügt **14** für den Fall zu beweisen, daß die T_i gegen einen Punkt a von U konvergieren. Ist $a=p$, so folgt **14** aus Behauptung 2) von **13**. Sei also $a \neq p$. Für jedes natürliche i betrachten wir auf der Strecke zwischen p und dem Punkt a_i von T_i endlich viele Punkte $a_{i1}, \ldots, a_{i\,n(i)-1}, a_{i\,n(i)} = a_i$, so daß $p a_{i1} \leqq \rho_i$ und $a_{ij} a_{ij+1} = \rho_i$ ($j=1, \ldots, n(i)-1$). Wir setzen $r_{ij} = p a_{ij}$, nennen b_{ij} den Punkt zwischen p und b_i für den $p b_{ij} = p a_{ij}$, setzen $c_{ij} = b_{ij+1}$, $d_{ij} = a_{ij+1}$ ($j=1, \ldots, n(i)-1$), $c_{i\,n(i)} = c_i$, $d_{i\,n(i)} = d$ und nennen T_{ij} das Polartrapez $\{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}\}$ ($j=1, \ldots, n(i)$). Es sei nun $j(1), j(2), \ldots, j(i), \ldots$ irgend eine Folge natürlicher Zahlen $1 \leqq j(i) \leqq n(i)$. Wir betrachten die Folge $T_{ij(i)}$, ($i=1, 2, \ldots,$ ad inf.). Das Bildquadrupel $T'_{ij(i)} = \{a'_{ij(i)}, \ldots\}$ liegt für $k = k_{ij(i)}$ in S_k. Dann gilt

1′) $a'_{ij(i)} d'_{ij(i)} = b'_{ij(i)} c'_{ij(i)} = \rho_i$ für jedes natürliche i,

2′) $|\xi' - \psi_i/2| \leqq \psi_i/8$, wenn ξ' irgend ein $T_{ij(i)}$ zugeordneter Winkel ist, d. h. für die Winkel $\sphericalangle b'_{ij(i)}, a'_{ij(i)} d'_{ij(i)} - 90^0$ usw. von S_k, da $T_{ij(i)}$ in einer trapezregulären Umgebung von p liegt.

Nun existiert für jedes i ein $\lambda'_i > 0$, so daß

(+) $\lim\ \lambda'_i = 0$, $\eta_{ij} \leqq \lambda'_i r_{ij}^2 \psi_i$ für $2 \leqq j \leqq 1/\sqrt{\rho_i}$ und jedes i.

Denn für $2 \leqq j(i) \leqq 1/\sqrt{\rho_i}$ erfüllt die Folge $T_{ij(i)}$ offenbar die Voraussetzungen von **13**, so daß Behauptung 2) von **13** gilt. Wir behaupten weiter, daß für jedes i ein $\mu_i > 0$ und ein $\lambda''_i > 0$ existiert, so daß

(++) $\lim\ \mu_i = \lim\ \lambda''_i = 0$, $\eta_{ij+1} - \eta_{ij} \leqq (\mu_i \eta_{ij} + \lambda''_i r_{ij}\, \psi_i)\rho_i$ für $j \geqq 1/\sqrt{\rho_{ij}}$ und jedes i. Um dieses zu beweisen, setzen wir, wenn $j(i)$ eine Zahlenfolge mit $j(i) \geqq 1/\sqrt{\rho_i}$ ist, $a_{ij(i)} b_{ij(i)} = \sigma_{ij(i)}$, $c_{ij(i)} d_{ij(i)} = \tau_{ij(i)}$ und haben dann mit Rücksicht auf **11**:

3′) $\sigma_{ij(i)}/\psi_i$ und $\tau_{ij(i)}/\psi_i$ sind beschränkt; $\tau_{ij(i)}/\sigma_{ij(i)}$ hat eine positive untere und eine endliche obere Schranke und $\lim\ \rho_i \psi_i/\sigma_{ij(i)} = 0$. Nach einem elementaren Satz über Quadrupelfolgen von S_k, (dessen Beweis sich S. 40 findet) ergibt sich aus 1′), 2′), 3′) und 2) für jedes i die Existenz eines $\varkappa_i$, so daß

$\lim \varkappa_i = 0$; $|\delta_{ij} - \gamma_{ij}| - \eta_{ij} \leqq \varkappa_i \eta_{ij} \rho_i$ für $j \geqq 1/\sqrt{\rho_i}$ und jedes i.

Hieraus folgt (+ +) offenbar mühelos, sobald man weiß, daß

$$(*) \qquad |\delta_{ij} - \alpha_{ij+1}| + |\gamma_{ij} - \beta_{ij+1}| < \nu_{ij} r_{ij} \psi_i \rho_i,$$

wo ν_{ij} mit wachsenden i gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Um den ersten Summanden von (*) abzuschätzen, betrachten wir das (ein lineares Tripel enthaltende Quadrupel c_{ij}, a_{ij}, a_{ij+1}, a_{ij+2}, das nach **6** für genau ein (von i und j abhängiges) k^* mit einem Quadrupel c^*, a_0^*, a_1^*, a_2^* von S_{k^*} kongruent ist. Wegen der Linearität von a_0^*, a_1^*, a_2^* gilt, wenn wir $\delta^* = 90^0 - \sphericalangle c^* a_1^* a_0^*$, $\alpha^* = \sphericalangle c^* a_1^*, a_2^* - 90^0$ setzen, $\alpha^* = \delta^*$ und

$$|\alpha^* - \alpha_{ij+1}| \leqq |k_{ij+1} F(a'_{ij+1}, b'_{ij+1}, d'_{ij+1}) - k^* F(a_1^*, a_2^*, c^*)|$$

$$|\delta^* - \delta_{ij}| \leqq |k_{ij} F(a'_{ij}, c'_{ij}, d'_{ij}) - k^* F(a_0^*, a_1^*, c^*)|.$$

Da nach **11** $a_{ij+1} c_{ij} / r_{ij} \psi_i$ beschränkt ist, so folgt aus **12**, daß $F(a'_{ij}, d'_{ij}, c'_{ij}) / r_{ij} \psi_i \rho_i$ und $F(a'_{ij+'}, b'_{ij+'}, d'_{ij+'}) / r_{ij} \psi_i \rho_i$ beschränkt sind. Da $k_{ij} - k^*$ und $k_{ij+1} - k^*$ mit wachsendem i gleichmäßig in j gegen 0 konvergieren, folgen wegen **12'** Abschätzungen für $|\alpha^* - \alpha_{ij+1}|$ und $|\delta^* - \delta_{ij}|$, welche wegen $\alpha^* = \delta^*$ die gewünschte Abschätzung des ersten Summanden von (*) ergeben. Die des zweiten ergibt sich analog, womit (+ +) bewiesen ist.

Wir nennen nun λ_i die größere der Zahlen λ'_i und λ''_i und zeigen zunächst: Ist $y_i(r)$ die der Bedingung $y_i(0) = 0$ genügende Lösung der Differentialgleichung $y'_i(r) = \mu_i y_i(r) + 2\lambda_i \psi_i r$ $(i = 1, 2, \ldots, \text{ ad inf.})$, so gilt $\eta_{ij} \leqq y_i(r_{ij})$ für jedes i und j. Da die der Bedingung $z_i(0) = 0$ genügende Lösung der Differentialgleichung $z'_i(r) = 2\lambda_i \psi_i r$ eine Minorante von $y_i(r)$ ist und $z_i(r) = \lambda_i \psi_i r^2 \geqq \eta_{ij}$ für $2 \leqq j \leqq 1/\sqrt{\rho_i}$, so gilt erst recht $y_i(r_{ij}) \geqq \eta_{ij}$. Für $j > 1/\sqrt{\rho_i}$ sieht man nach dem Mittelwertsatz, daß $y_i(r_{ij+1}) - y_i(r_{ij}) = y'(r^*_{ij}) \rho_i$, wo $r_{ij} \leqq r^*_{ij} \leqq r_{ij+1}$. Aus der Differentialgleichung folgt unmittelbar, daß $y_i(r)$ und $y'_i(r)$ monoton wachsende Funktionen sind, also ist $y'_i(r^*_{ij}) \rho_i \geqq y'_i(r_{ij}) \rho_i = (\mu_i y_i(r_{ij}) + 2\lambda_i \psi_i r_{ij}) \rho_i \geqq \eta_{ij+1} - \eta_{ij}$, woraus durch Induktion nach j die Behauptung $y_i(r_{ij}) \geqq \eta_{ij}$ für alle i und j folgt.

Um **14** zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß $y_i(r)/r^2 \psi_i$ mit wachsendem i gleichmäßig in r gegen 0 konvergiert. Es gilt:

$$y_i(r) = e^{\mu_i r} \int_0^r 2\lambda_i r \psi_i e^{-\mu_i r}\, dr < y_i^*(r) = e^{\mu_i r} \int_0^r 2\lambda_i r \psi_i\, dr = \lambda_i r^2 e^{\mu_i r} \psi_i.$$

Da $\lim \mu_i = \lim \lambda_i = 0$, so ist **14** bewiesen.

Ist U eine reguläre, also mit Polarkoordinaten r, φ beschreibbare Umgebung von p, so bezeichnen wir den Abstand der Punkte $a = (r, \varphi)$ und $b = (r, \varphi + \Delta\varphi)$ mit $\sigma(r, \varphi, \Delta\varphi)$ und setzen:

$$\sigma(r+\Delta r, \varphi, \Delta\varphi)-\sigma(r, \varphi, \Delta\varphi)=\Delta\sigma(r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r),$$
$$\Delta\sigma(r+\Delta r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r)-\Delta\sigma(r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r)=\Delta^2\sigma(r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r).$$

15. *Sei U eine trapezreguläre Umgebung von p; die Punktefolge $a_i=\{r_i, \varphi_i\}$ $(i=1, 2, \ldots,$ ad inf.) konvergiere gegen einen Punkt $a=(r, \varphi)\neq p$. Es seien $\Delta r_i>0$ und $\Delta\varphi_i$ zwei Zahlenfolgen, so daß $\lim \Delta r_i=0$ und wenn wir $b_i=(r_i, \varphi_i+\Delta\varphi_i)$ und $\psi_i=\sphericalangle a_i p b_i$ setzen, folgende Bedingungen erfüllt sind: $0\neq\psi_i\neq\pi$, $\lim \psi_i=0$ und $\Delta r_i/\psi_i$ hat eine positive untere und eine endliche obere Schranke. Dann gilt:*

$$\lim \frac{\Delta^2\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i, \Delta r_i)}{\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\, \Delta r_i^2}=-k(r, \varphi)$$

wobei wir $k(r, \varphi)=k(a)$ schreiben.

Wir setzen $c_i=b_i^*=(r_i+\Delta r_i, \varphi_i+\Delta\varphi_i)$, $d_i=a_i^*=(r_i+\Delta r_i, \varphi_i)$, $c_i^*=(r_i+2\Delta r_i, \varphi_i+\Delta\varphi_i)$, $d_i^*=(r_i+2\Delta r_i, \varphi_i)$ und $T_i=\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, $T_i^*=\{a_i^*, \ldots\}$. Die Bildquadrupel $T_i'=\{a_i', \ldots\}$ von T_i genügen, wie man aus **13** und **14** entnimmt, folgenden Bedingungen:

1) $a_i'd_i'=b_i'c_i'=\Delta r_i$ für jedes i

2) $|\xi'-\psi_i/2|\leqq\varphi_i/8$, wenn ξ' ein T_i ungeordneter Winkel ist.

3) σ_i/ψ_i und τ_i/ψ_i haben eine positive untere und eine endliche obere Schranke, da $a\neq p$.

4) $\lim \eta_i/\psi_i=0$ nach **14**.

5) $\lim k_i=k(a)$.

Aus einem elementaren Satz über Quadrupelfolgen von S_k, dessen Beweis sich S. 41 findet, folgt aus 1)—5):

6) $$\lim \frac{\gamma_i-\beta_i}{\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\,.\,\Delta r_i}=\lim \frac{\delta_i-\alpha_i}{\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\, \Delta r_i}=-\frac{1}{2}k(a);$$

und

$$\Delta\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i, \Delta r_i)=\tau_i-\sigma_i=(\beta_i+\delta_i)\Delta r_i+\varepsilon_i\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta r_i^2,$$
wo $\lim \varepsilon_i=0$.

Ebenso sieht man, da die Bildquadrupel von T_i^* analoge Voraussetzungen 1*)—5*) erfüllen, daß

$$\Delta\sigma(r_i+\Delta r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i, \Delta r_i)=\tau_i^*-\sigma_i^*=(\beta_i^*+\delta_i^*)\Delta r_i+\varepsilon_i^*\sigma(r_i+\Delta r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta r_i^2,$$
wo $\lim \varepsilon_i^*=0$.

Da $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ gegen 0 konvergieren und $\Delta r_i/\sigma_i$ eine positive untere und eine endliche obere Schranke hat, so ist $\lim \tau_i/\sigma_i=1$.

Durch Subtraktion der letzten Formeln ergibt sich dann:

$$\Delta^2\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i, \Delta r_i)=[(\beta_i^*-\beta_i)+(\delta_i^*-\delta_i)]\Delta r_i+\varepsilon_i'\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta r_i^2;$$
$\lim \varepsilon_i'=0$.

Daher gilt:

$$\lim \frac{\Delta^2\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i, \Delta r_i)}{\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\,\Delta r_i^2} = \lim \frac{(\beta_i^*-\beta_i)+(\delta_i^*-\delta_i)}{\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\,\Delta r_i}.$$

Wegen 6) und 6*) folgt die Behauptung **15** sobald wir wissen, daß

$$\lim\,[(\alpha_i^*-\delta_i)/\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta r_i + (\gamma_i-\beta_i^*)/\sigma(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta r_i] = 0,$$

was man genau so, wie Formel (*) von S. 37 beweist,

Wir setzen nun: $\sigma(r, \varphi, \Delta\varphi)/\psi = G(r, \varphi, \Delta\varphi)$,

$G(r+\Delta r, \varphi, \Delta\varphi) - G(r, \varphi, \Delta\varphi) = \Delta G(r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r)$,

$\Delta G(r+\Delta r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r) - \Delta G(r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r) = \Delta^2 G(r, \varphi, \Delta\varphi, \Delta r)$.

Dann lautet die Behauptung von **15**

$$\lim \frac{\Delta^2 G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i, \Delta r_i)}{G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\,\Delta r_i^2} = -k(r, \varphi),$$

wobei $G(0, \varphi, \Delta\varphi)=0$ und für $r\to 0$ gilt: $\partial G(0, \varphi, \Delta\varphi)/\partial r = \lim G(r, \varphi, \Delta\varphi)/r = \lim \sigma(r, \varphi, \Delta\varphi)/r\psi = 2/\psi \,.\, \sin\psi/2$. Für $\psi\to 0$ konvergiert dies gegen 1. Aus diesen Tatsachen folgt leicht:

16. *Ist $a_i=(r_i, \varphi_i)$ $(i=1, 2, \ldots$ ad inf.$)$ eine gegen den Punkt $a_0=(r_0, \varphi_0)$ konvergente Folge von Punkten der trapezregulären Umgebung U von p und ist $\Delta\varphi_i$ eine gegen 0, 2π oder -2π konvergente Folge von Zahlen $\neq 0$, $\neq 2\pi$, $\neq -2\pi$, so gilt lim $G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i) = G(r_0, \varphi_0)$, wo $G(r, \varphi)$ die den Bedingungen $G(0, \varphi)=0$, $\partial G(0, \varphi)/\partial r = 1$ genügende Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r, \varphi) + k(r, \varphi)\,G(r, \varphi) = 0 \quad \textit{ist.}$$

Daß R eine Gaußsche Fläche ist, für welche $\varkappa(p)=k(p)$ gilt, ist also offenbar erwiesen, sobald noch gezeigt ist:

17. *Sind $a_i=(r_i, \varphi_i)$ und $c_i=(r_i+\Delta r_i, \varphi_i+\Delta\varphi_i)$ zwei gegen einen Punkt $a_0=(r_0, \varphi_0)$ konvergente Punktefolgen einer hinlänglich kleinen Umgebung U, wo $r_i>0$, $\Delta r_i\geqq 0$, $\Delta r_i^2+\Delta\varphi_i^2\neq 0$, lim $\Delta\varphi_i=0$, dann gilt lim $a_i c_i/\sqrt{\Delta r_i^2+G^2(r_i, \varphi_i)\Delta\varphi_i^2}=1$.*

Zum Beweise wählen wir U so klein, daß U regulär ist und, wenn K eine Majorante aller Zahlen $k(p)$ auf R ist, einen Radius $<\pi/\sqrt{|K|}$ besitzt, da dann aus Sturmschen Sätzen folgt, daß für $r\neq 0$ stets $G(r, \varphi)>0$ gilt. Falls $\Delta\varphi_i=0$, so ist **17** evident. Sei also $\Delta\varphi_i\neq 0$. Dann gilt zunächst lim $G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)/G(r_i, \varphi_i)=1$; denn ist $a_0\neq p$, so folgt dies wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $G(r, \varphi)$ daraus, daß lim $G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)=G(r_0, \varphi_0)\neq 0$; wenn $a_0=p$ daraus, daß lim $G(r_i, \varphi_i)/r_i=1$ und wegen **10** lim $G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)/r_i=1$ gilt. Auf Grund der damit bewiesenen Beziehung genügte also für den Beweis von **17** zu zeigen, daß

$\lim a_i c_i / \sqrt{\Delta r_i^2 + G^2(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta\varphi_i^2} = 1$ ist. Für $\Delta r_i = 0$ ist dies evident. Wenn $\Delta r_i \neq 0$, so betrachten wir die Punkte $b_i = (r_i, \varphi_i + \Delta\varphi_i)$ und $d_i = (r_i + \Delta r_i, \varphi_i)$ und die Polartrapeze $T_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$. Da ihre zugeordneten Winkel gegen 0 konvergieren, also $\lim \sphericalangle a_i', b_i' c_i' = 90^\circ$, und $a_i c_i / \sqrt{\Delta r^2 + G(r_i, \varphi_i, \Delta\varphi_i)\Delta\varphi_i^2} = a_i' c_i' / \sqrt{(a_i', b_i')^2 + (b_i' c_i')^2}$ ist, so ergibt sich **17** nach dem Pythagoräischen Satz.

Wir beweisen nun als Anhang zu diesem Kapitel zwei in ihm verwendete elementare Hilfssätze über Quadrupelfolgen.

Hilfssatz 1. Voraussetzungen. Für jedes natürliche i seien gegegeben:

erstens eine Zahl k_i, so daß $|k_i|$ beschränkt ist;

zweitens in S_{k_i} ein echtes Quadrupel $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, für welche $a_i d_i = b_i c_i = \rho_i$ und für welches wir setzen: $a_i b_i = \sigma_i$; $c_i d_i = \tau_i$; $\sphericalangle a_i b_i c_i = 90^\circ + \alpha_i$; $\sphericalangle a_i b_i c_i = 90^\circ + \beta_i$; $\sphericalangle b_i c_i d_i = 90^\circ - \gamma_i$; $\sphericalangle c_i d_i a_i = 90^\circ - \delta_i$; $|\alpha_i - \beta_i| = \eta_i$;

drittens ein $\psi_i > 0$, so daß $\lim \psi_i = 0$ und folgendes gilt:

1) *ρ_i / ψ_i hat eine positive untere und eine endliche obere Schranke,*

2) $|\xi_i - \psi_i / 2| \leqq \psi_i / 8$ *für* $\xi_i = \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$,

3) *σ_i / ψ_i und τ_i / ψ_i sind beschränkt; τ_i / σ_i hat eine positive untere und eine endliche obere Schranke.*

4) $\lim \rho_i \psi_i / \sigma_i = 0$.

Behauptung: I) $|\delta_i - \gamma_i| - \eta_i \leqq \varepsilon_i \eta_i \rho_i$, *wo* $\lim \varepsilon_i = 0$.

II) Wenn σ_i / ψ_i eine positive untere Schranke hat, so gilt außerdem $\gamma_i = \beta_i - \lambda_i k_i \sigma_i \rho_i / 2 + \mu_i \eta_i \rho_i$ *und* $\delta_i = \alpha_i - \lambda_i' k_i \sigma_i \rho_i / 2 + \mu_i' \eta_i \rho_i$, *wo* $\lim \lambda_i = \lim \lambda_i' = 1$ *und* μ_i, μ_i' *beschränkt sind.*

Sei zum Beweis etwa $\alpha_i \geqq \beta_i$. Aus 1), 2), 3) folgt leicht, daß d_i und c_i für fast alle i auf derselben Seite von $a_i b_i$ liegen. Sei d_i' ein Punkt von S_{k_i}, der mit d_i auf derselben Seite von $a_i b_i$ liegt und so, daß $a_i d_i' = \rho_i$ und $\sphericalangle b_i a_i d_i' = 90^\circ + \beta_i$ gilt. Dann haben wir $\sphericalangle d_i a_i d_i' = \eta_i$, also

5) $\sphericalangle b_i c_i d_i' = \sphericalangle a_i d_i' c_i = 90^\circ - \beta_i - k_i F(a_i, b_i, c_i, d_i') / 2$, wo $F(a_i, b_i, c_i, d_i')$ den Flächeninhalt von (a_i, b_i, c_i, d_i') bezeichnet, und

6) $\sphericalangle a_i d_i' d_i = 90^\circ - \eta_i / 2 + k_i F(a_i, d_i, d_i') = 90^\circ - \nu_i \eta_i / 2$, wo $\lim \nu_i = 1$. Wegen $\lim F(a_i, b_i, c_i, d_i') / \psi_i = 0$ und $|\beta_i - \psi_i / 2| \leqq \psi_i / 8$ folgt aus 5) und 6)

7) $\sphericalangle a_i d_i' c_i + \sphericalangle a_i d_i' d_i < 180^\circ$ für fast alle i, also

8) $\sphericalangle a_i d_i' c_i + \sphericalangle a_i d_i' d_i = \sphericalangle c_i d_i' d_i$.

Aus 7) folgt, daß d_i' nicht im Innern des Vierecks (a_i, b_i, c_i, d_i) liegt, so daß

9) $\sphericalangle b_i c_i d_i = \sphericalangle b_i c_i d_i' - \sphericalangle d_i' c_i d_i$.

Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck (d_i, c_i, d_i') ergibt $\sin \sphericalangle d_i' c_i d_i = \sin \sphericalangle c_i d_i' d_i \sin(d_i d_i' \sqrt{k_i}) / \sin(c_i d_i \sqrt{k_i})$. Hieraus folgt wegen 2) und wegen der Beschränktheit von $(180^\circ - \sphericalangle c_i d_i' d_i)' / \psi_i > 0$

10) $\sphericalangle d_i' c_i d_i = \zeta_i' \psi_i \eta_i \rho_i / \tau_i = \zeta_i \psi_i \eta_i \rho_i / \sigma_i$, wo $\zeta_i \geqq 0$ und beschränkt ist.

Aus 5), 9) und 10) ergibt sich $90^0 - \gamma_i = \sphericalangle b_i c_i d_i = 90^0 - \beta_i + k_i F(a_i, b_i, c_i, d_i') / 2 - \zeta_i \eta_i \rho_i \psi_i / \sigma_i$, also

11) $\gamma_i = \beta_i - k_i F(a_i, b_i, c_i, d_i') / 2 + \zeta_i \psi_i \eta_i \rho_i / \sigma_i$.

Hieraus folgt wegen $\alpha_i + \beta_i - \gamma_i - \delta_i = k_i F(a_i, b_i, c_i, d_i)$

12) $\delta_i = \alpha_i + k_i F(a_i, b_i, c_i, d_i') / 2 - \zeta_i \psi_i \eta_i \rho_i / \sigma_i - k_i F(a_i, b_i, c_i, d_i)$.

Subtrahiert man 11) und 12), so ergibt sich

13) $\delta_i - \gamma_i = \eta_i + k_i [F(a_i, b_i, c_i, d_i') - F(a_i, b_i, c_i, d_i)] - 2 \zeta_i \psi_i \eta_i \rho_i / \sigma_i$.

Nun ist offenbar $|F(a_i, b_i, c_i, d_i') - F(a_i, b_i, c_i, d_i)| \leqq F(d_i, c_i, d_i') + F(d_i, a_i, d_i')$ und $F(d_i, a_i, d_i') / \eta_i \rho_i$ konvergiert gegen 0. Aus 10) folgt, daß auch $\lim F(d_i, c_i, d_i') / \eta_i \rho_i = 0$. Aus 13) ergibt sich also

$$\delta_i - \gamma_i = \eta_i + \varepsilon_i' \eta_i \rho_i - 2 \zeta_i \psi_i \eta_i \rho_i / \sigma_i, \text{ wo } \lim \varepsilon_i' = 0.$$

Nach 4) folgt hieraus

$$|\delta_i - \gamma_i| - \eta_i = \varepsilon_i \eta_i \rho_i - 2 \zeta_i \psi_i \eta_i \rho_i / \sigma_i, \text{ wo } \lim \varepsilon_i = 0$$

und daraus wegen $\zeta_i \geqq 0$ die Behauptung I).

Hat σ_i / ψ_i eine positive untere Schranke, so gilt offenbar $\lim \tau_i / \sigma_i = 1$ und $\lim F(a_i, b_i, c_i, d_i') / \sigma_i \rho_i = 1$. Aus 11) und 12) ergibt sich unmittelbar die Behauptung II).

Hilfssatz 2. Außer den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gelte 1′) $\lim k_i = k$; 2′) $\lim \eta_i / \psi_i = 0$; 3′) σ_i / ψ_i hat eine positive untere Schranke. Dann behaupten wir:

III) $\lim (\gamma_i - \beta_i) / \sigma_i \rho_i = \lim (\delta_i - \alpha_i) / \sigma_i \rho_i = -k / 2$,

IV) $\tau_i - \sigma_i = \rho_i (\beta_i + \delta_i) + \varepsilon_i \sigma_i \rho_i^2$, wo $\lim \varepsilon_i = 0$.

Wegen 2′) und 3′) gilt $\lim \eta_i / \sigma_i = 0$. Hieraus und aus 1′) ergibt sich III) unmittelbar auf Grund der Behauptung II) von Hilfssatz 1. Nach dem Kosinussatz erhalten wir, wenn wir $k_i = 1 / r_i^2$ setzen:

$$\cos a_i c_i / r_i = \cos \tau_i / r_i \cos \rho_i / r_i + \cos (90^0 - \delta_i) \sin \tau_i / r_i \sin \rho_i / r_i,$$

$$\cos a_i c_i / r_i = \cos \sigma_i / r_i \cos \rho_i / r_i + \cos (90^0 + \beta_i) \sin \sigma_i / r_i \sin \rho_i / r_i.$$

Hieraus ergibt sich

$$\cos \tau_i / r_i - \cos \sigma_i / r_i = -tg\, \rho_i / r_i [\sin \beta_i \sin \sigma_i / r_i + \sin \delta_i \sin \tau_i / r_i]$$

und daraus wegen $\lim \tau_i / \sigma_i = 1$

$$(\tau_i^2 - \sigma_i^2) k_i (1 + \mu_i \sigma_i^2) / 2 = tg\, \rho_i / r_i [\sin \beta_i \sin \sigma_i / r_i + \sin \delta_i \sin \tau_i / r_i],$$

wobei μ_i beschränkt ist, also

$$(\tau_i^2 - \sigma_i^2) / 2 = \rho_i (\beta_i \sigma_i + \delta_i \tau_i) + \nu_i \sigma_i^2 \rho_i^3, \text{ wo } \nu_i \text{ beschränkt ist.}$$

Hieraus ergibt sich

$$\tau_i = \rho_i \delta_i \pm 1 / 2 \,.\, \sqrt{4 \rho_i^2 \delta_i + 4 (\sigma_i^2 + 2 \rho_i \beta_i \sigma_i + 2 \nu_i \sigma_i^2 \rho_i^3)}.$$

Da $\tau_i > 0$ gilt das Zeichen $+$ und man erhält daher leicht:

$$\tau_i = \rho_i \delta_i + \sigma_i [1 + \rho_i \beta_i / \sigma_i + \rho_i^2 \delta_i^2 / 2\sigma_i^2 - \rho_i^3 \beta_i^2 / 2\sigma_i^2] + \nu_i' \sigma_i \rho_i^2,$$

wo $\lim \nu_i' = 0$, also

$$(+) \qquad \tau_i - \sigma_i = \rho_i (\delta_i + \beta_i) + \rho_i^2 (\delta_i^2 - \beta_i^2) / 2\sigma_i + \nu_i' \sigma_i \rho_i^2.$$

Aus der Behauptung III) folgt $\lim (\delta_i - \alpha_i) / \sigma_i = 0$.

Wegen 2′) und 3′) gilt $\lim (\alpha_i - \beta_i) / \psi_i = \lim (\alpha_i - \beta_i) / \sigma_i = 0$, also wegen (+) die Behauptung IV).

IV. Die Existenz der Flächenkrümmung auf Gaußschen Flächen.

Sei F eine Gaußsche Fläche im Sinne der Definition von S. 33. Wir beweisen in diesem Kapitel: *In jedem Punkt p von F existiert eine Flächenkrümmung $k(p)$ und dieselbe ist in jedem Punkt mit der Gaußschen Krümmung $\varkappa(p)$ identisch.*

Sei U eine Umgebung von p in F, deren Radius ρ kleiner ist, als die auf S. 33 erwähnte Zahl ρ_0. Wegen Eigenschaft 4) von U können wir Polarkoordinaten mit dem Zentrum p einführen. U' sei die ebene Bildmenge von U. Sie ist Teil des Kreisinnern C mit dem Zentrum p' und dem Radius ρ. Wird jedem Punkt q' von U', wenn q das Urbild von q' bezeichnet, die Zahl $\varkappa(q)$ zugeordnet, so liegt eine gleichmäßig stetige Funktion in U' vor, welche wir zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\varkappa^*(q)$ auf ganz C erweitern können. Sei $G^*(r, \varphi)$ die den Bedingungen $G^*(0, \varphi) = 0$ und $\partial G^*(0, \varphi) / \partial r = 1$ genügende Lösung der Differentialgleichung $\partial^2 G^*(r, \varphi) / \partial r^2 + \varkappa^*(r, \varphi)\, G^*(r, \varphi) = 0$. Wir bezeichnen mit U^* den metrischen Raum bestehend aus den Punkten von C, wobei je zwei Punkten q_1^* und q_2^* von C als Abstand die untere Schranke aller Zahlen $\int \sqrt{dr^2 + G^{*2}(r, \varphi)\, d\varphi^2}$, gebildet für alle q_1^* und q_2^* verbindenden stetig differenzierbaren in C verlaufenden Bogen: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, zugeordnet wird. Jeder Punkt von U ist Punkt von U^*. Wir zeigen nun

18. *Es existiert ein $\rho^* > 0$ derart, daß der Abstand je zweier Punkte q_1 und q_2 von U, die von p einen Abstand $< \rho^*$ haben, identisch ist mit dem Abstand, den diese Punkte aufgefaßt als Punkte von U^* haben, und diese Zahl ρ^* kann gleichmäßig für alle Umgebungen mit Radien $< \rho_0$ in F gewählt werden.* Vor allem ist klar, daß jeder in U liegende Bogen die gleiche Länge hat, ob wir ihn als Bogen von U oder von U^* auffassen. Nach klassischen Sätzen existiert eine Zahl $\rho^* > 0$ (u. zw. gleichmäßig für die verschiedenen Umgebungen), so daß in der Menge $U^*(\rho^*)$ der Punkte von U^*, die von p einen Abstand $< \rho^*$ haben, zu je zwei Punkten a^* und b^* genau ein sie innerhalb $U^*(\rho^*)$ verbindender Bogen B^* existiert, dessen Länge ein relatives Minimum ist, d. h. nicht unterschritten wird von den Längen aller hinreichend benachbarten, a^* und b^* verbindenden Bogen. Die Länge dieses Bogens ist zugleich ein absolutes Minimum. Zum Beweise der Behauptung **18** genügt es, dieselbe für Punktepaare

q_1, q_2 zu beweisen, die nicht zur Schale von U bezüglich p gehören. Nach Eigenschaft 5) von U enthält die q_1 und q_2 verbindende Strecke S in U keine Schalenpunkte. S aufgefaßt als Teilbogen S^* von U^* liefert offenbar ein relatives Minimum, welches zugleich ein absolutes Minimum ist. Da S^* und S dieselbe Länge haben, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir bezeichnen als *ausgezeichnet* eine Umgebung von U von p in F vom Radius ρ, wenn $\rho < \rho_0$, $\rho < \rho^*$ und $\varkappa(q) < \pi^2/16\rho^2$ für jeden Punkt q von U. Jede ausgezeichnete Umgebung U hat offenbar folgende Eigenschaften:

a) Ist k'' die obere Schranke von $\varkappa(q)$ in U und k eine beliebige Zahl $\leqq k''$, so ist jede Kugelumgebung in S_k, deren Radius $\leqq$ als der Radius von U, konvex.

b) Ist $\{a, b, c\}$ ein beliebiges Punktetripel in U, k eine beliebige Zahl $\leqq$ als die obere Schranke von $\varkappa(q)$ in U, dann gibt es in S_k ein zu $\{a, b, c\}$ kongruentes Tripel.

In Analogie zu den Hilfssätzen **2**, **3**, **4** über S_k gelten ferner folgende Sätze:

19. *Sind p, a, b drei nicht lineare Punkte einer ausgezeichneten Umgebung von p und ist c ein Punkt, im Innern des Winkelraumes zwischen den Strecken pa und pb, für den $cp = bp$, so ist $ac < ab$.* Es existiert ein Punkt x zwischen a und b, der wegen der Konvexität von U in U liegt, so daß p, c, x linear sind. Ist $x = c$, so ist $ac = ax < ab$. Liegt c zwischen p und x, dann sind, da p, a, b, x, sowie p, a, c, x nicht linear sind, wegen Eigenschaft 1) von U die Tripel a, c, x und p, b, x nicht linear. Also gilt $ax + xc > ac$, $xb + bp > xp = xc + cp = xc + bp$ mithin $xb > xc$ und daher $ab = ax + {} + xb > ax + xc > ac$. Analog behandelt man den Fall, daß x zwischen p und c liegt.

Bezeichnet man mit k' die untere und mit k'' die obere Schranke der Zahlen $\varkappa(q)$ für alle Punkte q der ausgezeichneten Umgebung U von p, so gilt, wenn man in U Polarkoordinaten einführt nach bekannten Sätzen von Sturm

$$G_{k'}(r, \varphi) \geqq G(r, \varphi) \geqq G_{k''}(r, \varphi),$$

wo $G_k(r, \varphi)$ und $G(r, \varphi)$ die Funktionen von S. 26 und S. 33 sind.

20. *Ist die Umgebung $U(p; \rho)$ von p mit dem Radius ρ ausgezeichnet, k' die untere, k'' die obere Schranke der Gaußschen Krümmungen in $U(p; \rho)$, ferner $\{a, b, c\}$ ein nicht lineares Tripel in $U(p; \rho/4)$, $\{a', b', c'\}$ bzw. $\{a'', b'', c''\}$ ein Tripel in $S_{k'}$ bzw. $S_{k''}$, so daß $ab = a'b' = a''b''$, $ac = a'c' = a''c''$ und $\sphericalangle bac = \sphericalangle b'a'c' = \sphericalangle b''a''c''$ gilt, dann ist $b'c' \geqq bc \geqq b''c''$.* Aus der Dreiecksungleichung folgt unmittelbar, daß $U(a; \rho/2)$ Teil von $U(p; \rho)$ ist. Also ist k' nicht größer als die untere und k'' nicht kleiner als die obere Schranke der Zahlen $\varkappa(q)$ für alle Punkte q von $U(a; \rho/2)$. Da $U(p; \rho)$ ausgezeichnet ist und mithin $k'' < \pi^2/16\rho^2$ gilt, ist daher auch $U(a; \rho/2)$ ausgezeichnet. Wir betrachten eine Erweiterung

$U^*(a;\rho/2)$ von $U(a;\rho/2)$, wie sie auf S. 42 betrachtet wurde, wobei für die Erweiterung $\varkappa^*(q)$ von $\varkappa(q)$ die Ungleichung $k' \leqq \leqq \varkappa^*(q) \leqq k''$ für alle Punkte q^* von $U^*(a;\rho/2)$ gelte. Es ist daher $G_{k'} \geqq G^* \geqq G_{k''}$ für jeden Punkt von $U^*(a;\rho/2)$. Wir führen in $S_{k'}$ Polarkoordinaten ein mit dem Zentrum a' und so daß b' und c' dieselben Koordinaten haben, wie b, c in $U(a;\rho/2)$. Die Gleichung der Strecke $b'c'$ sei $r=f(\varphi)(\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2)$. Da $U(a;\rho/2)$ ausgezeichnet ist, so ist wegen Eigenschaft *a)* die Umgebung $U(a';\rho/2)$ in $S_{k'}$ konvex; mithin liegt der Bogen $r=f(\varphi)$ in $U(a';\rho/2)$. Daraus folgt, daß ein Bogen B^* mit der Gleichung $r=f(\varphi)(\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2)$ in $U^*(a;\rho/2)$ existiert. Wegen $G^* \leqq G_{k'}$ hat B^* eine Länge $l(B^*) \leqq b'c'$. Wegen $bc = b^*c^* \leqq l(B^*)$ gilt $bc \leqq b'c'$. Analog zeigt man, daß $bc \geqq b''c''$ ist.

Aus **19** und **20** folgert man mühelos

21. *Ist $U(p;\rho)$ eine ausgezeichnete Umgebung, k' die untere, k'' die obere Schranke der Gaußschen Krümmungen in $U(p;\rho)$, ferner $\{a, b, c\}$ ein nicht lineares Tripel in $U(p;\rho/4)$, $\{a', b', c'\}$ bzw. $\{a'', b'', c''\}$ ein zu $\{a, b, c\}$ kongruentes Tripel in $S_{k'}$ bzw. $S_{k''}$, so sind die Winkel in $\{a, b, c\}$ $\geqq$ bzw. $\leqq$ als die entsprechenden Winkel in $\{a', b', c'\}$ bzw. $\{a'', b'', c''\}$.* Wir beweisen nun:

22. *Ist $U(p;\rho)$ eine ausgezeichnete Umgebung, k' die untere, k'' die obere Schranke der Gaußschen Krümmungen in $U(p;\rho)$, ferner $Q=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ein beliebiges Punktquadrupel in $U(p;\rho/4)$, dann existiert eine Zahl k, so daß $k' \leqq k \leqq k''$ und Q in S_k einbettbar ist.* Wir unterscheiden zum Beweis fünf Fälle:

I) Q ist *nicht echt;* II) Q ist *linear.* In diesen Fällen folgt **22** unmittelbar aus Eigenschaft *b)* von $U(p;\rho)$.

III) *Q ist ein echtes nicht lineares Quadrupel, das ein lineares Tripel enthält.* Es liege etwa a_2 zwischen a_1 und a_3. Es sei $Q' = =\{a'_1, \ldots\}$ ein Quadrupel in $S_{k'}$, $Q''=\{a''_1, \ldots\}$ ein Quadrupel in $S_{k''}$, so daß $a_i a_j = a'_i a'_j = a''_i a''_j$ für alle Indexpaare (i, j) außer $(3, 4)$ gilt. Die Existenz von Q' und Q'' folgt unmittelbar aus Eigenschaft *b)*. Wegen der Kongruenz der Tripel: $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a'_1 a'_2 a'_4\}$, $\{a''_1, a''_2, a''_4\}$ gilt nach **21** $\sphericalangle a'_1 a'_2 a'_4 \leqq \sphericalangle a_1 a_2 a_4 \leqq \sphericalangle a''_1 a''_2 a''_4$. Für die Nebenwinkel gilt dann: $\sphericalangle a'_3 a'_2 a'_4 \geqq \sphericalangle a_3 a_2 a_4 \geqq \sphericalangle a''_3 a''_2 a''_4$. Aus **21** und **2** folgert man dann mühelos $a'_3 a'_4 \geqq a_3 a_4 \geqq a''_3 a''_4$ und daraus die Behauptung.

IV) *Q enthält kein lineares Tripel und es gibt einen Punkt, etwa a_2, so daß $\sphericalangle a_1 a_2 a_4 + \sphericalangle a_1 a_2 a_3 + \sphericalangle a_3 a_2 a_4 = 2\pi$ gilt,* wofür wir auch kurz sagen werden, daß *a_2 zwischen den Punkten a_1, a_3, a_4 liegt.* Es sei $Q''=\{a''_1, \ldots\}$ ein Quadrupel in $S_{k''}$, so daß $a''_i a''_j = = a_i a_j$ für alle Indexpaare außer $(3, 4)$ gilt und a''_3, a''_4 auf verschiedenen Seiten der Geraden $a''_1 a''_2$ liegen. Die Existenz von Q'' folgt unmittelbar aus Eigenschaft *b)*. Nach **21** gilt dann $\sphericalangle a''_1 a''_2 a''_3 \geqq$

$\geqq \sphericalangle a_1 a_2 a_3$ und $\sphericalangle a_1'' a_2'' a_4'' \geqq \sphericalangle a_1 a_2 a_4$. Da a_2 zwischen a_1, a_3, a_4 liegt, so gilt $\sphericalangle a_1 a_2 a_3 + \sphericalangle a_1 a_2 a_4 > \pi$, also erst recht $\sphericalangle a_1'' a_2'' a_3'' + \sphericalangle a_1'' a_2'' a_4'' > \pi$. Daraus folgt: $\sphericalangle a_1'' a_2'' a_3'' + \sphericalangle a_1'' a_2'' a_4'' + \sphericalangle a_3'' a_2'' a_4'' = 2\pi$ und mithin $\sphericalangle a_3'' a_2'' a_4'' < \sphericalangle a_3 a_2 a_4$. Aus **21** und **2** folgt dann:

$$(+) \qquad a_3'' a_4'' \leqq a_3 a_4.$$

Wegen Eigenschaft *b)* gibt es ein Quadrupel $Q' = (a_1', \ldots)$ in $S_{k'}$, so daß $a_i a_j = a_i' a_j'$ für alle Indexpaare außer (3, 4) gilt und a_3', a_4' auf verschiedenen Seiten der Geraden $a_1' a_2'$ liegen. Ist nun *erstens* $\sphericalangle a_1' a_2' a_3' + \sphericalangle a_1' a_2' a_4' > \pi$, dann ist $\sphericalangle a_1' a_2' a_3' + \sphericalangle a_1' a_2' a_4' + \sphericalangle a_3' a_2' a_4' = 2\pi$; nach **21** haben wir $\sphericalangle a_1' a_2' a_3' \leqq \sphericalangle a_1 a_2 a_3$ und $\sphericalangle a_1' a_2' a_4' \leqq \sphericalangle a_1 a_2 a_4$, also $\sphericalangle a_3' a_2' a_4' \geqq \sphericalangle a_3 a_2 a_4$. Aus **21** und **2** folgt dann $a_3' a_4' \geqq a_3 a_4$, woraus sich wegen (+) die Behauptung ergibt. Sei *zweitens* $\sphericalangle a_1' a_2' a_3' + \sphericalangle a_1' a_2' a_4' \leqq \pi$. Wegen $\sphericalangle a_1'' a_2'' a_3'' + \sphericalangle a_1'' a_2'' a_4'' > \pi$ gibt es eine Zahl k^* ($k' \leqq k^* < k''$), so daß S_{k^*} ein Quadrupel $Q^* = \{a_1^*, \ldots\}$ enthält, wobei $a_i^* a_j^* = a_i a_j$ für alle Indexpaare außer (3, 4) gilt und a_2^* zwischen a_3^* und a_4^* liegt. Daraus folgt $a_3^* a_4^* > a_3 a_4$, woraus sich wegen (+) und wegen $k' \leqq k^*$ die Behauptung ergibt.

V) *Keiner der Fälle* I)—IV) *liegt vor.* Man kann die Punkte von Q so numerieren, daß die Strecken $a_1 a_2$ und $a_3 a_4$ sich in einem inneren Punkte x schneiden. Da a_1 und a_2 in $U(p; \rho/4)$ liegen und $U(p; \rho/4)$ konvex ist, liegt x in $U(p; \rho/4)$. Wegen Eigenschaft *b)* existiert ein Quadrupel $Q' = \{a_1', \ldots\}$ in $S_{k'}$, so daß $a_i' a_j' = a_i a_j$ für alle Indexpaare außer (3, 4) gilt und a_3', a_4' auf verschiedenen Seiten von der Geraden $a_1' a_2'$ liegen. Es sei x' ein Punkt der Strecke $a_1' a_2'$, so daß $a_1' x' = a_1 x$ gilt. Wir beweisen: $a_3' x' \leqq a_3 x$. Zu diesem Zweck sei a_3^* ein Punkt in $S_{k'}$, so daß $a_3^* a_1' = a_3 a_1$ und $a_3^* x' = a_3 x$ gilt. Nach **21** ist $\sphericalangle a_1' x' a_3^* \leqq \sphericalangle a_1 x a_3$ und mithin $\sphericalangle a_2' x' a_3^* \geqq \sphericalangle a_2 x a_3$. Daraus folgt wegen **21** und **2**, daß $a_2' a_3^* \geqq a_2 a_3 = a_2' a_3'$ ist. Wegen **2** ist dann $\sphericalangle a_2' a_1' a_3^* \geqq \sphericalangle a_2' a_1' a_3'$, woraus ebenfalls wegen **2** folgt: $a_3' x' \leqq a_3^* x' = a_3 x$. Ebenso zeigt man: $a_4' x' \leqq a_4 x$. Also gilt

$$(++) \qquad a_3 a_4 = a_3 x + x a_4 \geqq a_3' x' + x' a_4' \geqq a_3' a_4'.$$

Wegen Eigenschaft *b)* existiert ein Quadrupel $Q'' = \{a_1'', \ldots\}$ in $S_{k''}$, so daß $a_i'' a_j'' = a_i a_j$ für alle Indexpaare außer (3, 4) gilt und a_3'', a_4'' auf verschiedenen Seiten von der Geraden $a_1'' a_2''$ liegen. Es sind zwei Fälle möglich:

1. *Die Strecken* $a_1'' a_2''$ *und* $a_3'' a_4''$ *schneiden sich in einem inneren Punkte* x''. Es sei $\bar{x}$ ein Punkt der Strecke $a_1 a_2$, so daß $a_1 \bar{x} = a_1'' x''$ gilt. Um zu zeigen, daß $a_3'' x'' \geqq a_3 \bar{x}$ ist, sei a_3^* ein Punkt

in $S_{k''}$, so daß $a''_1 a^*_3 = a_1 a_3$ und $x'' a^*_3 = \bar{x} a_3$ gilt. Nach **21** ist dann $\sphericalangle a''_1 x'' a^*_3 \geqq \sphericalangle a_1 x a_3$, also $\sphericalangle a''_2 x'' a^*_3 \leqq \sphericalangle a_2 \bar{x} a_3$, woraus wegen **21** und **2** folgt, daß $a''_2 a^*_3 \leqq a_2 a_3 = a''_2 a''_3$. Daraus ergibt sich ebenfalls wegen **2**, daß $\sphericalangle x'' a''_1 a^*_3 \leqq \sphericalangle x'' a''_1 a^*_3$ und mithin $x'' a''_3 \geqq x'' a^*_3 = \bar{x} a_3$. Analog zeigt man: $x'' a''_4 \geqq \bar{x} a_4$. Also gilt $a''_3 a''_4 = a''_3 x'' + x'' a''_4 \geqq \geqq a_3 \bar{x} + \bar{x} a_4 \geqq a_3 a_4$. woraus wegen $(++)$ die Behauptung folgt.

2. *Die Strecken $a''_1 a''_2$ und $a''_3 a''_4$ schneiden sich nicht im Inneren.* Dann muß entweder $\sphericalangle a''_2 a''_1 a''_3 + \sphericalangle a''_2 a''_1 a''_4 > \pi$ oder $\sphericalangle a''_1 a''_2 a''_3 + + \sphericalangle a''_1 a''_2 a''_4 > \pi$ gelten. Es gelte etwa die letztere Ungleichung. Da nach Voraussetzung die Strecken $a_1 a_2$ und $a_3 a_4$ sich im Inneren schneiden, so ist $\sphericalangle a_1 a_2 a_3 + \sphericalangle a_1 a_2 a_4 < \pi$, also wegen **21** erst recht $\sphericalangle a'_1 a'_2 a'_3 + \sphericalangle a'_1 a'_2 a'_4 < \pi$. Es gibt also eine Zahl k^* $(k' \leqq k^* \leqq k'')$, so daß S_{k^*} ein Quadrupel $Q^* = \{a^*_1, \ldots\}$ enthält, wobei $a^*_i a^*_j = a_i a_j$ für alle Indexpaare außer $(3, 4)$ gilt, und a^*_2 zwischen a^*_3 und a^*_4 liegt. Es gilt daher $a^*_3 a^*_4 = a^*_3 a^2 + a^*_2 a^*_4 = a_3 a_2 + a_2 a_4 > a_3 a_4$, woraus wegen $(++)$ und wegen $k' \leqq k^* \leqq k''$ die Behauptung des Satzes **22** folgt, der damit in allen Fällen bewiesen ist.

Aus **22** folgert man mühelos die zu Beginn dieses Kapitels formulierte Behauptung.

94. Kolloquium (26. VI. 1935).

Über mehrfache Erreichbarkeit eines unzerlegbaren Kontinuums. Von J. Novák, Brno.

Satz. *Es sei F ein unzerlegbares Kontinuum in der Ebene, $G_1, G_2, \ldots, G_n$ $(n \geqq 2)$ seien paarweise verschiedene Komplementärgebiete von F. Sind dann r paarweise fremde Teilkontinua $C_1, \ldots, C_r$ von F gegeben, von denen jedes aus mehreren von den Gebieten G_i erreichbar ist, darunter r_λ Kontinua, deren jedes aus λ von den Gebieten G_i erreichbar ist $(2 \leqq \lambda \leqq n)$, so daß $r = \sum_{\lambda=2}^{n} r_\lambda$, dann gilt*

$$\sum_{\lambda=2}^{n} (\lambda - 1) r_\lambda \leqq n - 1.$$

Korollar. *Ein unzerlegbares Kontinuum F, das in der Ebene n Gebiete bestimmt, besitzt höchstens $n-1$ mehrfach erreichbare Punkte. Das Kontinuum B_n von* Knaster (Fund. Math., 7, S. 274) *zeigt, daß die Grenze $n-1$ scharf ist.*

Zum Beweis wählen wir in jedem Gebiete G_i einen Punkt p_i $(i = 1, \ldots, n)$. Jedes der r_λ Kontinua C_j, das aus λ von den Gebieten G_i erreichbar ist, verbinden wir mit den in diesen Gebieten G_i gewählten Punkten p_i durch je einen einfachen Bogen, der mit Ausnahme eines Endpunktes ganz in G_i verläuft. Im ganzen liegen also $\sum_{\lambda=2}^{n} \lambda r_\lambda$ Bogen vor, von denen wir voraussetzen dürfen, daß sie paarweise höchstens Endpunkte gemein haben. Wir bezeichnen nun mit Ω einen Graphen, dessen Strecken die eben konstruierten $\sum \lambda r_\lambda$ einfachen Bogen und dessen „Endpunkte" die n Punkte $p_1, \ldots, p_n$, sowie die r Kontinua $C_1, \ldots, C_r$ sind. Es genügt zu beweisen, daß jede Komponente dieses Graphen Ω ein Baum ist. Denn dann ist ja bekanntlich die Anzahl $\sum\limits_{\lambda=2}^{n} \lambda r_\lambda$ der Strecken von Ω kleiner als die Anzahl $n + \sum\limits_{\lambda=2}^{n} r_\lambda$ der Endpunkte von Ω und das besagt gerade die zu beweisende Ungleichung. Machen wir also die Annahme, daß nicht jede Komponente von Ω ein Baum sei! Dann gibt es in Ω einen einfachen geschlossenen „Streckenzug", der offenbar mindestens zwei der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ enthalten muß. Unter diesen Punkten existieren also zwei — wir bezeichnen sie mit p und p' — so daß es zwei Teilkontinua Ω_1 und Ω_2 von Ω gibt, deren Durchschnitt aus den beiden Punkten p und p' besteht. Bekanntlich gibt es zwischen p und p' irreduzible Kontinua $K_1 \subset \Omega_1$ und $K_2 \subset \Omega_2$. Nach Rosenthal (Sitzb. Münch. Akad. 1919, S. 91) ist das Kontinuum $K_1 + K_2$ gemeinsame Begrenzung von zwei Gebieten H und H'. Da $F.(K_1 + K_2) \subset C_1 + \ldots + C_r$ gilt und die C_j echte Teilkontinua des unzerlegbaren Kontinuums F sind, so ist die Menge $F - F.(K_1 + K_2)$ bekanntlich zusammenhängend, so daß entweder H oder H' zu F punktfremd ist. Dann ist aber $H + p + p'$ oder $H' + p + p'$ eine zusammenhängende Teilmenge des Komplementes von F und das ist ein Widerspruch, da ja p und p' in verschiedenen Komplementärgebieten von F liegen.

Über die Bettischen Gruppen kompakter Räume[1]. Von E. Čech (Brno).

R sei ein kompakter Raum, $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe. Ein *$(n, \mathfrak{G})$-Grenzzyklus* in R ist eine Folge $\{\gamma_i\}_1^\infty$ von algebraischen n-Zykeln in R, deren Koeffizienten $\mathfrak{G}$ entnommen sind, und für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so daß: (1) für $i > m$ γ_i ein (n, ε)-Zyklus[2]) ist; (2) für $i > m$ und $j > m$ γ_i und γ_j ε-homolog[3]) in R sind. Zwei $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln $\{\gamma_i\}$ und $\{\gamma'_i\}$ sind äquivalent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so daß für $i > m$ γ_i und γ'_i ε-homolog in R sind. Äquivalente $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln werden immer identifiziert. Die $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln in R bilden eine (additive) Abelsche Gruppe $B_n(R, \mathfrak{G})$, die *volle n^{te} Bettische Gruppe* des Raumes R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

---

[1]) Ein sehr wesentlicher Teil der hier mitgeteilten Sätze wurde etwa gleichzeitig und völlig unabhängig auch von N. E. Steenrod gefunden; s. seine demnächst in den Proc. Nat. Acad. erscheinende Note „On universal homology groups", die ich in Manuskriptform zu lesen Gelegenheit hatte.

[2]) D. h. die Durchmesser der Simplexe sind sämtlich $< \varepsilon$.

[3]) D. h. es gibt in R eine algebraische $(n+1, 2)$-Kette (vgl. Anm.[2])) mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$, deren Rand gleich $\gamma_i - \gamma_j$ ist.