Математические игры ума

Питер Уинклер

Перевод и редакция К. А. Кнопа,
А. М. Петрунина и А. В. Устинова

Предварительное издание, предназначенное исключительно для отлова ляпов.

Исправления слать по адресу `petrunin@math.psu.edu`.

Настоящими авторами этого сборника являются те, кто присылал мне задачи — люди со всей планеты, включая многих читателей моей предыдущей книжки, а также новых знакомых и товарищей по работе из Новой Англии. Я особо признателен учредителям профессуры имени Альберта Брэдли в Дартмутском колледже.

Однако то из написанного, что я могу посвятить, посвящается моим родителям,

Бернарду и Мирьям Уинклерам,

которые, должно быть, мечтали видеть своего первенца полезным членом общества, пока на их глазах он превращался в математика.

Предисловие

> Математика — не церемониальный марш по гладкой дороге, а путешествие по незнакомой местности, где исследователи часто рискуют заблудиться.
>
> У. С. Энглин

Эта книга для тех, кто любит математику, головоломки и сложные задачи; для тех, кому математический мир кажется интуитивно понятным, упорядоченным и логичным, и тех, кто готов убедиться в обратном!

Чтобы оценить и решить головоломку, нужно знать математику — иногда требуется знать, что такое точка, прямая, что такое простое число, и какова вероятность выпадения двух шестёрок подряд. Однако всего этого недостаточно; самое главное, нужно понимать, что значит *доказать*.

Вам *не* пригодится продвинутая математика. Не потребуются компьютер, калькулятор и учебник по матану, а вот переключатель сообразительности надо будет поставить на «вкл». Может оказаться, что чем больше пройдено математических курсов, тем сложней догадаться до решения, а иногда вы прочтёте и даже поймёте решение, но не сможете в него поверить.

Эти головоломки приходили ко мне со всех уголков мира от людей из самых разных слоёв. С момента появления моего предыдущего задачника мне стали присылать ещё больше головоломок, и новых, и старых. Меня удивило и обрадовало, что к моменту написания этих слов моя новая коллекция качественно и количественно достигла уровня, для которого раньше требовалось около двадцати лет.

Этот задачник во многом отличается от предыдущего. Во-первых, эти задачи призваны больше удивлять. Некоторые из них взяты из моей статьи «Семь математических головоломок, которые кажутся неправильно услышанными» [111], для конференции «Gathering for Gardner VII». Кроме того, я уделил больше внимания поиску источников. В результате кое-где информация о происхождении головоломки может оказаться верной. Однако, за исключением головоломок собственного сочинения, я могу лишь засвидетельствовать свои «благие намеренья». По указанию некоторых читателей, я старался лучше объяснять, как догадаться до решения, но, увы, во многих случаях получилось неубедительно, а иногда я и вовсе не знал, как это сделать.

Формулировки головоломок и их решения мои собственные — на мне вся ответственность за ошибки и неоднозначности, а они будут.

Головоломки этой книги должны быть красивыми и развлекательными, иметь простые, изящные решения, которые непросто найти, иллюстрировать какую-то математическую идею, и при этом не требовать продвинутой математики. Прежде всего, я отбирал задачи, которые ломают интуицию и заставляют думать. Но все ли задачи соответствуют всем этим критериям? — ни в коем случае. Однако здесь найдутся красавицы, каждая из которых с лихвой окупит мизерную цену книжки. Взгляните на «Кривые на картофелинах», стр. 8, или «Рулетку для ротозеев», стр. 8, или «Любовь в Клептопии», стр. 15, или «Черви и вода», стр. 15, или «Замок с дефектом», стр. 17, или «Имена в ящиках», стр. 18, или «Хамелеоны», стр. 29, или «Единообразие бубликов», стр. 30, или «Надёжные мигалки», стр. 30, или «Красные и синие игральные кости», стр. 30, или «Уже упал?», стр. 46, или «Элис на окружности», стр. 46, или «Монеты на столе», стр. 59, или «Ящик в ящике», стр. 61, или «Вменяемые мыслители», стр. 77, или «Лемминг на шахматной доске», стр. 77, или «Шляпы и бесконечность», стр. 103, или «Кирпичная стенка», стр. 104, или «Торт-мороженое», стр. 123, или «Три тени кривой», стр. 124, или «Складной многоугольник», стр. 126, или...

Немного о формате. Головоломки довольно вольно разбиты на главы по областям математики. Решения представлены в конце каждой главы (кроме последней); сделано это в надежде, что читатель успеет подумать, прежде чем посмотреть решение — я не хотел, чтобы это было слишком легко. Информация о происхождении и источнике каждой головоломки представлена вместе с решением.

Эти головоломки сложные. Вы имеете полное право гордиться решением любой, а в некоторых случаях и просто пониманием решения.

Всего наилучшего, как говорят в мире механических головоломок, счастливого разгадывания!

Питер Уинклер

Глава 1

Разминка

> Мозг (сущ.) — приспособление, которым думают, что думают.
>
> — Амброз Бирс (1842—1914), Словарь Сатаны

Начнём с нескольких простых задач для разминки мозгов. В них почти не будет математики, хватит логики и здравого смысла.

Половина роста

В среднем, в каком возрасте ребёнок достигает половины роста, до которого он дорастёт, когда вырастет?

Шарики в мешочках

Сколько понадобится шариков, чтобы разложить их в 15 мешочках так, чтобы во всех мешочках было разное число шариков?

Степени двойки

Сколько людей составляют *дважды две пары двойняшек*?

Катящийся карандаш

Карандаш с пятиугольным сечением имеет надпись на одной из пяти граней. Предположим, что наш карандаш катится по столу. С какой вероятностью он остановится надписью вверх?

Портрет

Посетитель указывает на портрет и спрашивает, кто это. «Братьев и сестёр у меня нет,» — отвечает хозяин, — «но отец этого человека — сын моего отца». Кто изображён на картине?[1]

Странная последовательность

Каким должен быть следующий символ в этой последовательности?

Параметр языка

Для испанского, иврита и польского он равен 1. Для немецкого и английского — 7. Для французского — 14. Чему он равен для русского?

Вниманию параскаведекатриафобов[2]

Правда ли, что 13-е число месяца выпадет на пятницу чаще, чем на любой другой день недели, или так только кажется?

Теперь пойдут задачи посерьёзнее.

Честная игра

Как сделать равновероятный выбор 50 на 50, подбрасывая гнутую монету?

---

[1] В нашем фольклоре эта загадка известна и в стихотворной формулировке:

> В семье я рос один на свете,
> И это правда, до конца.
> Отец того, кто на портрете, —
> Сын моего отца.

— *Прим. ред.*

[2] Параскаведекатриафобия — болезненная боязнь пятниц выпавших на 13-е число месяца. — *Прим. ред.*

Кривые на картофелинах

Даны две картофелины. Докажите, что на их поверхностях можно нарисовать по замкнутой кривой так, чтобы обе кривые были идентичны как кривые в трёхмерном пространстве.

Завершим разминку тремя вероятностными задачами; в них придётся считать.

Победа на Уимблдоне

Временно получив магические способности, вы дошли до финала одиночного разряда Уимблдонского турнира и играете с Сереной Уильямс или Роджером Федерером. Однако ваши способности не могут продлиться весь матч. При каком счёте им лучше всего исчезнуть, чтобы максимизировать ваши шансы на победу?

Про задачу можно думать так: *Есть возможность наколдовать себе произвольный промежуточный счёт игры и далее играть по-честному. Какой счёт следует наколдовать чтобы максимизировать шансы на победу? — Прим. ред.*

Макаронные циклы

100 концов 50-и сваренных длинных макаронин произвольно разбиты на пары и соединены вместе. Сколько в среднем получится циклов?

Рулетка для ротозеев

Элвин приехал в Лас-Вегас на математическую конференцию и оказался в казино. У него есть немного времени перед докладом и 105 долларов в кармане. Он подошёл к рулетке, увидел, что на колесе 38 чисел (0, 00 и от 1 до 36). Если поставить 1 доллар на какое-то число, то выигрываешь с вероятностью $1/38$, получая 36 долларов (взамен своего доллара, который в любом случае забирает казино). В противном случае он просто теряет свой доллар.

Элвин решил сделать ровно 105 таких однодолларовых ставок, у него как раз хватит на это время. Оцените вероятность того, что Элвин окажется в плюсе. Скажем, превысит ли эта вероятность 10%?

Источники и решения

Половина роста

Родители маленьких детей знают ответ: два года! (То есть между вторым и третьим днём рождения.) Да, человечек растёт очень нелинейно.

Задача предложена Джеффом Стейфом из Университета Чалмерса в Швеции.

Шарики в мешочках

Потребуется четырнадцать шариков. Положите пустой мешочек в мешочек с одним шариком, далее второй мешочек в третий, с ещё одним шариком, затем третий в четвёртый, с ещё одним шариком, и так далее. Таким образом в i-м мешочке будет $i-1$ шарик (и столько же мешочков).

Если вы не догадались засовывать мешочки в мешочки, или решили, что так нечестно, то вам понадобится $0+1+\ldots+14 = 15\times 7 = 105$ шариков.

Задача предложена Диком Плотцем из Провиденса, штат Род-Айленд.

Степени двойки

Ответ восемь. Четвёрка слов «дважды», «две», «пары» и «двойняшка» может натолкнуть на мысль, что должно получиться $2^4 = 16$. Но двойняшка — это всего один человек.

Классическая загадка.

Катящийся карандаш

Мой коллега Лори Снелл подловил меня на этой задачке. А вы попались? Похоже, что ответ должен быть $\frac{1}{5}$, но поскольку 5 нечётно, карандаш будет лежать гранью вниз и ребром вверх. Таким образом, ответ 0 или, если хотите, $\frac{2}{5}$, в зависимости от вашего толкования термина *вверх*, но уж всяко не $\frac{1}{5}$.

Эта головоломка приведена в провокационной книге Чамонта Ванга [55].

Портрет

Это древняя загадка; она приводится в классической книге Рэймонда Смаллиана [52].

«Сын моего отца» может означать лишь самого хозяина, поскольку у него нет ни братьев, ни сестёр. Значит, на портрете — сын хозяина.

Странная последовательность

Эту загадку переслал мне Кит Кохон, юрист из Агентства по охране окружающей среды. Это конец алфавита в обратном порядке, то есть ZYXW, но буква Z повёрнута на 90° (вправо или влево), и каждая последующая буква повёрнута на дополнительные 90°. Следующей должна стоять повёрнутая буква V, то есть $<$ или $>$.

Параметр языка

Ответ: 1 (один). Эта загадка отчасти математическая; её придумала Тина Кэрролл, аспирантка Технологического института Джорджии. Каждое число — это первое натуральное число, название которого в данном языке (количественное числительное) состоит из нескольких слогов.

В оригинале вопрос был про английский язык. Сверившись с веб-страницей [92], можно найти этот параметр для других языков; например, он равен 2 для татарского, 3 для баскского, 4 для эстонского, 5 для айнского, 6 для (северно)китайского. — *Прим. ред.*

Вниманию параскаведекатриафобов

Удивительно, но правда. Насколько мне известно, это обнаружил Банкрофт Браун (как и автор этих строк, профессор математики Дартмутского колледжа), который привёл свои расчёты в журнале American Mathematical Monthly [3]. На это мне указал мой нынешний коллега Дана Уильямс.

Нетрудно проверить, что из 4800 месяцев в 400-летнем цикле григорианского календаря 13-е число выпадает на пятницу 688 раз. Воскресенье и среда приходятся по 687 раз, понедельник и вторник по 685, а четверг и суббота только по 684. При подсчёте нужно помнить, что годы, кратные 100, не являются високосными, если только (как 2000 год) они не делятся на 400.

Происхождение суеверия относительно пятницы 13-го обычно связывают с датой приказа французского короля Филиппа IV (Филипп Красивый) о разгроме ордена тамплиеров.

Потренировавшись, можно выучиться определять день недели любой даты в истории, даже учитывая прошлые календарные сложности (по крайней мере, на это способен такой человек, как глубокоуважаемый Джон Конвей из Принстонского университета). А для тех ленивых смертных, что живут сегодняшним днём, полезно помнить, что в любом году 04.04, 06.06, 08.08, 10.10, 12.12, 09.05, 05.09, 07.11, 11.07 и последний день февраля выпадают на один и тот же день недели. (Это ещё легче запомнить, если вы играете в крэпс ежедневно с 9 до 5.) В 2007 году, этот день — среда; перед невисокосным годом он сдвигается на один, и на два перед високосным.

Честная игра

Подбросьте гнутую монету *дважды* в надежде получить орёл и решку. В случае, если сначала выпал орёл, считаем, что выпал «ОРЁЛ»; если сначала выпала решка, считаем, что «РЕШКА». Если выпадут две решки или два орла, то опыт придётся повторить.

Мне напомнил об этой головоломке Тамаш Ленгель из Маккалестерского колледжа; её решение приписывается великолепному математику и пионеру информатики Джону фон Нейману и иногда называется «трюком фон Неймана». Оно основано на том, что даже если монета гнутая, последующие броски являются (по крайней мере, должны быть) независимыми событиями. Конечно же придётся предположить, что гнутая монета может приземлиться на любую сторону!

Вышеупомянутую схему можно улучшить, уменьшив среднее число бросков. Например, получив орёл-орёл при первой паре бросков и решку-решку при второй, можно считать результат «ОРЛОМ» (тогда, конечно же, решку-решку, за которой следует орёл-орёл, надо считать «РЕШКОЙ»). Возможны и другие улучшения. Статья Шербана Наку и Юваля Переса [40] выдавливает последнюю каплю из минимизации ожидаемого числа бросков, независимо от вероятностей получения орла и решки.

В последние годы вопрос извлечения «честных» случайных битов из ненадёжных случайных источников становится важным в теории вычислений, — ему посвящены многие исследования, в которых достигнуты существенные прорывы.

Кривые на картофелинах

Рассмотрите пересечение картофелин! Другими словами, представьте, что каждая картофелина это призрак, и воткните одну в другую. Пересечение их поверхностей будет кривой на каждой из них; эти кривые и следует нарисовать.

Эту милую головоломку можно найти (среди прочего) в книге [46].

В приведённой книге головоломка приписывается Дитеру Гебхардту.

Несмотря на столь простое решение, точная математическая формулировка задачи остаётся неясной.

Пересечение поверхностей картофелин может быть фракталом, не содержащим замкнутых кривых, даже если сами поверхности гладкие. В случае, если поверхности гладкие, картофелины легко расположить так, чтобы пересечение было гладкой замкнутой кривой. (Для этого можно воспользоваться леммой Сарда.) То же можно сделать и при более слабых предположениях.

Однако без дополнительных предположений вопрос остаётся открытым [63]; то есть неизвестно, *содержат ли две произвольные вложенные сферы в евклидовом пространстве пару конгруэнтных замкнутых кривых.* Похоже, что вопрос открыт даже если обе сферы имеют конечную площадь. Это предположение кажется разумным, ведь как отметил Пер Александерсон, «Я стараюсь не покупать картофель с бесконечной площадью поверхности — его слишком долго чистить.»

Следующая вариация задачи была на 35-м Турнире городов (2013/14), автор — Е. Бакаев: *Космический аппарат сел на неподвижный астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат проехал по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там точно определили трёхмерную траекторию аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ездил аппарат? — Прим. ред.*

Победа на Уимблдоне

Кажется очевидным, что лучше всего выиграть два сета (для победы в мужском финале требуется выиграть три сета из пяти), а в третьем сете — вести 5:0 по геймам и вести со счётом 40-0 в шестом гейме. (Возможно, вы предпочтёте подавать в шестом гейме, но если ваша подача так же плоха, как моя, то лучше, чтоб подавал соперник — тогда можно молиться о его двойной ошибке, которая принесёт вам победу).

Но не так быстро! Такой счёт даст вам три шанса, но можно добыть шесть — три на вашей подаче и ещё три на подаче Роджера. Как и раньше, вы выиграли два первых сета, но в третьем получили 6:6 по геймам и ведёте 6:0 на тай-брейке.

Амит Чакрабарти из Дартмута предложил ещё одно улучшение, основанное на том, что по традиции полный счёт теннисного матча включает в себя счёт всех сетов, а при результате гейма 6:6 в него включается также и счёт тай-брейка. Тогда можно запросить, например, чтобы счёт был 6-0, 6-6 (9999-9997), 6-6 (6-0). Идея (этически спорная, конечно) состоит в том, что пока работала магия, ваш соперник настолько устал в тай-брейке второго сета, что теперь с большей вероятностью оплошает в одном из шести предстоящих матч-пойнтов.

Примечания для не знающих правил тенниса. Матч-пойнт — ситуация, когда выигрыш всего одного очка приводит к завершению матча. Тай-брейк — розыгрыш партии, который случается при счёте 6:6 в решающем сете, — он играется до 7 очков или до преимущества одного из игроков в 2 очка (то есть 7:6 ещё не победа на тай-брейке, для победы нужно 8:6, 9:7 и так далее). Смена подающего на тай-брейке происходит через две подачи, начиная со второй. При счёте 6:0 сначала будет ещё одна ваша подача (один матч-пойнт), потом две подачи Роджера (ещё два матч-пойнта), снова две ваши (+2) — и даже если в этот момент уже будет 6:5, то следующая подача Роджера всё равно будет шестым подряд матч-пойнтом. — *Прим. ред.*

Макаронные циклы

Эта старинная задача пришла ко мне от коллеги из Дартмутского колледжа, Даны Уильямса. Нужно вычислить вероятность создания цикла на каждом соединении концов. Тогда, из *линейности матожидания*, можно заключить, что ожидаемое число циклов это сумма полученных вероятностей.

При соединении i-го конца берётся конец цепи, и из оставшихся $101 - 2i$ концов лишь один из них (противоположный конец этой цепи) приводит к циклу. Следовательно, вероятность того, что ваше i-е соединение добавит цикл, равна $1/(101 - 2i)$, поэтому ожидаемое общее число циклов равно

$$1/99 + 1/97 + 1/95 + \cdots + 1/3 + 1/1 = 2{,}93777485\ldots$$

— меньше трёх циклов!

Если у нас n макаронин и n большое, то матожидание числа циклов близко к половине n-го гармонического числа — примерно половина натурального логарифма n.

В книге Мартина Гарднера [20, p. 198] описан другой вариант этой задачи, связанный со следующим гаданием; см. также [65, 90]. Девушка зажимает в руке шесть длинных травинок, её подружка наугад попарно связывает сначала верхние, а потом нижние концы. Если все шесть травинок окажутся связанными в кольцо, то девушка, связавшая их, в этом году непременно выйдет замуж. В версии Гарднера спрашивалась вероятность такого исхода. Это, конечно, другой вопрос, но логика решения — та же самая. — *Прим. ред.*

Рулетка для ротозеев

Я услышал эту историю от Элвина Берлекэмпа на конференции «Gathering for Gardner VII». Позже она появилась в замечательном разделе головоломок журнала Emissary [24, весна/осень 2006 года].

Игра в рулетку очень выгодна для казино (американский вариант ещё выгодней европейского, в котором нет двойного зеро). Ясно, что если повторять невыгодную ставку достаточно долго, то, скорее всего, окажешься в проигрыше. Средний убыток каждой однодолларовой ставки составляет $1 - (1/38) \times 36 = 1/19$ доллара, то есть примерно 5 центов.

Однако 105 долларов это не так уж много! Элвину достаточно выиграть три раза, чтобы оказаться в плюсе. В этом случае он получит 108 долларов за свои 105. Вероятность того, что он никогда не выиграет, составляет $(37/38)^{105} \sim 0{,}0608$; выиграет ровно раз, $105 \times (1/38) \times (37/38)^{104} \sim 0{,}1725$; и два раза, $105 \times (104/2) \times (1/38)^2 \times (37/38)^{103} \sim 0{,}2425$. Таким образом, вероятность оказаться в плюсе равна единице минус сумма этих трёх значений, то есть 0,5242 — больше половины!

Конечно же, это не значит, что Элвин может дурачить Лас-Вегас. Ведь когда ему *не* удастся получить три победы (а это случится приблизительно в 48% случаев!), он потеряет как минимум 33 доллара, то есть намного больше, чем получит при трёх выигрышах. *В среднем* Элвин потеряет $105 \times (1/19) \sim 5{,}53$ долларов.

Рассмотрим более жёсткий вариант этой задачи. Предположим, что у Элвина есть 255 долларов (а ему нужно 256 для регистрации на конференции). Тогда лучше всего сделать ставку в 1, затем 2, затем 4, 8, 16, 32, 64 и, наконец, 128 долларов на красное (или чёрное). Первый раз, когда он выигрывает, он получает в два раза больше своей ставки и прекращает игру с 256 долларами, ровно то, что ему нужно. Он потерпит неудачу только если проиграет все свои 8 ставок (и все свои деньги), что произойдёт с вероятностью всего $(20/38)^8 < 0{,}006$.

Проделайте это сами, если не страшно потерять 255 долларов. Так можно посетить казино и в 99% случаев остаться в плюсе. Ну а потом лучше бросить играть в азартные игры, настоятельно рекомендую.

Глава 2

Полёт фантазии

> Не стоит доверять глазам, когда разыгралось воображение.
>
> — Марк Твен (1835—1910), Янки при дворе короля Артура

Следующие головоломки потребуют разработки *плана*, и иногда вам придётся напрячь воображение!

Любовь в Клептопии

Ян влюбился в Марию (по интернету), и он хочет послать ей обручальное кольцо. Однако они живут в Клептопии, стране, где всё отправленное по почте будет неминуемо украдено, если только не отправлено в ящике, запертом на навесной замок. У Яна и Марии много замков, но ни у кого из них нет ключа к замку другого. Как им переслать кольцо?

Черви и вода

Лори надоело, что черви забираются к ней на кровать. Она поставила ножки кровати в вёдра с водой; поскольку черви не умеют плавать, они не могут добраться до кровати по полу. Однако теперь они ползут вверх по стенам и по потолку, и падают на кровать сверху. Фу!

Как защититься от червей?

Примечания. Можно попробовать соорудить навесную конструкцию над кроватью. Для того чтобы предотвратить падение червей на навес, их дальнейшее проползание по навесу и падение на кровать, возможно, стоит сделать жёлоб вокруг навеса и наполнить его водой. Но ведь тогда черви смогут упасть на край желоба. Хм...

Проверка страусиных яиц

В преддверии рекламной кампании страусиной ферме нужно проверить яйца своих страусов на прочность. В мировой практике прочность определяют по самому высокому этажу Эмпайр-стейт-билдинга, с которого можно сбросить яйцо так, чтобы оно не разбилось.

Официальный инспектор фирмы, Оскар, понимает, что если он возьмёт с собой в Нью-Йорк одно яйцо, то для определения прочности придётся (возможно) бросить его с *каждого* из 102 этажей, начиная с первого. А что если он возьмёт *два* яйца? Сколько бросков ему потребуется в худшем случае?

Опасная картина

Требуется повесить картину за шнур, прикреплённый к раме. Если это сделать, как обычно, перекинув шнур через два гвоздя (как показано на рисунке), и один из гвоздей выпадет, то картина останется висеть на другом гвозде (хотя и накренится).

Как повесить картину, чтобы она упала в случае, если выпадет *любой* из двух гвоздей?

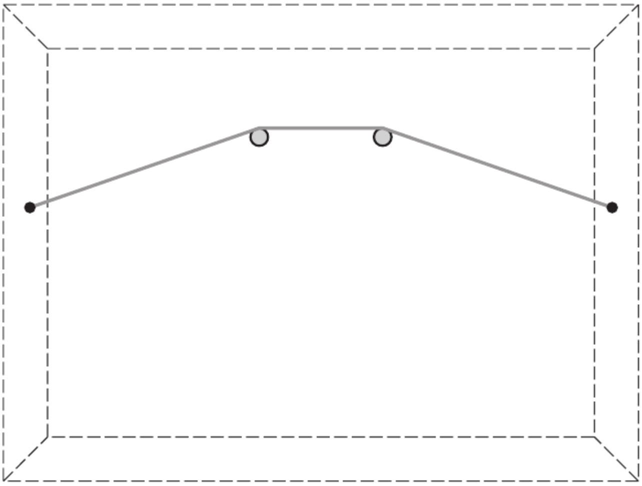


Рис. 1: Эта картина останется висеть если выпадет любой из гвоздей.

Замок с дефектом

Кодовый замок имеет три диска, с положениями пронумерованными от 1 до 8. У замка есть дефект: чтобы его открыть, достаточно правильно выставить два числа из трёх. Какое минимальное число (трёхзначных) комбинаций достаточно набрать, чтобы наверняка открыть замок?

Примечания. Есть много способов проделать это 64-мя тестовыми комбинациями, например, можно перебрать все возможные варианты первых двух дисков или проверить все комбинации, сумма значений которых кратна 8. Однако каждая тройная комбинация покрывает 22 возможных случаев, а всего комбинаций $8^3 = 512$. Поэтому в принципе могло бы хватить и $\lceil 512/22 \rceil = 24$ комбинаций. То есть истина лежит где-то между 24 и 64; вопрос — где?

Альтернативные кубики

Можно ли изготовить такую пару игральных кубиков, чтобы их суммы вели себя так же, как у пары обычных кубиков? То есть должно быть два способа выбросить 3, шесть способов выбросить 7, один способ выбросить 12 и так далее. У кубиков должно быть по шесть граней, и на каждой грани должно быть указано положительное целое число.

Совпадение монет

Сонни и Шер[1] играют в следующую игру. В каждом раунде бросается честная монета. Перед броском Сонни и Шер одновременно объявляют свои предположения о результате броска. Они выигрывают раунд, если оба угадали правильно. Требуется максимизировать долю выигранных раундов, предполагая, что игра идёт долго.

Пока что ответ очевиден — 50%: Сонни и Шер договариваются о последовательности предположений (например, всегда говорить «орёл»). Очевидно, что лучшего им не добиться.

Однако перед началом игры игрокам сообщается, что Шер получит результаты всех бросков монеты заранее, прямо перед первым броском! У неё есть возможность обсудить стратегию с Сонни заранее, но как только она получит данные о бросках, возможности передавать информацию больше не будет. Возможно ли им добиться 70%-й доли выигрышей?

---

[1] Сонни и Шер — популярный в 1970-е годы американский поп-рок дуэт Сонни Боно и его супруги Шер. — *Прим. ред.*

Имена в ящиках

Имена ста заключённых помещают в сто деревянных ящиков, по одному в каждом; ящики расставляются в ряд на столе в комнате. Заключённых приводят в комнату поочерёдно; каждому позволяется заглянуть не более чем в 50 ящиков, затем он должен покинуть комнату, оставив её в точно том же состоянии, как до прихода, и дальнейшее общение невозможно.

У заключённых есть возможность спланировать свою стратегию заранее, и им это понадобится — если хотя бы один заключённый не найдёт своё имя, то казнят всех. Найдите стратегию, вероятность успеха которой превысит 30%.

Примечания. Если каждый заключённый откроет случайный набор из 50 ящиков, то вероятность выжить составит незавидные

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{100} \sim 0{,}0000000000000000000000000000008.$$

Но они могут поступить и хуже — если все откроют одни и те же 50 ящиков, то их шансы упадут до нуля. Но тридцать процентов уж совсем недостижимы... Очень хорошо — вы правильно поняли задачу!

Источники и решения

Любовь в Клептопии

Этот вопрос приводится в книге Саймона Сингха [50]; я узнал его от Кэролайн Калдербэнк, дочери пары математиков Ингрид Добеки и Роба Калдербэнка. Решение Кэролайн: Ян отправляет Марии ящик с кольцом внутри, навесив на него один из своих замков. По получении Мария навешивает свой собственный замок на ящик и отправляет его назад с обоими замками. Когда Ян получает ящик, он снимает свой замок и снова отправляет ящик Марии — вуаля!

Это решение не просто игра; на нём основан обмен ключами шифрования в протоколе Диффи — Хеллмана, — историческом прорыве в криптографии[2].

В зависимости от предположений, возможны и другие решения. Моё любимое предложено компанией (включающей оригамиста Роберта Лэнга) на конференции «Gathering for Gardner VII». Яну надо найти замок, ключ от которого имеет большое отверстие, или, по крайней мере, отверстие, которое может быть достаточно увеличено

---

[2] Точнее назвать это илюстрацией к безключевому трёхэтапному протоколу, предложенному Ади Шамиром, также известному как протокол Мэсси — Омуры по имени авторов, запатентовавших его реализацию в конечных полях вида $\mathbb{F}_{2^n}$. — *Прим. ред.*

сверлением, чтобы ключ мог быть нацеплен за дужку другого замка. Ян использует этот второй замок, с упомянутым ключом на его дужке, чтобы запереть пустой ящик, который он отправляет Марии. По прошествии времени, достаточном для пересылки (или, возможно, после электронного подтверждения от Марии), он отправляет кольцо в другом ящике, запертой первым замком. Получив ящик, Мария открывает его ключом, прикреплённым к первому ящичку, и забирает кольцо.

Черви и вода

Эта головоломка скорее инженерная, чем математическая. Она пришла ко мне от Балинта Вирага из Массачусетского технологического института.

Лори может защититься от червей, свесив с потолка большой навес, выходящий далеко за кровать. Но навес должен загибаться внутрь *под себя*, создавая кольцевой жёлоб, заполненный водой. (Поперечный разрез навеса показан на рис. 2.)

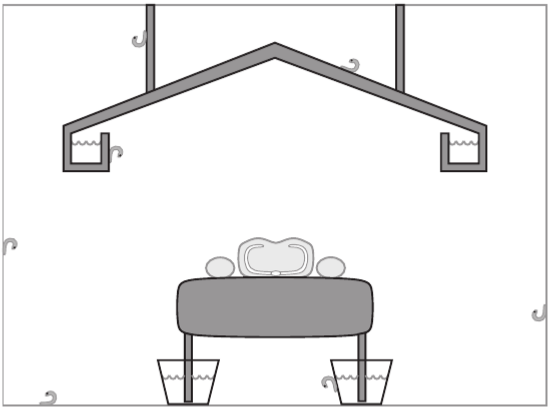


Рис. 2: Поперечный разрез Лори в защищённой от червей кровати.

Если у червей нет способа проникнуть в спальню сверху, то Лори может защититься, обведя комнату по краю жёлобом с водой.

В рассказе Льва Толстого «Клопы» описывается та же задача, но с другим решением — надеть шубу и выйти на двор. — *Прим. ред.*

Проверка страусиных яиц

Вариант этой задачи появился в замечательной книге Джозефа Д. Э. Конхаузера, Дэна Веллемана и Стэна Вэгона [38].

Часто полезно считать данное число (в нашем случае 102) переменной, даже если в конечном счёте нас интересует лишь одно значение. Пусть $f(k)$ — максимальное число этажей, которые проверяются с двумя яйцами за не более чем k бросков. Таким образом, $f(1) = 1$ (прочность яйца может быть 0 или 1). Предположим, что Оскару разрешено сделать k бросков, и он делает первый с n-го этажа. Если яйцо разбилось, то Оскару придётся бросить единственное оставшееся яйцо с 1-го этажа, затем с 2-го и так далее до $(n-1)$-го в худшем случае; так что $n = k$ это наилучший вариант. Если яйцо пережило падение с k-го этажа, то придётся проверить все этажи выше оставшимися $k - 1$ броском (используя два яйца). Следовательно, $f(k - 1) + k$ это максимальное число этажей, которые можно обработать. Получаем рекуррентное соотношение $f(k) = f(k - 1) + k$.

Прямым вычислением убеждаемся, что $f(2) = 3$, $f(3) = 6$, $f(5) = 10$ и так далее; в общем случае $f(k)$ равно сумме чисел от 1 до k. Поскольку таких чисел k, а их среднее равно $(k + 1)/2$, их сумма (иногда называемая k-*м треугольным числом*) равна $k(k + 1)/2$. Первое значение $f(k) \geqslant 102$ — это $f(14) = 14 \times 15/2 = 105$, то есть в худшем случае Оскару понадобится 14 бросков. Соотношение указывает и на то, как именно бросать; в нашем случае, запас в 3 этажа позволяет Оскару сбросить первое яйцо с одиннадцатого, двенадцатого, тринадцатого или четырнадцатого этажа. Любой другой вариант может потребовать лишнего броска.

Давайте посмотрим, что происходит при наличии в начале трёх яиц. Определим $g(k)$ как максимальное число этажей, которые можно обработать k бросками, имея три яйца. Теперь Оскару нужно обработать $g(k-1)$ этажей выше уровня первого броска, если яйцо переживёт падение; или же $f(k-1)$ этажей ниже этого уровня (то же f, что и выше), потому что в этом случае у него лишь два яйца. Получаем новое соотношение: $g(k) = g(k - 1) + 1 + (k - 1)k/2$, что даёт $g(2) = 3$ (пока без улучшений), но уже $g(3) = 7$. В общем случае $g(k) = k(k^2 + 5)/6$, и наименьшее значение k, для которого $g(k) \geqslant 102$, равно 9. То есть, если у Оскара три яйца, то ему потребуется максимум 9 бросков для обработки всех этажей.

В общем случае, если k велико, то число этажей, которые можно обработать, имея вначале m яиц, равно $k^m/m!$ плюс члены низших порядков. Отсюда следует, что с m яйцами и небоскрёбом в n этажей, при n намного большем m, надо около $(m! \times n)^{1/m}$ бросков в худшем случае.

Скоре всего первая математическая постановка этой задачи приводится в упомянутой статье 1996 года [38]. Однако сюжетом для неё послужил инженерный эксперимент, описанный в 1981 году [71]. — *Прим. ред.*

Ненадежная картина

Эту интересную головоломку предложил мне Джулио Дженовезе, аспирант в Дартмуте, который узнал её из нескольких источников в Европе.

Один из способов повесить картину показан на рис. 3; зазор добавлен, чтобы было видно, как идёт шнур. Он проходит над первым гвоздём, далее идёт петля вокруг второго, проходит назад над первым гвоздём, и затем снова делает петлю вокруг второго гвоздя, но с подворотом.

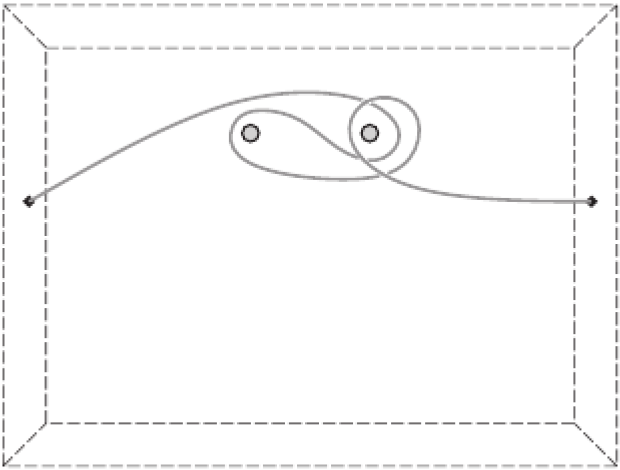


Рис. 3: Эта картина упадёт если выпадет любой из двух гвоздей.

Существуют также некоторые нетопологические решения: например, можно сдавить петлю между двумя близко расположенными гвоздями, предполагая, что ширина головки гвоздя не намного больше толщины шнура. Но зачем полагаться на трение, когда можно использовать математику?

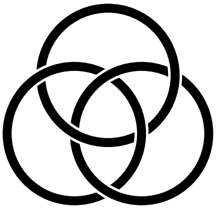


Рис. 4:

Попробуйте повесить картину на n гвоздей так, чтобы она упала, если выпадет любой из них. А можно ли повесить так, чтоб картина осталась висеть при выпадании одного гвоздя, но падала при выпадании двух? Хороший обзор подобных задач дан в [73], но он не включает результата из [79], дающего наилучший способ решения задачи с n гвоздями (без узлывания шнура); см. также [76].

Решение исходной задачи можно разглядеть в так называемых *борромеевых кольцах*, рис. 4; одно из колец следует считать шнурком, а два других соответствуют гвоздям. Для большего числа колец подобные конструкции называются *зацеплениями Брунна.* В комплексном анализе линия, образованная шнуром (в случае двух гвоздей), называется контуром Похгаммера. Она используется для записи специальных функций в виде контурных интегралов от многозначных функций (роль гвоздей играют точки ветвления). — *Прим. ред.*

Замок с дефектом

Этот комбинаторный шедевр достался мне от Амита Чакрабарти из Дартмута; он был предложен ГДР для Международной математической олимпиады 1988 года.

Задачи такого рода лучше решать геометрически. Пространство всех комбинаций представляет собой комбинаторный куб $8 \times 8 \times 8$. Каждый раз, когда мы проверяем какую-то точку куба, мы вычёркиваем все точки на трёх её координатных линиях.

Так, легче догадаться, что лучший способ вычеркнуть все точки — это брать все тестовые точки из двух противоположных осьмушек $4 \times 4 \times 4$ нашего куба. Это подталкивает нас к следующему решению.

Проверим все комбинации с числами из $\{1, 2, 3, 4\}$, сумма которых кратна 4. Их всего шестнадцать, ведь если выбирать числа на первых двух (или любых двух) дисках, то число на третьем диске определяется однозначно. Теперь попробуем те же комбинации, добавив $(4, 4, 4)$, то есть, добавив по 4 к каждому из трёх чисел; их ещё 16, и мы утверждаем, что вместе эти 32 тестовые комбинации вычёркивают все.

Это несложно проверить. У правильной комбинации либо есть два (или более) числа из $\{1, 2, 3, 4\}$, либо хотя бы два числа из $\{5, 6, 7, 8\}$. В первом случае положение третьего диска единственно (это число в правильной комбинации может не входить в $\{1, 2, 3, 4\}$), так что замок откроется одной из первых 16-ти тестовых комбинаций. Второй случай аналогичен.

А вот доказательство Амита (есть и другие), объясняющее, что 31-й комбинации не хватает. Предположим, что S — набор из 31 точки, который всё покрывает. Пусть $S_i = \{\, (x, y, z) \in S : z = i \,\}$ будет i-м уровнем S.

Рассмотрим три множества: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, и $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. По крайней мере, один уровень S должен содержать три (или меньше) точек; можно считать, что это S_1, и $|S_1| = 3$. (Если $|S_1| \leqslant 2$, то прийти к противоречию ещё проще.) Точки S_1 должны лежать в некотором $3 \times 3 \times 1$ подкубе; можно считать, что они лежат в $A \times A \times 1$.

25 точек из $B \times B \times \{1\}$ должны быть вычеркнуты тестовыми точками, не входящими в S_1. Никакие две из них не могут быть вычеркнуты одной точкой в S. Следовательно, $S - S_1$ содержит подмножество

T размером 25, которое лежит в подкубе $B \times B \times C$. Теперь рассмотрим множество $P = \{\,(x, y, z) : z \in C, (x, y, 1) \notin S_1, (x, y) \notin B \times B\,\}$. Легко убедиться, что $|P| = (64 - 3 - 25) \times 7 = 252$. Точки в P не вычёркиваются посредством S_1, и каждая точка в T может зачеркнуть не более $3 + 3 = 6$ точек в P. Следовательно, есть по крайней мере $252 - 6 \times 25 = 102$ точки в P, которые должны быть вычеркнуты точками в $S - S_1 - T$.

Однако осталось всего $|S - S_1 - T| = 31 - 3 - 25 = 3$ тестовые точки, и каждая из них вычёркивает ровно 22 точки. Поскольку $22 \times 3 = 66 < < 102$, приходим к противоречию.

Геометрическая интерпретация задачи сводит её к следующей (возможно, даже более известной): *какое минимальное число шахматных ладей контролируют всю трёхмерную доску* $8 \times 8 \times 8$*?*

В решении, предложенном ГДР, предлагалась немного иная конструкция набора из 32 точек. Для трёх множеств

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\},\\ K_2 &= \{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(2,2,2)\},\\ K_3 &= \{(0,0,0),(4,4,4)\} \end{aligned}$$

используются все 32 комбинации $k = k_1 + k_2 + k_3$, где $k_i \in K_i$. Доказательство последней части — недостаточности 31 точки — официального решения практически идентично вышеприведенному.

То, что количество цифр (на одном диске) для этой задачи равно 8, не критично. По крайней мере, решение, аналогичное приведённому выше, работает для любого чётного значения, начиная с 6.

Альтернативные кубики

Эта задача настолько известна, что имеет собственное название: «кубики Зихермана». В заметке Мартина Гарднера 1978 года [19] или в его книге [22] можно узнать об их открытии полковником Джорджем Зихерманом, сейчас проживающим в штате Нью-Джерси.[3] Единственная пара кубиков Зихермана имеет метки $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$ и $\{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$.

Возможно, вы нашли ответ перебором, и для этой задачи это вполне подходящий способ решения. Однако есть другой способ, иллюстрирующий мощный математический инструмент — *производящие функции.*

Давайте сопоставим кубику многочлен от переменной x, в котором коэффициент при x^k равен числу граней кубика с меткой k. Обычный кубик, например, будет соответствовать многочлену

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

---

[3] На веб-сайте автора есть страница про эти кубики [106]. — *Прим. ред.*

Важно заметить, что результат броска двух (или более) кубиков соответствует *произведению* их многочленов. Например, если мы бросаем два обычных кубика, то коэффициент при x^{10} в произведении (то есть в $f(x)^2$) есть число способов выбрать два члена из $f(x)$, произведение которых равно x^{10}, а это $x^4 \times x^6$, $x^5 \times x^5$ и $x^6 \times x^4$; они и представляют три способа получить в сумме 10.

Следовательно, если $g(x)$ и $h(x)$ — многочлены наших кубиков, то $g(x) \times h(x) = f(x)^2$. Многочлены, как и числа, разлагаются единственным способом на простые сомножители; многочлен $f(x)$ разлагается как $x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Чтобы получить произведение $g(x)$ и $h(x)$ равное $f(x)^2$, надо взять каждый из этих 4 сомножителей и добавить по одной его копии в $g(x)$ и в $h(x)$, или же две его копии в один либо в другой. При этом есть следующие ограничения: в полученных многочленах $g(x)$ и $h(x)$ не может быть свободных членов (это бы означало, что некоторые стороны помечены нулём); не допускаются отрицательные коэффициенты; также сумма коэффициентов в каждом из многочленов равна 6-ти.

Единственное решение (кроме $g(x) = h(x) = f(x)$) это

$$\begin{aligned} g(x) &= x(x+1)(x^2+x+1) = \\ &= x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h(x) &= x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2 = \\ &= x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8, \end{aligned}$$

или наоборот.

Это всё ещё перебор, но так решаются задачи посложнее. Во-первых, можно придумать альтернативы для пары восьмигранных игральных костей, пронумерованных от 1 до 8 (есть три альтернативных варианта), или для бросания *трёх* обычных кубиков (много способов).

Тем, кто хочет поглубже изучить эту тему, стоит обратиться к отличной статье Джо Галлиана и Дейва Русина [16].

Совпадение монет

Эту задачу подкинул мне Одед Регев из Техниона (Израиль).

Сонни и Шер могут выиграть более чем в 2/3 случаев. Для этого разделим последовательность бросков на блоки по три. Перед каждым блоком Шер *оповещает* Сонни, будут ли в следующем блоке в основном орлы или решки; если первое, Сонни говорит «ООО» в этом блоке; если второе, то «РРР».

Но как Шер передать эту информацию? Чаще всего Сонни придётся ошибаться (в точности) 1 раз в блок. Перед этим броском Шер говорит «О», сообщая, что в следующем блоке будут в основном орлы, и «Р» в противном случае. Для двух других бросков в текущей тройке Шер даёт правильный ответ (вместе с Сонни), гарантируя две из трёх побед. Если случится, что Сонни может угадать все три броска в текущей тройке, то один раз — скажем на последнем броске, Шер действует, как описано выше, даже если это стоит им одной победы. Таким образом, после первого блока Сонни и Шер будут набирать две победы из трёх, когда блок состоит из двух орлов и одной решки или двух решек и одного орла. Когда блок состоит полностью из орлов или полностью из решек (что происходит с вероятностью $1/4$), они получают две победы из трёх в половине случаев и три из трёх в оставшейся половине. И доля успеха составит $3/4{\times}2/3{+}1/4{\times}5/6 = 17/24 > 70.8\%$. Обратите внимание, что даже в наихудшем случае (например, если последовательные орлы и решки выбираются противником, а не случайны) этот метод гарантирует две трети побед.

Оливье Госснер, Пенелопа Эрнандес и Абрахам Нейман [27] доказали, что с более сложными версиями этой схемы Сонни и Шер могут приблизиться к любой доле успеха, равной x, где x — единственное решение уравнения

$$-x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x) + (1-x)\log_2 3 = 1,$$

и лучшего добиться нельзя. Более того, это утверждение остаётся верным независимо от того, случайны броски монеты или нет! Это значение x составляет около 0,8016, то есть Сонни и Шер могут добиться 80-и процентов побед, даже если играют против них, зная их стратегию.

Илья Межиров предложил следующую схему с 80%-ным успехом.

Вся серия бросков разбивается на блоки длины $5k$; значение k уточним позднее. Шер использует первый блок, только чтобы сообщить Сонни, как ходить в следующем блоке. В каждом из следующих блоков Шер будет знать все $5k$ битов и ходы Сонни, однако ровно в k битах они сделают ошибку по плану Шер.

Заметим, что есть три вида ошибки (неугадывания бита):

- Шер называет решку, а Сонни — орла;
- Шер называет орла, а Сонни — решку;
- оба называют неверную сторону монеты.

Для каждой ошибки Шер может выбрать один из трёх способов, ведь она сама сообщает Сонни как ходить, начиная со второго блока. Более того, Шер может выбрать места, на которых будут сделаны эти k ошибок — то есть у неё есть выбор из $3^k\binom{5k}{k}$ вариантов на один блок. Если $3^k\binom{5k}{k} \geqslant 2^{5k}$, то этого хватает, чтобы передать $5k$ бит для следующего блока. (Шер придётся воспользоваться обратным ходом, чтобы заранее произвести все необходимые расчёты.)

Это неравенство выполняется при всех $k \geqslant 20$. Такая стратегия позволяет Сонни и Шер получить $4k$ угадываний на всех блоках, кроме первого, — а значит, асимптотически достичь $4/5 = 80\%$ угадываний. — *Прим. ред.*

Имена в ящиках

У этой головоломки короткая, но увлекательная история. Она придумана датским специалистом по информатике Петером Бро Милтерсеном; её версия появилась в статье, написанной им и Анной Галь [15]. Однако Милтерсен не знал решения, пока его коллега Свен Скиум не рассказал его за обедом. В конечном итоге головоломка дошла до меня (в несколько усложнённой форме) через Дорит Ааронов.

Чтобы её решить, заключённым надо сначала договориться о случайном соответствии ящиков со своими именами. (Это сделает невозможным разложить имена в ящиках так, чтобы помешать протоколу, описанному ниже.) Попадая в комнату, каждый заключённый проверяет свой собственный ящик (то есть ящик, которому соответствует его имя). Затем он заглядывает в ящик, соответствующий имени, которое он только что нашёл, затем в ящик, соответствующий имени, найденному во втором ящике, и так далее, пока он не найдёт своё собственное имя или не откроет 50 ящиков.

А почему эта стратегия работает? Соответствие между именем владельца ящика и именем в его ящике представляет собой случайную перестановку из 100 имён. Каждый заключённый идёт по циклу перестановки, начиная со своего имени. Если цикл не длиннее 50, то он находит своё имя, значит, если перестановка *не имеет циклов длинней 50*, то это сработает для всех — все будут спасены.

Вероятность того, что случайная перестановка чисел от 1 до $2n$ не содержит ни одного цикла длиной более n, равна по крайней мере $1 - \ln 2$, что составляет около 30,6853%.

Чтобы увидеть это, положим $n < k \leqslant 2n$ и сосчитаем перестановки с циклом C длиной ровно k. Есть $\binom{2n}{k}$ способов выбрать имена в этом цикле, $(k-1)!$ способов упорядочить их в C и $(2n-k)!$ вариантов перестановки остальных имён; перемножив, получим $(2n)!/k$. Поскольку в данной перестановке не более одного k-цикла, вероятность того, что такой имеется, в точности равна $1/k$. Значит вероятность отсутствия длинного цикла равна

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{2n} = 1 - H_{2n} + H_n,$$

где H_m — сумма первых m чисел в гармоническом ряду, что приблизительно равно $\ln m$. Таким образом, наша вероятность близка к $1 - \ln 2n + \ln n = 1 - \ln 2$, и на самом деле всегда чуть больше этого значения. При $n = 50$, заключённые выживают с вероятностью $31,1827821\%$. Юджин Кертин и Макс Варшауэр [5] показали, что это решение нельзя улучшить.

Ламберт Брайт и Рори Ларсон, а также независимо Ричард Стэнли из Массачусетского технологического института, предложили следующую вариацию. А что если каждый заключённый должен заглянуть в *не менее* чем 50 ящиков, и для их выживания нужно, чтобы каждый заключённый *не* нашёл собственное имя? При том, что цель здесь полностью противоположна, похоже на то, что у заключённых нет варианта лучше, чем описанная стратегия. Однако теперь они выживают лишь, если каждый цикл длиннее 50, а это происходит только при наличии единственного большого цикла длины 100 — шансы составляют ровно 1 к 100. Не сильно обнадёживает, но всё же лучше, чем 1 к 2^{100}.

При этом у заключённых будут те же шансы, если каждому потребуется заглянуть в 99 ящиков — снова они следуют стратегии и выигрывают, если случайная перестановка является циклом. В этом случае сразу очевидно, что лучшей стратегии нет. Ведь самый первый заключённый, чтобы он ни делал, выживет с вероятностью 1%. Забавно, что если заключённые следуют этой стратегии, то как только повезло первому, так автоматически везёт всем!

Больше по этой теме можно найти в статье Навина Гойала и Майкла Сакса [80]. — *Прим. ред.*

Глава 3

Числовые загадки

> Загадочны действия творца вселенной. Но он использует десятичную систему счисления и любит круглые числа.
>
> — Скотт Адамс (1957—)

Числа могут вести себя красиво и странно. Неудивительно, что многие замечательные головоломки основаны на их поведении и в некоторых случаях помогают понять что-то о самих числах.

Строки и столбцы

Докажите, что если сначала упорядочить каждую строку матрицы, а затем каждый столбец, то строки останутся упорядоченными!

Нежелательное раскрытие

Дано алгебраическое выражение с переменными, сложением, умножением и скобками. Начнём рекурсивно раскрывать скобки, используя распределительный закон умножения. Как убедиться, что этот процесс не будет продолжаться вечно?

Примечания. Может показаться, что число скобок должно уменьшаться. Однако раскрыв первые скобки в

$$(x+y)(s(u+v)+t),$$

получим выражение

$$x(s(u+v)+t)+y(s(u+v)+t),$$

с бóльшим числом скобок.

Хамелеоны

На острове живут 20 красных, 18 синих и 16 зелёных хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разных цветов, то каждый из них меняет свой цвет на оставшийся третий. Смогут ли все хамелеоны стать одного цвета?

Отсутствующая цифра

Число 2^{29} состоит из 9 различных цифр; какая цифра отсутствует?

Очень честное разбиение

Можно ли разбить целые числа от 1 до 16 на два таких набора по восемь в каждом, чтобы у них были равные суммы, равные суммы квадратов и равные суммы кубов?

Восстановление чисел

Для каких натуральных n верно следующее: зная все $\binom{n}{2}$ попарные суммы n различных натуральных чисел, можно однозначно восстановить сами числа?

Уравнивание ирисок

n детей стоят кружком, и каждый держит несколько ирисок. Сначала учитель даёт дополнительную ириску каждому ребёнку, у которого их нечётное число, затем каждый ребёнок передаёт половину своих ирисок ребёнку слева от себя. Эта пара процедур повторяется до тех пор, пока они уже ничего не меняют. Докажите, что этот процесс на самом деле завершится, и у всех детей станет по одинаковому (чётному) числу ирисок.

Девяносто девятая цифра

Какая цифра стоит на 99-м месте после запятой в десятичном разложении числа $(1+\sqrt{2})^{500}$?

Подмножества с ограничениями

Каково максимальное число целых чисел от 1 до 30, произведение любой пары которых не полный квадрат? А что если (вместо этого) ни одно число не кратно другому? Или ни у какой пары нет общего делителя (отличного от 1)?

Единообразие бубликов

Чёртова дюжина бубликов (то есть 13 штук) обладают таким свойством: любую дюжину из них можно разделить на две кучки по шесть, которые в точности уравновесят друг друга на весах. Докажите, что все 13 бубликов одного веса.

Следующая головоломка сложней большинства остальных; она включена по особой причине.

Юбилейная головоломка

Поскольку ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ не сходится, функция $f(x) = x - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - x^{32} + \ldots$ не определена при $x = 1$. Однако $f(x)$ сходится при всех положительных вещественных числах $x < 1$. Сходится ли $f(x)$ при x, стремящемся к 1 снизу?

Надёжные мигалки

Две обычные мигалки мигают одновременно в момент времени 0 и мигают дальше; при этом у них вместе *в среднем* получается по одному миганию в минуту. Известно, что они больше никогда не мигнут одновременно (или, что, то же самое, отношение их частот иррационально).

Докажите, что после первой минуты (во временном интервале между 0:00 и 0:01) в каждом интервале между t-й и $(t+1)$-й минутой будет ровно одно мигание (здесь t — натуральное число).

Красные и синие игральные кости

У нас есть два набора (красный и синий) из n игральных костей с n гранями на каждой; на гранях каждой кости стоят числа от 1 до n. Мы бросили все $2n$ костей одновременно. Докажите, что можно выбрать непустое подмножество красных и непустое подмножество синих костей с одинаковыми суммами!

Источники и решения

Строки и столбцы

Эта классическая теорема проста и удивительна; о ней мне напомнил Дэн Ромик, сейчас он в Иерусалимском университете. В третьем томе своего «Искусства программирования» [37] Дональд Кнут проследил историю этого результата до сноски в книге 1955 года Германа

Бёрнера [60]. Бриджет Теннер, студентка знаменитого комбинаторщика Ричарда Стэнли из Массачусетского технологического института, недавно обобщила эту теорему [54]. Теорема Бёрнера — одна из тех задач, где таинственность и очевидность чередуются при каждой попытке найти решение.

Положим, что у матрицы m строк и n столбцов, и a_{ij} — значение в i-й строке и j-м столбце матрицы после упорядочивания каждой строки. (Будем считать, что самые маленькие значения находятся слева.) Обозначим через b_{ij} значение в той же клетке матрицы после упорядочивания столбцов.

Нужно показать, что $b_{ij} \leqslant b_{ik}$ если $j < k$. Заметим, что b_{ik} это i-й наименьший элемент в старом столбце $\{a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}\}$. Далее, $a_{i'j} \leqslant a_{i'k}$ поскольку $a_{i'j}$ стоит левее $a_{i'k}$ в той же строке. В частности, если $a_{i'k} \leqslant b_{ik}$, то $a_{i'j} \leqslant b_{ik}$. Значит, есть как минимум i элементов из старого j-го столбца, которые не превосходят b_{ik}, и в частности, i-й наименьший элемент в старом j-м столбце не превосходит b_{ik}; то есть, $b_{ij} \leqslant b_{ik}$ — конец доказательства.

Возможн, было бы убедительней разобрать конкретный пример — решайте сами.

Нежелательное раскрытие

Эту любопытную головоломку мне подкинул Ричард Липтон из компьютерного колледжа Технологического института штата Джорджия.

Естественное решение использует обход дерева в глубину, но вот способ проще: положим все переменные равными 2! Поскольку применение распределительного закона не меняет значения выражения, получаем ограничение на длину любого выражения, которое получается из него после раскрытия скобок.

Строго говоря, нужно ещё объяснить, почему процесс не может зациклиться. Для этого достаточно проверить, что при каждом раскрытии скобок увеличивается общее число символов в формуле, или же общее число знаков операций (+ и ×). — *Прим. ред.*

Хамелеоны

Эту головоломку прислал Борис Шейн, алгебраист из Университета Арканзаса; скорее всего это древняя задача. Мне известен случай, когда её дали ученику восьмого класса в Харькове, и ещё другой, когда её дали выпускнику Гарварда, проходившему собеседование в крупной финансовой фирме; оба справились!

Главное увидеть, что после каждой встречи разница между числом особей любых двух цветов не меняется по модулю 3. Обозначим через $N_{\text{к}}$ число красных хамелеонов, и пусть $N_{\text{с}}$ и $N_{\text{з}}$ — число синих и зелёных. Мы утверждаем, что, например, у разности $N_{\text{к}} - N_{\text{с}}$ не меняется остаток при делении на 3 после каждой встречи хамелеонов. В этом можно убедиться, проверив каждый случай. Таким образом, эти разности остаются одинаковыми по модулю 3 навсегда, и поскольку ни одна из них не нуль по модулю 3, нам не удастся избавиться от двух цветов.

С другой стороны, если одна из этих разностей (скажем $N_{\text{к}} - N_{\text{с}}$) положительна и кратна 3, то её можно уменьшить, заставив красного хамелеона встретиться с зелёным (если зелёных нет, то придётся сначала заставить красного встретиться с синим). Повторив это несколько раз, можно добиться, что $N_{\text{к}} = N_{\text{с}}$. Затем заставим красных хамелеонов встречаться с синими, пока не останутся только зелёные. Собрав всё это воедино и отметив, что если две разницы кратны 3, то и третья кратна 3, мы видим следующее:

- если все три разницы кратны 3, то любой цвет может захватить весь остров;
- если только одна из разниц кратна 3, то оставшийся цвет — единственный, который может захватить остров; и наконец,
- если ни одна из разниц не кратна 3, как в нашей задаче, то все хамелеоны не смогут стать одноцветными до вмешательства других причин (например, рождения или смерти).

Эта головоломка была предложена осенью 1984 года на Турнире городов[1] (с числами 13, 15 и 17) — задача 5 в подготовительном варианте для 9—10 классов и основном варианте для 7—8 классов. Турнир городов, задачи с которого вы ещё увидите, был основан в 1980 году Николаем Константиновым из Москвы. В то время начиналась перестройка и гласность, это затронуло и математические олимпиады, как и все другие аспекты советской жизни. Константинов был недоволен определёнными переменами, вышел из жюри Всесоюзной олимпиады и сам организовал турнир для маленьких городов в сельской России. Он собрал вокруг себя замечательных математиков, и успех турнира в конечном итоге привёл к тому, что Москва сама стала одним из «городов». Эта же группа основала Независимый московский университет в 1993 году. Сама же группа превратилась в МЦНМО.[2]

---

[1] Автор В. Ильичёв. — *Прим. ред.*

[2] Приведённая история отчасти вымышлена. Историю Турнира городов лучше прочитать в книге А. К. Толпыго [108]. История создания Независимого московского университета и МЦНМО описана в буклете посвящённом его 30-ти летию [89]. — *Прим. ред.*

Турнир распространился в Польшу и Болгарию. В 1989 году благодаря усилиям Питера Тейлора из Университета Канберры был проведён в Австралии. В настоящее время Тейлор является исполнительным директором Австралийского математического фонда, под его эгидой он выпустил пять книг о турнире.

В 1990 году Энди Лю привёз Турнир в Канаду. С тех пор он распространился по всему миру, с участниками из Соединённых Штатов, Западной Европы, Азии и Южной Америки. Перевод задач и решений на английский язык готовится Андреем Сторожевым и Энди Лю.

Отсутствующая цифра

Эта забавная загадка взята из колонки головоломок Берлекэмпа и Бюлера в журнале Emissary [24, весна/осень 2006 года], а они услышали её от специалиста по теории чисел Хендрика Ленстры. Конечно, можно загуглить “`2^29`” и увидеть число, но как решить эту задачу в уме без головной боли?

Возможно, вы помните технику из начальной школы, так называемое *вычеркивание девяток* — если сложить все цифры то получим значение числа по модулю 9 (то бишь с тем же остатком при делении на 9).[3] Этот метод иногда называют индийской или арабской проверкой; он основан на том, что $10 \equiv 1 \pmod 9$, следовательно, $10^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod 9$ для любого n. Если обозначить через x^* сумму цифр числа x, то получим $(xy)^* \equiv x^* y^* \pmod 9$ для любых x и y.

В частности, $(2^n)^* \equiv 2^n \pmod 9$. Остатки от деления степеней числа 2 на 9 начинаются с 2, 4, 8, 7, 5, 1 и зацикливаются; так что $2^{29} \pmod 9$ есть пятое число этой последовательности, то есть 5, ведь $29 \equiv 5 \pmod 6$.

Сумма всех цифр равна $10 \times 4{,}5 = 45 \equiv 0 \pmod 9$, поэтому пропущенная цифра должна быть четвёркой.

И действительно, $2^{29} = 536\,870\,912$.

Очень честное разбиение

Эту головоломку мне подбросил Муту Мутукиршнан (Рутгерс), а сам он узнал её от Боба Тарджана (Принстон) — оба великолепные специалисты в информатике.

Такое разбиение существует: $\{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16\}$ и $\{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}$.

Чтобы догадаться как его найти, давайте заметим, что 16 является степенью двойки и попытаемся обобщить. Можно ли, например, разбить числа от 1 до 8 на две равные части с одинаковой суммой и

---

[3] Эта сумма также называется *цифровым корнем* числа. — *Прим. ред.*

суммой квадратов? А как насчёт разделения чисел от 1 до 4 на две равные части с одинаковой суммой? Последнее сделать легко: $\{1,4\}$ и $\{2,3\}$. Пара множеств $\{5,8\}$ и $\{6,7\}$ разбивают числа от 5 до 8, решая ту же задачу. Если соединить эти два разбиения крест-накрест, то получим $\{1,4,6,7\}$ и $\{2,3,5,8\}$; по построению оно подходит для сумм, но вроде бы подходит и для сумм квадратов.

В общем случае, по индукции можно доказывать, что числа от 1 до 2^k разбиваются на множества X и Y так, что каждая часть имеет одинаковую сумму j-х степеней, где j меняется от 0 до $k-1$, и, значит, $p(X) = p(Y)$ для любого многочлена p степени меньше k; здесь $p(X)$ определятся как сумма всех значений $p(x)$ при $x \in X$.

Чтобы перейти от 2^k к 2^{k+1}, возьмём

$$X' = X \cup (Y + 2^k) \quad \text{и} \quad Y' = Y \cup (X + 2^k),$$

где $Y + 2^k$ получается из Y добавлением 2^k к каждому элементу. При этом $p(X + 2^k) = p(Y + 2^k)$, ведь $p(X + 2^k) = q(X)$ и $p(Y + 2^k) = q(Y)$ для некоторого другого многочлена q той же степени. Таким образом, X' и Y' согласуются для многочленов степени меньше k.

Ну а что, если степень нашего многочлена равна k?

Но и здесь всё в порядке, ведь старшие члены в $r(x + 2^k)$ и $r(x)$ совпадают; то есть $s(x) = r(x + 2^k) - r(x)$ есть многочлен степени меньше k. Таким образом,

$$\begin{aligned} r(X') &= r(X) + r(Y + 2^k) = r(X) + r(Y) + s(Y), \\ r(Y') &= r(Y) + r(X + 2^k) = r(Y) + r(X) + s(X). \end{aligned}$$

Поскольку $s(Y) = s(X)$, получаем, что $r(X') = r(Y')$.

Эта задача также была в задачнике Кванта (задача M55; решение в № 8 1971 года).

Повторяя приведённое построение получим разбиение всех натуральных чисел на два подмножства, X и Y. Последовательность a_n из нулей и единиц определяемая как $a_n = 0$ если $n \in X$ и $a_n = 1$ если $n \in Y$ начинается как

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots.$$

Это так называемая последовательность Туэ — Морса. Её можно построить, начав с нуля, а затем шаг за шагом дописывать к имеющемуся слову его отрицание (где единицы заменены на нули и наоборот). Легко проверить, что a_n равно сумме цифр в двоичном представлении $n - 1$, взятой по модулю 2.

Последовательность Туэ — Морса обладает рядом замечательных свойств с которыми очень стоит ознакомиться, она всплывает в теории чисел, теории групп, теории формальных языков, в динамических системах и даже использовалась в теории шахмат. Этой последовательности посвещена статья Валентины Кириченко и Владлена Тиморина в «Квантике» [84]; более продвинутое изложение даётся в книге Арто Саломаа [103, Глава 1].

Если не ограничивать себя множествами из последовательных чисел, то можно найти более короткие наборы чисел с равными суммами степеней. Так называемая задача Терри — Эскотта состоит в нахождении двух непересекающихся множеств целых чисел $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, для которых

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_n &= y_1 + \ldots + y_n, \\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 &= y_1^2 + \ldots + y_n^2, \\ &\vdots \\ x_1^k + \ldots + x_n^k &= y_1^k + \ldots + y_n^k. \end{aligned}$$

Такую систему равенств иногда записывают как $[x_1, \ldots, x_n] =_k [y_1, \ldots, y_n]$. Например, $[1, 2, 6] =_2 [0, 4, 5]$ и $[0, 5, 6, 16, 17, 22] =_5 [1, 2, 10, 12, 20, 21]$. Решения, для которых $n = k + 1$, называются *идеальными*. Идеальные решения известны при $3 \leqslant n \leqslant 10$ и для $n = 12$. Постановка задачи восходит к переписке Леонарда Эйлера с Христианом Гольдбахом.

Решение задачи с $n = 2^k$ было предложено Эженом Пруэ в 1851 году [100], однако публикация долго оставалась незамеченной. Она представляет собой отрывок из его неопубликованного труда (сам труд утерен, но известно, что его вернули автору в 1852 году [112]). Гастон Терри и Эдвард Эскотт публиковали свои статьи на эту тему в 1910—1912 годах. Результаты для малых значений n и k подробно обсуждаются в книге Леонарда Диксона [74]. — *Прим. ред.*

Восстановление чисел

Эту головоломку прислал мне Ник Рейнгольд из AT&T Labs. Ответ такой: это возможно тогда и только тогда, когда n не степень двойки! И мы снова применим силу многочленов.

Предположим, что $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — два различных множества с одинаковыми попарными суммами. Рассмотрим многочлены $p(z) = z^{x_1} + z^{x_2} + \cdots + z^{x_n}$ и $q(z) = z^{y_1} + z^{y_2} + \cdots + z^{y_n}$. По условию, смешанные члены[4] в разложении $p(z)^2$ те же, что и в $q(z)^2$; то есть,

$$p(z)^2 - q(z)^2 = p(z^2) - q(z^2).$$

Разделив равенство на $p(z) - q(z)$, получим

$$p(z) + q(z) = \frac{p(z^2) - q(z^2)}{p(z) - q(z)}.$$

Поскольку $p(1) = q(1) = n$, единица является корнем $p(z) - q(z)$; пусть k — её кратность. Значит

$$p(z) - q(z) = (z-1)^k r(z)$$

и

$$p(z^2) - q(z^2) = (z^2 - 1)^k r(z^2) = (z-1)^k (z+1)^k r(z^2).$$

Сократив дробь на $(z-1)^k$, получаем

$$p(z) + q(z) = \frac{(z+1)^k r(z^2)}{r(z)}.$$

---

[4] То есть члены вида $2z^{x_i + x_j}$ при $i \neq j$.

Подставив $z = 1$, получаем $2n = 2^k$ — полдела сделано!

Остаётся показать, что если n степень двойки, то числа не всегда можно восстановить. Для этого воспользуемся множествами X и Y из предыдущей задачи. Предположим, что $\{1, \ldots, 2^k\}$ разбиты на подмножества X и Y с теми же парными суммами. Рассмотрим $X' = X \cup (Y + 2^k)$ и $Y' = Y \cup (X + 2^k)$. Парные суммы X' имеют вид $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2 + 2^{k+1}$ и $x + y + 2^k$. По предположению индукции, суммы $x_1 + x_2$, те же, что и $y_1 + y_2$. Значит, попарные суммы из Y' точно те же, что и из X'.

Про построенный пример можно думать геометрически. Если X и Y — множества чётных и нечётных вершин k-мерного параллелепипеда, то легко увидеть, что все середины диагоналей с вершинами в X те же, что и с вершинами в Y. Остаётся спроецировать параллелепипед на прямую так, чтобы все вершины попали в целые числа.

Как и в предыдущей задаче, пример можно строить и с помощью последовательности Туэ — Морса. Между парами с равными суммами из множеств X и Y можно построить простое взаимно-однозначное соответствие. Для этого лучше сдвинуть разбиение на единицу (то есть разбивать множество $\{0, \ldots, 2^k - 1\}$) и тогда в двоичном представлении каждого числа из пары надо изменить самый младший разряд, в котором они отличаются. — *Прим. ред.*

Уравнивание ирисок

Эта задача была представлена Клиффом Смитом (Массачусетский технологический институт) на прекрасном сайте головоломок «The Puzzle Toad» [67], который ведут Том Боман, Олег Пихурко, Алан Фриз и Дэнни Слейтор в Университете Карнеги — Меллона. Она появилась на Пекинском математическом соревновании старших классов 1962 года (12 класс, лист II, задача 4).

Пусть M — максимальное число ирисок у детей в данный момент. Число M может увеличиться только, если оно нечётное; в этом случае оно может увеличиться только на единицу до следующего чётного числа. Чтобы это понять, предположим сначала, что M чётное; тогда оно, конечно же, не изменится при раздаче дополнительных ирисок, а после передачи ирисок ни один ребёнок не сможет иметь больше чем $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M$ штук. Если же M нечётное, то оно увеличится на 1 до следующего чётного числа, а после этого заработает предыдущее рассуждение.

Значит, рано или поздно учитель прекратит раздавать ириски. Теперь наша задача — показать, что количества ирисок у всех учеников *сравняются*.

Неравенство набора из n чисел с фиксированной суммой хорошо измеряется суммой их квадратов; она минимизируется, если числа стоят как можно ближе друг к другу. Давайте рассмотрим этот параметр в нашем случае, а именно

$$S = G_1^2 + G_2^2 + \cdots + G_n^2,$$

где G_i — число ирисок у i-го ребёнка. После передачи ирисок S изменится на

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{1}{2}(G_n + G_1)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(G_1 + G_2)\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}(G_{n-1} + G_n)\right)^2 - \\ -G_1^2 - G_2^2 - \cdots - G_n^2 = \\ = -\tfrac{1}{2}\left((G_n - G_1)^2 + (G_1 - G_2)^2 + \cdots + (G_{n-1} - G_n)^2\right).\end{gathered}$$

Если была пара соседей с разным числом ирисок, то это отрицательное целое число (ведь все G_i уже чётные). Таким образом, S уменьшается каждый раз при передаче ирисок, пока количества ирисок не уравнятся. И всё доказано, ведь положительное целое число S не может бесконечно уменьшаться.

Читатель, знакомый с теорией вероятностей, сможет оценить следующее впечатляющее обобщение этой задачи в стиле Марковских цепей.

Пусть $M = \{p_{ij}\}$ — матрица перехода эргодической Марковской цепи с конечным числом состояний, и все p_{ij} рациональны. Предположим, что в конце раунда у i-го ребёнка m_i ирисок. Тогда учитель раздает ириски так, чтобы у i-го ребенка стало n_i ирисок, где $n_i \geqslant m_i$ — наименьшее число, при котором все числа $p_{ij} n_i$ являются целыми. Далее, i-й ребёнок передаёт $p_{ij} n_i$ ирисок j-му ребёнку.

Верно ли, что этот процесс завершается после конечного числа раундов (и при этом доля ирисок каждого ребёнка станет пропорциональна стационарному распределению цепи Маркова $\{\pi_i\}$)? Этот вопрос был поставлен примерно в 1975 году моим коллегой из Дартмута Лори Снеллом на математическом семинаре в Кембриджском университете и решён Ричардом Вебером.

Вебер рассматривает целочисленный вектор $(M_1, \ldots, M_n)$ пропорциональный $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, такой, что каждая компонента M_i не меньше начального числа ирисок у i-го ребёнка. Далее он замечает, что если $m_i \leqslant M_i$ для всех i, то и $n_i \leqslant M_i$, ведь пополнение n_i до M_i тоже сработало бы. Отсюда

$$m_j' := \sum_i p_{ij} n_i \leqslant \sum_i p_{ij} M_i = M_j,$$

где m_j' — число ирисок у j-го ребёнка в конце раунда. Воспользовавшись индукцией, можно заключить, что число ирисок у i-го ребёнка никогда не превысит M_i.

Остаётся проверить, что если учитель не раздает ириски, то доли ирисок у детей приближаются к стационарному распределению. А это не может продолжаться вечно, ведь у нас лишь конечное число способов распределить ириски. Следовательно, ириски добавляются конечное время до тех пор, пока их общее число $S \leqslant \sum_i M_i$ не достигнет некоторого значения, на котором стационарное распределение и будет достигнуто.

Девяносто девятая цифра

Эта загадка взята из журнала Emissary [24, осень 1999] и выглядит довольно сложной. Даже если пользоваться компьютером, понадобится некоторое терпение (или специальное программное обеспечение).

Вместо этого, обратим внимание на то, что число

$$(1+\sqrt{2})^{500} + (1-\sqrt{2})^{500}$$

целое. Ведь после раскрытия скобок все нечётные степени $\sqrt{2}$ сократятся. Второе слагаемое чрезвычайно мало — поскольку $|1-\sqrt{2}| < \frac{1}{2}$, получаем $(\frac{1}{2})^5 < 0{,}1$, и, значит, оно гораздо меньше, чем 10^{-100} (на самом деле что-то около 4×10^{-192}).

То есть степени $(1+\sqrt{2})^{500}$ не хватает крошечной величины до целого, и значит, в его десятичной записи есть внушительный ряд девяток после запятой. (На самом деле их 191, и за ними следует 590591051...) В частности, 99-ой цифрой будет девятка.

Фокус с добавлением $(1-\sqrt{2})^{500}$ может показаться возникшим из ниоткуда, но такие пары сопряжённых степеней, одна большая и одна маленькая, часто встречаются в математике. Например, формула Бине[5]

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

выдаёт точные значения чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34\ldots$ Второе слагаемое в этой формуле настолько мало, что для любого $n \geqslant 0$ достаточно вычислить

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Округлив полученное число до ближайшего целого, получим в точности F_n.

---

[5] Примерно за век до Жака Бине эта формула была известна Леонарду Эйлеру (1707—1783) и Абрахаму де Муавру (1667—1754).

Сходные задачи были популярны в 50—60-х годах прошлого века на математических олимпиадах разных стран. Аналогичные задачи можно ставить про любое из так называемых *чисел Пизо*; конечно же $\sqrt{2}+1$ — это пример такого числа. В общем случае число Пизо (или число Пизо — Виджаяраргхавана, или PV-число) — это целое алгебраическое число, большее 1, для которого модули всех сопряжённых строго меньше 1. — *Прим. ред.*

Подмножества с ограничениями

Все три головоломки решаются одним способом. Первая была представлена давним мастером головоломок Соломоном Голомбом (Университет Южной Калифорнии) на конференции «Gathering for Gardner VII»; вторая предложена Прасадом Тетали из Технологического института Джорджии; третья — нехитрая её вариация.

Попытайтесь покрыть числа от 1 до 30 такими группами чисел, что из каждой только одно число можно было бы включить в требуемое множество. Если *получится* собрать подмножество с одним элементом из каждой группы, то оно будет максимальным.

В первом случае рассмотрим любое число k без квадратов (то есть его разложение содержит не больше одной копии любого простого числа). Теперь посмотрим на множество S_k, которое получается умножением k на все возможные квадраты.

С одной стороны, если взять два числа, скажем, kx^2 и ky^2, из S_k, то их произведение будет квадратом: $k^2x^2y^2 = (kxy)^2$. Поэтому оба числа нельзя включить в наше подмножество. С другой стороны, произведение пары чисел из разных S_k не может быть квадратом. Действительно, если $k_1 \neq k_2$, то у одного из них будет простой делитель, не встречающийся в другом, и этот делитель появится нечётное число раз в разложении их произведения.

Каждое число попадает ровно в одно из множеств S_k; то есть для данного n есть единственное k, что $n \in S_k$. Число k равно произведению простых чисел, входящих с нечётной степенью в разложение n на простые. Между 1 и 30 есть 19 таких чисел: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 2×3, 2×5, 2×7, 2×11, 2×13, 3×5, 3×7. Представителем из S_k можно выбрать само k. Таким образом, подмножество размера 19 достижимо, и лучшего не найти.

Если выбирать числа, которые не делятся друг на друга без остатка, то из группы $B_j = \{j, 2j, 4j, 8j, \dots\}$ при нечётном j (то есть, j умноженное на всевозможные степени двойки) можно взять только одно число. В наше множество можно включить всю верхнюю половину, то есть числа от 16 до 30, тогда мы получим по одному представителю из каждого B_j. Конечно же, ни одно из этих чисел не делится на другое без остатка, ведь все их отношения меньше 2. Таким образом, 15 полученных чисел составляют наилучшее возможное подмножество.

Наконец, чтобы получить максимальное подмножество попарно взаимно простых, естественно посмотреть на группы из всех кратных фиксированного простого числа p. Представителем такой группы можно взять само p. И значит, лучшее, что можно сделать — это выбрать 1 и все простые числа до 30. Получится 11 штук.

Единообразие бубликов

Эта милая головоломка взята с 12-й Московской математической олимпиады 1949 года; она включена в первую часть «Избранных задач и теорем элементарной математики» [48, задача 127, стр. 28].

Предположим, что не все веса одинаковы. Если все веса целые, то можно прийти к противоречию следующим образом. Сдвинем веса вниз (это ни на что не влияет), чтобы самый лёгкий бублик стал нулевого веса. Теперь давайте делить все веса на два до тех пор, пока не появится бублик нечётного веса. Если отложить бублик с нечётным весом, то сумма весов оставшихся должна быть чётной, иначе невозможно было бы уравновесить чашки весов. Но то же самое верно, если мы отложим бублик с нулевым весом — противоречие.

Это рассуждение работает, если все веса рациональны, ведь единицу измерения можно выбрать так, чтобы все веса стали целыми. Но что, если веса иррациональны? Кажется заманчивым заменить каждый вес на близкое рациональное число и применить приведённое рассуждение. Однако эта идея не срабатывает.

Для иррационального случая применим технику посерьёзней. О вещественных числах $\mathbb{R}$ придётся думать как о векторах над рациональными числами $\mathbb{Q}$; другими словами, будем считать, что каждое вещественное число это сумма некоторого набора чисел, умноженных на рациональные коэффициенты. Пусть V будет подпространством (конечномерным), порождённым всеми весами бубликов. Пусть r — один из элементов базиса V, а q_i — рациональный коэффициент при r у веса i-го бублика, записанного в нашем базисе. Воспользовавшись рассуждением для рациональных весов, получаем, что все q_i обнуляются, но ведь это означает, что r не содержится в V — противоречие.

Между прочим, требование класть по шесть бубликов на чашки весов необходимо. В противном случае можно взять 7 бубликов по 50 грамм и 6 по 70, и эти 13 бубликов будут обладать указанным свойством! Приведённое доказательство разваливается, когда мы сдвигаем все веса; ровно в этот момент мы использовали, что на каждой чашке весов равное число бубликов.

Идея приближения весов всё же срабатывает, но требует дополнительных усилий. Для этого достаточно найти приближения весов m_i дробями $\frac{p_i}{q}$ так, чтобы неравенства $|m_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$, выполнялись для всех i и произвольно малого наперёд заданного $\varepsilon > 0$. Эти оценки следуют из теоремы Дирихле о диофантовых приближениях. Подобным образом была получена вариация решения третьей проблемы Гильберта [66]. — *Прим. ред.*

Юбилейная головоломка

Эта недетская головоломка взята из журнала Emissary [24, Осень 2004]. Она появилась на свет гораздо раньше, в статье английского математика Годфри Х. Харди [32]. Харди нашёл правильный ответ и отметил, что ему неизвестно элементарное доказательство. К счастью, за последующие 100 лет дела изменились.

Ясно, что у Харди не было доступа к компьютеру. Если бы он попытался вычислять $f(x)$ вручную для различных x близких к 1, то ему могло бы показаться, что функция сходится к 1/2. Несмотря на это, предела не существует.

Следующее милое доказательство нашёл Ноам Элкис, гарвардский математик и композитор [75, Problem 8]. Предположим, что предел есть[6]; поскольку $f(x) = x - f(x^2)$, он обязан быть равен 1/2. Но f также удовлетворяет соотношению $f(x) = x - x^2 + f(x^4)$. Так как $x^2 < x$, это означает, что последовательность $f(c)$, $f(\sqrt[4]{c})$, $f(\sqrt[16]{c}), \ldots$ строго возрастает при любом c. Значит, если $f(c) \geqslant 1/2$ для какого-то $c < 1$, то предела нет. И такое число на самом деле есть; например, $f(0{,}995) = 0{,}50088\ldots$

Значения $f(x)$ бегают вокруг 1/2 быстрее и быстрее, туда-сюда по интервалу длины порядка 0,0055. Может эта функция, капризничает? Другая функция $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$ очень похожа на f; она также определена для положительных $x < 1$, и у неё те же проблемы при $x = 1$. Однако, добавив $xg(x)$ к $g(x)$, легко увидеть, что $g(x) = 1/(x+1)$. Поэтому $g(x)$ покорно идёт к 1/2 при $x \to 1$.

Надёжные мигалки

Этот замечательный факт (в другом контексте) был обнаружен лордом Рэлеем [101, раздел 92a] и, вероятно, переоткрыт много раз после, а может, и до. Книга И. Дж. Шёнберга [49] — достойный современный источник. Предупреждение: задача может пригодиться в следующей главе!

Положим, что первая мигалка мигает в моменты времени pt при $t = 0, 1, \ldots$, а вторая в моменты времени qt. Тогда у первой $1/p$ мига-

---

[6] Сам Харди однажды сказал: «*Reductio ad absurdum*, так любимое Евклидом, — одно из лучших оружий математика. Этот ход гораздо изощрённей любой партии в шахматы: шахматист может пожертвовать пешку или даже фигуру, а математик жертвует самой игрой».

ний в минуту, и $1/q$ у второй. Поскольку вместе в среднем они мигают раз в минуту, $1/p + 1/q = 1$.

То, что m-е мигание первой мигалки произошло во временном интервале $[t, t+1]$ при целом t, записывается как $\lfloor pm \rfloor = t$, где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть x; то есть наибольшее целое число, меньшее или равное x. Значит, надо доказать, что каждое натуральное число t единственным образом представляется либо как $\lfloor pm \rfloor$ для некоторого натурального m, либо как $\lfloor qn \rfloor$ для некоторого n, но не и то и другое одновременно! Может ли такое быть правдой?

Давайте покажем, что было ровно $t-1$ миганий с 0 по t. Это совсем просто, ведь первая мигалка мигает $\lfloor t/p \rfloor$ раз в этот период, а вторая — $\lfloor t/q \rfloor$ раз. Поскольку $t/p + t/q = t$ и ни t/p, ни t/q не являются целыми числами, $\lfloor t/p \rfloor + \lfloor t/q \rfloor$ в точности равно $t - 1$.

Поскольку случилось $t-1$ миганий с 0 по t и t миганий с 0 по $t+1$, случилось ровно одно мигание в интервале $[t, t+1]$ — задача решена.

Красные и синие игральные кости

Эту замечательную головоломку сообщил мне Дэвид Кемп из Университета Южной Калифорнии; ему потребовался этот результат в статье по информатике. Похожие результаты нашлись в более ранней статье Перси Диакониса, Рона Грэма и Бернда Штурмфельса [6].

На первый взгляд кажется, что доказательство можно провести подсчётом: ведь можно получить много различных сумм, выбирая разные подмножества красных костей, и то же самое с синими, и поэтому двум наборам придётся пересечься. Но вроде бы это не работает; возьмём к примеру случай $n = 6$, можно выбросить все тройки красными и все четвёрки синими, тогда для каждого цвета есть всего шесть возможных сумм. Поэтому наличие пары равных сумм похоже на везение, хотя в этом случае такая пара есть (четыре красные тройки и три синие четвёрки).

Ещё есть соблазн воспользоваться индукцией по n, но и это, вроде, не работает. Если бы повезло выбросить не более одной n-ки каждым набором костей, то можно было бы удалить по кубику из каждого набора и свести задачу к случаю $n-1$; но как только n-ок оказывается больше, начинаются неприятности.

Что же делать? Иногда, как это ни странно, *проще усложнить*. То есть найти более сильное утверждение, которое всё ещё верно, и надеяться, что его легче доказать. Выставим красные кости в строку, как угодно, и сделаем то же самое с синими костями. Тогда в каждой строке найдётся по *непустому интервалу* с одинаковыми суммами.

Математически говоря, для данных двух последовательностей a_1, $a_2, \ldots, a_n$ и b_1, $b_2, \ldots, b_n$, состоящих из чисел от 1 до n, существуют

$j \leqslant k$ и $s \leqslant t$ такие, что

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = \sum_{i=s}^{t} b_i.$$

Пусть α_m обозначает сумму первых m чисел a_i, а β_m — сумму первых m чисел b_i. Предположим, что $\alpha_n \geqslant \beta_n$ (иначе поменяем a и b ролями). Для данного индекса m, пусть m' будет наибольшим индексом, для которого выполняется $\beta_{m'} \leqslant \alpha_m$.

Можно считать, что все a_i записаны в строку слева направо, а b_i стоят под ними. При этом от каждого a_m проведена стрелка к самому правому b_ℓ, для которого сумма чисел b_i до b_ℓ включительно не превосходит сумму чисел a_i до a_m включительно. (Конечно же $\ell = m'$.) На рисунке 5 записаны две такие строки для $n = 6$, разницы сумм написаны на стрелках.

По построению, разница $\alpha_m - \beta_{m'} \geqslant 0$ не превышает $n - 1$ (если $\alpha_m - \beta_{m'} \geqslant n$, то индекс m' не максимален). Если какая-то из разностей $\alpha_m - \beta_{m'}$ равна 0, то задача решена — в этом случае, взяв $j = s = 1$, $k = m$ и $t = m'$, получим два начальных сегмента с одинаковыми суммами. Если же ни одна из разностей $\alpha_m - \beta_{m'}$ не равна 0, то все n разностей $\alpha_m - \beta_{m'}$ лежат в множестве $\{1, \ldots, n-1\}$ и, значит, две из них равны. Пусть это $\alpha_p - \beta_{p'}$ и $\alpha_q - \beta_{q'}$, тогда

$$\sum_{i=p+1}^{q} a_i = \sum_{i=p'+1}^{q'} b_i.$$

— снова победа.

Ну ведь хитро́ — без возражений!

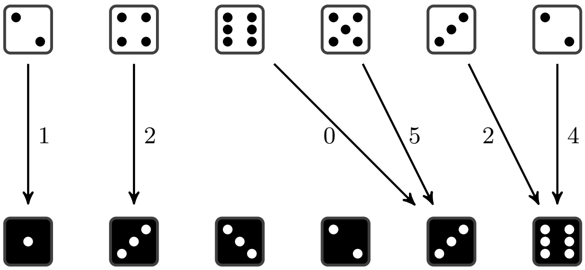


Рис. 5: Две строки из шести кубиков, с соответственными частичными суммами.

На рисунке есть одна пара совпадающих разностей (они равны 2), а именно $p = 2$, $q = 5$, $p' = 2$ и $q' = 6$, и вот соответственные подстроки с равными суммами:

$$a_3 + a_4 + a_5 = 6 + 5 + 3 = 3 + 2 + 3 + 6 = b_3 + b_4 + b_5 + b_6.$$

Ещё на рисунке есть стрелка отмеченная нулём, это даёт другое решение:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 1 + 3 + 3 + 2 + 5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5.$$

У этой идеи есть и другие применения; иногда неожиданные, как, например, следующий результат [95]: *Если* $\tilde{M} \to M$ *— n-листное локально-изометрическое накрытие компактного риманова многообразия M, то* $\operatorname{diam} \tilde{M} \leqslant n \cdot \operatorname{diam} M$, где $\operatorname{diam} M$ обозначает *диаметр* M, то есть максимальное расстояние между парой точек в M. *— Прим. ред.*

Глава 4

Приключения муравья Элиса

> Пойди к муравью, ленивец, посмотри на действия его и будь мудрым.
>
> — Книга Притчей Соломоновых 6:6-8

Муравьи, даже в одномерном мире, привлекают математиков и любителей головоломок. Я приведу десяток головоломок (все авторские, если не сказано обратное) про моего любимого муравья Элиса (см. рис. 6). Каждая головоломка иллюстрирует какую-то математическую идею.

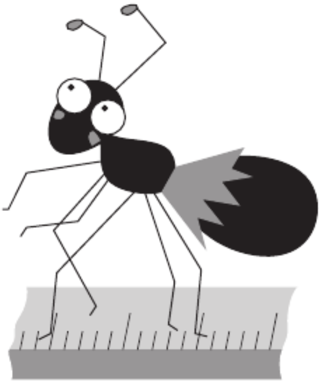


Рис. 6: Муравей Элис, собственной персоной.

Начнём с классической муравьиной головоломки.

Уже упал?

На метровом стержне случайным образом расставлены 25 муравьёв; Элис стоит тринадцатым с западного конца. Каждый муравей повёрнут равновероятно на восток или на запад. Муравьи начинают маршировать (туда, куда смотрят) со скоростью 1 см/с; при встрече, они меняют направление движения. Сколько надо подождать, дабы точно знать, что Элис уже упал?

Элис на окружности

Теперь Элис — один из 24 муравьёв, случайно расставленных на окружности метровой длины. Каждый муравей случайно повёрнут по или против часовой стрелки и движется со скоростью 1 см/с. Как и раньше, при встрече муравьи разворачиваются. Какова вероятность того, что через 100 секунд Элис окажется точно в том же месте, где начал?

Какой конец?

Муравьи опять на стержне. Какова вероятность того, что Элис упадёт с того конца, на который смотрел вначале?

Кто последний?

А какова вероятность того, что Элис упадёт последним?

Число столкновений

Во время всего процесса, каково ожидаемое (то есть среднее) число столкновений муравьёв?

Ущерб для Элиса

Каково ожидаемое число столкновений у самого Элиса?

Страховой рейтинг Элиса

Какова вероятность того, что у Элиса больше столкновений, чем у любого другого муравья?

Насморк

Элис подхватил насморк, который мгновенно передаётся от муравья к муравью при столкновении. Сколько муравьёв заразится в среднем, прежде чем все упадут?

Элис посередине

Теперь новый эксперимент. Элис стоит точно посередине метрового стержня; 12 муравьёв расставлены случайным образом к западу от него, и ещё 12 к востоку. Как и раньше, каждый муравей случайно повёрнут на восток или на запад и движется туда, куда смотрит, со скоростью 1 см/с, меняя направление при встрече лоб в лоб. Однако на этот раз муравьи не падают — на концах стержня они разворачиваются и идут назад. Через 100 секунд муравьи застыли на месте. На каком максимальном расстоянии от своего начального положения может оказаться Элис?

Новое место Элиса

На стержне теперь только 24 муравья: 12 на западной половине смотрят на восток, остальные на восточной половине стержня смотрят на запад. Элис — пятый с западного конца. Муравьи движутся, как обычно, разворачиваясь при столкновениях и падая с концов. Что требуется знать об их начальной конфигурации, чтобы сказать, где очутится Элис через 63 секунды?

Источники и решения

Уже упал?

Насколько мне известно, первая публикация этой замечательной головоломки состоялась в веб-колонке «Math Fun Facts» Фрэнсиса Су из Колледжа Харви Мадда [87]. Фрэнсис припоминает, что услышал её в Европе от некого Феликса Варди, кого он не смог найти. После этого головоломка появилась в журнале Emissary [24, Весна/Осень 2003].

Дэн Амир, бывший ректор Тель-Авивского университета, увидел головоломку в Emissary и показал её тель-авивскому математику Ноге Алону, который привёз головоломку в принстонский Институт перспективных исследований. Я же услышал её от Ави Вигдерсона из этого института в конце 2003 года.

Ключ к этой и следующим головоломкам в том, что если бы муравьи были взаимозаменяемы, то не было без разницы, проходят ли они сквозь друг друга или же разворачиваются при встрече. В этом случае каждый муравей просто идёт прямо и должен упасть в течение 100 секунд. Поскольку через 100 секунд упали все, то и Элис упал.

Если хочется избежать анонимности муравьёв, то можно думать, что каждый из них несёт флажок. При встрече они обмениваются флажками и разворачиваются. Таким образом, каждый муравей всегда несёт один флажок, а при встрече муравьёв флажки проходят мимо друг друга. Если со стержня упали все флажки, то упали и все муравьи.

Если начать с муравья, стоящего на западном конце шеста и смотрящем на восток, то легко сорганизовать дело так, чтоб к 100-й секунде Элис поднёс его флажок к восточному концу. Поэтому 100 секунд ожидания необходимы и достаточны.

Движение муравьёв в этой главе является моделью движения одномерного газа. Соответствующие задачи, возникающие в теории бильярдов, обсуждаются в книжке Г. А. Гальперина и А. Н. Землякова [116].

В последующих задачах автор будет задавать про Элиса и его собратьев вероятностные вопросы, — так почему бы нам не найти среднее время до падения последниго из 25 муравьёв?

Метафора «муравьи проходят друг сквозь друга» помогает и в решении этого вопроса. Действительно, путь каждого флажка является отрезком, а их длины — независимые случайные величины, равномерно распределенные от 0 до 1 метра. При желании можно считать, что все флажки сдвигаются в одну сторону (влево). Нас интересует матожидание наибольшей из этих величин, — оно равно $\frac{25}{26}$.

Докажем это подсчётом. Пусть x_i — длина i-го отрезка, и $X = \max(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{25})$. Тогда $\mathbb{P}(x_i \leqslant x) = x$ и

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(x_1 \leqslant x) \cdots \mathbb{P}(x_{25} \leqslant x) = x^{25}.$$

Плотностью распределения X будет производная этой функции, $p(x) = 25x^{24}$, а ожидаемое значение можно получить интегрированием

$$\int\limits_0^1 xp(x)dx = \int\limits_0^1 25x^{25}dx = \frac{25}{26}.$$

Но можно обойтись и без интегрирования. Муравьи разбивают метровый отрезок на 26 кусков, в среднем каждый из них равен 1/26, поэтому левый конец самого правого отрезка в среднем оказывается в точке 25/26.

В любом случае, среднее время падения последнего муравья составит $\frac{2500}{26} \approx$ $\approx 96{,}15$ секунд. — *Прим. ред.*

Элис на окружности

Как и раньше, будем полагать, что муравьи несут по флажку и обмениваются ими при встрече. Тогда каждый флажок проходит полный круг за заданный период времени, заканчивая там, где начал. При этом циклический порядок муравьёв не меняется, и значит (в большинстве случаев) они подверглись циклическому сдвигу. То есть каждый муравей сдвинулся на определённое число позиций, скажем k, по часовой стрелке. В частности, если Элис вернулся на своё место, то вернулись и все остальные.

Если изначально m муравьёв направлены по часовой стрелке, то в любой момент времени ровно m муравьёв идут по часовой стрелке, и ровно $24-m$ против. Ведь при каждом столкновении муравей, движущийся по часовой стрелке, становится движущимся против часовой стрелки, и наоборот. (Про это можно думать как о сохранении момента импульса!) В любом случае, за время всего эксперимента один муравей сдвинется в среднем на $100(2m-24)/24$ см по часовой стрелке. Получается, что каждый вернётся на своё место тогда и только тогда, когда $2m - 24$ кратно 24; то есть, если $m = 0$, 24 или 12.

Первые два случая (когда все смотрят в одном направлении) имеют незначительную вероятность, но вклад последнего составляет внушительные 16,1180258%.

Чтобы быть совсем точными, у нас $2^{24} = 16\,777\,216$ вариантов выбрать направления, из которых $\binom{24}{0}+\binom{24}{12}+\binom{24}{24} = 1+2\,704\,156+1$ возвращают Элиса на место. Это даёт вероятность $2\,704\,158/16\,777\,216 \sim$ $\sim 0{,}161180377$.

Какой конец?

Заметим, что с восточного конца падают столько же муравьёв, сколько их смотрело на восток вначале. Действительно, число муравьёв, смотрящих на восток, меняется только при падении муравья с восточного конца. (Можно думать об упавших со стержня флажках.) Но в любом случае, если k муравьёв падают с восточного конца, то это происходит с k самыми восточными муравьями, ведь их порядок на стержне не меняется.

Воспользовавшись симметрией, можно предположить, что вначале Элис смотрит на восток. Как мы уже знаем, он упадёт с восточного конца, если вначале на восток смотрело 13 или более муравьёв. Это означает, что 12 или более из оставшихся 24-х смотрят на восток. Вероятность того, что 13 или более из 24-х муравьёв смотрят на восток, такая же как вероятность того, что 11 или менее смотрят на восток, поэтому вероятность события, которое нас интересует, равна половинке плюс половине вероятности того, что ровно 12 из 24-х муравьёв смотрят на восток.

Последняя составляет $\binom{24}{12}/2^{24}$, что даёт 0,161180258, а значит, ответ равен 0,580590129..., то есть чуть больше 58%.

Кто последний?

Можно предположить (снова используя симметрию), что Элис упадёт с восточного конца, а значит и 12 муравьёв к востоку от него сделают то же самое. Если он окажется последним упавшим, то 12 муравьёв к западу от Элиса упадут с западного конца. То есть изначально ровно 12 флажков, а значит, и 12 муравьёв, повёрнуты на запад. Это происходит с вероятностью $\binom{25}{12}/2^{24}$, то есть примерно в 31% случаев.

Однако и в этом случае Элис не обязательно упадёт последним; примерно в половине случаев эта честь достанется его западному соседу. Таким образом, интересующая нас вероятность — около 15,5%.

Но зачем довольствоваться приближением, когда можно найти точный ответ. Время, которое каждый флажок обречён провести на стержне, независимо и равномерно распределено между 0 и 100 секундами. Таким образом, вероятность того, что самый долгоживущий флажок — это один из 13 восточно-направленных флажков, составляет 13/25. Значит, точный ответ $13/25 \times \binom{25}{12}/2^{24}$, и это уже знакомое нам число $\binom{24}{12}/2^{24} \sim 0{,}161180258$.

Число столкновений

Каждый флажок встретится с каждым флажком, расположенным впереди него и направленным к нему. В среднем перед флажком стоит 12 других, и половина из них (в среднем) направлена к нему. Таким образом, флажок сталкивается с шестью другими, и всего $25 \times 6 = 150$ столкновений для всех флажков (в среднем). При этом каждое столкновение сосчитано дважды, то есть ответ 75.

А вот другой, немного более строгий, способ вычисления: Какова вероятность того, что два флажка столкнутся? Независимо от их местоположения, это происходит только если они направлены друг к другу, таким образом, вероятность равна $\frac{1}{4}$. По линейности матожидания число столкновений равно $\binom{25}{2} \times \frac{1}{4} = 25 \times 24/8 = 75$.

Кстати, максимальное число столкновений достигается, если все муравьи направлены к Элису (стоящему в центре). В этом случае все 13 флажков за Элисом, включая его, сталкиваются со всеми 12-ю флажками перед ним — всего $12 \times 13 = 156$ столкновений.

Наименьшее возможное число столкновений, конечно, равно нулю, но это происходит с ничтожной вероятностью $26/2^{25} \sim \sim 0{,}000000774860382$.

Похожая задача предлагалась в 1998 году на 23-м осеннем Турнире городов: По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

Идея с муравьями, проходящими друг сквозь друга, даёт, что максимальное число столкновений n одинаковых шариков в одномерном бильярде не может превысить $\binom{n}{2}$. Забавная связь между π и числом столкновений и числом в некотором

1-мерном бильярде обсуждается в ролике Гранта Сандерсона [12]. Кстати, вопрос об оценке числа столкновений для бильярдов произвольных размерностей был долгое время открыт и решён в самом конце прошлого века [68]. — *Прим. ред.*

Ущерб для Элиса

Легко подсчитать столкновения флажка Элиса. Если Элис изначально смотрит на восток, а в среднем 6 из 12 флажков перед Элисом смотрят на запад, то в среднем флажок Элиса столкнётся с шестью другими.

Но Элис не всегда несёт свой исходный флажок, и похоже, он сталкивается чаще других. Ведь у муравья по 6 столкновений ($75 \times 2/25$), при этом у крайних муравьёв — не больше одного, а значит, у Элиса, стоящего посередине, должно бы быть больше среднего.

Каждый муравей сталкивается только со своими двумя соседями, и чередует их (ведь и его направление чередуется между столкновениями). Последнее столкновение муравья будет с его западным соседом, если он свалится с восточного конца, и наоборот — с его восточным соседом, если он свалится с западного конца.

Предположим, что вначале k муравьёв смотрят на запад. Поскольку их флажки идут к западному концу, то k самых западных муравьёв сваливаются с западного конца. Тот из них, кто вначале смотрел на запад, имеет одинаковое число столкновений с обеих сторон; тот же, кто исходно смотрел на восток, имеет на одно столкновение больше с восточной стороны. Таким образом, число столкновений между j-м (считая с запада) и $(j+1)$-м муравьём равно числу смотрящих на восток муравьёв с 1-го по j-й — при условии, что $j \leqslant k$.

В силу симметрии можно предположить, что k находится между 13 и 25 (а, значит, Элис сваливается с западного конца). Тогда число столкновений между Элисом и его западным соседом равно числу восточно-смотрящих муравьёв к западу от Элиса; обозначим это число x. Значит, общее число столкновений Элиса будет равно $2x$ или $2x+1$ в зависимости от того, смотрел он на запад или восток вначале.

Априорное матожидание $\mathbb{E}[x]$ для x равно 6, так как западнее Элиса 12 муравьёв, каждый из которых может смотреть в любом направлении. Однако мы только что предположили (чёрт!), что больше половины муравьёв смотрят на запад. Но поскольку ожидаемое число муравьёв восточнее Элиса, смотрящих на восток также равно $\mathbb{E}[x]$, то искомое число является общим ожидаемым числом муравьёв, смотрящих на восток, даже учитывая, что они в меньшинстве.

Предположим, что муравьи были расставлены в алфавитном порядке, и последним стоял Яша. Существует $2^{25}/2 = 2^{24}$ способов так направить муравьёв, чтобы получить большинство западных направлений; у $\binom{24}{12}$ из них ровно 12 среди первых 24 муравьёв смотрят на восток. В этих случаях Яше придётся смотреть на запад, а в остальных случаях он равновероятно смотрит на запад или на восток. Следовательно, вероятность того, что Яша смотрит на восток, составляет 0,419409871.

Поскольку вероятность того, что Яша смотрит на восток, не отличается от этой же вероятности для любого другого муравья, то умножив её на 25, получим матожидание числа муравьёв, смотрящих на восток, — примерно 10,4852468. Это и есть среднее число столкновений Элиса.

Страховой рейтинг Элиса

Предположим, что самые западные k муравьёв падают с западного конца, а остальные с восточного. Мы уже видели в предыдущем решении, что если c_i — число столкновений между i-м (считая с западного конца) и $(i+1)$-ым муравьём, то c_i остаётся тем же или увеличивается на 1 до $i = k$; после этого остаётся тем же или уменьшается на 1. В частности, $c_i = c_{i-1}$ ровно тогда, когда i-й муравей смотрит (изначально) в том же направлении, с которого он упадёт.

Число столкновений i-го муравья равно $c_{i-1} + c_i$. Значит, Элис обойдёт всех по числу столкновений, если

$$c_{11} + c_{12} < c_{12} + c_{13} > c_{13} + c_{14},$$

а это значит, что $c_{11} < c_{13}$ и $c_{12} > c_{14}$. Это может произойти только если $c_{11} < c_{12} = c_{13} > c_{14}$, а значит, $k = 12$ или 13, и что Элис смотрит в том направлении, с которого падает, и что оба его соседа смотрят в противоположные стороны от тех концов, с которых они падают. На первый взгляд кажется, что это даёт вероятность

$$\left(\binom{25}{12} + \binom{25}{12}\right)/2^{25} \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \sim 3{,}87452543\%,$$

однако эти события не совсем независимы.

Предположим, что Элис смотрит на восток, его восточный сосед — Шурик, а западный сосед — Юрик. Шурик, как и Элис, будет падать с восточного конца и, следовательно, изначально должен был смотреть на запад (вероятность 1/2). Юрик — один из 12 муравьёв, падающих с западного конца и, следовательно, вначале он смотрел на восток (опять вероятность 1/2). Из оставшихся 22 муравьёв половина должна смотреть на запад, а половина на восток (вероятность $\binom{22}{11}/2^{22}$), поэтому точный ответ составит

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \binom{22}{11}/2^{22} \sim 4{,}20470238\%.$$

Насморк

Эта головоломка чисто комбинаторная, как и многие другие в этой главе. В частности, хоть это и не совсем очевидно, ответ не зависит от длины стержня. Может показаться, что стержень покороче позволит некоторым муравьям выбраться с него до того, как они успеют заразиться. Однако столкновениям муравья приходит конец, как только муравей направился к концу и перед ним нет других — неважно, сколько ему идти: если он не заразился, то уже не заразится.

Наверное, проще всего считать, что заражаются не муравьи, а флажки. Можно предположить, что Элис смотрит на восток. Тогда флажки, направленные на запад впереди него, встретят его флажок и заразятся. В то же время флажки, направленные на восток впереди него, избегнут заражения. Тем временем флажки, направленные на запад, после встречи с флажком Элиса заразят все флажки, направленные на восток позади Элиса, а флажки, направленные на запад позади Элиса, также избегнут заражения.

Поскольку в среднем впереди Элиса находится 6 флажков, направленных на запад, и 6 флажков, направленных на восток, у нас 13 заражённых флажков (включая флажок Элиса), и, таким образом, всего в среднем 13 заражённых муравьёв.

Однако в наше рассуждение закралась ошибка: если впереди Элиса вовсе нет муравьёв, смотрящих на запад, то нет и флажка, который мог бы встретить флажок Элиса и заразить флажки позади него. Такое происходит с вероятностью $1/2^{12}$ и уменьшает ожидаемое число заражённых с 7 (Элис плюс в среднем 6 флажков, направленных на восток, позади него) до 1 (только Элис). Таким образом, правильный ответ будет не 13, а $13 - 6/2^{12} \sim 12{,}9985352$ заражённых муравьёв в среднем.

Элис посередине

Джон Гилфорд из Agilent Technologies показал эту головоломку Стэну Вагону. Однажды осенью 2003 года последний объявил её «задачей недели» колледжа Макалестер. Я узнал о задаче в январе 2004 года от Элвина Берлекэмпа на конференции «Joint Mathematics Meetings» в Финиксе. Именно тогда главный герой этой главы получил своё имя; думаю, что у Элвина на самом деле есть тётя Элис. На меня также повлияло и присутствие на конференции издателя этой книги, Элис Питерс из A K Peters, Ltd.

Как обычно, предполагаем, что каждый муравей несёт флажок, и обмен флажками происходит при встрече. Затем каждый флажок проходит ровно один метр, один раз отскакивая от конца и заканчивая свой путь в точке, симметричной его начальной позиции. В частности, флажок Элиса всегда закончит свой путь снова в центре. Но будет ли Элис его нести?

Несомненно, будет, потому что муравьи остались в исходном порядке. 12 флажков с западной стороны теперь находятся на восточной стороне, и наоборот, так что у Элиса опять 13-й флажок, и сам Элис всё ещё 13-й с конца.

Таким образом, Элис оказывается там же, где начал, а максимальное расстояние, на которое он может отойти от своего начального положения, равно нулю.

Новое место Элиса

Это вариация головоломки, придуманной Ногой Алоном и Одедом Маргалитом из Тель-Авивского университета, о которой сообщил мне Нога.

Пусть $x_1, \ldots, x_{12}$ — начальные позиции 12 муравьёв, обращённых на запад, пронумерованные с запада на восток. Позиции задаются в сантиметрах от западного конца. Положим, что k таково, что флажки, стартовавшие с $x_k, \ldots, x_{12}$, не упадут, и, следовательно, окажутся в позициях $x_k - 63, \ldots, x_{12} - 63$.

Муравьи, конечно же, не меняют порядка на стержне. Поскольку $k-1$ флажок упадёт с западного конца, Элис упадёт в случае если $k > 5$. В противном случае он становится $(6-k)$-м оставшимся муравьём, считая с западного конца, что помещает его в позицию $x_{k+(5-k)} - 63 = x_5 - 63$. Таким образом, вам нужно знать только позицию 12-го муравья восточнее Элиса, то есть 17-го от западного конца. Элис окажется на 63 см западнее этой точки; ну а если эта точка уже находится менее чем в 63 см от западного конца, то Элис свалится.

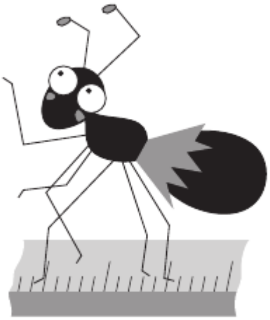


Рис. 7: Элис прощается.

Глава 5

Многословное отступление: Игра ХОМО

Рассматривайте эту главу как антракт, — перерыв, не связанный с математикой. Однако многие математики любят игры со словами, и (по моему личному опыту) эту в особенности.

Возможно, вы слышали такую загадку: какое английское слово содержит четыре последовательных буквы, которые являются последовательными буквами алфавита? Ответ: undeRSTUdy. Вдохновившись этой и другими словесными головоломками, я и ещё трое старшеклассников на летней программе Национального научного фонда 1963-го года начали обстреливать друг друга комбинациями букв, требуя найти слово, содержащее эту комбинацию[1].

Между буквами, входящими в комбинацию, не должно быть других букв. Пример: **ТСЧ** = оТСЧёт, **МПЦ** = презуМПЦия. В некоторых загаданных комбинациях были всего две буквы, например, **ЦД** = = плаЦДарм, **ГШ** = флаГШток (или другое заимствованное из немецкого языка слово, зинГШпиль). Начните с **ОДС** (подсказка: здесь более одного возможного ответа, но один лежит совсем на поверхности).

Удвоенные буквы (**ЧЧ**, **ГГ** и даже **АА**) могут быть интересными, но самые сложные загадки, которые мы отыскали, — это комбинации из трёх или четырёх букв. Мы назвали игру в честь комбинации **ХОМО** = муХОМОр[2]. Конечно, ХОМО, несомненно, изобретали и переизобретали тысячи раз, и вы не обязаны использовать наше название — но всё равно полезно как-то её назвать.

---

[1] Здесь и далее автор, разумеется, «обстреливает» читателя английскими примерами. Мы постарались, сохранив дух главы, насытить её аналогичными русскими примерами, и даже название игре дали своё собственное. — *Прим. ред.*

[2] В оригинале было название **HIPE** от arcHIPElago.

При придумывании заданий в ХОМО есть очень естественная цель — искусно замаскировать отгадку; ещё приятнее, если отгадка окажется распространённым словом, которое, тем не менее, тяжело найти.

Например, **ОТОЙ** решается одним из самых распространённых слов, но сможете ли вы его найти? И что за радость поставить приятеля в тупик, задав ему, например **СОБЬ**, а потом ещё сказать, что нужно добавить всего одну букву!

В идеале хочется, чтоб решение было единственным (среди нарицательных существительных, имена собственные в этой игре не используются), но это не является строго обязательным требованием, если вы играете с друзьями.

ХОМО-загадки из более чем четырёх букв редко бывают интересными, потому что много известных букв подряд даёт уж очень много информации. Так что мы ограничились буквосочетаниями из двух, трёх и четырёх букв. Хотя, например, **УКВОС** тоже вполне неплохая загадка, не так ли?

В общем, попробуйте свои силы.

Загадки из двух букв:

ГБ
ГЗ
ГШ
ЖЧ
ЖЮ
ЗФ
ЙГ
ЙЯ
КП
КФ
ЛФ
МД
МТ
ПД
СЖ
ТЖ
ФЧ
ХХ
ХЪ
ЦН
ЧЧ
ШЦ
ЩМ
ЫИ
ЬЭ
ЮИ

Ответы:

реГБи
шлаГБаум
зиГЗаг
флаГШток
зинГШпиль
муЖЧина
ЖЮри
фиЗФак
таЙГа
саЙГак
маЙЯ
папаЙЯ
секвоЙЯ
параноЙЯ
аллилуЙЯ
блоКПост
роКФор
саЛФетка
шаЛФей
фиЛФак
аЛФавит
заМДекана
лоМТик
драМТеатр
экспроМТ
проМТовары

креПДешин
СЖигание
СЖатие
СЖимаемость
оТЖим
оТЖиг
борТЖурнал
шкаФЧик
треХХвостка
сверХЪестественность
спеЦНаз
каприЧЧио
мыШЦа
веЩМешок
вЫИгрыш
белЬЭтаж
сЮИта
флЮИд
трЮИзм

Загадки из трёх букв:

БСЦ
ДДВ
ДМН
ДСН
ДЧУ
ИЭД
ЛГЕ
МБД
МРУ
НКН
НТВ
НУУ
ОЯБ
ПФР
РАЭ
РГК
РГС
РКК
РРУ
РХЗ
САЭ
ТАЭ
ТИЭ
ТСР
ТСЧ
ТФИ
УСФ
УЧЛ
ФМЕ
ФМИ
ХГР
ХУГ
ХЧЛ
ЦШК
ЯТЫ

Ответы:

аБСЦисса
преДДВерие
поДМНожество
поДСНежник
преДЧУвствие
полИЭДр
аЛГЕбра
ляМБДа
изуМРУд
баНКНота
глиНТВейн
контиНУУм
нОЯБрь
грейПФРут
тетРАЭдр
оРГКомитет
оРГСтекло
аРККосеканс
аРККотангенс
аРККосинус
коРРУпция
свеРХЗадача
гекСАЭдр
икоСАЭдр
окТАЭдр
пенТАЭдр
гепТАЭдр
пяТИЭтажка
отсрочка
оТСЧёт
мульТФИльм
полУСФера
двУЧЛен
ариФМЕтика
логариФМИрование
треХГРанник

четыреХГРанник
четыреХУГольник
треХЧЛен
спеЦШКола

свЯТЫня

Загадки из четырёх букв

АТЫН
АЧЕЛ
ВАБР
ГОУГ
ГРИР
ДМНО
ЕПИП
ЗОЦИ
ИМАД
ИФМИ
ИЩЕТ
КАЧО
ЛЕЛЕ
ЛУОК
МАША
НАЧО
НЕРЛ
НСОИ
РКТА
СС-Р
УШЛА
ФМОМ
ФУРК
ХУГО
ЯГИН

Ответы:

лАТЫНь
кАЧЕЛи
шВАБРа
мноГОУГольник
интеГРИРование
поДМНОжество
параллелЕПИПед
бенЗОЦИстерна
прИМАДонна
логарИФМИрование
нИЩЕТа
сКАЧОк
паралЛЕЛЕпипед
поЛУОКружность
маМАША
зНАЧОк
пиоНЕРЛагерь
тангеНСОИда
аРКТАнгенс
преСС-Релиз
бУШЛАт
ариФМОМетр
биФУРКация
четыреХУГОльник
кнЯГИНя

Глава 6

Двумерность и трёхмерность

> Математики давно считают унизительным заниматься задачами элементарной геометрии в размерностях два и три, несмотря на то, что как раз такая математика имеет практическую ценность.
>
> — Бранко Грюнбаум и Джеффри Шепард,
> Handbook of Applicable Mathematics

Для многих из нас первое знакомство с теоремами и доказательствами происходит в старших классах школы при изучении евклидовой плоскости. Однако сейчас вам придётся решать задачи, далёкие от «Начал» Евклида; они проверят, насколько глубоко вы проникли в мир двух и трёх измерений.

Монеты на столе

На прямоугольном столе лежит сотня идентичных монет так, что нельзя добавить ещё монету без налегания. (Монета может выступать за край, главное, чтобы её центр находился на столе.) Докажите, что четырёхсот таких монет достаточно, чтобы покрыть весь стол! (Теперь монеты могут и пересекаться и выступать за край стола).

Примечание. Предполагается, что каждая монета есть круг пренебрежимо малой толщины.

Четыре точки с двумя расстояниями

Опишите все такие расположения четырёх точек на плоскости, что между их парами есть только два различных расстояния.

Преступница и собака

Преступницу держат на круглом поле, окружённом забором. Её охраняет свирепая собака, способная бегать вчетверо быстрее преступницы, но приученная бегать только вдоль забора. Если преступница подбежит к забору в месте, где собаки нет, то мгновенно его перелезет и сбежит. Но сможет ли она добраться до какой-то точки забора быстрее собаки?

Теннисная загадка

Теннисный мяч в результате подачи попал *вне поля*, но все линейные судьи молчат. Где приземлился мяч?

Примечания. На теннисных турнирах каждый линейный судья отвечает за одну граничную линию и объявляет «аут», если мяч не задел этой линии и приземляется на неправильной стороне. Досадно, но возможен удар вне поля, при котором все линейные судьи промолчат. Вопрос в том, что это за удар.

Двойное покрытие прямыми

Два полных набора параллельных прямых покрывают плоскость так, что каждая точка лежит ровно на двух прямых. А делается ли такое иным способом? То есть можно ли покрыть каждую точку плоскости ровно дважды, используя набор прямых с более чем двумя разными направлениями?

Примечания. К примеру, можно попробовать взять все прямые, касающиеся некоторой окружности. Это отлично работает за пределами окружности, но точки на окружности покрыты лишь раз, а внутренние вовсе не покрыты.

Подошло время повысить размерность до трёх.

Кривая на сфере

Докажите, что если замкнутая кривая на единичной сфере короче 2π, то она содержится в какой-то полусфере.

Примечания. Похоже на правду, ведь периметр большого круга (границы полусферы) равен 2π. Но как это доказать?

Лазерная пушка

Вы находитесь в большой прямоугольной комнате с зеркальными стенами. В другом месте этой комнаты стоит ваш враг с лазерной пушкой. Вы и ваш враг — идеальные точки. Единственный способ защититься от лазера — расставить в комнате телохранителей (тоже точки), чтобы они поглощали лазерные лучи. Сколько телохранителей необходимо для защиты от всех возможных выстрелов?

Примечание. «Бесконечно много» — приемлемый ответ, если, конечно, он верен!

Мы завершаем главу замечательной задачей, применимой в обычной жизни. Часто для определения стоимости пересылки прямоугольного ящика *складывают* его длину, ширину и высоту, и находят эту сумму в таблице; чем больше сумма, тем выше стоимость. Можно ли сэкономить на отправке, засунув какой-то ящик в ящик побольше, но подешевле?

Ящик в ящике

Допустим, что стоимость прямоугольного ящика равна сумме его длины, ширины и высоты. Докажите или опровергните, что невозможно уместить один ящик в другой, более дешёвый.

Примечания. Очевидно, что длинный тонкий ящик можно засунуть вдоль диагонали в более короткий, но, этот ящик придётся сделать существенно шире и/или выше. В двумерном случае, то есть для прямоугольников на плоскости, можно воспользоваться неравенством треугольника и увидеть, что аналогичная экономия невозможна. Но вроде бы этот метод не работает в трёхмерном пространстве.

Источники и решения

Монеты на столе

Эта интересная головоломка досталась мне от специалиста по информатике Гая Киндлера во время чудесного года, проведённого нами в принстонском Институте перспективных исследований.

Начнём с того, что если удвоить радиус каждой монеты (скажем, с 1 до 2), то как видно на рисунках 8 и 9, покроется весь стол. Почему? Ну если какая-то точка P не покрыта, то она лежит на расстоянии 2 или более от центра любой монеты, так что к исходной конфигурации можно было добавить (маленькую) монету, с центром в P.

Дело было бы сделано, если бы большая монета покрывалась четырьмя маленькими. Однако это не так.

Тем не менее нужным свойством обладает *сам* прямоугольник — он разбивается на четыре уменьшенные копии самого себя. Итак, сожмём вдвое всю картинку (рис. 9, где большие монеты покрывают

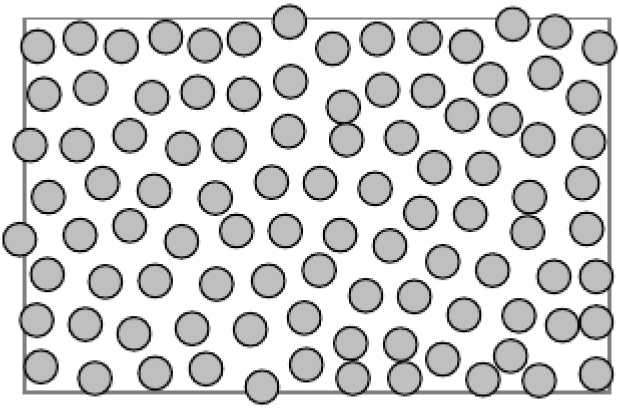


Рис. 8: Нельзя добавить новую монету без перекрытия со старыми.

весь стол) и воспользуемся четырьмя её копиями (как на рис. 10). Так мы покроем весь исходный стол!

Это красивое рассуждение, выглядит грубым, однако (как ни странно) оно даёт наилучшую оценку — замените 4 на что-то меньшее, скажем, 3,99, и полученное утверждение перестанет быть верным.

Чтобы это понять, рассмотрим предельный случай, когда стол очень большой, а монет так много, что граничные эффекты пренебрежимо малы. Заменим стол на пол ванной комнаты, покрытый мо-

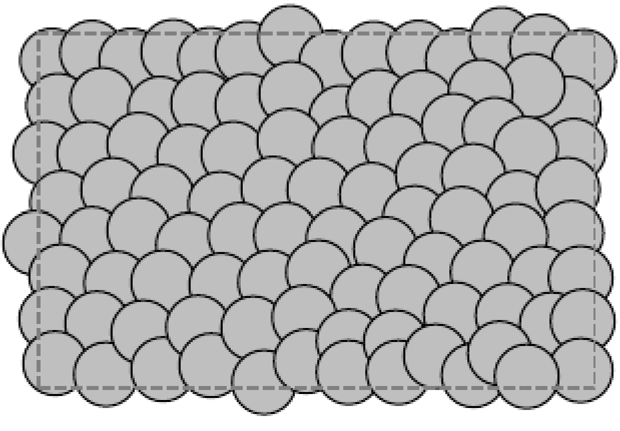


Рис. 9: Стол покрыт удвоенными монетами.

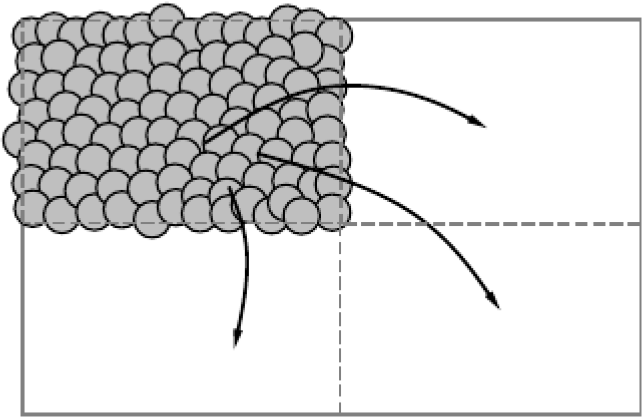


Рис. 10: Четыре уменьшенные стола покрывают стол целиком.

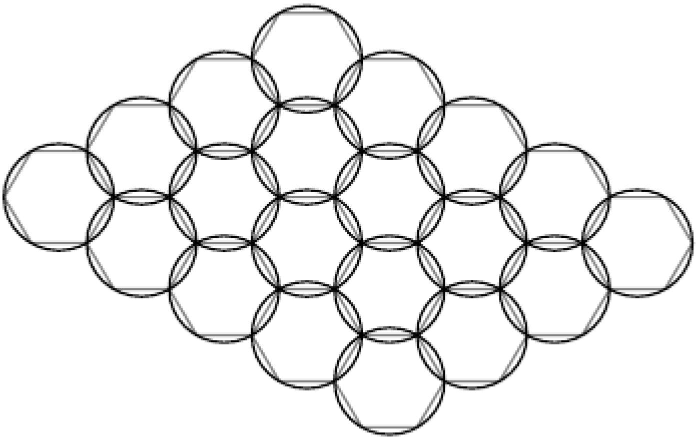


Рис. 11: Покрытие описанными кругами правильных шестиугольников.

заикой в виде пчелиных сот; то есть каждая плитка это правильный шестиугольник диаметра (скажем) 2. Сама плитка имеет площадь $6 \times \sqrt{3}/4 = 3 \times \sqrt{3}/2$, ведь каждая плитка разбивается на шесть равносторонних треугольников со стороной 1 и, значит, площади $\sqrt{3}/4$.

Весь пол можно покрыть, положив на каждую плитку монету, граничная окружность которой описана вокруг плитки (см. рис. 11).

Тогда каждая монета имеет радиус 1 и, следовательно, площадь π.

Если A — площадь всего пола, то, игнорируя граничные эффекты, общая площадь монет будет $\pi A/(3\sqrt{3}/2) \sim 1{,}2092 \times A$.

Теперь разберёмся, насколько разрежённо можно расположить монеты на полу, чтобы нельзя было добавить новую монету без перекрытия со старыми. Воспользуемся той же плиткой, но на этот раз покроем только треть плиток (рис. 12). В середину каждой такой плитки положим по монете с радиусом чуть больше радиуса вписанной в шестиугольник окружности. Это не позволит добавлять монет.

Какова же площадь всех этих монет?

Радиус монеты чуть больше высоты одного из шести равносторонних треугольников, составляющих шестиугольник — а именно, $\sqrt{3}/2$. Следовательно, площадь монеты чуть превысит $\pi \times (\sqrt{3}/2)^2 = 3\pi/4$.

Отсюда следует, что общую площадь монет на полу можно сделать произвольно близкой к $(1/3) \times (3\pi/4) \times A/(3\sqrt{3}/2) = \pi A/(6\sqrt{3}) \sim$ $\sim 0{,}3023 \times A$, а это ровно четверть того, что было раньше!

Мы не только решили головоломку, но и доказали пару экстремальных свойства кругов.

Первое утверждает, что нет лучшего способа покрыть плоскость единичными кругами, чем описать круги вокруг плиток шестиугольной мозаики, как мы сделали выше. Второе, — что нет более разреженной конфигурации монет *без* возможности добавить лишнюю, чем помещать на каждой третьей плитке круг, чуть больший, чем вписанный, опять же, как мы проделали выше.

Если вам эти свойства очевидны, то подумайте о следующем ещё более очевидном утверждении: *самая плотная упаковка единичных кругов на плоскости получается из кругов, вписанных в шестиугольники пчелиных сот.* Это было доказано в 1953 году видным венгер-

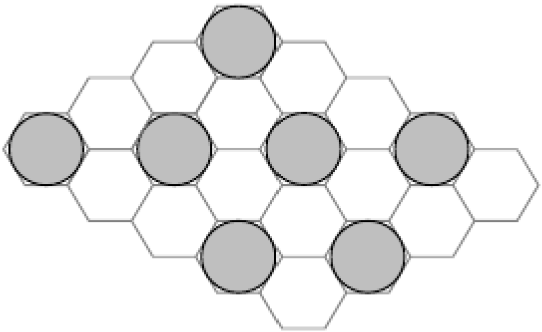


Рис. 12: Разряженная конфигурация.

ским геометром Ласло Фейешем Тотом (1915—2005)!

Доказательства всех трёх последних утверждений приводятся в замечательной книжке Фейеша Тота [109, III §3]. Приведённое решение на примере двумерного случая иллюстрируют связь между двумя фундаментальными задачами геометрии чисел — проблемой упаковки шаров и задачей о покрытии пространства перекрывающимися шарами. Больше по этой теме можно найти в книге Джона Конвея и Нила Слоэна [70].

У задачи про монеты есть две вариации. Они отличаются тем, что связывают между собой упаковки (в первом случае) и покрытия (во втором) кругами разных радиусов. Если на прямоугольный противень помещается 100 печений радиуса 2, то на такой же противень поместится и 400 печений радиуса 1. Если прямоугольник можно покрыть (без просветов, но разрешается вылезать за край) 100 кругами радиуса 2, то его можно покрыть и 400-ми кругами радиуса 1. — *Прим. ред.*

Четыре точки с двумя расстояниями

Эта замечательная головоломка годится для болтовни за обедом; она была включена в раздел головоломок журнала «Pi Mu Epsilon» [8, 1985 год, задача 3a, предложена Ш. Дж. Эйнхорном и И. Дж. Шёнбергом]. Позже появилась на первой странице книги Ноба Ёсигахары [59], где была приписана Дику Хессу.

Я заметил, что очень мало людей находят все шесть конфигураций; почти каждый упирается в какое-то препятствие или совершает ошибку, пропуская одну из них. При этом непредсказуемо, *какую* именно; один из испытуемых упустил квадрат!

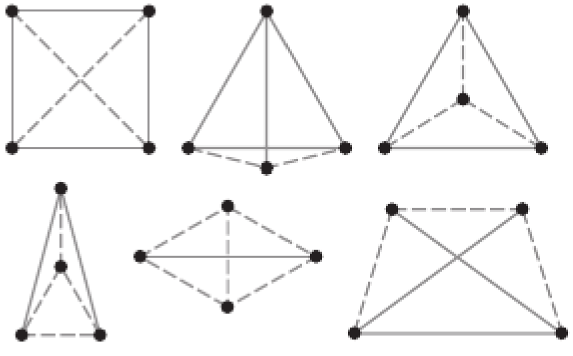


Рис. 13: Все шесть вариантов.

Все конфигурации показаны на рис. 13. Последняя из них (трапеция) образована четырьмя вершинами правильного пятиугольника.

Преступница и собака

Моё внимание к этой интересной задаче привлёк Хулио Дженовезе; она появилась в книге Мартина Гарднера [18].

Будем считать, что круг имеет единичный радиус. Представим, что преступница бегает в меньшем концентрическом круге радиуса r, где $r < \frac{1}{4}$. Тогда она сможет попасть в точку круга, которая находится на максимальном расстоянии от собаки (см. рис. 14). Это потому, что длина окружности меньшего круга составляет меньше четверти длины забора.

Если r достаточно близко к $\frac{1}{4}$, то преступница может бежать прямо к забору. Это расстояние чуть больше чем $3/4$, а собаке придётся пробежать пол окружности поля, то есть π. Так как $\pi > 3$, это более чем в четыре раза превысит путь преступницы.

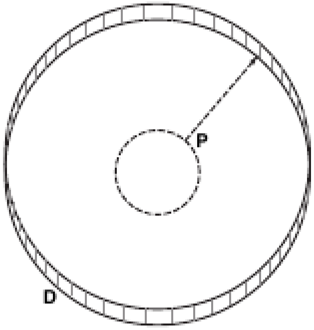


Рис. 14: Точка, из которой преступница бежит к забору.

Преимущество собаки в скорости можно увеличить с 4 до 4,6033388; при этом лучшая стратегия обеих сторон приведёт к тому, что они финишируют одновременно. Больше информации об этой задаче можно найти на сайте головоломок IBM «Ponder This» за [98, май 2001].

Теннисная загадка

На этот недочёт указал мне Дик Хесс — знаток головоломок и тенниса. На рис. 15 показано место приземления мяча; и это ошибка при подаче — мяч не задевает «коробку» подачи, но при этом задевает две линии линейных судей. Использование электронных систем контроля задней линии не помогает. Интересно бы выяснить, часто ли такая подача ошибочно засчитывается.

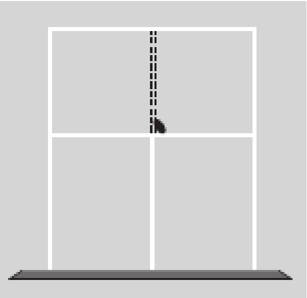


Рис. 15: Кто должен увидеть эту ошибку при подаче?

Двойное покрытие прямыми

Некоторых читателей это разочарует, но ответ да (если принять аксиому выбора), и есть уйма способов это сделать. Однако доказательство требует трансфинитной индукции (!), не оставляя места геометрии. Задачу (и её решение) мне подбросил физик Сеня Шлосман, который не знает её происхождения.

Данное решение мне нравится как пример простого применения мощного инструмента. Идея в следующем: мы начинаем с трёх пересекающихся прямых, так что у нас уже есть три направления. Пусть κ — наименьший ординал мощности континуум (то же, что множество точек на прямой, точек на плоскости или углов на плоскости). Посмотрим на множество ординалов ниже κ. Каждый из них — либо последовательный ординал (как, например, 17, 188 или $\omega+1$), либо предельный ординал (как, например, ω, первый бесконечный ординал); у каждого мощность строго меньше континуума. Мощность ординалов ниже κ — континуум, поэтому этими ординалами можно пометить все точки плоскости. Теперь точки плоскости образуют *вполне упорядоченное* множество, то бишь каждое непустое подмножество содержит точку с минимальной меткой.

Приступим к трансфинитной индукции. Предположим, у нас есть конфигурация прямых, покрывающая все точки множества точек S с метками меньше σ ровно дважды, точка P с меткой σ покрыта менее двух раз, и ни одна из точек плоскости не покрыта три раза или более. Напомним, что σ — ординал, меньший κ. Можно считать, что каждая прямая в конфигурации проходит через одну из точек множества S, и, значит, прямых в конфигурации меньше чем континуум. Значит, и мощность всех двойных точек конфигурации меньше континуума. Так как множество направлений прямых континуально, через точку P можно провести прямую, не проходящую через двойные точки, то есть её можно добавить к нашей конфигурации. Если P всё ещё не двойная, то придётся повторить ещё один раз.

Похоже на обман? Ну да; наше построение совсем не конструктивно. Означает ли это, что *не существует* хорошего построения двойного покрытия? Нет, но я такой пример найти не смог; не смог и Сеня.

Всего есть $2^{\mathfrak{c}}$ решений — столько даёт приведённое решение, а больше быть не может, поскольку $2^{\mathfrak{c}}$ это мощность всех подмножеств прямых на плоскости. — *Прим. ред.*

Кривая на сфере

Эту головоломку мне подкинул физик Сеня Шлосман, который услышал её от Алекса Красносельского. Предложенное Сеней решение следующее.

Выберем любую точку P на кривой, пройдём вдоль кривой половину её длины до точки Q. Пусть N будет точкой сферы на полпути между P и Q. (Будем думать, что N это северный полюс; эта точка определена однозначно, поскольку сферическое расстояние $d(P,Q)$ от P до Q меньше π.) Полюс N определяет экватор, и если кривая полностью находится в северном полушарии, то дело сделано. В противном случае кривая пересечёт экватор. Пусть E — одна из точек пересечения. Тогда $d(E,P)+d(E,Q)=\pi$, ведь если отразить P в экваториальной плоскости, то полученная точка P' будет антиподом Q; и, следовательно, $d(E,P')+d(E,Q)=\pi$.

Однако для любой точки X на кривой сумма $d(P,X)+d(X,Q)$ меньше π, и это приводит к противоречию.

Омер Ангел из Университета Британской Колумбии предложил другое доказательство, менее элементарное, но все же изящное и познавательное. Пусть C — наша замкнутая кривая, а $\hat{C}$ — её выпуклая оболочка, то бишь наименьшее выпуклое множество, содержащее C. Если C не содержится в полусфере, то $\hat{C}$ содержит начало координат; в противном случае 0 можно было бы отрезать от $\hat{C}$ плоскостью. Таким образом, по теореме Каратеодори (смотри ниже), существует набор из четырёх точек на C, выпуклая комбинация которых даёт 0. Другими словами, тетраэдр, вершинами которого являются эти четыре точки, содержит начало координат.

Давайте теперь двигать эти точки непрерывно друг к другу вдоль кривой. Когда точки слились вместе, их тетраэдр уже не содержит начало координат, так что где-то по дороге начало координат оказалось на одной из граней тетраэдра. Три точки, определяющие эту грань, лежат на большом круге, и самый короткий маршрут между любой из пар идёт по этому экватору, не проходя через оставшуюся третью точку. Следовательно, сумма попарных расстояний трёх точек равна 2π, что невозможно, так как все они лежат на C.

Математик Константин Каратеодори (1873—1950) доказал множество красивых теорем. Вот одна из наиболее известных: *если v содержится в выпуклой оболочке некоторых точек d-мерного пространства, то v лежит и в выпуклой оболочке подмножества из не более чем $d + 1$ из этих точек.*

Чтобы это доказать, отметим, что принадлежность точки выпуклой оболочке множества эквивалентна тому, что точка представима как конечная линейная комбинация точек этого множества с положительными коэффициентами, сумма которых равна 1. Пусть $k > d+1$, и положим $v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$, где $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$ и $a_i > 0$ при любом i.

Поскольку есть более чем d векторов $v_1 - v_i$ при $i = 2, \ldots, k$, эти векторы линейно зависимы; следовательно, существуют коэффициенты b_i, не все равные нулю, такие что $\sum_{i=2}^{k} b_i(v_1 - v_i) = 0$. Положим $b_1 = -\sum_{i=2}^{k} b_i$; тогда $\sum_{i=1}^{k} b_i v_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{k} b_i = 0$, но $b_i \neq 0$ для какого-то i. Таким образом, $v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i - r \sum_{i=1}^{k} b_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i - r b_i) v_i$ для любого вещественного r. В частности, если r — наименьшее отношение a_i/b_i при $b_i > 0$ (пусть оно достигается, скажем, при $i = j$), то r положительно, и $a_i - r b_i \geqslant 0$ для всех i. Таким образом, v представимо в виде выпуклой комбинации, по крайней мере, один из коэффициентов которой (а именно, $a_j - r b_j$) равен нулю, так что v находится в выпуклой комбинации не более чем $k - 1$ точек. Остаётся повторять процесс, пока число k не уменьшимся до $d + 1$.

Головоломка использовалась как промежуточный результат [77, Satz I′] в доказательстве Вернера Фенхеля, что *любая замкнутая кривая в пространстве обязана повернуть хотя бы на полный оборот.* Его доказательство почти совпадает со вторым из приведённых выше. (Кстати, согласно теореме Фари — Милнора, *любой узел обязан повернуть хотя бы на два полных оборота*; обзор шести различных доказательств этой теоремы представлен в [97].)

Этот результат и его обобщения востребованы в дифференциальной геометрии. По следам одной беседы за обедом 1997 года, Боб Фут собрал из различных его доказательств короткую заметку. Первое из доказательств в его коллекции практически совпадает с первым приведённым здесь; его нашли Майк Керкхов, Дан Клинг и сам Боб Фут. Улучшение этого доказательства принадлежит Стефани Александер, оно, между прочим, обсуждается в ютубовском ролике Серхио Заморы [115]. Ещё одно замечательное доказательство легко строится на основе сферической формулы Крофтона — *длина сферической кривой равна π домноженному на среднее число пересечений кривой с экваторами.* И ещё одно интересное уточнение этой задачи можно разглядеть в так называемой *теореме мажоризации Решетняка* [102]. — *Прим. ред.*

Лазерная пушка

На эту головоломку мне указал Джулио Дженовезе, тот узнал её от Энрико Ле Донне; они отследили её историю до Ленинградской математической олимпиады 1990 года [9]. Удивительно, но достаточно 16 охранников!

Похоже, что именно эта головоломка вызвала цепную реакцию исследований *вопросов безопасности*, то есть в каких комнатах, кроме прямоугольных, достаточно конечного числа охранников. Вопрос ещё не полностью решён даже для многоугольников с рациональными углами, но из работы Евгения Гуткина [29] следует, что среди правильных многоугольников безопасны только равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник.

Вернёмся к головоломке — как же её решить? Будем считать, что комната — это прямоугольник, вы находитесь в точке P, а пушка — в точке Q. Замостим плоскость копиями комнаты, последовательно отражая комнату относительно её стен. В каждую копию поместим копию пушки (рис. 16).

На полученной картинке каждый выстрел представляется отрезком от какой-то копии точки Q до точки P. Каждый раз, когда такая линия пересекает границу между прямоугольниками, лазерный луч отражается от стенки. На рисунке показана одна из таких (пунктирных) линий; сплошная линия — это путь соответствующего луча.

Нам надо перехватить любой выстрел. Для этого сделаем копию плоскости, показанной на рис. 16, прикрепим её к плоскости в точке P, и уменьшим эту копию вдвое по вертикали и горизонтали. Копии точки Q на уменьшенной плоскости будут подходящими позициями охранников. Они выполняют свою задачу, ведь они лежат ровно на полути между копиями пушки исходного замощения и вами.

На рис. 17 уменьшенная копия изображена серым цветом, и указаны некоторые воображаемые пути лазера; можно видеть, что на полпути они проходят через соответствующие более мелкие точки се-

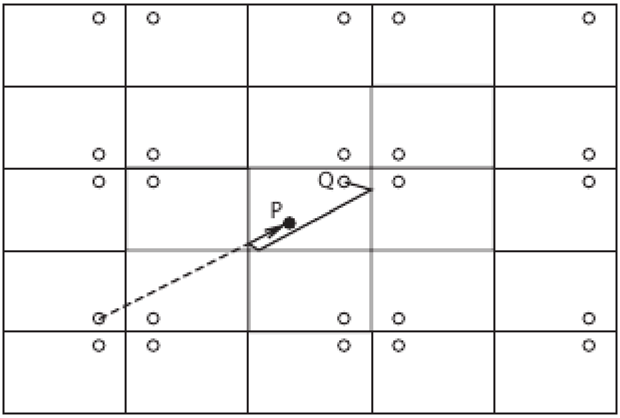


Рис. 16: Замощение плоскости отражёнными копиями комнаты.

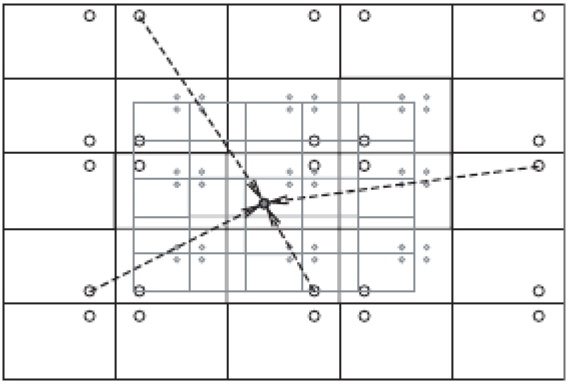


Рис. 17: Уменьшенная копия плоскости с точкой P наложенной на себя.

рой сетки.

Конечно, таких точек бесконечно много, но мы утверждаем, что все они являются отражениями набора из 16 точек в исходной комнате. Четыре из них уже находятся в исходной комнате. Четыре точки в комнате слева от исходной можно отразить обратно, получив четыре новые точки; аналогично для комнаты выше исходной. Наконец, четыре точки в комнате *выше и слева* от исходной комнаты могут быть отражены дважды, и так мы получим последние четыре точки в исходной комнате. На рис. 18 к исходной серой четвёрке точек до-

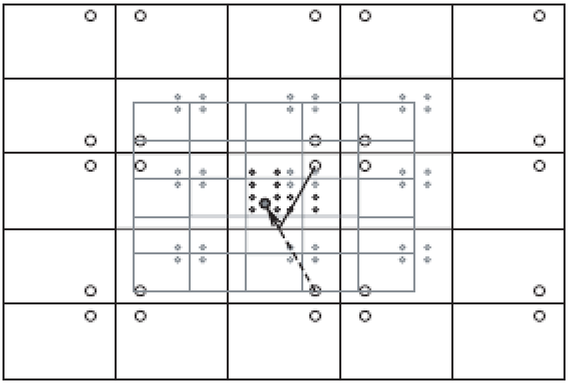


Рис. 18: Позиции телохранителей в исходном прямоугольнике.

бавлены двенадцать новых чёрных, а также показан воображаемый путь лазера и его настоящий путь, проходящий через одну из новых точек.

Поскольку каждая комната выглядит точно так же, как и исходная, или одна из трёх других, которые мы только что рассмотрели, все позиции охранников в плоскости являются отражениями описанных шестнадцати точек в исходной комнате. Поскольку каждая линия от копии Q проходит через отражённого охранника, фактический выстрел попадает в поставленного охранника на полпути (если не раньше) и поглощается.

Если выбрать местоположения точек P и Q специальным образом, то позиции некоторых охранников совпадут, но в общем случае потребуется полный набор из шестнадцати.

Возможно, проще разобрать сначала задачу на плоском торе (то есть в прямоугольнике со склеенными противоположными сторонами). Убедиться, что в этом случае достаточно четырёх охранников, а потом свести задачу про прямоугольник к четырём задачам о торе.

Если вам понравилась задача, попробуйте расставить конечное число охранников произвольно близко к точке P. — *Прим. ред.*

Ящик в ящике

Эту замечательную головоломку мне подкинул Энтони Квас (Университет Виктории), который услышал её и приведённое ниже решение от Исаака Корнфельда, профессора Северо-Западного университета (Иллинойс). Корнфельд узнал о ней много лет назад в Москве.

Пусть B_ε — ε-окрестность параллелепипеда B; другими словами, это множество всех точек в пространстве, находящихся на расстоянии ε или меньше от какой-либо точки B. Если B имеет размеры $a \times b \times c$, то множество B_ε выглядит как параллелепипед $(a+2\varepsilon) \times (b+2\varepsilon) \times (c+2\varepsilon)$ с закруглёнными краями и углами. Точный объём B_ε будет равен abc (объем B) плюс $2ab\varepsilon + 2ac\varepsilon + 2bc\varepsilon$ (объем пластин, добавленных к шести граням) плюс $4a\pi\varepsilon^2/4+4b\pi\varepsilon^2/4+4c\pi\varepsilon^2/4$ (объем 12-ти штапиков вдоль рёбер — каждый с поперечным сечением в виде четверти круга), плюс $4\pi\varepsilon^3/3$, так как восемь осьмушек, добавленных к углам, образуют целый шар. Всего получим

$$V(B_\varepsilon) = \tfrac{4}{3}\pi\varepsilon^3 + (a+b+c)\pi\varepsilon^2 + 2(ab+bc+ca)\varepsilon + abc.$$

Изобразить B_ε довольно сложно, поэтому мы спустимся на плоскость; на рис. 19, показано как выглядит B_ε для прямоугольника B размера $a \times b$. Формула для площади B_ε будет:

$$S(B_\varepsilon) = \pi\varepsilon^2 + 2(a+b)\varepsilon + ab.$$

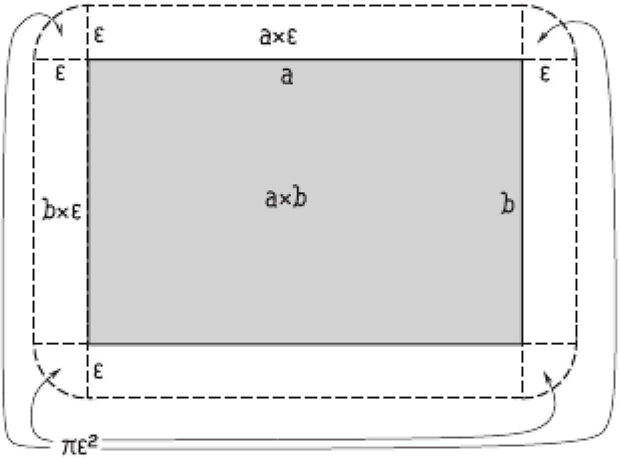


Рис. 19: ε-окрестность прямоугольник $a \times b$.

Вернёмся в трёхмерное пространство. Если ящик A (с размерами, скажем, $a' \times b' \times c'$) находится внутри ящика B, то A_ε также находится внутри B_ε для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $V(A_\varepsilon) < V(B_\varepsilon)$. Однако, если выбрать *огромное* ε, то доминирующим членом в разнице их объёмов станет

$$(a+b+c)\pi\varepsilon^2 - (a'+b'+c')\pi\varepsilon^2$$

Этот член обязан быть неотрицательным, значит, ящик B дороже чем A.

Эта задача появлялась на Турнире городов 1998 года (5-я задача основного варианта). Предложенное там решение было другим. Оно принадлежало Андрею Сторожеву, выходцу из России, который сейчас работает в Австралийском Математическом Фонде. Решение Сторожева основано на наблюдении, что площадь поверхности внутреннего ящика A должна быть меньше, чем у B. Это можно увидеть, спроецировав каждую грань A наружу перпендикулярно самой себе и посмотрев на покрытые части поверхности B. Утверждение следует из того, что эти 6 частей не пересекаются, и каждая не меньше соответствующей грани A.

Сравнение площадей записывается алгебраически

$$2a'b' + 2b'c' + 2c'a' < 2ab + 2bc + 2ca$$

и мы также знаем, что $a'^2 + b'^2 + c'^2 < a^2 + b^2 + c^2$, сравнивая диагонали двух ящиков. Сложив эти два неравенства, получаем

$$(a' + b' + c')^2 < (a + b + c)^2$$

— готово!

Приведённое рассуждение и несколько его вариаций были опубликованы Александром Шенем в 1999 году [105]. Заметим, что оно влечёт требуемое неравенство для всех параллелепипедов (не обязательно прямоугольных): если один параллелепипед содержит другой, то сумма рёбер внешнего не меньше суммы рёбер внутреннего.

В книге А. К. Толпыго [108] приводится ещё одно решение: предлагается рассмотреть 9 длин проекций рёбер внутреннего параллелепипеда на рёбра внешнего. Сумма трёх проекций любого ребра не меньше, чем само ребро, а сумма трёх проекций на данное ребро внешнего параллелепипеда не больше длины этого ребра. Отсюда видно, что сумма рёбер внутреннего параллелепипеда не больше суммы девяти проекций, которая (в свою очередь) не превосходит суммы рёбер внешнего параллелепипеда.

Саму задачу можно воспринимать как рекламу *смешанным объёмам* — замечательному инструменту в исследовании выпуклых тел. С ним можно познакомиться по классической книге Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллера [69].

То, что объём ε-окрестности любого выпуклого тела (не обязательно параллелепипеда) выражается многочленом от ε, было замечено Якобом Штейнером [107]. Коэффициенты этого многочлена (с точностью до множителя) — это так называемые *поперечные меры* — полезные характеристики тела.

В частности, наша задача обобщается следующим образом: если одно выпуклое тело содержится в другом, скажем, $K' \subseteq K$, то первая поперечная мера K' не превосходит первой поперечной меры K. То же верно и для остальных поперечных мер, но доказательство основано на другой идее. В размерности три получаем дополнительно, что площадь поверхности объём и K' не превосходит соответственной характеристики K, однако в старших размерностях дело становится интересней.

Первая поперечная мера также равна средней длине проекции тела на случайную прямую (отсюда название). Ясно, что если одно тело содержится в другом, то тоже верно для всех его проекций. Так получается другой вариант доказательства, также приведённый в статье Шеня [105]. — *Прим. ред.*

Глава 7

Пути и графы

> Человеку приятен небольшой беспорядок в собственной геометрии.
>
> — Луи де Берньер (1954—)

Спустимся в одномерный мир — к кривым, которые вам должны быть известны, и графам, о которых вы, возможно, не слышали. Граф — это набор точек, называемых *вершинами*, некоторые пары из которых образуют *рёбра*. Часто вершины графа изображаются точками на плоскости, а его рёбра — отрезками или кривыми, соединяющими одну свою вершину с другой. Если при этом можно обойтись без пересечений рёбер друг с другом, то граф называется *планарным*.

Укрепление сетки

Дана сетка размера $n \times n$ из стержней единичной длины, шарнирно скреплённых в концах. Разрешается укрепить некоторые S клеток диагональными скобами (длиной $\sqrt{2}$).

При каких S получится сделать сетку жёсткой на плоскости?[1]

На рис. 20 показана недоукреплённая сетка 3×3.

Путешествие по острову

Алоизий катается по острову на своём прекрасном автомобиле. Известно, что на каждом перекрёстке острова сходится ровно три

---

[1] Разумеется, речь идёт о минимально возможном значении S. Как всегда в подобных случаях, полное решение задачи включает не только пример с найденным S, но и оценку, показывающую, что меньшим S достичь жёсткости сетки не удастся. — *Прим. ред.*

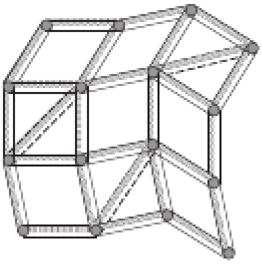


Рис. 20: Недоукреплённая сетка.

(двусторонних) улицы. Алоизий придерживается следующего правила: начав с какого-то перекрёстка, он едет в произвольном направлении, на следующем перекрёстке он поворачивает направо, затем налево, снова направо, налево, и так далее.

Докажите, что рано или поздно Алоизий вернётся на перекрёсток, с которого начал.

Примечания. Граф, в котором к каждой вершине подходят ровно три ребра, называется *кубическим*. В нашем графе есть понятия *право* и *лево*, для этого достаточно изобразить граф на плоскости, с рёбрами (улицами), образованными кривыми. При этом не требуется *планарность* графа; в нём могут быть мосты и туннели, то есть места, где рёбра проходят друг над другом.

Провода под Гудзоном

Пятьдесят одинаковых проводов проведены под рекой Гудзон. Нужно определить все пары концов на обоих берегах. Для этого разрешается замыкать любые пары проводов на западном берегу, а на восточном проверять концы; другими словами, вы можете выяснить, какие пары проводов на восточном берегу соединены на западном.

Сколько потребуется поездок через Гудзон, чтобы справиться с этим заданием?

Жуки на четырёх прямых

Даны четыре прямые общего положения на плоскости (никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке). Вдоль каждой прямой ползёт жук-призрак с постоянной скоростью (скорости разных жуков могут быть разными). Будучи призраками, при встрече жуки продолжают ползти сквозь друг друга.

Докажите, что если произошли пять из всех шести возможных встреч, то была и шестая.

Ну раз уж мы начали про жуков...

Пауки на кубе

Три паука и муравей бегают по рёбрам куба. Каждый паук бегает втрое медленней муравья. Докажите, что пауки смогут поймать муравья.

Следующая головоломка познакомит нас с прекрасной теоремой теории графов.

Вменяемые мыслители

Жители Перевёртовска каждую неделю встречаются и обсуждают городские дела, в частности, поддерживать ли им строительство нового торгового центра. Во время встреч каждый перевёртовец обсуждает этот вопрос со всеми своими друзьями (у каждого их нечётное число), а на следующий день (если требуется) он меняет своё мнение о торговом центре так, чтоб оно совпадало со мнением большинства его друзей.

Докажите, что начиная с какого-то момента, каждую *вторую* неделю у каждого перевёртовца будет то же самое мнение.

Примечания. Очевидно, что рано или поздно произойдёт зацикливание, ведь существует только конечное число наборов мнений (их 2^n, если в городе n жителей). В данном случае утверждается, что период цикла должен быть 2 (или 1). С чего бы это?

И под конец задача о ком-то, кто хотел бы остаться на своём графе.

Лемминг на шахматной доске

На каждой клетке шахматной доски $n \times n$ поставлена стрелка к одной из восьми соседних клеток (или за пределы доски, если это клетка на краю), причём направления стрелок в соседних клетках (включая диагональные) могут различаться не более чем на $45°$.

Лемминг начинает с центральной клетке и идёт по стрелкам. Придётся ли ему упасть с доски?[2]

---

[2] Иначе говоря, существует ли такая расстановка стрелок, при которой лемминг не упадёт с доски? — *Прим. ред.*

Источники и решения

Укрепление сетки

Эту интересную (и, возможно, практически полезную) головоломку подкинул мне геометрический гуру Боб Коннелли из Корнеллского университета; она основана на работе Этана Болкера и Генри Крапо [61].

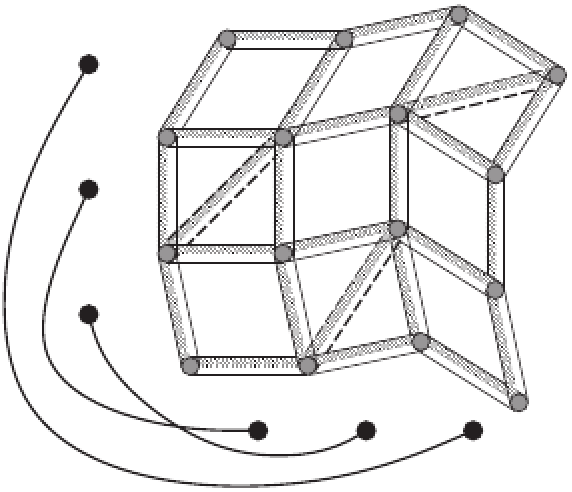


Рис. 21: Недоукреплённая сетка и её граф.

Задачу полезно перевести на язык графов, но не самым очевидным образом (не нужно смотреть на граф с вершинами в сочленениях стержней). Предположим, что скобы жёсткости уже расставлены. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют строкам и столбцам сетки. Каждое ребро в G соответствует строке и столбцу, пересекающимся по закреплённой клетке, так что число рёбер в G равно числу поставленных скоб. Сетка с рис. 20, показана снова на рис. 21, но уже с её графом.

Предположим, что некоторая строка смежна в G с некоторым столбцом. Тогда вертикальные стержни этой строки перпендикулярны горизонтальным стержням этого столбца. Если G — связный граф (то есть любые две вершины в нём соединимы путём), то все горизонтальные стержни перпендикулярны всем вертикальным. Таким образом, все горизонтальные стержни параллельны друг другу, также параллельны и все вертикальные. Теперь ясно, что сетка жёсткая.

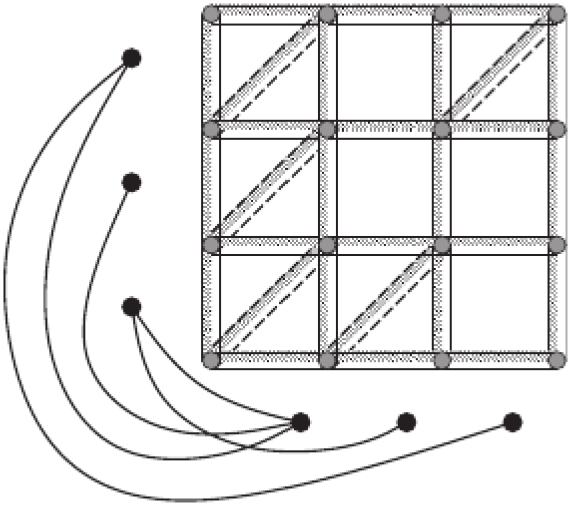


Рис. 22: Полностью укреплённая сетка и её граф.

С другой стороны, предположим, что граф несвязен. Пусть C — его *компонента*, то бишь связный кусок G, рёбра из которого не идут к остальным вершинам G. Тогда ничто не мешает любому вертикальному стержню в строке C или любому горизонтальному стержню в столбце C поворачиваться относительно остальных стержней в сетке.

Таким образом, жёсткость сетки в точности означает связность графа G. Поскольку G имеет $2n$ вершин, то для его связности нужно как минимум $2n-1$ ребро. (Если это для вас новость, воспользуйтесь индукцией по числу вершин.) Следовательно, чтобы сделать сетку жёсткой, нужны как минимум $2n-1$ скоб.

Обратите внимание, что скобы нельзя ставить где попало. На рисунке 21 показана полностью закреплённая сетка 3×3, и её граф. Попробуйте подсчитать, сколькими способами можно укрепить сетку 3×3, используя минимальное число скоб (пять штук). Есть теорема в теории графов о том, что у каждого связного графа есть *остовное дерево*, т.е. связный подграф с минимальным числом рёбер. Она позволяет сделать следующий вывод: *если закреплены больше чем* $2n-1$ *клеток и сетка жёсткая, то можно удалить все скобы, кроме* $2n-1$*, сохранив жёсткость.*[3]

---

[3] Про число таких способов можно прочитать в квантовской заметке переводчика [96]. — *Прим. ред.*

Путешествие по острову

Эта головоломка из уже упомянутой выше книги «Московские математические олимпиады» Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго [17]; её вариант удостоился чести попасть на веб-страницу «The Puzzle Toad» [67].

Между перекрёстками текущее состояние Алоисия характеризуется тройкой, состоящей из ребра, на котором он находится, направления движения и типа последнего поворота (вправо или влево). Эта тройка полностью определяет как будущие, так и прошлые положения Алоисия. Поскольку таких троек конечное число, настанет момент, когда Алоисий впервые попадёт в одну и ту же тройку, и это может произойти только на его стартовом ребре!

Провода под Гудзоном

Вариант этой головоломки рекламировал Мартин Гарднер, иногда её называют задачей Грэма — Нолтона. Для электриков это просто задача идентификации кабельных линий. В версии Гарднера можно было замыкать любое число проводов на любом берегу и также проверять их на любом берегу. Следующее решение было предложено Роландом Шпрагом в его книге [51], а также в недавней статье трёх молодых специалистов по информатике Навина Гойала, Сачина Лодхи и Муту Мутукришнана [28]. Оно удовлетворяет нашим дополнительным ограничениям и требует только двух операций на каждом конце (таким образом, потребуются три переправы через реку, не считая дополнительной операции размыкания проводов перед использованием). Однако решение не единственно, и если ваше трёхпереправное решение отличается, то оно может быть ничуть не хуже.

Пусть концы проводов на западном берегу помечены как $w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_{50}$, а на на восточном как $e_1, \ldots, e_{50}$. При первом посещении западного берега соединим w_1 с w_2, w_3 с w_4, w_5 с w_6 и так далее, но последнюю пару w_{49} и w_{50} соединять не будем. Затем проверим провода на восточном берегу, пока не найдём все пары. Например, мы могли бы обнаружить, что e_4 соединён с e_{29}, e_2 с e_{15}, e_8 с e_{31} и так далее, а концы e_{12} и e_{40} остались без пар. Затем мы едем на западный берег, рассоединив все пары, соединяем w_2 с w_3, w_4 с w_5 и так далее, оставив w_1 и w_{50} без соединения. Возвращаемся на восточный берег и опять находим все пары. Продолжая пример, пусть e_{12} теперь соединён с e_{15}, e_{29} с e_2, и e_4 с e_{31}, а концы e_{40} и e_8 остались без пар.

Удивительно, но этих действий достаточно!

Тот восточный конец провода, который имел пару в первый раз, но не во второй (в нашем примере это e_8), должен соответствовать w_1. Следовательно, восточный конец провода, с которым e_8 был спарен в первый раз (у нас это e_{31}), должен соответствовать w_2. Но тогда w_3 должен соответствовать восточному концу провода, с которым e_{31} был спарен во второй раз, а именно e_4. Продолжая таким образом, мы находим, что w_4 соответствует e_{29} (па́рному к e_4 на первом круге), w_5 соответствует e_2 (па́рному к e_{29} на втором круге) и так далее. В конце мы видим, что w_{50} соответствует e_{40}.

Аналогично можно решить задачу для любого чётного числа проводов. Если же число проводов (скажем, n) нечётно, то в первый раз можно оставить без пары только w_n, а во второй — только w_1, и всё сработает примерно так же.

Жуки на четырёх прямых

Эта головоломка мне досталась от Мэтта Бэйкера из Технологического института Джорджии. Иногда её называют *задачей четырёх путешественников*; её можно увидеть на сайте «Cut the knot» [72].

В наиболее изысканном решении, которое мне известно, требуется выйти из плоскости в пространство, добавив ось времени. Предположим, что встречаются все, кроме (возможно) третьего и четвёртого жука. Проведём ось времени перпендикулярно плоскости с жуками, и пусть g_i — график i-го жука в пространстве. Поскольку каждый жук ползёт с постоянной скоростью, каждый такой график — прямая линия; его проекция на плоскость с жуками — та прямая, по которой ползёт жук. Два жука встречаются тогда (и только тогда), когда их графики пересекаются.

Прямые g_1, g_2 и g_3 находятся в одной плоскости, так как они попарно пересекаются. То же самое относится и к тройке g_1, g_2 и g_4. Следовательно, все 4 графика лежат в одной плоскости. Конечно же, g_3 и g_4 не параллельны, ведь не параллельны их проекции. Таким образом, эти две прямые обязаны пересечься в своей плоскости, а это и значит, что третий жук встретит четвёртого.

Эта задача предлагалась на Московской математической олимпиаде 1958 года [99, Задача 78148]. — *Прим. ред.*

Пауки на кубе

У этой головоломки тот же источник, что и у «Путешествия по острову» выше.

Для поимки муравья можно заставить двух пауков охранять по одному ребру. Для охраны ребра PQ паук сначала выгоняет с него муравья, если это необходимо, а затем бегает по ребру так, что он всегда хотя бы в три раза ближе к P (и к Q), чем муравей. Это возможно, ведь если запрещено использовать ребро PQ, то любой путь

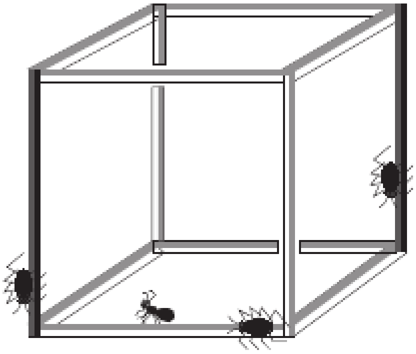


Рис. 23: Два чёрных ребра под контролем, и муравей ловится в серой зоне.

от P до Q вдоль рёбер куба по крайней мере втрое длиннее самого ребра.

Если охранять два *противоположных* ребра (другие варианты также работают), то оставшаяся часть куба (без этих рёбер и их концов) не имеет циклов (см. рис. 23). Значит, третий паук сможет преследовать муравья до конца охраняемого ребра, где тот и встретит свою грустную участь.

Вменяемые мыслители

Эту головоломку мне предложил Саша Разборов из Института перспективных исследований; с его слов я знаю, что она была кандидатом на Международную математическую олимпиаду, однако была отвергнута как слишком сложная. Она была рассмотрена и решена в статье Э. Голеса и Х. Оливоса [26].

Нам надо доказать, что мнения стабилизируются или будут меняться с периодом в две недели. Между каждой парой друзей нарисуем пару стрелок, по одной стрелке в каждом направлении. Назовём стрелку *обидной*, если мнение перевёртовца в начале стрелки отличается от мнения его друга на конце стрелки на *следующей неделе.*

Рассмотрим стрелки, выходящие от перевёртовца Клайда на неделе $t-1$, во время которой Клайд выступает (скажем) за торговый центр. Предположим, что из них m обидных. Если Клайд всё ещё (или снова) за торговый центр на неделе $t+1$, то число n обидных стрелок, указывающих на Клайда на неделе t, будет в точности равно m.

Однако, если Клайд против торгового центра на неделе $t+1$, то n

будет строго меньше m, так как большинство его друзей были против торгового центра на неделе t. Следовательно, большинство стрелок от Клайда были обидными на неделе $t-1$, а на неделе t только меньшинство обидных стрелок направлены к Клайду.

Всё сказанное останется верным и если Клайд был против торгового центра на неделе $t-1$.

Но *каждая* стрелка начинается у *кого-то* на неделе $t-1$ и заканчивается у кого-то на неделе t. Таким образом, общее число обидных стрелок между неделями $t-1$ и t не увеличивается и даже строго уменьшается, за исключением случая, когда каждый перевёртовец имел такое же мнение на неделе $t-1$, как и на неделе $t+1$.

Общее число обидных стрелок (в данную неделю) не может бесконечно уменьшаться. В итоге оно достигнет значения, с которого уже не опустится. В этот момент каждый перевёртовец либо сохранит своё мнение навсегда, либо будет менять его туда-сюда каждую неделю.

Задачу можно значительно обобщить, например, добавив веса вершинам (это означает, что мнения одних ценнее других), или разрешив петли (то есть разрешив учитывать своё текущее мнение), введя механизмы разрешения конфликтов и даже установив различные пороги для смены мнений «за» и «против».

Лемминг на шахматной доске

Эту замечательную головоломку придумал Кевин Пурбху, ещё будучи старшеклассником в Торонто. С тех пор он защитил диссертацию по математике в Университете Калифорнии в Беркли и вернулся в Торонто в качестве доцента кафедры комбинаторики Университета Ватерлоо. Сам я узнал головоломку от Рави Вакила из Стэнфордского университета.

Лемминг действительно обречён. Один из способов это понять (найденный независимо Вакилом и мной) — представить, что лемминг может перемещаться на любую соседнюю клетку, но должен при этом повернуться в направлении стрелки, которую он там обнаружит. Лемминг не может повернуться на 360°, обойдя клетки по циклу; ведь если бы он мог, то можно уменьшать такой цикл, пока не придём к противоречию. Но настоящий лемминг, если он хочет остаться на доске, в конечном итоге должен обойти цикл, и когда это произойдёт, ему придётся повернуть на 360°.

Собственное решение Пурбху, с его школьных лет, использует индукцию. Если лемминг остаётся на доске, он, как мы уже отметили, должен будет обойти цикл. Пусть C — цикл наименьшей возможной площади (на любой доске), на котором это может произойти; будем считать, что лемминг обходит его по часовой стрелке. Обрежем всю доску до C и того, что он окружает. Затем повернём все стрелки на 45° по часовой стрелке. Это приведёт нас к меньшему циклу!

Нехитрая техника позволяет свести головоломку к следующему утверждению про векторные поля: *Векторное поле без нулей на плоскости не имеет замкнутых интегральных линий.* Решение получается сложней, но, возможно, полезней. — *Прим. ред.*

Глава 8

Игры и стратегии

> Если не найти игры, в которую стоит играть,
> тогда придумайте новую.
>
> — Энтони Д'Анджело

Даже если бы мы не играли в игры, нам пришлось бы их придумать. Ведь про многие математические задачи удобно думать как об играх. Мы уже обсудили несколько задач о поиске лучшей стратегии, и сейчас обсудим ещё несколько.

Начнём с простого вопроса о покере — игре, в которую люди играют всерьёз.

Покер: быстрый вопрос

Какой фул-хаус самый лучший?

Примечания. Можно считать, что вы играете в обычный покер *стад* обычной колодой с пятью партнёрами, а Господь Бог оказался вашим должником. В результате у вас есть право на фул-хаус — можно получить любой фул-хаус, какой только пожелаете. Какой лучше всего выбрать?

Восстановление многочлена

Дельфийский оракул загадал многочлен p с неотрицательными целочисленными коэффициентами (от одной переменной). Если назвать любое целое число x, то оракул выдаст значение $p(x)$.

Сколько запросов нужно сделать, чтобы найти многочлен p?

Спасите наши души

Дан лист бумаги с рядом из n пустых клеток. Тристан и Изольда ходят поочерёдно, записывая по букве S или O в незанятую клетку. Побеждает тот, кто первым напишет SOS в последовательных клетках. Для каких значений n у второго игрока (Изольды) есть выигрышная стратегия?

Пасьянс с шарами

Перед вами урна с некоторым числом зелёных и красных шаров (по крайней мере, по одному каждого цвета). На первом раунде вы вытаскиваете шар за шаром вслепую (всегда случайным образом), пока не вытянете шар другого цвета; этот шар затем возвращается в урну.

На втором и последующих раундах процесс повторяется, и продолжается пока урна не опустеет. Если последний вытянутый шар зелёный, то вы победили.

Сколько зелёных и красных шаров следует положить в урну, чтобы максимизировать вероятность выигрыша?

Пиратская демократия

Сотня пиратов на корабле захватила сундук с золотыми монетами и решила поделить их демократически. Каждый пират, по порядку ранга от капитана до самого младшего, вносит предложение, кто и сколько монет получит. Все пираты, включая того, кто выдвигает предложение, голосуют. Для принятия предложения достаточно половины голосов. В этом случае монеты распределяются соответственно, и процесс завершается. Если же предложение отвергнуто, то предлагавшего выкидывают за борт, и далее предложение вносит следующий по рангу.

Учтите, что пираты коварны, жадны, осторожны, мыслят очень логично и все они это отлично понимают. Главное для них — не попасть за борт. Если у пирата нет предпочтений между двумя вариантами, то он действует непредсказуемо.

Сколько монет должно быть в сундуке, чтобы капитан смог гарантированно выжить?

Волшебные рамки

Дана обычная красно-чёрная шахматная доска 8×8 и две *волшебные рамки*, 2×2 и 3×3. Если аккуратно приложить такую рамку к сетке шахматной доски, то 4 или 9 покрытых клеток тут же сменят цвета.

Возможно ли так достичь всех 2^{64} расцветок доски?

Больше рамок на меньшей доске

Теперь у нас доска 6×6, с целым числом в каждой из 36 клеток. Разрешается выбрать любой подквадрат 2×2, 3×3, 4×4, 5×5 или 6×6 и добавить единицу к каждому числу внутри него. Можно ли из любой начальной конфигурации достичь конфигурации со всеми числами, кратными 3?

Покер и многие другие игры включают в себя элемент блефа, а он может быть довольно сложной штукой. В следующей игре мы разберёмся с основами блефа.

Простой блеф

Рассмотрим следующую простую игру в блеф. Луиза и Джереми делают начальную ставку по одному доллару каждый. Далее Луиза берёт карту из перетасованной колоды и смотрит на неё. Она может поднять ставку на 10 долларов (добавив свои 10 долларов в банк) или оставить ставку как есть.

Если Луиза не поднимает ставку, то она выигрывает банк, если у неё на руках пика, в противном случае — проигрывает.

Если Луиза поднимает ставку, то Джереми может проверить (добавив свои 10 долларов в банк) или же сбросить свои карты. Если Джереми сбрасывает карты, то Луиза забирает деньги в банке, тем самым выигрывая доллар Джереми. Если же Джереми проверяет и у Луизы действительно пика, то Луиза снова забирает банк, на этот раз с 11 долларами Джереми. Ну а если карта не пика, то банк забирает Джереми.

Кому выгодна такая игра? А что, если вместо 10 долларов выбрать другое повышение ставки?

Китайский ним

На столе лежат две кучки бобов. Алекс должен взять несколько бобов либо из одной кучки, либо по одинаковому числу бобов из обеих. Затем Бет делает ход по тем же правилам. Так они чередуют ходы до тех пор, пока один из игроков не выиграет, взяв со стола последний боб.

Какова правильная стратегия в этой игре? Что если Алекс начинает с кучек с 12 000 и 20 000 бобов? А что если с 12 000 и 19 000?

Источники и решения

Покер: быстрый вопрос

Этим вопросом меня озадачил Стэн Уэгон, а он нашёл его в книге Аарона Фридланда [10].

Суть в том, что все *фулл-хаусы* с тремя тузами одинаково сильны, ведь из одной колоды двух таких не набрать. Однако фулл-хаусы бьются другими комбинациями: любое *каре*, а их 11 штук, и, что важнее для нас, *стрит-флэшами*. Фулл-хаусы ТТТ99, ТТТ88, ТТТ77 и ТТТ66 выбивают из колоды максимальное число стрит-флэшей. Каждый туз выбивает два стрит-флэша, а каждая фоска (карта младшего достоинства) выбивает по пять — всего 16. Эти фулл-хаусы и являются лучшими.

Если же взять ТТТКК, то вас побьют $40 - 9 = 31$ стрит-флэшей, или даже $40 - 16 = 24$, если в вашем фулл-хаусе не оказалось всех четырёх мастей.

Восстановление многочлена

Эту загадку мне подкинул Джо Булер (Рид-колледж), который считает, что она должна быть очень древней.

Как вы, наверно, догадались, достаточно двух запросов: если $p(1) = n$, то коэффициенты не превышают n. Далее можно взять $x = n+1$, записать ответ $(n+1)$-ичной системе счисления, и получить все коэффициенты многочлена!

Джо отметил, что если бы разрешалось использовать произвольные числа, то хватило бы одного запроса $x = \pi$. Надо думать, что Оракул найдёт способ выдать значение $p(\pi)$ за конечное время; если же вместо этого он станет выдавать его десятичное разложение по одной цифре, то вам придётся понять, когда остановиться.

Хельге Тверберг обратил внимание на то, что эта задача имеет смысл для многочленов с неотрицательными вещественными коэффициентами. Чтобы восстановить p, сначала спросим $p(1)$; если ответ 0, то $p = 0$ и задача решена. В противном случае будем строить *конечные разности*. Положим $p_0(x) = p(x)$, и определим рекурсивно последовательность многочленов $p_{i+1}(x) = p_i(x+1) - p_i(x)$. Отметим, что коэффициенты всех p_i-х неотрицательны. За k вопросов получим $p(1), \ldots, p(k)$, а из них вычислим $p_{k-1}(1)$. Наименьшее k при котором мы получим 0 это $d + 2$, где d — степень p. Как только мы знаем d, любых $d + 1$ из имеющихся у нас $d + 2$ значений достаточно, чтобы восстановить многочлен.

Спасите наши души

На эту игру мне указала аспирантка Рэйчел Эссельштейн. Наряду с другими играми, она обсуждается в книге Тома Фергюсона по теории игр [78]. Этот вариант игры также предлагался на 28-й Американской математической олимпиаде 1999 года.

Вопрос выглядит туманным, пока не поймёшь, что единственный способ вынудить противника сделать проигрывающий ход, — это заставить его ходить внутрь конфигурации S-пусто-пусто-S (мы будем называть её *ямой*). Например, Тристан может выиграть, если $n = 7$, поставив S в середину, а затем поставив ещё одну S в конце, подальше от ответного хода Изольды. Теперь у нас есть яма. После пары ходов на другой стороне Изольде придётся сходить в яму и проиграть.

То же самое справедливо для любого нечётного n больше 7 — Тристану достаточно поставить S в такую клетку, чтоб осталось не меньше 4 клеток с обеих сторон, построить яму с одной из сторон, и ждать.

Если n чётное, то у Тристана нет шансов, ведь Изольде не могут достаться одни ямы — каждый раз она выбирает из нечётного числа пустых клеток. Если же n чётное и большое, то Изольда выигрывает, поставив S далеко от концов и от первого хода Тристана. Однако, если Тристан начинает с O, то Изольде нельзя поставить S рядом, поэтому потребуется дополнительное место.

Для случая $n = 14$, если Тристан поставит O на 7-ю клетку (нумерация от 1 до 14), то лучший ответ Изольды — S на 11-ю клетку (угроза ямы с S на 14-й клетке). В ответ Тристан может поставить O на 13-ю или 14-ю клетку (или S на 12-ю). Теперь Изольда хотела бы построить яму, ставя S на 8-ю клетку, но ей нельзя, ведь тогда Тристан выиграет, поставив S на 6-ю.

Таким образом, при $n = 14$ — ничья; Изольде нужно, чтобы n было чётным и не менее 16. В итоге, Тристан выигрывает, если n — нечётное и не менее 7, Изольда — если n — чётное и не меньше 16. При всех остальных значениях n получаем ничью при оптимальной игре.

Пасьянс с шарами

Эту головоломку (немного в другом виде) можно найти в книге Мартина Гарднера [25, 2.16], однако там ответ дан без доказательства. Доказательство из упомянутой там статьи [41] занимает три страницы и оно слишком сложное как для Гарднеровской книги, так и для моей.

К счастью, есть простой способ понять, что вероятность выигрыша всегда равна 1/2, независимо от соотношения красных и зелёных шаров в урне. Ниже приведено рассуждение Серджио Харта из Иерусалимского университета, который и обратил моё внимание на эту задачу.

Часто при анализе случайного процесса полезно перетащить случайность в другое место. В этой задаче допустимо думать, что перед каждым раундом оставшиеся шары случайно упорядочиваются, и после этого выбираются слева направо. Тогда в последнем раунде все шары одноцветны. В предыдущем раунде есть шары обоих цветов, но все красные шары стоят слева, а все зелёные справа, или наоборот. Независимо от числа шаров каждого цвета на этом этапе (или изначально), эти два порядка равновероятны. Поскольку первый приводит к выигрышу, а второй к проигрышу, получаем, что вероятность выигрыша равна $1/2$.

Серджиу обратил внимание на то, что этот пасьянс в некотором смысле эквивалентен «Потерянному посадочному талону» [56, стр. 42]. Хельге Тверберг (Бергенский университет в Норвегии) отметил, что есть также не столь хитрое, но вполне изящное решение индукцией по числу шаров.

Пиратская демократия

Об этой старой загадке мне напомнил аспирант Дартмутского университета Джулио Дженовезе. Как и многие игры, она решается обратным ходом. Пронумеруем пиратов от младшего к старшему, и пока будем считать, что у них всего n монет. Если дело дойдёт до самого младшего P_1, то он, конечно же, возьмёт всё золото себе. Будем надеяться, что он сможет довести корабль к пристани!

Однако, если дело дошло до P_1, то оно дошло и до P_2, а P_2, конечно же, оставит себе все монеты и проголосует «за», останется в живых и возглавит корабль.

Далее, если дело дошло до P_3, то он купит голос P_1 за одну монету, взяв оставшиеся $n-1$ себе. Следовательно, наилучшим вариантом для P_4 будет подкупить P_2 одной монетой — этого достаточно, ведь иначе тот не получит ничего.

P_5 нужны уже два голоса, и он получит их, отдав по монете P_1 и P_3, — этого достаточно.

Уже есть что доказывать индукцией: если осталось нечётное число пиратов, то следует предложить по одной монете каждому оставшемуся нечётному пирату (предполагая, что монет хватит); если же их чётное число, то следует предложить по одной монете каждому оставшемуся чётному пирату. По предположению индукции, все получающие монеты пираты проголосуют «за», и уже нечего доказывать.

Так что там по поводу капитана? Чтобы точно выжить, ему потребуется 49 монет; дабы предложить по монете всем чётным пиратам ниже 100.

Итак, 49 монет хватает. Может показаться, что лучшего добиться нельзя. Однако на самом деле меньшего количества тоже хватает.

Давайте продолжим рассуждение. Предположим в кладе всего 48 монет. Этого хватает для выживания P_{98}, но уже не хватает P_{99}: против любого его плана проголосуют те 50 пиратов, которым ничего не достаётся. Следовательно, P_{99} будет голосовать за любое предложение капитана, лишь бы не отправится за борт. Значит, капитан получит два бесплатных голоса, свой и от P_{99} и сможет купить ещё 48 голосов — этого хватает.

Рассуждая таким образом, можно показать, что капитан выживает если команды размера $2n + 2^k$, где n — запас монет, а 2^k — любая степень двойки. Таким образом, минимальный достаточный для выживания капитана запас монет будет решением уравнения $2n + 2^6 = 100$, то есть $n = 18$. (Заметим, что при 19 монетах, капитану не выжить.)

В квантовской заметке Сергея Грибка и Константина Кнопа [82] разобрано около десятка вариаций этого сюжета. — *Прим. ред.*

Волшебные рамки

Эту головоломку предложил Эхуд Фридгут из Еврейского университета; похожая задача была на израильском молодёжном математическом соревновании. В соревновании рамки были размером 3×3 и 4×4. В этом случае подсчёт вариантов говорит, что всех конфигураций цветов достичь невозможно. Суть в том, что порядок, в котором располагаются рамки, не имеет значения; достаточно знать, какими способами установки рамок мы воспользовались. У нас есть 5^2 способов установки рамки 4×4 и 6^2 способов установки рамки 3×3. Таким образом, всего $2^{25} \times 2^{36} = 2^{61}$ варианта — этого мало.

Однако в варианте Фридгута у нас уже $2^{49} \times 2^{36}$ вариантов, и теоретически этого хватает для получения всех 2^{64} конфигураций. Думаете, теперь получится?

Назовём клетку *особой*, если она находится в третьей или шестой строке, или в третьем, или шестом столбце, но не в обоих таких позициях сразу (рис. 24). Тогда каждая рамка 2×2 или 3×3 покрывает чётное число особых клеток.

Поскольку изначально на доске чётное число чёрных особых клеток, мы не сможем достичь конфигурации с нечётным числом чёрных особых клеток.

Больше рамок на меньшей доске

Эту головоломку подкинул мне Джулио Дженовезе. Он узнал её от Владимира Чернова, тренировавшего Джулио к Олимпиаде Патнема;

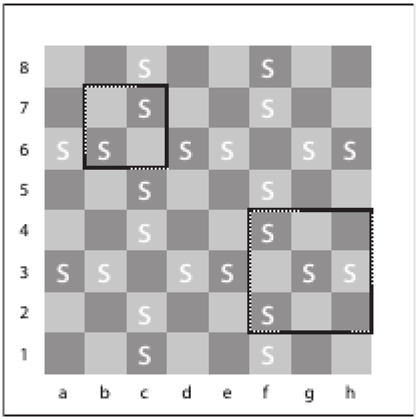


Рис. 24: Особые клетки (помечены буквой S) и пара рамок.

сам Владимир нашёл её в книге «Новые олимпиады по математике» [86].

Как и в предыдущей задаче, нужно найти чудесный инвариант. Однако давайте проверим другой подход, и убедимся, что он не работает.

Конечно же, достаточно рассматривать только рамки 2×2, 3×3 и 5×5, ведь из них составляются все остальные.

Как уже было отмечено, стоит проверить, хватит ли всего того, что *разрешается*, для того чтобы сделать всё, что *нужно*. Можно думать, что номера на доске — это числа по модулю 3 (0, 1 или 2, и $2+1=0$). Следовательно, нам надо беспокоиться о $3^{6^2} = 3^{36}$ возможных конфигурациях. На каждой клетке доски каждый тип квадрата может быть установлен, не установлен или установлен дважды; установка трижды ничего не даёт. У нас 5^2 мест для установки квадрата 2×2, 4^2 для 3×3 и 2^2 для 5×5, так что в общей сложности есть $3^{25} \times 3^{16} \times 3^4 = 3^{45}$ возможных действий, и этого более чем достаточно. Очевидно, многие из этих действий дают один и тот же результат. Так или иначе, пока неясно, доступны ли все конфигурации.

Математически говоря, у нас есть линейное отображение из векторного пространства $\mathbb{Z}_3^{45}$ в векторное пространство $\mathbb{Z}_3^{36}$, и мы хотим узнать покрывает ли его образ всё $\mathbb{Z}_3^{36}$. (Возможность перехода от конфигурации со всеми нулями к любой произвольной конфигурации эквивалентна обратному.)

Если ответ да, то можно перейти от всех нулей к конфигурации, со всеми нулями, кроме одной единицы в выбранной клетке. Более того, если такое возможно, то задача решена, ведь можно проделать это для каждой клетки, которой не хватает единицы, и дважды для клетки, которой не хватает двойки. Это напоминает поиск решения (с нуля) для кубика Рубика — нужны операции, которые мало чего меняют. Например, начнём с двух диагонально сдвинутых квадратов 3×3, перекрывающихся по квадрату 2×2. Теперь, если добавить по два подквадрата 2×2 в каждый угол квадрата 4×4 и ещё два центральных квадрата, то всё отменится, кроме двух диагонально противоположных углов квадрата 4×4. Таким образом, можно увеличить на единицу числа в паре клеток, одна из которых находится в трёх шагах от другой по диагонали.

Однако сложно представить, что можно изменить одно значение в произвольной клетке. Давайте сменим цель. Допустим это *не так*, то есть невозможно получить любую конфигурацию. Тогда должен найтись *инвариант*: некоторое число, связанное с конфигурацией, которое ни для какого шага не меняется. В линейной задаче подобного рода этот инвариант сам должен быть линейной функцией. Это означает, что должно быть два таких подмножества клеток A и B, что если сложить числа в A и прибавить удвоенную сумму чисел в B (в нашей арифметике по модулю 3 это то же, что сумма чисел в A минус сумма чисел в B), то получим инвариант.

Из построения выше, для любой клетки из A, клетка в трёх шагах от неё по диагонали (всегда есть ровно одна такая) находится в B, и наоборот. Исходя из этого наблюдения и зная, что нам нужно в каждой возможной рамке равное число клеток в A и в B (по модулю 3), придумывается чудесный узор, показанный на рис. 25, в котором точки в A помечены плюсами, а точки в B — минусами. Итак, мы утверждаем, что сумма значений в клетках с плюсами, минус сумма значений в клетках с минусами, не меняется. Отсюда следует, что мы не можем перейти от любой позиции, где это значение не равно 0, к позиции, в которой все значения равны 0.

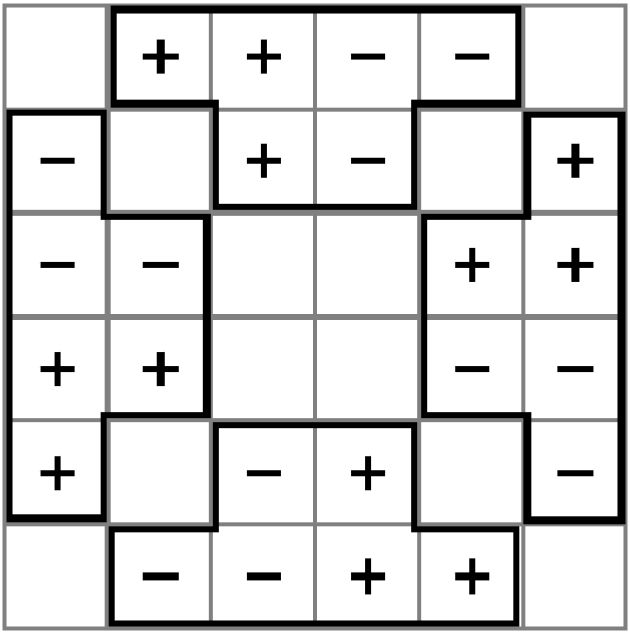
Эта задача предлагалась ученикам 8 классов на Всеукраинской олимпиаде 2005 года (автор — Леонид Оридорога), откуда и попала в книгу [86]. В сборнике задач этой олимпиады [85] приводится очень похожее решение, использующее ту же картинку с плюсами и минусами. — *Прим. ред.*

Простой блеф

Эта головоломка была предложена Джереми Торпом и Луизой Фуше из Калифорнийского технологического института, но похожие игры были известны и раньше.

Отметим, что, имея на руках пику, Луиза всегда выгодно поднимать ставку. Поэтому у неё есть две *чистые* стратегии:

- **честная** — поднимать ставку только если есть пика.



	+	+	−	−	
−		+	−		+
−	−			+	+
+	+			−	−
+		−	+		−
	−	−	+	+	

Рис. 25: Множества A и B помечены знаками $+$ и $-$.

- **нахальная** — всегда поднимать ставку.

Если Луиза подняла ставку, то у Джереми есть два варианта ответа:

- **робкий** — сбросить.
- **смелый** — проверить.

Вероятность вытянуть пику составляет 1/4. Значит, честная стратегия против робкой даёт Луизе 1 доллар в 1/4 ставок, а остальных 1 доллар выигрывает Джереми. Ожидаемый выигрыш Джереми составит 1/2 доллара. Честная стратегия против смелой даёт Луизе 11 долларов, если у неё пика, а в среднем приносит ей 2 доллара ($\frac{1}{4} \times 11 - \frac{3}{4} \times 1 = 2$).

Далее, нахальная стратегия против робкой приносит Луизе 1 доллар каждый раз, в то время как нахальная против смелой обходится ей в 5,50 долларов в среднем ($\frac{3}{4} \times 11 - \frac{1}{4} \times 11 = 5{,}50$). Если вставить эти числа в матрицу игры 2×2, то мы не увидим доминирующей стратегии ни для одного из игроков. Значит, как и следовало ожидать, придётся использовать смешанную (вероятностную) стратегию.

Из работ Джона фон Неймана (ещё до Джона Нэша) известно, что существует *равновесие Нэша* для этой игры — пара стратегий, при которых ни один из игроков не может улучшить свою стратегию, при условии, что другой игрок не меняет свою. Посмотрим, что это означает для Луизы: если ей не выгодно переходить к честной или нахальной стратегии, то в среднем ей всё равно, проверит ли её Джереми или сбросит.

Предположим, что Луиза решила блефовать с вероятностью p, если у неё нет пики. Против робкой стратегии её ожидаемый выигрыш в среднем составит $\frac{1}{4}\times 1+p\times\frac{3}{4}\times 1-(1-p)\times\frac{3}{4}\times 1=(\frac{3}{2}p-\frac{1}{2})$, ну а против смелой, $\frac{1}{4}\times 11-p\times\frac{3}{4}\times 11-(1-p)\times\frac{3}{4}\times 1=(2-\frac{15}{2}p)$ долларов.

Поскольку Луизе должно быть всё равно, эти две величины обязаны совпасть, и значит $p=5/18$. То есть, Луизе следует блефовать 5 раз из 18, когда у неё нет пики и, конечно, всегда повышать ставку, если пика есть. Её ожидаемый выигрыш независимо от стратегии Джереми будет

$$\frac{3}{2}\times\frac{5}{18}-\frac{1}{2}=2-\frac{15}{2}\times\frac{5}{18}=-\frac{1}{12}$$

долларов. То есть в среднем Луиза теряет по $\frac{1}{12}$ доллара за игру.

Немного поразмыслив, убеждаемся, что Луизе выгодно увеличение ставки, однако в среднем она останется в минусе, если, конечно, игра ведётся честно. Причина в том, что если у неё нет пики, то она не может позволить себе блефовать чаще, чем один раз из трёх. Иначе, с точки зрения Джереми, вероятность того, что у неё была бы пика, составила бы не больше половины, и поэтому Джереми мог бы просто всегда проверять. Луиза в лучшем случае выйдет в ноль при повышениях ставки, и будет терять по доллару без повышений, а значит, в среднем будет проигрывать. Но если $p<1/3$, то Луиза проигрывает робкой стратегии Джереми; в этом случае она чаще теряет свою ставку, чем выигрывает.

Здесь важно, что вероятность вытянуть пику составляет одну четверть. Если бы шансы были чуть выше (скажем, если бы в колоде не хватало дамы червей), то бóльшая ставка повернула бы удачу на сторону Луизы.

Вернёмся к исходным 10 долларам. Давайте вычислим стратегию равновесия для Джереми (хотя нам этого и не требуется). Положим, что Джереми проверяет с вероятностью q когда Луиза повышает ставку. Тогда, против луизиной честной стратегии, он получает $\frac{3}{4}\times 1-\frac{1}{4}\times q\times 11-\frac{1}{4}\times(1-q)\times 1=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}q$ долларов, а против смелой стратегии $\frac{3}{4}\times q\times 11-\frac{1}{4}\times q\times 11-(1-q)\times 1=\frac{13}{2}q-1$ долларов. Полагая, что эти величины равны, получаем $q=\frac{3}{18}$. То есть, Джереми должен проверять только $\frac{3}{18}$ всего времени. Подстановка $q=\frac{3}{18}$

обратно в выражения даёт Джереми $\frac{1}{12}$ доллара выигрыша за игру в среднем, как и должно быть, ведь ровно столько теряет Луиза.

Китайский ним

Эта игра известна также как ним Витхоффа[1]; она рассматривалась в статье Виллема Витхоффа 1907 года [58]. Игра обсуждается несколько раз в первом и втором томе классической книги Элвина Берлекэмпа, Джона Конвея и Ричарда Гая [35]. Связь с уже рассмотренной задачей про надёжные мигалки была замечена в прекрасной книге Сергея Табачникова [53]. Однако ни одна из этих книг не приводит вывод стратегии.

Каждая позиция $\{x, y\}$ в игре либо выигрышная, либо проигрышная для игрока, который начинает, при условии оптимальной игры обоих. Как и в классическом ниме, проще всего попытаться описать проигрышные позиции, поскольку их меньше.

Как только известны проигрышные позиции, можно вывести правильную стратегию. Если, например, Алекс находится в выигрышной позиции, то у него должна быть возможность одним ходом перейти к проигрышной позиции для Бет. Если же Алекс находится в проигрышной позиции, то он может только надеяться на ошибку Бет, или же он по-джентльменски предложит ей сделать первый ход. Таким образом, стратегия сводится к списку проигрышных позиций. Но разве здесь нет порочного круга? Разве нам не нужно знать правильную стратегию, чтобы найти проигрышные позиции? К счастью, поскольку число бобов всегда уменьшается, можно начать снизу и постепенно подниматься вверх.

Любая позиция с одной пустой кучей или с кучами одинакового размера автоматически выигрышная. Не сложно понять, что самая простая проигрышная позиция — это $\{1, 2\}$. После этого можно увидеть, что $\{3, 5\}$, $\{4, 7\}$ и $\{6, 10\}$ также проигрышные. Но где же закономерность?

Пусть $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}, \ldots$ будут проигрышными позициями для первого игрока (не считая $\{0, 0\}$); мы предполагаем, что $x_i < y_i$ и $x_i < x_j$ при $i < j$. Заметим, что $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$, ведь если $x_i = x_j$, то Алекс мог бы сделать ход от большего из y_i и y_j к меньшему, оставляя Бет в проигрышной позиции — противоречие.

Немного поразмыслив, приходим к выводу, что если известны все проигрышные позиции от $\{x_1, y_1\}$ до $\{x_{n-1}, y_{n-1}\}$, то x_n есть наименьшее положительное число, которого нет среди чисел из $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \cup \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$, а $y_n = x_n + n$. В этом случае y_n больше любого числа

---

[1] В русскоязычной литературе она известна также под названием «цзяньшицзы». — *Прим. ред.*

из $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$.

Доказательство ведётся индукцией по n. Мы уже знаем, что x_n не может быть среди чисел в $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$, а также, что не может быть более одного y_n, который соответствует этому x_n. Остаётся показать, что позиция $\{x_n, y_n\}$ проигрышная.

Если $\{x_n, y_n\}$ была бы выигрышной, то из неё можно было бы прийти в $\{x_i, y_i\}$ для некоторого $i < n$; но такой позиции нельзя достичь, уменьшив меньшую кучу или уменьшив обе кучи на одинаковое число бобов, ведь это сделало бы разницу между двумя кучами n или больше. Также нельзя её достичь, уменьшив бо́льшую кучу, ведь тогда был бы ещё один игрек для одного икса. Таким образом, $\{x_n, y_n\}$ проигрышная.

Теперь можно получить список проигрышных позиций любой длины. Из этого легко вывести стратегию Алекса. Если он столкнётся с

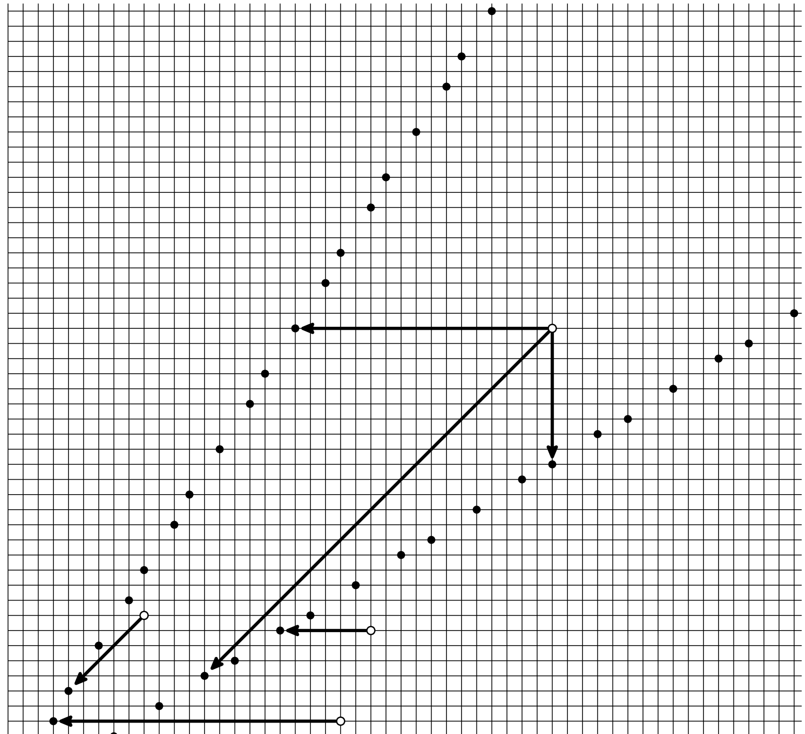


Рис. 26: Проигрышные позиции и несколько выигрышных ходов.

$\{x_i, y_i\}$, он возьмёт один-два боба, надеясь на ошибку. Если он видит $\{x_i, z\}$ для $z > y_i$, он уменьшает z до y_i. Если он видит $\{x_i, z\}$ с $x_i < z < y_i$, то есть разница $d = z - x_i < i$, он берет из обеих куч, чтобы дойти до $\{x_d, y_d\}$ (если $z = y_j$ для некоторого $j < i$, то у него также есть вариант уменьшить x_i до x_j). Если он видит $\{y_i, z\}$ с $y_i \leqslant z$, то может уменьшить z до x_i, а может иметь и другие варианты.

Однако, подсчёт всех проигрышных позиций, скажем, до тысячи бобов в каждой куче требует значительных усилий. Можно ли найти более явное их описание?

Как мы уже знаем, x_n лежит между n и $2n$ для каждого n, ведь x_n стоит сразу после всех x_i и некоторых y_i при $i < n$. Разумно предположить, что x_n примерно равно rn, для некоторого r между 1 и 2. Если это так, то y_n примерно равно $rn + n = (r+1)n$.

Если это подтвердится, то n иксов между 1 и x_n примерно равномерно распределены, и, следовательно, доля $r/(r+1)$ от их числа будет соответствующих игрекам ниже x_n. Таким образом, у нас около $nr/(r+1)$ игреков ниже x_n, и вместе с n иксами, всего получается x_n чисел; то есть

$$n + n\frac{r}{r+1} = nr,$$

что даёт нам $r+1 = r^2$ или $r = (1+\sqrt{5})/2$ — знакомое *золотое сечение.*

Наверное, теперь к вам на ум пришло блестящее наблюдение — поскольку r иррационально и $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = 1$, числа r и $r^2 (= r+1)$ подходят на роль p и q в решении «Надёжных мигалок» из главы 3. Как мы знаем, любое положительное целое число представимо единственным способом *либо* как $\lfloor pm \rfloor$ для некоторого целого m, *либо* как $\lfloor qn \rfloor$ для некоторого целого n.

А теперь уже возникает подозрение, что $x_n = \lfloor rn \rfloor$, а $y_n = \lfloor r^2 n \rfloor$. Конечно же, эти значения обладают желаемыми свойствами: каждое x_n — наименьшее положительное число, не из $x_1, \ldots, x_{n-1}$ или $y_1, \ldots, y_{n-1}$, иначе его было бы невозможно получить. Остаётся проверить, что $\lfloor r^2 n \rfloor - \lfloor rn \rfloor = n$, но это легко, ведь $r^2 n - rn$ равно целому числу n, поэтому и разница их целых частей обязана быть n — готово!

Забавы ради, давайте найдём ход Алекса из предложенных примеров. Обратите внимание, что $12000/r$ чуть меньше 7417, и $7417r = 12000{,}9581\ldots$ так что 12000 это один из иксов, точнее x_{7417}. Соответствующее значение y_{7417} равно $\lfloor 7417 r^2 \rfloor = 19417$, поэтому если в другой куче 20000 бобов, Алекс может выиграть, забрав из неё $20000 - 19417 = 583$ боба. Если же в другой куче всего 19000 бобов, то Алекс может выиграть, уменьшив кучи одновременно до $\{x_{7000}, y_{7000}\} = \{11326, 18326\}$.

Этой игре посвящены статьи журнала «Квант» [88] и [113]; см. также [114, задача 129] и [81, разделы 6.6—6.7].

Другое удобное описание проигрышных позиций получается в так называемой *фибоначчиевой системе счисления*. Фибоначчиева запись числа n это последовательность нулей и единиц $u_k \dots u_1$, такая что между любой парой единиц найдётся хотябы один ноль и $n = u_1 \cdot F_1 + \dots + u_k \cdot F_k$, где $F_1, F_2, \dots$ — числа Фибоначи. В этой записи натуральный ряд начинается как

$$1,\ 10,\ 100,\ 101,\ 1000,\ 1001,\ 1010,\ 10000,\ 10001,\ 10010,\ 10100, \dots$$

Нетрудно проверить, что так можно представить любое натуральное число и при том единственным образом. Для описания проигрышных позиций $\{x, y\}$ с $x < y$ за x следует взять любое число, оканчивающееся на чётное число нулей в фибоначчиевой записи, а чтобы получить y, следует приписать ноль к концу записи x. — *Прим. ред.*

Глава 9

Новые встречи со старыми знакомыми

> Забыть ли дружбу прежних дней
> И не грустить о ней?
>
> — Роберт Бёрнс (1759—1796)

Головоломки могут улучшаться с годами, как вино, — приобретая новые, захватывающие версии, а иногда и лучшие решения. В этой главе представлены старые добрые многим знакомые головоломки. Однако даже если вы очень хорошо знаете какие-то из них, вы обнаружите новые удивительные повороты!

Один из самых запоминающихся персонажей головоломок — логик, любящий отдыхать на южных морях. Если верить Мартину Гарднеру [21], он постоянно теряется и спрашивает дорогу у аборигенов.

Три аборигена на перекрёстке

Гарднеровский логик снова поехал на юг и, как обычно, стоит на развилке, желая узнать, какая из двух дорог ведет в деревню. На этот раз рядом с ним три аборигена, по одному из трёх племён: племени правдолюбов, племени лжецов и племени случайно отвечающих. Конечно же, логик не знает, к какому племени отнести каждого из аборигенов. Ему разрешается задать только два вопроса с ответом «да» или «нет». Каждый вопрос задаётся только одному аборигену. Сможет ли он получить необходимую информацию? А что если ему разрешено задать только *один* вопрос с ответом «да» или «нет»?

Перейдём к известной и изящной геометрической головоломке. К моему стыду, она приведена с не вполне верным решением в моём предыдущем задачнике [56].

Новая встреча с тремя окружностями

Назовём фокусом двух окружностей пересечение их общих внешних касательных. Таким образом, если три окружности имеют разные радиусы (и ни одна не лежит в другой), то они определяют три фокуса (см. рис. 27). Докажите, что эти три фокуса лежат на одной прямой.

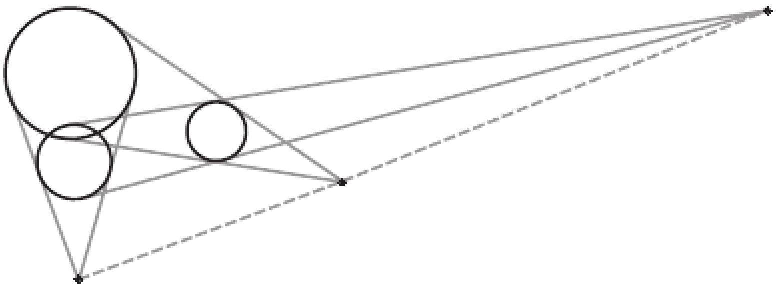


Рис. 27: Три окружности и их фокусы.

Примечания. В моей предыдущей книге [56] предлагалось построить три сферы с экваторами на данных окружностях, а затем рассмотреть плоскость, касающуюся этих трёх сфер. Однако Джером Льюис, профессор информатики университета Южной Каролины в Апстейте, справедливо указал на то, что такой плоскости может и не быть! Например, её нет, когда две окружности большие, а между ними находится меньшая.

Однако доказательство можно спасти, не отказываясь от основной идеи. Попробуйте найти способ.

Следующая задача — отличный пример головоломок про знания о знаниях.

Самоубийцы Точкинска

У каждого жителя Точкинска есть красная или синяя точка на лбу. Если он когда-либо решит, что знает, какого цвета его точка, то покончит с собой. Все точкинцы встречаются каждый день и видят друг друга. Однажды приезжий сказал им что-то (что угодно нетривиальное) о числе синих точек. Докажите, что рано или поздно все точкинцы покончат с собой.

Примечания. Что-то *нетривиальное* означает, что некоторое число синих точек делает это утверждение верным, а какое-то другое число — неверным. Однако мы не предполагаем, что приезжий сказал правду! Увы, точкинцы легковерны — они верят всему, что слышат, если только их собственные глаза не говорят обратное.

Возможно, вы помните задачу об инфекции на шахматной доске — прекрасную головоломку, в которой надо доказать, что нельзя заразить доску размера $n \times n$, начиная с менее чем n заражённых клеток; клетка заражается, если две или более из её соседей (по сторонам) заражены. Доказательство, что n заражённых клеток достаточно, было лёгкой частью; достаточно заразить клетки на главной диагонали.

А что если увеличить размерность?

Заражённые кубы

Инфекция распространяется по n^d единичным d-мерным кубам в кубе $n \times n \times \cdots \times n$ следующим образом: если у единичного куба d или более заражённых соседей, то он заражается. (Соседями считаются кубы с общей гипергранью; в частности, у куба не может быть более $2d$ соседей.)

Докажите, что *можно* заразить все кубы, начав с n^{d-1} заражённых кубов.

Задачи, где заключённые в красных или синих шляпах видят шляпы товарищей по несчастью и должны угадать цвет своей, произвели довольно много шума. В версии, ставшей темой статьи в Нью-Йорк таймс [47], каждый заключённый мог выбрать, называть ему свой цвет или нет. При этом все заключённые будут казнены, за исключением случая, когда все угадывающие правы и при этом нашёлся хотя бы один угадывающий. Как обычно, заключённым было разрешено договориться заранее, но всякое общение между ними прекращалось, как только они увидели шляпы.

Конечно же один заключённый может угадывать, а все остальные молчать — это обеспечит 50% шанс выживания. Может показаться, что лучшего добиться нельзя. Однако есть гораздо лучшая стратегия — n заключённых смогут добиться того, чтобы вероятность казни была бы примерно $1/n$.

Для тех, кто считает такие задачи чересчур фантастичными, приготовьтесь: скоро старые версии покажутся вам слишком реалистичными.

Шляпы и бесконечность

На каждом из бесконечного множества заключённых, пронумерованных $1, 2, \ldots$, надета красная или синяя шляпа. По сигналу все заключённые встают друг перед другом, так что каждый видит цвета всех шляп. При этом никакое общение не позволяется. Затем каждого заключённого отводят в сторону и спрашивают, какого цвета его шляпа.

Если ошиблось бесконечное число заключённых, то *всех* казнят. У заключённых есть шанс сговориться заранее; существует ли стратегия, которая обеспечит им выживание?

Примечания. Обратите внимание, что эта задача проще, чем описанная выше: здесь нельзя молчать, нет никаких параметров и нет вероятности; от вас требуется чистое решение. Однако необходимо предположить, что каждый заключённый способен воспринять всю последовательность цветов шляп, которую он видит, и каким-то образом обработать всю эту информацию за конечное время, прежде чем высказать свою догадку.

Все правы или все неправы

На этот раз обстоятельства те же, но цель другая: угадывания должны быть либо *все верными*, либо *все неверными*. Существует ли выигрышная стратегия?

Примечания. Версия этой задачи для конечного числа заключённых довольно лёгкая: заключённые могут, например, заранее решить, что каждый будет называть цвет своей шляпы, предполагая, что общее число красных шляп чётно. Если это на самом деле так, то все окажутся правы; в противном случае все неправы. Однако, если число красных шляп бесконечно, — как определить, чётно ли оно?

Вернёмся к конечному числу заключённых, но с числами вместо шляп.

Цифры на лбах

На этот раз на лбу каждого из 10 заключённых написана цифра от 0 до 9 (например, все могут быть двойками). В установленное время каждый будет поставлен перед всеми остальными, затем отведён в сторону, и его попросят угадать свою собственную цифру.

Для того чтобы избежать общей казни, хотя бы один из заключённых должен угадать правильно. Как обычно, у заключённых есть возможность сговориться заранее. Найдите для них стратегию, обеспечивающую выживание.

Заключённый дальтоник

Заключённые из предыдущей головоломки вдруг узнают, что у одного из них (Шрека) зелёная кожа, а цифры будут написаны красным цветом. При этом другой заключённый (Майкл) страдает дальтонизмом, то есть не отличает красное от зелёного. Поэтому Майклу придётся делать свои предположения, только исходя из 8 видимых ему цифр. Остальные заключённые, включая Шрека, по-прежнему смогут видеть все 9 цифр, кроме своей собственной. Требуется доказать, что заключённые теперь уже не смогут гарантированно избежать казни.

В последней из задач про заключённых числа встречаются со шляпами.

Числа со шляпами

На лбу каждого из n заключённых написаны различные вещественные числа, так что каждый может видеть числа остальных, но не своё собственное. Как обычно, после просмотра никакого общения не допускается, но затем каждый заключённый должен независимо выбрать себе шляпу — либо красную, либо синюю.

Требуется, чтобы цвета шляп чередовались в порядке, определённом числами.

Игрокам разрешено сговариваться заранее. Как им максимизировать вероятность успеха?

Мы завершаем наши визиты к старым головоломкам одной задачей, которая берёт своё начало по крайней мере с середины девятнадцатого века, но не была решена до 2006 года. Мы не будем просить вас доказывать правильность вашего решения (хотя, конечно, вы можете попробовать) — для разгадки этой головоломки потребовались пять профессиональных математиков, и даже сейчас ответ известен только с точностью до постоянного множителя. Однако угадывание конструкции — отличная проверка вашей интуиции.

Кирпичная стенка

На какое максимальное расстояние стенка из n кирпичей может зайти за край стола?

Примечания. Предполагается, что кирпичи — однородные прямоугольные твёрдые тела длины 1 без трения; их ставят горизонтально в общей вертикальной плоскости. Однако не нужно предполагать, что на каждом уровне находится только один кирпич.

Источники и решения

Трое аборигенов на перекрёстке

Этот вариант задачи про логика и аборигенов пришёл ко мне от двух матфизиков, Владаса Сидоравичюса и Сени Шлосмана. Кажется, что «случайный» абориген спутает все карты, однако решение существует.

Сначала надо позаботиться о том, чтобы *второй* спрошенный абориген не был из случайного племени. Это необходимо, ведь за первый вопрос дорогу не узнать, а если второй абориген случайный, то мы совсем ничего не узнаем.

С другой стороны, этого достаточно, ведь далее можно использовать вопрос с обычным вывертом, типа «А если бы я спросил вас, ведёт ли первая дорога к деревне, вы бы сказали „да“?»

Чтобы достичь этой цели, вам нужно будет спросить аборигена А что-то об аборигенах Б или В, а затем использовать его ответ, чтобы выбрать между Б и В. Вот работающий вариант: «Верно ли, что Б скажет правду с большей вероятностью, чем В?»

Забавно, что если А ответит «да», то надо спрашивать у В, а если «нет», то у Б! Ведь если А говорит правду, вы хотите обратиться к тому, кто *меньше* всего склонен говорить правду, то есть к лжецу. Если же А лжец, то вам нужен *более* правдивый из его спутников, а именно правдолюб. Конечно же, если А — «случайный», то вам нет разницы, кого из остальных выбрать.

В колонках Мартина Гарднера отмечалось, что в исходной задаче с одним аборигеном логик может дойти до деревни даже если забыл, какое из слов на местном языке (предположительно «пиш» и «туш») означает «да» и «нет». Если желаете развлечься, попытайтесь аналогично изменить описанный выше протокол.

Если случайный абориген выбирает из «да» или «нет», подбрасывая монету в уме, то, конечно же, *одного* вопроса недостаточно. Однако, если предположить, что он заранее случайно выбирает между правдой и ложью, а затем отвечает логически, то для этого случая Анупам Джайн из Университета Южной Калифорнии придумал следующий вопрос:

> *Если я выберу из двух ваших спутников того, чей ответ с наименьшей вероятностью совпадёт с вашим, и спрошу его, ведёт ли первая дорога в деревню, ответит ли он „да“?*

Утверждается, что если ответ «нет», то правильная дорога — первая, в противном случае — вторая.

Ключевой случай: этот вопрос задан случайному отвечающему. Если случайный абориген решит солгать, то ответ правдолюба на вопрос будет наименее вероятно совпадать с его ответом. Правдолюб скажет «да», и так как случайный отвечающий решил солгать, он скажет противоположное и, таким образом, ответит «нет».

Если случайный отвечающий решил сказать правду, то ответ правдолюба будет наименее вероятно совпадать с его ответом. Лжец скажет «нет», и так как случайный отвечающий решил сказать правду, он опять скажет «нет».

Если логик обращается к правдолюбу, то ответ лжеца наименее вероятно совпадёт с его ответом, и он скажет то, что сказал бы лжец: «нет».

Точно так же, если вторая дорога правильная, все ответы будут «да».

Есть более сложный вариант этой задачи, предложенной американским философом и логиком Джорджем Булосом в итальянской газете «la Repubblica» в 1992 году[1]:

Есть три бога: A, B и C, которые являются богами истины, лжи и случая в произвольном порядке. Бог истины всегда говорит правду, бог лжи — всегда обманывает, бог случая либо говорит правду, либо лжёт, что определяется случайным образом. Требуется определить богов, задав 3 вопроса, на которые можно ответить «да» или «нет». Каждый вопрос задаётся только одному богу, но можно задавать одному богу более одного вопроса. Боги понимают язык, но отвечают на своём языке, в котором есть 2 слова «da» и «ja», причём неизвестно, какое слово обозначает «да», а какое «нет». — *Прим. ред.*

Новая встреча с тремя окружностями

Конструкцию из этой задачи иногда называют «окружностями Монжа».

На сайте Cut-the-Knot [72] следующее доказательство приписывается Натану Боулеру из Тринити-колледжа в Кембридже. Оно использует конусы, построенные на окружностях вместо сфер. Обозначим их через C_1, C_2 и C_3; мы предполагаем, что это прямые конусы, то есть с углом 90° при вершине. (На самом деле, достаточно, чтобы углы при их вершинах были одинаковы.) Каждая пара конусов определяет две (внешние) касательные плоскости, скажем, P_1 и Q_1 (для конусов C_2 и C_3), P_2 и Q_2 (для конусов C_1 и C_3), и, наконец, P_3 и Q_3 (для конусов C_1 и C_2).

Каждая пара плоскостей P_i, Q_i пересекается по прямой L_i, которая проходит через вершины конусов, а также через точку, где соответствующие касательные пересекаются. Таким образом, прямые L_1 и L_2 проходят через вершину C_3, прямые L_1 и L_3 через вершину C_2,

---

[1] Булос указывает логика Рэймонда Смаллиана как автора задачи (похожие сюжеты есть в книге [49]) и Джона Маккарти как автора усложнённой формулировки из-за неясных трактовок «da» и «ja». Обсуждение этого, более сложного варианта задачи, см. в

а L_2 и L_3 через вершину C_1. Следовательно, эти три прямые лежат в плоскости, определённой тремя вершинами конусов. Пересечение этой плоскости с исходной плоскостью окружностей и есть та самая прямая, проходящая через три центра перспективы — победа!

Вместо конусов можно было построить сферы, касающиеся данной плоскости и радиусами, равными радиусам данных окружностей. К ним можно провести вторую касательную плоскость, которая в пересечении с первой даст прямую, на которой лежат три фокуса.

Есть ещё одна идея, которая позволяет исправить решение, данное в комментарии к условию задачи[2]. Во-первых, можно считать, что центры шаров не лежат на одной прямой (если лежат, то утверждение очевидно). Во-вторых, если одновременно уменьшить радиусы шаров в N раз, оставив на месте их центры, положение фокусов не изменится. Для достаточно большого N каждая сфера окажется вне конуса, описанного около пары других сфер. Значит, можно будет найти пару плоскостей, касающихся уменьшенных сфер. — *Прим. ред.*

Самоубийцы Точкинска

Эта головоломка про знания о знаниях удивляет своей общностью. Она досталась мне от Ника Рейнголда из AT&T Labs. Различные частные случаи (иногда с наводящими ужас формулировками[3]) известны на протяжении многих десятилетий. Многим из вас наверняка известен вариант, когда у всех точки синие, а приезжий сказал: «Есть хотя бы одна синяя точка».

То есть, что им ни скажешь, — будет катастрофа, и это впечатляет. Но, ещё удивительней, что все обречены *даже если каждый видит, что приезжий соврал.* Мы это скоро докажем, но сначала рассмотрим простой частный случай, показывающий, как это работает.

Предположим, что в Точкинске живут всего три жителя, и у всех на лбу синие точки, а приезжий сказал им, что все точки красные. Конечно же все видят, что это не так. Однако первый из них думает следующее: предположим, что моя точка красная; тогда второй житель видит мою красную точку и задаётся вопросом, видит ли третий житель две красные точки?

«Если так» — думает второй, — «то третий житель поверит приезжему и совершит самоубийство этой же ночью, несмотря на то, что у него точка синяя».

Если же этого не произошло, то второй житель правильно заключит, что третий увидел только одну красную точку, и совершит самоубийство во вторую ночь. Поскольку ни одно из этих событий не происходит, первый житель заключает, что второй не увидел красной точки. Он заключает, что его точка синяя, и прощается с жизнью на третью ночь.

---

[2] В.Протасов Выход в пространство-2 (продолжение). Квант №1/2018.

[3] Есть вариант про казни неверных жён [83, 1E]. — *Прим. ред.*

Для доказательства общего случая введём некоторые обозначения. Пусть $S \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ — множество чисел x с таким свойством: *если у n точкинцев x синих точек, то утверждение приезжего верно.* По предположению, S — собственное подмножество; то есть S и его дополнение непусты. Пусть b — число синих точек на самом деле; b может принадлежать S, а может и не принадлежать.

Обозначим через B_i множество возможных чисел синих точек, с точки зрения i-того точкинца. Если b_i — число синих точек, которое он видит на других, то до заявления приезжего, $B_i = \{b_i, b_i + 1\}$.

Если в какой-то момент B_i сокращается до одного значения, то i-й точкинец обречён. Это произойдёт в первую же ночь в случае, если $|B_i \cap S| = 1$, но это произойдёт и на следующую ночь после любого самоубийства. Действительно, все точкинцы с одинаковым цветом точек ведут себя одинаково, ведь они все видят одинаковое число точек каждого цвета. Таким образом, если какой-то точкинец видит, что кто-то совершил самоубийство, то (справедливо) считает, что цвет точки этого человека отличается от его собственного. Следовательно, он знает свой собственный цвет и обречён.

Для заданных S и b обозначим через $d(b)$ наименьшее число шагов (увеличений или уменьшений на 1), необходимое для того, чтобы попасть из b за пределы S или внутрь S. Другими словами, $d(b)$ это наименьшее k, такое что $b + k$ или $b - k$ находится в $\{0, 1, \ldots, n\}$, но не в S (если b не в S) или в S (если b в S).

Например, если $n = 10$ и $S = \{0, 1, 2, 9, 10\}$, то $d(0) = 3$, $d(1) = 2$, $d(2) = d(3) = 1$, $d(4) = 2$, $d(5) = d(6) = 3$, $d(7) = 2$, $d(8) = d(9) = 1$ и $d(10) = 2$.

Как уже отмечалось, если $d(b) = 1$, то самоубийства произойдут уже в первую ночь. Теперь сделаем более общее утверждение: *первые самоубийства произойдут именно в $d(b)$-ю ночь.*

Доказательство ведётся индукцией по $d(b)$. Предположим, что это верно при $d(b) < t$, а теперь пусть $d(b) = t > 1$. После $(t - 1)$-й ночи, поскольку самоубийств ещё не было, все знают, что $d(b) \geqslant t$. Однако, если $d(b) = t$, то $d(b - 1)$ либо $d(b + 1)$ равно $t - 1$. В первом случае синеточкенцы, которые знают, что синих точек b (то, что на самом деле) или $b - 1$, могут исключить случай $b - 1$, и им конец. Во втором случае красноточкинцы могут исключить $b + 1$, и им придётся покончить с собой. Наконец, если $d(b - 1) = d(b + 1) = t - 1$, то никто не переживёт эту ночь.

Поскольку $d(b) \leqslant n$, то к n-й ночи все погибнут. Также можно увидеть, что они продержатся столько времени только в четырёх крайних случаях: если $b = 0$ и $S = \{n\}$ или $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$, а также если $b = n$ и $S = \{0\}$ или $\{1, 2, \ldots, n\}$. Иначе говоря, время выживания максимально, если приезжий либо делает наименее информативное верное заявление, либо высказывает самую безумную ложь. Также стоит отметить, что определение $d(b)$ не различает S и его дополнение — точкинцы будут вести себя точно так же независимо от того, скажет ли приезжий «X» или «Не X».

Можно было бы задаться вопросом, а могут ли точкинцы, зная, что к ним едет кто-то, кто может нарушить (явно оправданное!) правило молчания о цвете точек, организовать для себя какую-то защиту. Например, все, кто знает, что приезжий соврал, поднимаются и говорят об этом. К сожалению, немного поразмыслив, можно прийти к выводу, что ни эта, ни какая-либо другая стратегия не спасёт город.

Да, жизнь точкинцев висит на волоске. Но как ни странно, это и может их спасти. Стив Бэббидж, менеджер и криптограф из компании Vodafone, указал на то, что при определённых обстоятельствах некоторые точкинцы смогут пережить вторжение приезжего, если подумают, что чьё-то самоубийство было вызвано не знанием цвета, а тем, что тот не выдержал жизни в их смехотворной среде.

Заражённые кубы

То, что изначально *нужно* хотя бы n^{d-1} заражённых единичных кубов (для краткости *участков*), доказывается прямым обобщением двумерного случая, в котором, как мы знаем, периметр заражённой области не увеличивается. Вместо периметра следует взять $(d-1)$-мерную площадь поверхности заражённой области. Когда новый участок заражается, к этой поверхности добавляется не более чем d его граней, и в то же время по крайней мере d граней удаляются (те, что отделяют новый участок от заражённых соседей). Таким образом, площадь поверхности не увеличивается. В самом конце, она равна площади поверхности большого куба, что составляет $2d \times n^{d-1}$. Поскольку каждый участок имеет $2d$ граней единичной площади, начальная площадь поверхности не может превышать $k \times 2d$, где k — число изначально заражённых участков. Отсюда $k \geqslant n^{d-1}$.

Однако на этот раз выбрать начальные n^{d-1} заражённых участков совсем не просто. Мэтт Кук и Эрик Уинфри из Калтеха нашли способ, который должен срабатывать, но не смогли этого доказать; впоследствии их коллега Лен Шульман придумал замечательное доказательство, приведённое ниже (присланное мне Эриком).

Начнём с построения Мэтта и Эрика. Обозначим участки векторами $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, где $x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, так что два участка соседствуют, если все их координаты, кроме одной, одинаковы, а эта одна различается на 1.

Возьмём любое целое число k и заразим все участки, для которых $\sum_i x_i \equiv k \pmod{n}$. Эти участки образуют *диагональное подпро-*

странство, оно разбивается на несколько кусков. Они всё заражают, но странным образом и очень по-разному при разных k. Часто кажется, что просто повезло из-за нескольких совпадений. Картина сильно отличается от двумерной!

В доказательстве, что это множество годится, Шульман использовал следующую игру; в ней сила, препятствующая заражению, передана демону-противнику, который мешает заражающему игроку. Выберем k и начнём с заражённых участков, описанных выше.

Сначала демон помещает вас на участок $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Далее он выбирает координату i. У вас есть право переместится либо вперёд, либо назад вдоль i-й координаты (если $x_i = 1$ или $x_i = n$, то выбора нет). Вы выигрываете, если сможете достичь некоторой точки x, из диагонального подпространства $\sum_i x_i \equiv k \pmod{n}$; демон выигрывает, если сможет заставить вас бесконечно блуждать.

Утверждается, что если у вас есть стратегия, которая гарантирует победу против демона, то заразится весь большой куб.

Прежде чем доказывать, уточним утверждение: если можно выиграть, начав с x, то x заразится. Действительно, демон может выбрать любое из d направлений, и победная стратегия срабатывает при каждом выборе. Это означает, что с вашей стратегией можно победить, начав с любого из d соседей x, к которым вы собирались переместиться. По индукции (по числу шагов до победы), все эти d соседей x заразятся, а значит, заразится и x. За базу индукции возьмём случай, с начальным участком x из диагонального подпространства — в этом случае он уже заражён.

Осталось описать выигрышную стратегию. Далее следует то, что Шульман называл *алгоритмом телеги*. Для любого участка x обозначим через x^* значение $-k + \frac{1}{2} + \sum_i x_i \pmod{n}$. Если демон выбрал i-ю координату, то следует уменьшить x_i если $x_i > x^*$ (таким образом, x^* также уменьшается, хотя, возможно, и прыгнет с $\frac{1}{2}$ на $n - \frac{1}{2}$). Если же, $x_i < x^*$, то надо увеличить x_i, чтобы значение x^* также увеличилось, или возможно, прыгнуло с $n - \frac{1}{2}$ на $\frac{1}{2}$. Но постойте — если вы попали на участок с $x^* = \frac{1}{2}$, то победа ваша!

Отсюда следует, что ход, предписанный алгоритмом, всегда допустим: нет нужды ходить на участок с $x_i = 0$ или $x_i = n + 1$, до победы.

Теперь мы утверждаем, что демон не может заставить вас зациклиться. Предположим противное, то есть x циклически повторяется. Пусть I — множество индексов, выбранных демоном бесконечное число раз. Можно считать, что вы уже прошли сколько шагов, что уже ни один индекс, не принадлежащий I, больше выбран не будет. Пусть y будет самым большим значением x_j, когда-либо встречавшимся для любого $j \in I$. Пусть J — множество индексов в I, которые в данный момент имеют это максимальное значение y.

Если когда-либо случится, что $x^* > y$, то вы будете увеличивать его на каждом шаге, увеличивая x^*, пока он не прыгнет в $\frac{1}{2}$, принеся вам победу. Следовательно, x^* всегда меньше y. Но тогда, когда демон выбирает $j \in J$, x_j должен уменьшаться до $y - 1$. В результате J в конечном итоге исчезнет, оставив вас навсегда с меньшим максимальным значением y. А это не может продолжаться вечно — противоречие.

Отсюда следует, что алгоритм телеги позволяет выигрывать, независимо от того, куда вас высадил демон или как он вас ограничивал. Существование выигрышной стратегии означает, что заразится весь большой куб — ура!

Шляпы и бесконечность

Оба ответа — «Да, стратегия существует» и «Нет, её нет» — оказываются верными! Но разве такое возможно?

По моим данным, эта прекрасная загадка была придумана совместно Ювалем Габаем и Майклом О'Коннором (в то время аспирантами Корнельского университета). Однако решение косвенно содержалось в работе Фреда Гальвина из Канзасского университета. Кристофер Хардин (Колледж Смита) и Алан Д. Тейлор (Колледж Юнион) затем включили её в статью для American Mathematical Monthly [31]. Стэн Уэгон предложил её как задачу недели в Маккалестерском колледже. Дополнительные интересные наблюдения об этой и следующей задаче были сделаны Харви Фридманом (Огайо Стейт), Хендриком Ленстрой (Университет Лейдена) и Джо Булером (Рид Колледж). Последний из них, а также (независимо) Мэтт Бейкер из Технологического института Джорджии, рассказали мне о ней. Всё это только небольшая часть истории. Простите меня, если пропустил ваше имя!

Сначала посмотрим, а что если только конечное число заключённых получат красные шляпы. Тогда все заключённые это увидят, и если они заранее договорились об этом, все скажут «синий» — и, конечно же, только конечное число ошибётся.

Та же схема применима, и если только конечное число шляп будут синими или, например, если только конечное число шляп с нечётными номерами будут красными, а конечное число шляп с чётными номерами будут синими. Можно пойти ещё дальше: если последовательность шляп *периодична* с какого-то места, то все могут угадать цвет, как если бы последовательность была периодичной с самого начала.

Другими словами, последовательность цветов шляп можно считать двоичной записью некоторого вещественного числа r из интервала $[0,1]$, считая (скажем) синий как 1, а красный как 0. *С какого-то места периодична* означает, что с какого-то момента некоторое слово из нулей и единиц в ней бесконечно повторяется; это означает, что r рационально. Например, последовательность $1001010010101010\ldots$, где 01 бесконечно повторяется, является таким числом; в этом случае число равно дроби 7/12. Если так произошло, то каждый заключённый с нечётным номером может сказать «синий», а каждый с чётным номером — «красный», и все, кроме номеров 3, 4, 5, 6 и 7, окажутся правы.

Таким образом, заключённые спасутся, если r рационально. Однако нет нужды ограничивать стратегию рациональными числами. Возможно, последовательность будет отличаться лишь в конечном числе мест от двоичного представления π, в таком случае заключённые могут согласиться угадывать, как если бы шляпы представляли собой точно π.

На самом деле заключённым надо разделить все возможные последовательности шляп на такие *классы*, что в каждом классе две последовательности отличаются только в конечном числе мест. Затем заключённые заранее договариваются о представителе из каждого класса, то есть о каком-то конкретном члене класса. Если они видят последовательность из этого класса, то каждый угадывает, как если бы фактическая последовательность была равна согласованному представителю.

Более математически, мы говорим, что две последовательности *соседние*, если они отличаются только в конечном числе мест. Заметим, что (1) любое r — сосед самого себя; (2) если r — сосед s, то s — сосед r; и (3) если r — сосед s, и s — сосед t, то и r — сосед t. Это означает, что соседство является тем, что математики называют *отношением эквивалентности*. В свою очередь это означает, что существует такое разбиение множества всех последовательностей шляп на классы, что в каждом классе любые две последовательности будут соседними, а любые две последовательности из разных классов соседними не будут.

Пока всё чисто, но сейчас появится трудность. Большинство этих классов не будут обладать естественным представителем (как например π), и заключённым придётся как-то договориться о представителе в каждом классе. Утверждение о том, что это в принципе возможно сделать, называется *аксиомой выбора*. Если принять аксиому выбора, то заключённые смогут ей воспользоваться, чтобы выбрать по представителю из каждого класса. Затем, увидав шляпы, заключённые поймут, к какому классу принадлежит последовательность шляп (для этого достаточно смотреть только на шляпы заключённых с более высокими номерами, чем их собственные). Затем они все угадывают, что их собственный цвет шляпы такой, как это предсказано согласованным представителем класса, и допускают только конечное число ошибок — дело сделано!

Но считать ли аксиому выбора верной? Большинство активно работающих математиков предполагают, что да. Однако известно, что если основные аксиомы с аксиомой выбора образуют непротиворечивую систему, то нет противоречия и с отрицанием аксиомы выбора. Так что так же справедливо предположить, что аксиома выбора не выполняется, как и предположить, что она выполняется.

А если аксиома выбора не выполняется, то заключённые окажутся в трудном положении. Упомянутые выше Хардин и Тейлор, и независимо Харви Фридман, показали, что если принять отрицание аксиомы выбора, у заключённых нет выигрышной стратегии. И даже хуже: любая стратегия потерпит неудачу, если только, в определённом смысле, который можно сделать математически точным, заключённые не будут невероятно удачливы. Так что, если есть опасность стать заключённым, то лучше принять аксиому выбора (и взять её с собой).

А сами вы верите в аксиому выбора? Подумайте: множество возможных выигрышных стратегий для нашего предполагаемого решения является произведением всех вышеобсуждаемых классов эквивалентности; если нет решения, это означает, что произведение бесконечного числа непустых (да ещё и бесконечных) множеств пусто. С другой стороны, знаменитый парадокс Банаха — Тарского утверждает, что, используя аксиому выбора, можно разрезать шар на пять частей и собрать из них два шара, идентичных исходному!

У меня такой вывод: хотя ни аксиому выбора, ни её отрицание нельзя опровергнуть, любую из них можно сделать смешной.

Все правы или все неправы

Если вы разобрались с решением предыдущей головоломки (с аксиомой выбора), то и здесь не должно быть проблем. Во-первых, заключённые соглашаются, как и раньше, на представителя из каждого класса эквивалентности. Кроме того, они соглашаются, что будут угадывать цвет своих шляп, исходя из предположения, что число позиций, в которых последовательность шляп не совпадает с выбранным представителем, чётно. Как и в случае конечного числа, если это число чётно, то все заключённые будут правы; в противном случае — все неправы.

Примечательно, что алгебраисты обычно решают эту задачу следующим образом. Отождествим цвета шляп с множеством $\{0, 1\}$, — то есть, как и раньше, будем думать, что это элементы группы $\mathbb{Z}_2$. Сумма Σ из бесконечного числа копий $\mathbb{Z}_2$ является множеством всех последовательностей из 0 и 1, в которых только конечное число единиц (синие шляпы). Существует естественный гомоморфизм (отображение) из Σ в $\mathbb{Z}_2$, который даёт 0, если число единиц чётно, и 1, если нечётно. Стандартная теорема о расширении позволяет нам расширить этот гомоморфизм на произведение $\mathbb{Z}_2$, которое является множеством всех последовательностей $\{0, 1\}$. Затем заключённые соглашаются угадывать, предполагая, что значение этого гомоморфизма равно (скажем) 0.

Конечно, в *доказательстве* теоремы о расширении нужна аксиома выбора, поэтому это доказательство на самом деле ничем не отличается от других.

Означает ли это, что для версии с «все правы» или «все неправы» бесконечной задачи о шляпах также требуется аксиома выбора? Я так думал, пока Тина Кэрролл (студентка-математик в Технологическом институте Джорджии) не показала мне решение, которое *гораздо* проще и не требует аксиомы выбора или какой-либо математики вообще.

Каждый говорит «зелёный»!!

Про гомоморфизм $\mathbb{Z}_2^\infty \to \mathbb{Z}_2$ можно думать, как про обобщённую сумму бесконечной последовательности элементов из $\mathbb{Z}_2$. Поэтому второе решение — это по сути спасение рассуждения с чётностью числа красных шляп, прекрасно работающего в конечном варианте задачи. Про этот гомеоморфизм можно думать уймой способов, например как об ультрапределе суммы первых n членов последовательности по неглавному ультрафильтру. Можно действовать и более геометрически, через выбор точки в чех-стоуновской компактификации натуральных чисел. — *Прим. ред.*

Цифры на лбах

Эта головоломка пришла ко мне независимо от нескольких людей, включая Ногу Алона из Тель-Авивского университета. Сам Нога многократно показывал, что во многих задачах полезно ввести вероятность, даже если в формулировке её не было. В нашей задаче, если предположить, что числа на лбах выбираются независимо и равномерно случайным образом, то каждый заключённый угадает правильно с вероятностью $\frac{1}{n}$ независимо от того, что именно он скажет.

Положим, что заключённые пронумерованы от 0 до $n-1$. Мы хотим, чтобы вероятность того, что какой-то заключённый угадает правильно, была равна 1. Значит нам нужно, чтобы n событий типа *«k-й заключённый угадывал правильно»* были бы взаимоисключающими. Другими словами, ни одно из них не может произойти одновременно с другим. В противном случае вероятность хотя бы одного успешного исхода была бы строго меньше суммы $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1$.

Для этого следует разделить всевозможные расстановки чисел на n равновероятных сценариев, а затем потребовать, чтобы заключённые основывали свою догадку на разных сценариях. Эта идея приводит к следующему простому решению. Если s — сумма чисел на лбах по модулю n, то пусть k-й заключённый считает, что $s = k$. Другими словами, он считает, что его собственное число равно k минус сумма оставшихся чисел по модулю n.

В этом случае s-й заключенный будет прав, а все остальные — нет.

Заключённый дальтоник

Из-за Майкла со Шреком заключённые не смогут реализовать схему из предыдущего решения. Но это само по себе не означает, что другого решения не существует.

Тем не менее мы видели, что успешная схема должна предотвратить возможность угадывания правильного числа одновременно двумя заключёнными, и это, возможно, грозит Шреку неприятностями.

Предположим, что *существует* успешная схема; можно считать, что Шрек точно знает, *что именно* будет делать Майкл, — ведь он видит каждое число, которое видно Майклу. Поскольку он видит число Майкла, то он может с некоторой вероятностью $(\frac{1}{n})$ знать, что Майкл угадает правильно.

В этом случае Шрек должен угадать неправильно, но поскольку он не знает своего собственного числа, у него нет возможности это сделать наверняка. (Выстрелить в воздух, например, назвав $n + 1$, не сработает, ведь тогда сумма вероятностей успеха не достигнет 1.) Значит, заключённые потерпят неудачу с положительной вероятностью.

Числа со шляпами

Эту головоломку мне прислала Николь Имморлика, постдок из Microsoft Research. Её формулировка (и решение) содержится в статье шести авторов [1], где она используется в явной конструкции для высокодоходных детерминированных аукционов.

Заключённые могут гарантированно выиграть независимо от распределения чисел. Прежде чем на лбах появятся числа, они выберут порядок, то есть пронумеруют себя от 1 до n (скажем, по алфавиту). Когда все увидят числа, i-й заключённый (для каждого i) заводит новую нумерацию остальных числами от 1 до $i - 1$ и от $i + 1$ до n, в порядке чисел на их лбах. Далее он вычисляет, сколько транспозиций старых номеров требуется, чтобы перевести их на место новых номеров.

Предположим, что позже этот i-й заключённый узнал своё число, и оказалось, что оно стоит на j-м месте после упорядочивания по возрастанию. Тогда ему придётся сделать ещё $|i - j|$ транспозиций, чтобы завершить перестановку σ от всех n старых номеров к n новым номерам. Действительно, i и j следует поменять местами, а числа между ними нужно сдвинуть вверх или вниз на одну позицию.

Например, предположим, что $n = 4$ и 3-й заключённый видит на лбах 1-го, 2-го и 4-го числа 2π, π и 4π соответственно. Тогда он присваивает им новые номера 2, 1 и 4. Чтобы получить эти номера из старых 1, 2 и 4, надо поменять местами 2 и 1 — одна транспозиция. Если он ставит себя на 3-е место, то получает перестановку $1234 \to 2134$. Его собственное число может быть, скажем, $\pi/2$, и значит он должен был быть первым, а не третьим. Чтобы получить правильную перестановку $\sigma = 1234 \to 3214$, ему надо поменять местами 3 и 1, а затем 2 и 3, то есть нужны ещё две транспозиции. Конечно же, число могло оказаться другим — мы привели этот последний шаг, чтобы помочь разобраться в последующем рассуждении.

Допустим, что σ — чётная перестановка, то есть она реализуется чётным числом транспозиций. Тогда исходная перестановка i-го заключённого будет чётной, если $|i - j|$ чётно, и нечётной в противном случае. Конечно, если σ нечётна (как в примере), то справедливо обратное.

Итак, i-му заключённому следует выбрать красную шляпу, если он насчитает чётное число транспозиций (в его перестановке остальных $n - 1$ чисел) и его собственный старый номер i чётен, или же если он насчитает нечётное число транспозиций, и i нечётно. В противном случае он выбирает синюю. В приведённом примере i нечётно, и 3-й заключённый сделал нечётное число (одну) транспозицию, поэтому он выберет красную шляпу.

Если перестановка σ оказалась чётной, то этот выбор означает, что заключённый i будет выбирать красную шляпу только тогда, когда i и $|i-j|$ оба чётны или когда i и $|i-j|$ оба нечётны — другими словами, когда j чётно. Таким образом, в новом порядке каждый заключённый с чётным номером будет носить красную шляпу, а каждый с нечётным — синюю.

Если же σ нечётна (как в примере), то в новом порядке красные шляпы будут надеты на заключённых с нечётными номерами, и в любом случае они победят.

Кирпичная стенка

Вопрос о том, как уложить n кирпичей, максимизируя их выступ за край стола, был поставлен в 1923 году Дж. Г. Коффином [4]. Однако другие эквивалентные формулировки известны с 1850 года. Благодаря Мартину Гарднеру этот вопрос стал очень известным, и его используют по всему миру для первого знакомства с гармоническим рядом.

Забавно, но несмотря на широко распространённое мнение об обратном, знаменитая *гармоническая стопка* (см. рис. 28) далека от оптимального решения (иногда, впрочем, в условия добавляют ограничение одного кирпича на уровень). Более того, часто отмечается, что до начала постройки надо решить, какого выступа мы хотим добиться — но и это тоже неверно.

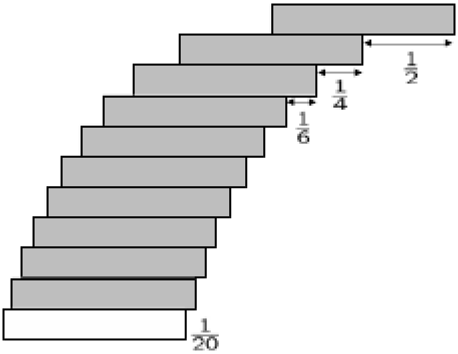


Рис. 28: Десятикирпичная гармоническая стопка.

Чтобы получить гармоническую башню, заметим что верхний кирпич не может выступать за кирпич под ним больше, чем на 1/2 (при единичной длине кирпича). В этом случае центр тяжести двух верхних кирпичей находится на 1/4 левее края нижнего кирпича, поэтому второй сверху кирпич не может выступать за следующим под ним, больше, чем на 1/4. Продолжая таким образом, k-й сверху кирпич, выступает на $\frac{1}{2k}$ над $(k+1)$-ым, а значит общий выступ составит

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2k} = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{k}) = H_n/2,$$

где H_n — n-я частичная сумма гармонического ряда, она растёт как натуральный логарифм n.

Поскольку гармонический ряд расходится, можно прийти к (верному) выводу, что если кирпичей достаточно, то можно добиться произвольно большого выступа. Если строить башню таким образом, то придётся решить заранее, какой выступ нам нужен — он ограничен положением самого нижнего кирпича.

Однако можно добиться большего, если использовать несколько кирпичей в качестве противовеса. В декабре 2005 года Дж. Ф. Холл [30] отметил, что общий выступ можно увеличить примерно вдвое (то есть, сделать его около $\ln n$) используя стопку кирпичей, в которой каждый выступает над предыдущим, а противовесом к ним служат

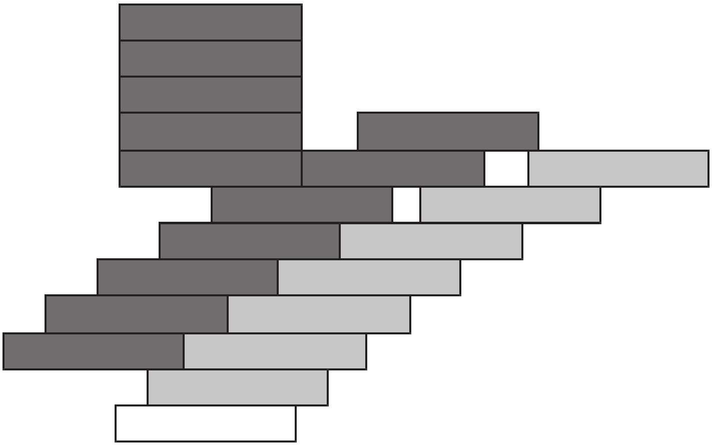


Рис. 29: Максимальный выступ для 19-и кирпичей.

дополнительные кирпичи. На самом деле, вплоть до 19 кирпичей такие стенки дают максимальный выступ; см. рис. 29 для случая $n = 19$. Однако Холл неверно заключил, что его стенки (называемые хребетными из-за того, что кирпичи, поддерживающие самый крайний кирпич, образуют стопку с одним кирпичом на уровень) оптимальны в общем случае.

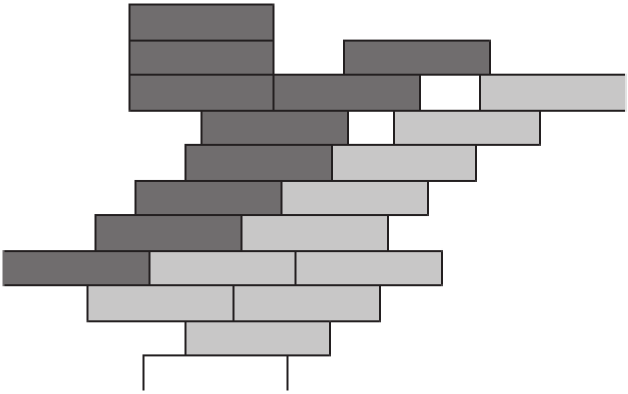


Рис. 30: Максимальный выступ для 20-и кирпичей.

Важный шаг сделали Майк Патерсон и Ури Звик в своей статье [43] (она появилась в январе 2006 года, то есть написана до пуб-

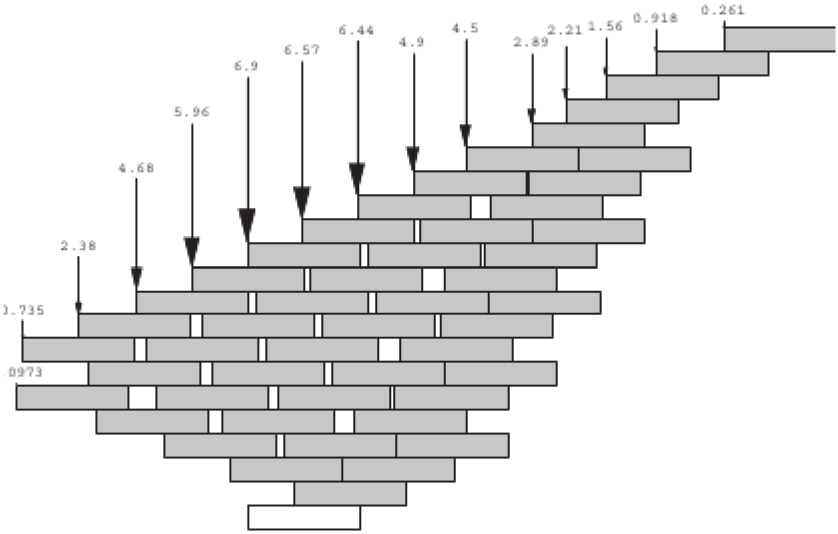


Рис. 31: Максимальный выступ для 100 кирпичей.

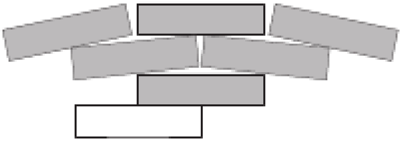


Рис. 32: Перевёрнутый треугольник разваливается начиная с трёх слоёв.

ликации статьи Холла). Их статья доказывает, что Холл правильно вычислил возможный выступ хребетных стенок. Однако они также показали, что хребетные стенки перестают быть оптимальными, начиная с 20 кирпичей. Что ещё поразительней, они построили стенку, дающую *экспоненциально лучший* выступ, чем то, что считалось достижимым.

Наилучшая стенка из 20 кирпичей изображена на рис. 30; она лишь незначительно обгоняет хребетную стенку Холла. Однако, как видно из рис. 31, при больших n лучшие конфигурации перестают напоминать хребетные. Стрелки в верхней части рис. 31 обозначают дополнительный вес некоторых не показанных кирпичей (из разрешённых 100), их положения определены неоднозначно.

На самом деле, для очень больших значений n лучший выступ достигается для стенок, как будто вырезанных из обычной кирпичной кладки — середина кирпича располагается ровно над стыком пары кирпичей ниже. Тем не менее, наиболее очевидные такие стенки разваливаются. В книге Джаргодзки и Поттера [33] (рекомендуется, несмотря на следующую ошибку) утверждалось, что устойчивы перевёрнутые треугольники (один кирпич внизу, затем два, затем три и так далее), но на самом деле они разваливаются, начиная с трёх слоёв (см. рис. 32).

Стенки-ромбы (с добавлением кирпича на слой, до определённого момента, а потом назад до одного) устойчивы до семи слоёв, и на рис. 33 показано, что происходит далее.

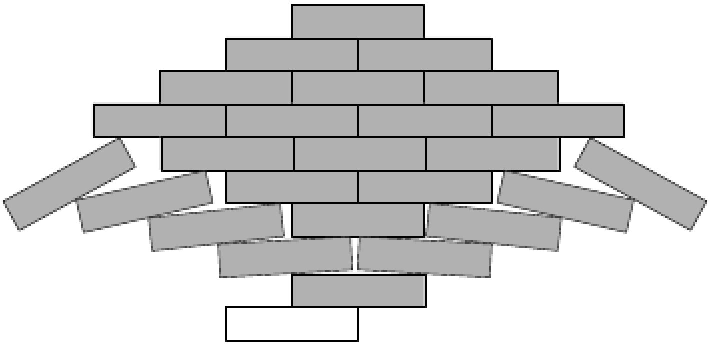


Рис. 33: Девятислойный ромб разваливается.

Вместо этого Патерсон и Звик построили стены, форма которых напоминает параболы, показанные на рис. 34. Они строятся (и их устойчивость доказывается) рекурсивно, складывая то, что они называют k-плитами для последовательно возрастающих k. Одна k-плита состоит из $2k+1$ чередующихся слоёв, в каждом из которых по $k+1$ и k кирпичей. Выступ, достигнутый параболической стеной из n кирпичей, имеет порядок $\sqrt[3]{n}$ (кубический корень).[4]

А можно ли это улучшить? Ромбы или перевёрнутые треугольники, если бы не разваливались, давали бы асимптотически лучший выступ, порядка $\sqrt{n}$ (квадратный корень). Однако позднее Патерсон и Звик вместе с Ювалем Пересом, Миккелем Торупом и автором этих строк [44] смогли показать, что порядок $n^{1/3}$ оптимален.

И всё же это не означает, что параболические кирпичные стены лучше всех. Они дают выступ примерно $\frac{3}{16}n^{1/3}$, а другие могут дать

---

[4] Мы говорим, что функция $f(n)$ (в нашем случае максимальный выступ для n кирпичей) имеет порядок $g(n)$, если существуют положительные константы c и c' такие, что $cg(n) < f(n) < c'g(n)$.

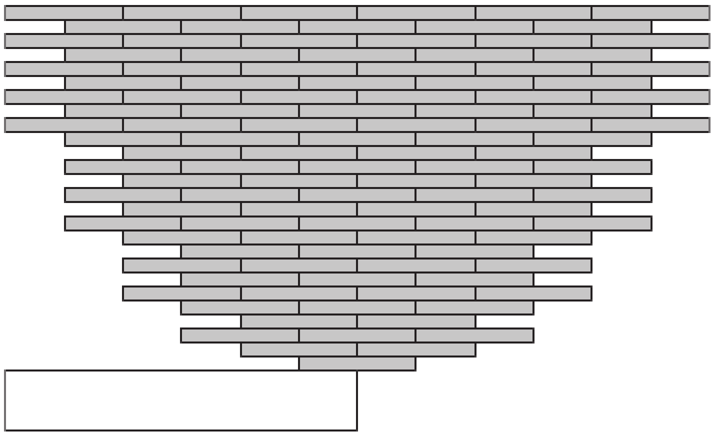


Рис. 34: Параболическая стена.

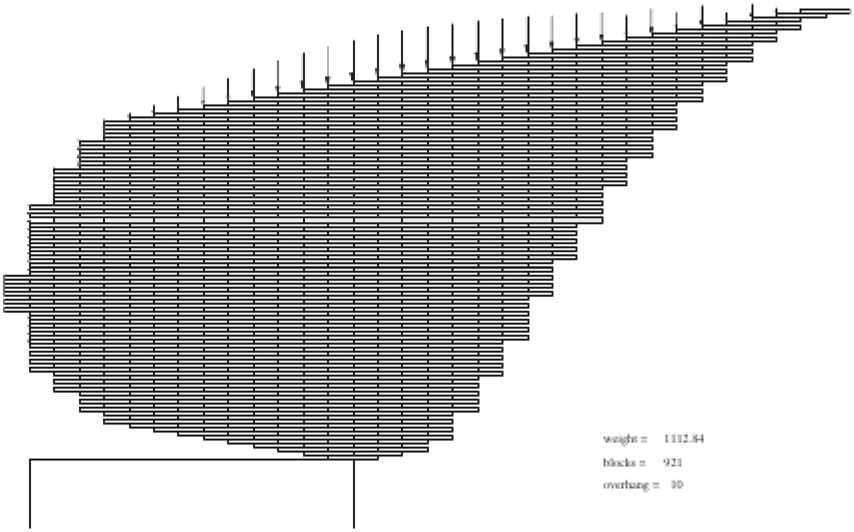


Рис. 35: Эта ламповидная форма стены, возможно, оптимальна.

$cn^{1/3}$ для большей константы c. Патерсон и Звик считают, что лучшая форма для больших n — это форма «масляной лампы» на рис. 35.

Параболическую кирпичную стену нельзя построить кирпич за кирпичом. Причина в том, что, как и все устойчивые конфигурации, показанные выше, она находится на грани устойчивости. Од-

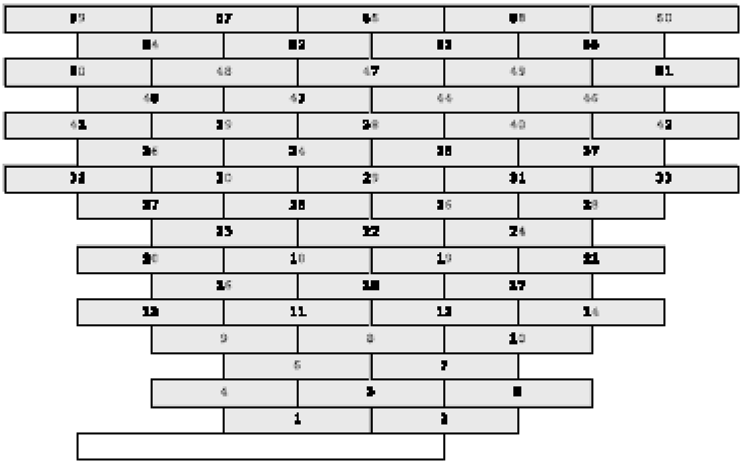


Рис. 36: Стенка, строящаяся кирпич за кирпичом.

нако, немного изменив параболу, её всё же можно построить кирпич за кирпичом. На рис. 36 показана такая модификация, все ещё обеспечивающая выступ порядка $n^{1/3}$.

Конечно же, стоит помнить, что настоящие кирпичи не идеально прямоугольны и ещё могут ломаться. Поэтому не пытайтесь повторить это в домашних условиях!

Глава 10

Серьёзные испытания

> Со временем разум достигнет более высокого уровня знаний, но не сможет понять, как он там оказался.
>
> — Альберт Эйнштейн (1879—1955)

Ну да, как будто предыдущие головоломки не были сложными, а тут ещё несколько непростых задач. Хотя может случиться, что некоторые из них покажутся проще. Ведь то, что ставит одного в тупик, бывает легко другому.

Торт-мороженое

Перед нами цилиндрический торт-мороженое, покрытый сверху шоколадной глазурью. Мы последовательно отрезаем от него дольки с углом x, где x произвольно, каждый раз долька переворачивается и вставляется обратно в торт (рис. 37).

Докажите, что после конечного числа таких операций вся глазурь снова окажется сверху!

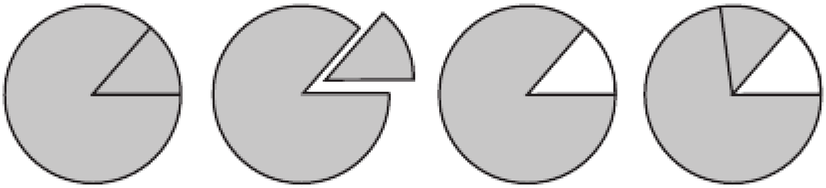


Рис. 37: Разрез, переворот, и снова разрез.

Примечание. Я называю такие задачи *как бы неверно услышанными.* Да-да, угол x может быть иррациональным, при этом вы никогда не отрежете один и тот же кусок дважды. Придётся отрезать довольно много долек, но всё же хватит конечного числа. К счастью, торт-мороженое самовосстанавливается.

Прыгание и перепрыгивание

Лягушка прыгает по длинной цепочке кувшинок; на каждой кувшинке она подбрасывает монету, чтобы решить, сделать ли ей двойной прыжок вперёд или же одинарный назад. На какой доле кувшинок она побывает?

Три тени кривой

Существует ли простая замкнутая кривая в трёхмерном пространстве, все три проекции которой на координатные плоскости являются деревьями?

Примечание. Это означает, что тени кривой в трёх координатных направлениях не содержат циклов. На рис. 38 изображена кривая, которая почти подходит: две её тени являются деревьями, но третья содержит (и даже является) циклом.

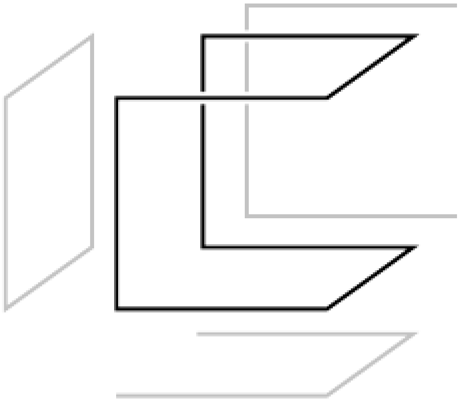


Рис. 38: Кривая у которой две проекции — деревья, а третья — нет.

Игроки и победители

Тристану и Изольде предстоит очутиться в ситуации с очень ограниченной связью, в которой Тристан будет знать, какие две из 16 баскетбольных команд сыграли матч, но не будет знать результат матча, а Изольда будет знать, какая из команд выиграла, но не будет знать, у какой. Сколько битов необходимо передать им друг другу, чтобы Тристан узнал, кто одержал победу?

Примечание. Эта задача по *коммуникационной сложности.* Если бы Изольда дополнительно знала, кто проиграл, ей было бы достаточно отправить Тристану один бит, сообщив, скажем, выиграла ли команда, идущая первой по алфавиту. Зная только команду-победителя, она может отправить четыре бита, передав Тристану информацию о победившей команде. А нельзя ли обойтись меньшим числом битов?

А вот ещё задача по коммуникационной сложности, но посложней.

Подсказка для Чарли

Алиса и Боб знают да-нет ответы на все n вопросов экзамена, который сдаёт Чарли. Чарли нужен только ответ на k-й вопрос, но ни Алиса, ни Боб не знают значение k. Вместо этого Алиса знает число i, Боб — число j, такие, что $k = i + j \pmod{n}$. При этом Чарли знает оба числа i и j.

Если бы Алиса не могла передать никакой информации, то Бобу пришлось бы отправить Чарли все ответы (всего n битов), чтобы Чарли смог узнать нужный ему ответ.

Докажите, что если Чарли получит всего один бит от Алисы, то Бобу достаточно отправить всего $n/2$ битов.

Сближение по кривой

Плоская кривая на рис. 39 обладает следующими свойствами: (1) расстояние между её конечными точками больше, чем у любой другой пары точек на кривой (мы используем обычное евклидово расстояние на плоскости), и (2) взяв по карандашу в обе руки, можно поставить их кончики в концах кривой и двигать их вдоль кривой до встречи, так, чтобы *в процессе расстояние между ними не увеличивалось.*

Существует ли кривая со свойством (1), но без свойства (2)?

Суммы и произведения

В шляпе лежат все целые числа, большие 1, но меньшие 100. Из неё достают два числа. Саманта узнаёт их сумму, а Порфирио — их

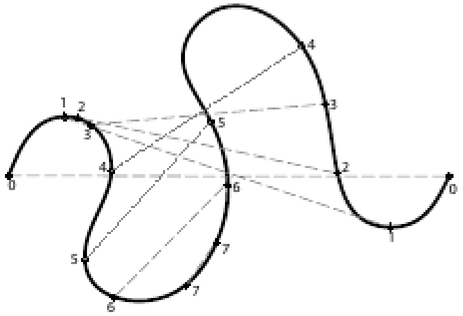


Рис. 39: Кривая с обоими свойствами.

произведение. Далее, Саманта говорит:

— Я знаю, что ты не знаешь этих чисел.

— Теперь я их знаю, — отвечает Порфирио.

— Теперь и я знаю, — говорит Саманта.

Что это были за числа?

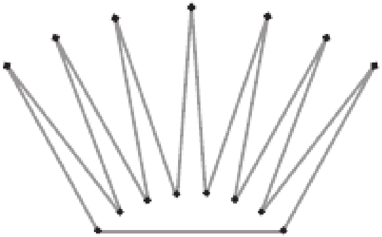


Рис. 40: Корона.

Складной многоугольник

Какова минимальная площадь простого нечётноугольника с единичными сторонами?

Примечание. Простой многоугольник это замкнутая ломаная без самопересечений, состоящая из конечного числа звеньев. Многоугольник не обязан быть выпуклым, например, он может выглядеть как один из многоугольников на рис. 40, 41 и 42. Очевидно, что у многоугольника на рисунке 42 площадь не меньше площади равностороннего треугольника с единичными сторонами, то есть $\sqrt{3}/4$. Несложно

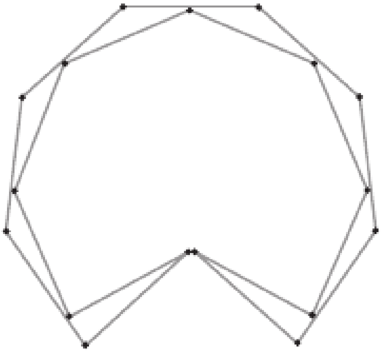


Рис. 41: Венок.

Рис. 42: Схлопнутый треугольник.

проверить, что и площадь короны на рис. 40 ограничена тем же числом. Но про венок на рис. 41 это уже не так очевидно.

Равносторонние *чётно*угольники могут иметь произвольно малую площадь, например, складываясь в очень остроконечную звезду. А что по поводу нечётноугольников — могут ли они иметь площадь меньше $\sqrt{3}/4$? Сможете ли вы это доказать или опровергнуть?

Источники и решения

Торт-мороженое

Эта замечательная головоломка досталась мне от французского аспиранта Тьерри Мора, а тот узнал её от своего школьного учителя Томаса Лафforга. Головоломка (происхождения которой Лафforг точно не знает) на самом деле включала в себя ещё один угол, определяющий зазор между дольками торта. Даже в этом случае глазурь ухитрится вернуться наверх после конечного числа операций; упорные читатели могут в этом убедиться. Наша формулировка (с нулевым зазором) уже достаточно удивительна и, думается, достаточно сложна.

Если вы решили, что при иррациональном x понадобится бесконечное число операций, то вы не одиноки. В конце концов, если n операций достаточно, то n-й разрез должен пройти по границе области, покрытой глазурью; как же смогла эта линия оказаться там, где торт никогда не разрезался?

Однако она там окажется. Причина в том, что когда долька переворачивается, её покрытая и непокрытая области меняются не только местами, но и порядком.

В этой головоломке, как и во многих алгоритмических задачах, полезно переопределить операцию так, чтобы менялось только состояние (в данном случае, область, покрытая глазурью), а не сама операция, которая пока что у нас меняется на каждом шагу. В нашем случае достаточно добавить поворот торта после каждой операции так, чтобы разрез всегда приходился на одно и то же место.

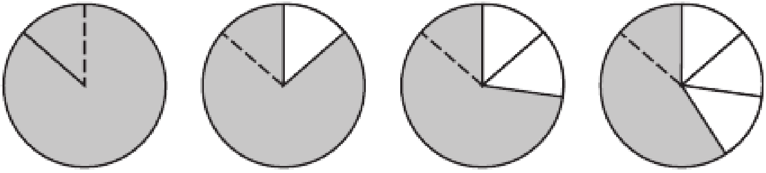


Рис. 43: Разрезы и перевороты с вращением.

Будем считать, что 0° — направление на север, 90° — на восток и так далее. Каждый раз будем разрезать по направлениям 0° и $-x$. Затем кусок переворачивается через линию 0° и оказывается между 0° и x. В это же время остальная часть торта поворачивается по часовой стрелке на угол x. На рис. 43 пунктирные линии показывают, где проходят разрезы на первых четырёх шагах.

Чтобы понять дальнейшее рассуждение, проще всего думать, что x чуть больше $360°/k$ для некоторого целого k. В этом случае первый разрез по уже отрезанной дольке произойдёт на k-м шаге, когда торт провернётся на полный оборот.

Итак, пусть k — наименьшее число долек, которое надо вырезать, чтобы добраться до конца торта. Другими словами, k — наименьшее целое число, большее или равное $360°/x$. Тогда $x = y + z$, где $y = 360°/k$ и

$$0 \leqslant z < \frac{360°}{k-1} - \frac{360°}{k} = \frac{360°}{(k-1)k}.$$

Конечно же, если $z = 0$, то $x = y = 360°/k$, и тогда k операций переведут всю глазурь на дно торта, а ещё k вернут её наверх. В противном случае, как мы увидим, невозможно достичь момента, когда вся глазурь окажется снизу.

По мере выполнения шагов будут появляться граничные линии (между покрытой и непокрытой областями) под углами $0, x, 2x, 3x, \ldots$ $\ldots, (k-1)x$, а затем $x-kz, 2x-kz, 3x-kz, \ldots, (k-1)x-kz$, и затем они повторяются. Действительно, легко проверить, что описанный набор граничных линий (скажем, S) замкнут относительно операции разрез-переворот-поворот. Одна такая операция переносит ix в $(i+1)x$, кроме $(k-1)x$, который переносится в $x - kz$; она же переносит $ix - kz$ в $(i+1)x-kz$, кроме $(k-1)x-kz$, который идёт в x. Тем временем разрез 0° всё время остаётся на месте. Отсюда следует, что набор граничных линий всегда является подмножеством S.

Уже можно заключить, что конечное число операций вернёт всю глазурь на верх, ведь у нас только $2k-1$ областей торта между $2k-1$ линиями из S. Каждая область может быть покрыта или не покрыта глазурью, поэтому число достижимых конфигураций не превышает 2^{2k-1}. Значит, процесс зациклится не позднее чем за 2^{2k-1} шагов. Но обязательно ли мы вернёмся к начальной конфигурации (все области покрыты глазурью)? Да, ведь операция обратима; если бы процесс впервые зациклился на другой конфигурации C, то существовали бы две разные конфигурации, которые приводили бы к C, а это невозможно.

Однако несложно полностью разобраться, что и как происходит. Между граничными линиями в S есть k секторов с углом $x - kz$ — назовём их $A_1, A_2, \ldots, A_k$, и ещё $k - 1$ сектор с углом kz — назовём их $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$. (На рис. 44 показан случай $k = 4$ при $x = 93{,}5°$.)

С начала процесса, A-сектора становятся не покрытыми глазурью, по порядку. После k операций они все без глазури. Затем они снова покрываются глазурью, снова по порядку, до тех пор, пока после $2k$ операций все покроются глазурью. Тем временем B-сектора также становятся не покрытыми по порядку. Поскольку их только $k - 1$,

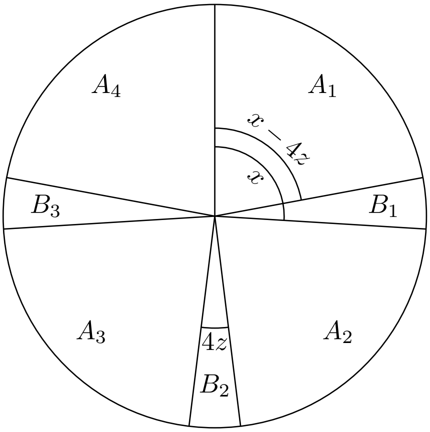


Рис. 44: Секторы при $x = 93{,}5^\circ$, значит, $z = 3{,}5^\circ$ и $k = 4$.

после $k-1$ шагов все они станут не покрытыми, и все снова покроются после $2k-2$ шагов.

Значит число шагов, необходимых, чтобы покрыть глазурью оба типа секторов, равно наименьшему общему кратному $2k$ и $2k-2$, то есть $2k(k-1)$. Значит потребуется $2k(k-1)$ шагов, конечно если $x \neq 360^\circ/k$; в этом случае B-сектора отсутствуют и достаточно $2k$ шагов.

Рассуждая таким же образом, заключаем, что если все сектора не покрыты глазурью после n шагов, то n равно нечётному числу домноженному на k и в то же время нечётному числу домноженному на $k-1$. Поскольку ровно одно из чисел k и $k-1$ нечётно, n чётно и нечётно одновременно, а это невозможно. Значит, если есть B-сектора, то вся глазурь никогда не окажется снизу.

А вот реакция на эту головоломку одного очень известного математика: «Трудно поверить, что вся глазурь вернётся наверх. Но если уж это произойдёт, то я уверен, что в какой-то момент вся глазурь окажется снизу!»

Эта задача предлагалась на Московской математической олимпиаде 1968 года [99, Задача 78676]. Более простое решение приводится в книге Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго [17, задача 31.27]. — *Прим. ред.*

Прыгание и перепрыгивание

Эту, на первый взгляд простую, головоломку придумал Джеймс Б. Ширер — математик из IBM. Она появилась на сайте головоломок IBM [98, апрель 2007]. Она решается парой полезных приёмов, но я бы не назвал её простой.

Пронумеруем кувшинки по порядку. Естественно начать с подсчёта вероятности p того, что лягушка, стартуя с 1, вернётся в какой-то момент в 0. Чтобы никогда не возвращаться, ей придётся совершить прыжок вперёд (вероятность 1/2) и не вернуться обратно трижды (вероятность $1 - p^3$). Таким образом, $(1 - p) = \frac{1}{2}(1 - p^3)$. Поделив на $(1-p)/2$, получим, что $2 = 1+p+p^2$, а это даёт знакомое нам золотое сечение: $p = (\sqrt{5} - 1)/2 \sim 0{,}618034$.

Однако подсчитать вероятность того, что лягушка перескакивает конкретную позицию (скажем, 1), так легко не получается. Можно было бы начать вычисления с момента, когда лягушка в первый раз попадёт в 0; ведь если это не произошло, то ей придётся попасть в 1. Однако легче вычислить вероятность того, что во время конкретного прыжка лягушка перескакивает через кувшинку, которую она не посещала и не посетит.

Для того чтобы это произошло, лягушка должна (а) прыгать вперёд в данный момент, (б) никогда не возвращаться обратно от того места, где она приземлилась, и (в) никогда в прошлом не посещать ту кувшинку, через которую она прыгает.

Можно считать, что кувшинка, которую перепрыгивает лягушка, стоит под номером 0. Важно заметить, что если обратить нумерацию и время, то событие (в) превращается в независимую копию события (б). Иначе говоря, лягушка ведёт себя ровно так же, если обратить время и рассматривать кувшинки в обратном порядке — она равновероятно прыгает на два вперёд или на один назад. Событие (в) означает, что «достигнув» -1, она не «вернётся» в 0.

Таким образом, вероятность того, что все три события произойдут, составляет $1/2 \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^2/2$. Однако это ещё не вероятность того, что 0 пропускается, а только вероятность того, что в данный момент лягушка перепрыгивает через пропущенную кувшинку.

Поскольку лягушка, движется в среднем со скоростью 1/2, она производит $(1 - p)^2$ пропущенных кувшинок на единицу пройденного пути. Отсюда следует, что доля кувшинок, на которые она попадает, составляет $1 - (1 - p)^2 = (3\sqrt{5} - 5)/2 \sim 0{,}854102$.

Три тени кривой

Эту головоломку мне подбросил Рик Кенион (Университет Британской Колумбии), который увидел её на двери Джорджа Бергмана в Бёркли. Бергман услышал её от Хендрика Ленстры из Бёркли и Университета Лейдена. По словам Бергмана, Ленстра видел игрушку, состоящую из кубической пластиковой коробки с прорезями, образующими своего рода лабиринт на каждой грани. При этом каждая пара противоположных граней имела одинаковые прорези, так что стержень, перпендикулярный этим двум граням, мог двигаться, проходя через эти два лабиринта. Но вместо одного стержня был объект, который, по сути, состоял из трёх взаимно перпендикулярных стержней, соединённых в точке, и каждый стержень проходил через лабиринты на паре противоположных граней коробки. Требовалось добраться из одной позиции в другую.

Кстати, эту головоломку теперь можно приобрести. Её придумал Оскар ван Девентер — блестящий голландский изобретатель, чьи механические головоломки часто воплощают увлекательные математические идеи.

Так или иначе, Ленстра обратил внимание на то, что лабиринт на каждой грани коробки обязан быть деревом; если бы он имел замкнутый цикл, то вывалилась бы часть пластика. Тогда он задался вопросом, какова будет область доступных позиций для центральной точки трёх стержней. Её проекция на каждую грань должна быть деревом, но может ли это множество само иметь цикл? Если да, то такой цикл должен проецироваться на каждую грань как дерево. Так и возник вопрос.

Ленстра задумался над этим в феврале 1994 года, или около того. Бергман расспрашивал об этом разных людей, но безуспешно. Наконец, в сентябре 1995 года Кевин Базард, в то время постдок в Бёркли, сообщил Бергману и Ленстре, что слышал про этот вопрос в Кембри-

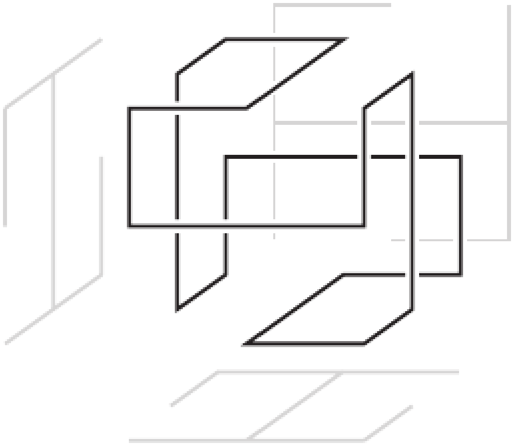


Рис. 45: Кривая три тени которой деревья.

дже (Англия), и что известен пример. Базарду этот пример показал Имре Лидер, комбинаторик из Кембриджского университета, который услышал о нём от Джона Рикарда, который его и придумал.

Пример Рикарда, обладающий группой симметрий шестого порядка, показан на рис. 45.

Игроки и победители

Эта задача пришла ко мне от Алона Орлицкого из Калифорнийского университета в Сан-Диего. Она иллюстрирует преимущества коммуникации *от студента к учителю.*

Тристан и Изольда могут заранее пометить команды четырёхзначными двоичными кодами от 0000 до 1111 в алфавитном порядке. Затем, когда Тристан узнает игравшие команды, он может отправить Изольде 00, 01, 10 или 11, кодируя ими *первую позицию, в которой различаются коды команд* — это может быть первый, второй, третий или четвёртый бит. Изольде следует отправить обратно известное ей значение этого бита у команды-победителя.

Например, если команда 0110 играла с командой 0011 и одержала победу, то Тристан отправит Изольде «01», указывая, что метки играющих команд отличаются во втором (слева) бите. Изольда отправит обратно «1» — значение этого бита у победившей команды.

Такая схема требует отправки трёх битов — на один бит меньше, чем метод, при котором Изольда отправляет весь код победившей команды. Однако на самом деле этот бит дает экспоненциальное улучшение! Если у нас всего $n = 2^{2^k}$ команд, то один метод требует 2^k битов, а другой всего $k + 1$.

Этой задаче посвящена пара статей Алона Орлицкого [93, 94]; в первой доказывается, что для $n = 2^{2^k}$ команд решение с $k + 1$ битом нельзя улучшить.

В другом варианте решения Тристан передаёт один бит, а Изольда — два. Для этого им надо писать числа не в двоичной, а в четверичной системе. Тогда в коде команды ровно два разряда — старший и младший. Тристан сообщает, в каком из них коды начинают отличаться, а Изольда передаёт два бита, которые и задают четверичную цифру в этом разряде.

Ещё вариант: Тристан и Изольда заранее делят команды на 4 группы по 4 команды и нумеруют команды в каждой из них. Передавая свой бит, Тристан сообщает, находятся ли обе команды в одной группе. Если да, Изольда отвечает номером победившей команды, если нет — номером группы, в которую входит победившая команда.

На самом деле в условии есть двусмысленность: что именно зовётся битом — двоичный символ 0/1 или единица информации? Если второе, то можно рассматривать варианты с передачей/возвратом нецелого числа битов. Например, если команд в чемпионате 27, то сообщая наименьший троичный разряд, в котором различаются коды игравших команд, Тристан потратит на передачу $\log_2 3 \approx 1{,}585$ бита информации. Передавая обратно значение этого разряда у победившей команды, Изольда потратит столько же. Итого ≈ 3.17 битов хватает для 27 команд, не так ли?

Чтобы различие между смыслами слова бит стало ещё более явным, рассмотрим следующую версию задачи, предложенною Константином Кнопом и Олегом Полубасовым. Тристан и Изольда обмениваются смс-сообщениями, используя только два символа 0/1, в частности, сообщение может быть пустым. При этом в чемпионате играют 63 команды. Какой суммарной длины двух сообщений хватит Тристану и Изольде, чтобы Тристан узнал результат матча между известной ему парой команд?

В этой версии задачи достаточно двух символов! Пронумеруем команды в смешанной системе счисления — старшим разрядом может быть любая цифра от 0 до 6, а вторым и третьим разрядами — цифры от 0 до 2. Ясно, что такой способ позволяет закодировать все $7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$ команды. Договоримся, что если коды команд отличаются в старшем разряде, то Тристан шлёт пустое сообщение, а если в каком-то из остальных — то шлёт сообщение из одного символа (0 или 1 соответственно). Получив пустое сообщение, Изольда может отправить обратно 0, 1 или 2 символа — у неё есть выбор из семи разных сообщений, а значит, она сможет закодировать все варианты старшей цифры; аналогично для двух других разрядов Изольда может отправить обратно 0 или 1 символ — то есть у неё есть выбор из трёх разных сообщений, которыми тоже можно закодировать все необходимые цифры. Такой протокол позволяет Тристану получить информацию о цифре победившей команды, а значит, и вычислить эту команду.

Если в новой постановке решать исходную задачу, когда в совокупности разрешается переслать не более трёх символов, то возможное количество команд становится равным фантастическому числу $59\,535 = 15 \cdot 7^2 \cdot 3^4$. Схема передачи информации аналогична описанной выше: в старшем разряде 15 цифр, в двух следующих — по 7, а в четырёх последних — по 3. Тристан передаёт Изольде номер разряда с помощью пустого сообщения для старшего разряда, «0» или «1» для двух следующих и так далее. Изольда отвечает кодом выигравшей команды в этом разряде. Если Тристан использовал 0 символов, Изольда может ответить $15 = 1+2+4+8$ различными сообщениями; 1 символ — $7 = 1+2+4$ сообщениями; 2 символа — $3 = 1 + 2$ сообщениями. — *Прим. ред.*

Подсказка для Чарли

На самом деле это серьёзная задача по коммуникационной сложности. Она была рассмотрена Лесом Валиантом из Гарварда в 1970-х годах, а сообщил мне о ней Амит Чакрабарти из Дартмутского колледжа. Решения этой и более общей задачи приведены в статье Павла Пудлака, Войтеха Рёдля и Йижи Шгалла [45].

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — биты, представляющие ответы, где (допустим) 1 = «да» и 0 = «нет». Будем рассматривать индексы по модулю n. Алиса отправляет Чарли x_{-i}, а Боб отправляет Чарли все значения $x_a + x_b$ для всех таких пар (a, b), что $a + b = j$ и $a \neq b$; сумма битов берётся по модулю 2. Обратите внимание, что таких пар не больше $n/2$.

Чарли знает x_{-i}, а также $x_{-i} + x_{i+j}$. Сложив их по модулю 2, он получит x_{i+j}.

Выглядит просто, но как до этого догадаться?

Сближение по кривой

Этим вопросом меня озадачил уже упомянутый выше Оскар ван Девентер. Он думал использовать такую кривую в механической головоломке. Такие кривые на самом деле существуют,. Сложнее найти пример, не обладающий вторым свойством, для которого это просто доказать.

На рис. 46 показана такая кривая, которую ван Девентер называет *неконкинкульной.*

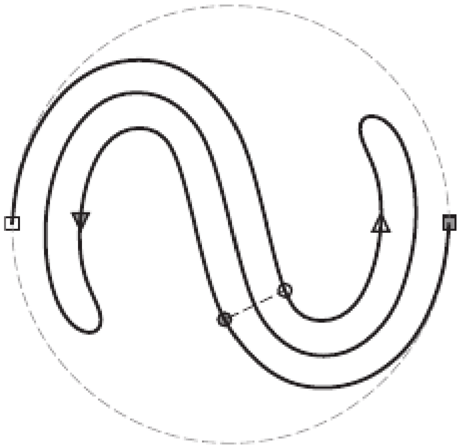


Рис. 46: Кривая со свойством (1), но без свойства (2).

Пунктирная окружность на рисунке добавлена для того, чтобы было ясно, что кривая удовлетворяет первому свойству. Остаётся убедиться, что второе свойство не выполнено. Предположим обратное, и пусть t — первый момент времени, когда один карандаш пройдёт от белого квадрата до белой стрелки, либо же другой — от серого квадрата до серой стрелки. Какое-то время *до* момента t два карандаша окажутся друг напротив друга, как белый и серый круги. Но *после* времени t им придётся разойтись, чтобы сойтись вместе, и это приведёт к увеличению расстояния.

Но как догадаться до такой кривой? (Если вас пугает этот вопрос, то пропустите этот и следующие два абзаца.) Представьте себе, что кривая параметризована параметром t; это означает, что существует непрерывная функция C из $[0, 1]$ в плоскость такая, что $C(0)$ — один конец кривой (скажем, левый), $C(1)$ — другой её конец, и $C(t)$ описывает кривую когда t бежит от 0 до 1. Успешное управление карандашами в соответствии со свойством (2) описывается парой непрерывных функций f и g из $[0, 1]$ в себя; в момент времени t карандаши расположены в точках $C(f(t))$ и $C(g(t))$. Таким образом, $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = g(1)$, и расстояние от $C(f(t))$ до $C(g(t))$ не возрастает по t. Вместе f и g описывают кривую от точки $(0, 1)$ до линии $x = y$, в треугольнике с вершинами в $(0, 1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Чтобы это стало невозможным сделать, хотелось бы найти *двойственный путь* между прямыми $x = 0$ и $y = 1$, не выходящий на $x = y$, и соответствующий парам точек на локально минимальном расстоянии. Такая кривая обязана пересечься с нашей кривой (f, g), а это даст подскок расстояния.

Этот двойственный путь соответствует другому виду манипуляций с карандашами: начинаем с левого карандаша в левой конечной точке и правого карандаша где-то на кривой, затем перемещаем обе точки в одном направлении вдоль кривой, пока правый карандаш не достигнет правой конечной точки. Если при этом ни одну точку нельзя переместить относительно другой без увеличения расстояния между ними, то мы достигли цели. На данной фигуре карандаши начинают с белого квадрата и серой стрелки, затем движутся вместе, пока не достигнут белой стрелки и серого квадрата, соответственно.

В награду за этот пример ваш автор получил прототип механической головоломки, замечательной, как и все творения ван Девентера.

Суммы и произведения

Эта забавная головоломка всплывала на различных формах в течение многих лет; она появилась в колонке Мартина Гарднера для Scientific American в декабре 1979 года, но по какой-то причине не вошла в сборник задач этой колонки [23]. Кажется удивительным, что столь туманной информации может хватить.

Головоломка (по сути, та же, что наша) была предложена независимо Стивом Феннером из Университета Южной Каролины и Биллом Готтесманом, разработчиком и производителем солнечных часов. Ход рассуждений ниже предложен Готтесманом.

Для начала обозначим число Порфирио через P, а число Саманты через S, и пусть $\{X, Y\}$ — неизвестная пара. Вначале Порфирио не знает ответа, значит числа X и Y не могут быть оба простыми, ни простым и его квадратом, ни простым и его кубом. Более того, ни одно из них не может быть большим простым числом (больше чем 50), так как в этом случае оно должно было бы быть одним из сомножителей P.

Следовательно, S не может превысить 53 или же быть равным сумме двух простых чисел, — ведь Саманта заранее знает, что Порфирио не может знать ответ. Это исключает все чётные числа — гипотеза Гольдбаха, проверенная далеко за 53, гласит, что каждое чётное число больше 2 представимо суммой двух простых. Остаются только некоторые из чисел, превышающие какое-то нечётное составное число на 2, а именно 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47 и 53. Готтесман назвал эти числа *золотыми*. (Например, $51 = 34 + 17$ и число 34×17 допускает единственное разложение на сомножители до 100. Поэтому 51 не золотое, хотя и превышает на 2 составное число 49.) Не нужно беспокоиться о суммах простого числа и его квадрата или куба, так как они все чётные.

Из того, что Порфирио теперь уже знает X и Y (и из того, что сумма и произведение двух положительных целых чисел полностью их определяет), выводится, что множители всего одного разложения P дают золотую сумму. Каждое золотое число G даёт Саманте $(G - 3)/2$ возможных пар $\{X, Y\}$ (например, для 11 можно собрать как $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$ или $5 + 6$); должно оказаться, что только одна из этих пар имеет произведение P с желаемым свойством.

Если $G = 11$, то первые две пары выше уже позволяют Порфирио найти X и Y. Для случая $2 + 9$, получаем $P = 18$, и оно раскладывается только как 2×9 (где $2 + 9 = 11$ является золотым) или как 3×6 (дающее не золотую сумму $S = 9$). В случае $3 + 8$ получаем $P = 24$, оно раскладывается как 2×12 (а $14 = 2 + 12$ не золотое) или 3×8 (и $11 = 3 + 8$ золотое) или 4×6 (а $10 = 4 + 6$ не золотое). Таким образом, G не может быть 11.

Следующее золотое число, 17, подходит! Ровно одна пара слагаемых даёт P, у которого единственная золотая сумма множителей равна 17, а именно 4 и 13 (поскольку $2 + 26 = 28$, не золотое).

Надо ещё перебрать остальные шесть пар слагаемых для 17, чтобы убедиться, что ни одна из них не даёт подходящего P. Это даёт надежду, что X и Y могут быть 4 и 13. Остаётся проверить, что $\{4, 13\}$ — единственный ответ. Для этого придётся повторить весь процесс для остальных восьми золотых чисел, и мы убедимся, что ни одно из них не подходит.

Решение этой головоломки не достаточно изящно, хоть я и предъявил это требование (к решённым) головоломкам. Однако то, что услышавший этот короткий разговор может восстановить числа, не зная ни суммы, ни произведения, служит небольшим вознаграждением.

Очень похожая задача разбирается в квантовской статье С. Артёмова, Ю. Гиматова и В. Фёдорова [64]. — *Прим. ред.*

Складной многоугольник

Эта головоломка пришла ко мне (как открытый вопрос) от Роберта Вейта из Юго-Восточного университета Индианы, который долго и тщетно пытался её решить. Мне удалось найти (на мой взгляд) изящное решение, представленное ниже. Позже выяснилось, что задачу уже решили К. Бёроцки, Г. Кертеша и Э. Макая [62].

Ответ такой: у каждого нечётноугольника с единичными сторонами площадь не меньше $\sqrt{3}/4$, причём равенство достигается только для треугольника.

Как такое доказывается? Поскольку утверждение тривиально для треугольников, возникает искушение воспользоваться индукцией по числу сторон. Как мы увидим, многоугольник с четырьмя и более сторонами разрезается диагональю на два многоугольника с меньшим числом сторон у каждого. Однако, вообще говоря, новые многоугольники не будут равносторонними. Таким образом, нужно придумать индукционное предположение, применимое к более широкому классу многоугольников, возможно, ко *всем.*

Приведённое ниже индукционное предположение отлично работает, хоть и выглядит топорно. Важно правильно подобрать параметр.

Обозначим через $\mathbb{O}^n$ множество всех целочисленных n-векторов нечётного веса, то есть

$$\mathbb{O}^n = \left\{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; \sum_i x_i \equiv 1 \pmod 2 \right\}.$$

Чтобы измерить, насколько многоугольник P близок к нечётноугольнику с единичными сторонами, мы воспользуемся параметром $u(P)$, назовём его *нескладностью* P, определённым как

$$u(P) = 1 - \min_{\vec{x} \in \mathbb{O}^n} \left\{ \sum_i |e_i - x_i| \right\}.$$

где $e_1, \dots, e_n$ — длины сторон P. Заметим, что $u(P) \leqslant 1$, и $u(P) = 1$ если P — нечётноугольник с единичными сторонами или даже любой многоугольник с целочисленными сторонами и нечётным периметром. С другой стороны, $u(P) \leqslant 0$ если, например, две из сторон многоугольника P имеют длину $\frac{1}{2}$, или же если у него чётный целый периметр.

Многоугольник будет считаться *хорошим*, если у него нет вырожденных вершин, то бишь нет вершин с внутренним углом 180°. Если P имеет стороны длины больше 1, то из него можно получить (возможно нехороший) многоугольник P^* со сторонами длины не более 1, подразбив каждую длинную сторону P. При этом, можно добиться, чтобы $u(P^*) = u(P)$.

Теперь мы переходим к индукционному доказательству того, что площадь $A(P)$ любого многоугольника P не меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}u(P)$. Отсюда немедленно последует, что площадь нечётноугольника с единичными сторонами не меньше $\sqrt{3}/4$.

Ключ к доказательству — *субаддитивность* функции $u(P)$; то есть $u(P) \leqslant u(Q) + u(R)$, где P — многоугольник (возможно, нехороший) и диагональ, скажем D, делит его на многоугольники Q и R.

Докажем субаддитивность. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — длины сторон P, а его диагональ D имеет длину d. Выберем такой $\vec{x} \in \mathbb{O}^n$, что $u(P) = 1 - \sum_i |e_i - x_i|$.

Пусть I — множество индексов сторон P, которые также являются сторонами Q, а J — индексы сторон R. Обозначим через $\vec{x}|I$ и $\vec{x}|J$ сужение $\vec{x}$ на стороны (кроме диагонали) Q и R соответственно; можно считать, что $\vec{x}|I$ имеет нечётный вес. Пусть d_0 — ближайшее чётное, а d_1 — ближайшее нечётное целое к d, так что $|d_1 - d_0| = 1$.

Взяв $\vec{x}|I$ вместе с D-координатой d_0 для Q и $\vec{x}|J$ вместе с D-координатой d_1 для R, получим

$$\begin{aligned} u(R) + u(Q) &\geqslant 1 - \sum_{i \in I} |e_i - x_i| - |d_0 - d| + 1 - \sum_{i \in J} |e_i - x_i| - |d_1 - d| = \\ &= 2 - \sum_i |e_i - x_i| - 1 = \\ &= u(P), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь докажем главное утверждение для *маленьких* треугольников. А именно, если T — треугольник со сторонами не длинней 1, то $A(T) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}u(T)$. Более того, равенство достигается только для равностороннего треугольника с единичными сторонами.

Пусть длины сторон треугольника равны a, b и c. Можно предположить, что целочисленный вектор, дающий $u(T)$, либо $(1, 0, 0)$, либо $(1, 1, 1)$. Поскольку $a < b + c$, в первом случае имеем $u(T) = 1 - (1 - a) - b - c < 0$, и нечего доказывать.

Во втором случае $u(T) = 1 - (1 - a) - (1 - b) - (1 - c) = 2s - 2$, где $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр треугольника. Можно считать, что $s > 1$, иначе опять нечего доказывать. В частности, каждое из чисел $a + b$, $b + c$ и $c + a$ больше 1.

Мы утверждаем, что при данном s, треугольник T имеет наименьшую площадь если две из его сторон единичные (а третья, соответственно, длины $2s - 2$).

Дабы это увидеть, зафиксируем a. По формуле Герона (её красивое доказательство можно найти в [34]) получаем

$$\frac{A(T)^2}{s(s-a)} = (s-b)(s-c) = s^2 - (b+c)s + bc.$$

Поскольку сумма $b+c$ постоянна, минимум достигается, при $b=1$ или $c=1$.

Далее, переобозначив стороны, можно считать что $a=1$. Повторив рассуждение, получим уже две единичные стороны. Иначе говоря, площадь T не меньше площади треугольника со сторонами 1, 1, $2s-2$, то есть

$$\sqrt{s(s-1)(s-1)(2-s)}.$$

Поскольку $s \in (1, \frac{3}{2}]$, получаем, что $s(2-s) \geqslant \frac{3}{4}$. Значит

$$A(T) \geqslant \sqrt{\tfrac{3}{4}(s-1)^2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(s-1) = \tfrac{\sqrt{3}}{4}u(T),$$

и равенство достигается только при $s = \frac{3}{2}$.

Перейдём к доказательству основного утверждения. Допустим, оно неверно. Пусть P — хороший многоугольник с минимальным числом сторон, скажем n, такой, что $A(P) < \frac{\sqrt{3}}{4}u(P)$. Если $n=3$, упорядочим треугольники лексикографически по $(\lceil c\rceil, \lceil b\rceil, \lceil a\rceil)$, где $a \leqslant b \leqslant c$ — длины сторон P, и потребуем, чтоб P был минимальным в этом (частичном) порядке.

Предположим сначала, что $n > 3$, и пусть D — любая внутренняя диагональ P. Такая диагональ найдётся, потому что если P выпуклый, то любые две не соседние вершины соединяются отрезком внутри P. В противном же случае есть вершина v с внутренним углом больше 180°. Если отсканировать внутренность P из v, начиная с направления одной из сторон при v и заканчивая другой, то мы увидим более чем одну из оставшихся сторон. Там, где сканирование переходит от одной такой стороны к другой, мы увидим вершину, с которой и можно соединить v диагональю.

Можно считать, что диагональ разбивает P на хорошие многоугольники Q и R, каждый с менее чем n сторонами и, следовательно, каждый удовлетворяет неравенству. Но по субаддитивности,

$$A(P) < u(P) \leqslant \tfrac{\sqrt{3}}{4}(u(Q) + u(R)) \leqslant A(Q) + A(R) = A(P)$$

— противоречие.

Остаётся рассмотреть случай $n=3$. Пусть A — вершина противоположная стороне a, и так далее. Из рассмотрения маленького треугольника, мы знаем что $\lceil c\rceil > 1$. Если $\lceil b\rceil < \lceil c\rceil$, проведём диагональ от C к любой новой вершине P^*; длина этой диагонали меньше, чем b, так как углы, прилегающие к длинной стороне, острые. Оба треугольника, на которые эта диагональ разбивает P^*, лежат ниже P в лексикографическом порядке. Применив субаддитивность, приходим к противоречию.

В случае если $\lceil c \rceil = \lceil b \rceil > 1$, выберем P^* так, чтобы на стороне b (соответственно на стороне c) на расстоянии 1 от вершины C (соответственно от вершины B) была новая вершина U (соответственно V). Проведём две диагонали, одну от U к V, и другую от V к C. Снова, применив субаддитивность, заключаем, что один из трёх полученных треугольников BCV, CVU и VUA, должен быть контрпримером. Однако все эти треугольники предшествуют P в лексикографическом порядке, и это противоречие завершает доказательство.

Остаётся заметить, что индукция, вместе со строгим неравенством для маленьких треугольников, влечёт строгость неравенства для любого хорошего многоугольника P, если только P сам не равносторонний треугольник с единичными сторонами.

Уф!

Глава 11

Не решённые и только-что решённые

> Мы должны знать — мы узнаем!
>
> — Давид Гильберт (1862—1943)

Плохая новость: эта глава может вас сломать. Но есть и хорошая новость: нерешённая задача совсем не значит, что она неразрешима. Например, две из нерешённых головоломок моей предыдущей книги были недавно решены. Первая была особенно известной, и с ней произошло нечто поистине удивительное.

Ангел и дьявол Конвея

Ангел летает над бесконечной шахматной доской и время от времени должен садиться на клетку. Он может пролететь не более 1000 ходов короля до очередного приземления.

Пока ангел в небе, дьявол, живущий под доской, может уничтожить любую клетку по своему выбору. На уничтоженную клетку ангел приземлиться уже не может.

Сможет ли дьявол добиться того, чтоб ангелу было некуда приземлиться?

Поразительно и непостижимо, но эта открытая тридцать лет задача была внезапно решена независимо и почти одновременно *четырьмя* людьми из четырёх разных стран [2, 14, 36, 39].

При этом идеи были по большей части схожими и не опирались на недавно разработанные методы. Более того, все доказательства строились на наблюдениях, сделанных самим Джоном Конвеем ещё в 1970-х. Четверо решивших были: Андраш Мате из Университета имени Этвёша Лоранда в Будапеште, Брайан Боудич из Университета Саутгемптона, Оддвар Клостер из SINTEF ICT в Осло и Питер Гакс из Бостонского университета.

Было давно известно, что ангела силы $p = 1$ (который перемещается на один ход короля) можно победить. Мате и Клостер показали, что ангел силы $p = 2$ выигрывает; Боудич доказал, что ангелу достаточно силы $p = 4$, а Гакс — что *какой-то* силы p достаточно.

Доказательства оказались достаточно простыми, так что Бела Боллобаш из Кембриджского университета и Университета Мемфиса смог разобрать их на восхитительном часовом докладе в Университете Иллинойса. Далее следует выжимка из его доклада и статьи Мате, показывающая, что ангел мощности 5 выигрывает.

Мы хотим показать, что если ангел выигрывает (в несколько более сильном смысле) против несколько более слабого противника, называемого *добрым дьяволом*, то он сможет выиграть и против изначального (*злого*) дьявола. Как мы увидим, против доброго дьявола работает удивительно простая стратегия.

Доброму дьяволу запрещено уничтожать клетку, на которую ангел мог бы приземлиться ранее; другими словами, нельзя уничтожить клетки на расстоянии не больше p от любой клетки ранее посещённой ангелом. При этом доброго дьявола мы считаем победившим, если ему удаётся запереть ангела на ограниченной части плоскости (иначе ангел может просто перепрыгивать с одной из ранее посещенных им клеток на другую).

Ангел может выиграть в изначальной игре, если для любого n он сможет уйти на расстояние n — это легко проверить. Нам надо показать, что если такое можно проделать с добрым дьяволом, то можно и со злым.

Предположим, что у злого дьявола *есть* стратегия, удерживающая ангела на расстоянии не более n от начальной клетки. Давайте покажем, как добрый дьявол сможет сделать то же самое. По данной последовательности ходов ангела построим *сокращённую* последовательность следующим образом. Пусть A_1 — самая ранняя клетка, посещённая ангелом, с которой он мог бы прыгнуть на последнюю клетку A_0. Удалим все ходы между A_1 и A_0. Далее пусть A_2 — самая ранняя клетка, посещённая ангелом, с которой он мог бы прыгнуть прямо на A_1. Удалим все ходы между A_2 и A_1. Продолжая таким образом, мы получаем сокращение исходной последовательности A_k, $A_{k-1}, \ldots, A_1$, A_0, в котором ангел не совершает прыжки на те клетки, которые мог бы посетить раньше.

Теперь заставим доброго дьявола реагировать на данную последовательность ходов ангела так, как это сделал бы злой дьявол в

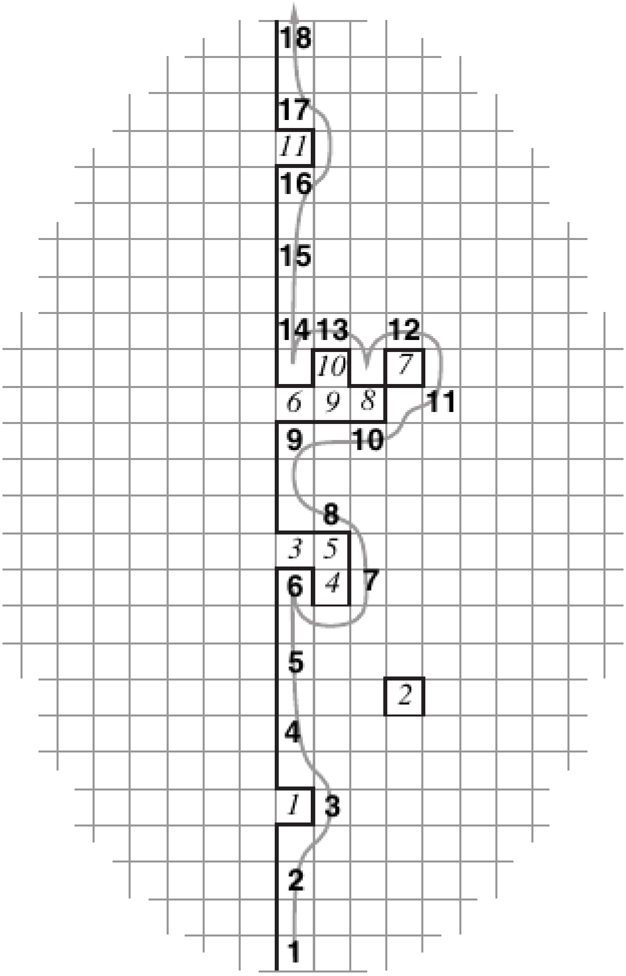


Рис. 47: Стена отмечена чёрным, ангел — жирным шрифтом, добрый дьявол — курсивом.

ответ на сокращённую последовательность, с одним изменением — если требуется съесть недозволенную клетку (или нужная клетка уже съедена), то вместо этого добрый дьявол съедает любую дозволенную. Легко показать, что если данная последовательность работает против доброго дьявола (то есть ангелу не приходится садиться на съеденную клетку), то сокращение этой последовательности срабатывает против злого. То есть если ангел сможет уйти на расстояние n, играя против доброго дьявола, то он сможет сделать то же самое и против злого, а значит, сможет выиграть.

Таким образом, мы свели задачу к убеганию от доброго дьявола, а сделать последнее очень просто — ангел может даже позволить себе бегать, не прыгая, по лабиринту из несъеденных клеток. Он начинает на клетке, нижний левый угол которой находится в начале координат, и мысленно рисует стену вдоль оси y. Каждый раз, когда добрый дьявол съедает клетку, ангел мысленно обводит её стеной. На каждом ходу ангел бежит касаясь стены левой рукой. В основном он бежит на север, но иногда ему приходится бежать на юг, чтобы обойти какой-то участок стены. Однако силы 5 хватает для того, чтобы продвигаться на север в среднем на 1 клетку за ход. В частости, ангел силы 5 сможет уйти произвольно далеко. Проделав дополнительную работу, можно убедиться, что хватит и силы 2. На рис. 47 показан возможный путь ангела силы 2.

Стратегия ангела, описанная выше, конечно же, *не сработает* против злого дьявола, который может, например, подготовить ловушку для ангела далеко по оси y — дьявол заманит ангела в конец полуострова, окружённого морем съеденных клеток, а затем отрежет его от берега. Добрый дьявол не может так сделать, ведь ему нельзя уничтожить вход на полуостров после того, как ангел туда прошёл.

К сожалению, то как стратегия против доброго дьявола превращается в стратегию против злого, объяснить трудновато, даже при том, что построение выше довольно прямолинейно. Это и объясняет, почему головоломка не решалась так долго, а ещё подверждает, что сокращения — мощный инструмент.

Мы попытаемся описать конструктивную стратегию из решения Оддвара Клостера [36]. Доказательство мы не приводим, а отсылаем заинтересованного читателя к оригинальной статье.

Во многом стратегия решения схожа с приведённой, но нам *не* потребуется добрый дьявол. Как и раньше ангел бежит вдоль воображаемой стены, держа её слева от себя. Изначально стена идёт вдоль оси y, но она будет обновляться после каждого хода дьявола.

Каждый раз, когда дьявол съедает клетку, ангел обследует доску вокруг продолжения пути, выясняя, нет ли там ловушек. Если необходимо, он изменяет несколько отрезков стены так, чтобы за стену попало побольше съеденных клеток. (Если бы дьявол не ел клетки справа от стены, то ангел шёл бы всё время на север.) То, что раз попало за стену, остаётся там навсегда. Этот процесс надо организовать таким образом, чтобы после каждого обновления пути правая клетка каждого будущего сегмента пути почти всегда оставалась несъеденной. Тогда ангел сможет двигаться бесконечно, обновляя путь.

Неформально, правило обновления можно описать так: ангел стремится сделать будущую часть пути как можно короче, допуская увеличение её длины, если он обходит справа одну съеденную клетку на каждые два добавленных отрезка. При соблюдении этого условия он хочет оставить за стеной как можно больше съеденных клеток. — *Прим. ред.*

Следующей головоломке ещё далеко до полного решения, однако до недавнего времени про неё вовсе ничего не было доказано.

Затор

Вершины бесконечной решётки на плоскости выбираются независимо с фиксированной вероятностью $p \in (0, 1)$. В каждую из выбранных вершин помещают автомобиль, направленный либо на север, либо на восток; в каждом случае направление выбирается независимо подбрасыванием монеты.

Движение регулируется светофорами, которые включают поочерёдно: «зелёный-восточный» и «зелёный-северный». При включённом зелёном-восточном каждый автомобиль, направленный на восток, правая соседняя вершина от которого не занята, перемещается в эту вершину; остальные (в том числе заблокированные другим восточным автомобилем), остаются на месте.

Когда включается зелёный-северный, каждый незаблокированный автомобиль, направленный на север, переезжает на следующий перекрёсток в северном направлении.

Эксперименты показывают, что если p меньше определённого критического значения p_0, то автомобили постепенно разъедутся (при этом каждый автомобиль будет иметь предельную скорость, равную скорости автомобиля, который вовсе не блокируется). Но когда $p > p_0$, происходит обратное: автомобили попадают в безнадёжный затор, то есть каждый автомобиль совершает лишь конечное число переездов и останавливается навсегда.

Эту модель движения транспорта на перекрёстке двух широких односторонних улиц представили О. Бихам, А. А. Миддлтон и Д. Левин в 1992 году [57]. Её странное поведение привлекло много внимания.

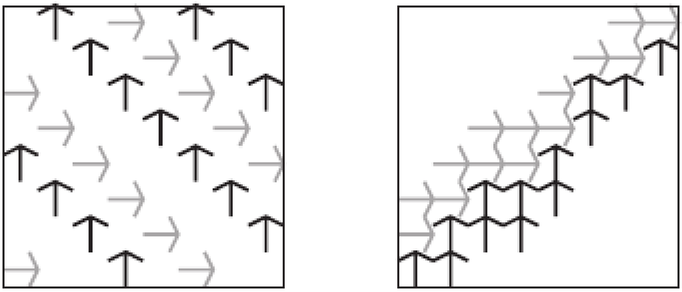


Рис. 48: Свободное движение слева и затор справа.

На рис. 48 изображено как выглядят свободные и заторные конфигурации под конец, это то, что обычно появлялось в экспериментах, проводимых Раисой Де Соуза [7], ныне она преподаёт в Университете Калифорнии в Дэвисе.

Весной 2005 года в Исследовательском институте математических наук в Бёркли Омер Ангел, Эндер Холройд и Джеймс Мартин сделали первый существенный шаг: они доказали существование фазы затора. Другими словами, при достаточно высокой плотности машин каждая машина совершит лишь конечное число переездов. Мы не приводим доказательство, но оно весьма изобретательно использует теорию перколяций, и с ним очень стоит ознакомиться [13].

Конечно же, каждый раз, когда решается одна математическая задача, появляются три новые. Уверен, что следующие несколько красавиц заслуживают внимания.

Упаковка прямоугольников

Дан конечный набор точек в квадрате, включающий его нижний левый угол. Разрешается выбрать набор непересекающихся прямоугольников, лежащих в квадрате, левые нижние вершины которых образуют данный набор точек. Можно ли выбрать прямоугольники так, чтобы их общая площадь была не меньше половины площади всего квадрата?

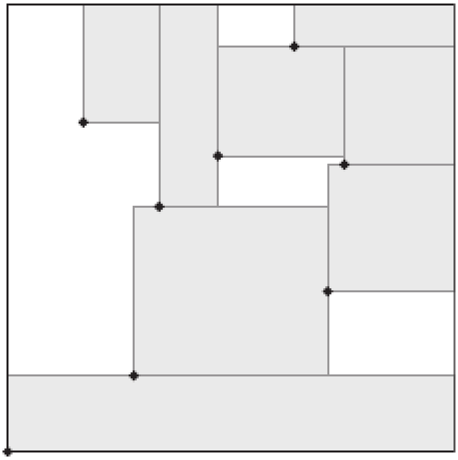


Рис. 49: Прямоугольники покрывают больше половины площади.

Эту сбивающую с толку задачу я узнал больше десяти лет назад, о ней мне сообщил Билл Паллиблэнк (математик и администратор) из IBM, который не помнил, откуда она к нему попала. С тех пор задача всплывала то там, то сям, но мне не удалось найти более ранний источник. В июне 2004 года она появилась на веб-странице головоломок IBM [98], но так и осталась нерешённой. Я даже не могу доказать то, что прямоугольники могут покрыть 1% площади квадрата.

На рис. 49 изображена конфигурация точек вместе с подходящим набором прямоугольников.

Произведения и суммы

Можно ли раскрасить неотрицательные целые числа $\{0, 1, 2, \dots\}$ конечным числом цветов так, чтобы сумма $x + y$ и произведение xy любых двух целых чисел были разных цветов?

Эта задача была предложена Дэвидом Гэлвином, постдоком из Университета Пенсильвании. Вроде как известен набор из шести чисел, таких, что любые два из них являются произведением и суммой некоторой пары, так что для раскраски потребуется по крайней мере шесть цветов. С другой стороны, известно, что не существует произвольно больших наборов с указанным свойством.

Ответ отрицателен даже для более сильной формулировки — в любой раскраске конечным числом цветов найдётся монохроматическая тройка $(x, x+y, xy)$. Это доказал Джоэл Морейра в своей диссертации [91]. — *Прим. ред.*

Следующая загадка связана с разновидностью карточной игры в пьяницу, придуманной Борисом Алексеевым из Университета Джорджии. В неё активно играла команда США недавней математической олимпиады.

Разновидность пьяницы

Двум игрокам сдают по некоторому числу карт, сначала *в открытую* (рубашкой вниз). На каждой карте написано целое число, все числа различны. В каждом раунде игроки одновременно выкладывают по карте; старшая карта сбрасывается, а младшая передаётся другому игроку. Проигрывает тот у кого кончились карты.

При увеличении числа сдаваемых карт, какова предельная вероятность того, что у одного из игроков будет выигрышная стратегия?

Борис (как и я) подозревает, что эта вероятность стремится к нулю, но не не кажется, что просто разобраться в этой простой вариации игры в пьяницу.

А вот неожиданная загадка от Стива Хедетниеми из Университета Клемсона:

Покрытие ферзями

Пусть $f(n)$ — минимальное число ферзей, которые можно расставить на доске размера $n \times n$ так, чтобы каждая клетка была под ферзём или под боем ферзя. Верно ли, что $f(n+1) \geqslant f(n)$ при всех n?

Есть уйма головоломок о расстановке шахматных фигур (обычно ферзей или коней) на доске $n \times n$. Ферзей обычно стараются расставить как можно большее, чтоб ни один не бил другого. Однако нам нужно наименьшее число ферзей, контролирующих всю доску. Трудно поверить, что для контроля меньшего числа клеток может понадобиться больше ферзей, однако на большей доске есть больше мест, откуда ферзь может контролировать свои владения, и это нужно учитывать!

А вот увлекательная, но на самом деле довольно серьёзная головоломка, которая уже многие годы сбивает с толку специалистов по оптимизации.

Встреча

Двое приятелей потеряли друг друга в огромном торговом центре. На поиск друг друга в одном магазине у них уходит по 15 минут, при этом время перемещения от одного магазина к другому ничтожно мало (торговый центр — удобно устроенный огромный многоэтажный квадрат). Они не договорились о месте встречи и не определили заранее, кто будет искать, а кто останется на месте. Как им следует действовать, чтобы минимизировать ожидаемое время поиска?

Если один из них ищет, а другой ждёт на месте, то в среднем потребуется проверить $n/2$ магазинов, здесь n — число магазинов в торговом центре (предполагается, что оно большое). Однако наши правила запрещают протокол, нарушающий симметрию; нельзя, например, чтоб младший искал, а старший сидел на месте. Если оба ищут, то в среднем потребуется n шагов, до того как они окажутся в одном и том же магазине в одно и то же время и найдут друг-друга.

В 1976 году этот вопрос был сформулирован (иначе) Стивом Альперном из Лондонской школы экономики. О нём и некоторых других вопросах можно почитать на веб-сайте Ричарда Вебера из Кембриджского университета [110]. Вебер и Э. Дж. Андерсон предложили алгоритм, согласно которому каждый из приятелей бросает изогнутую монетку, решая с вероятностью около 0,2475 оставаться на месте или же проверять магазины в случайном порядке, а в случае неудачи повторять процесс каждые 15 минут. Это приводит к успеху в среднем за $0{,}8289n$ шагов. Пока никто не придумал ничего лучшего, может быть, что лучшего добиться нельзя.

Подкрученный прямоугольник

Вы, наверное, знаете, что ленту Мёбиуса можно получить из бумажной полоски, склеив её концы с подкруткой на пол оборота. А какой длины нужна полоска? Иными словами, какие пропорции прямоугольника оптимальны для склейки ленты Мёбиуса, без растяжения или сгибания?

Дмитрий Фукс и Сергей Табачников представили эту головоломку [11, Лекция 14] вместе с доказательством, что отношение длины к ширине не может быть меньше $\pi/2 \sim 1{,}57$, и примером для любого отношения больше $\sqrt{3} \sim 1{,}73$. Однако точный ответ неизвестен.

Задача решена Ричардом Шварцем [104]; отношение обязано превосходить $\sqrt{3}$. — *Прим. ред.*

Торговые автоматы

Несколько торговых автоматов в местной игровой зоне работают случайным образом, иногда выдавая много жевательных резинок за раз, а иногда не выдавая вообще ничего. Однако в среднем каждый автомат выдаёт одну жевательную резинку за раз. Какова максимально возможная вероятность того, что все n автоматов за раз выдадут больше чем n жевательных резинок?

Эта головоломка (сформулированная в терминах независимых случайных величин) принадлежит Ури Фейге из Microsoft Research. Кажется оптимальным заставить каждый автомат выдавать $n+1$ жевательную резинку с вероятностью $1/(n+1)$, а иначе ни одной. В этом случае мы получим больше, чем n жевательных резинок, если хоть один автомат сработает. Это происходит с вероятностью

$$1-(1-\tfrac{1}{n+1})^{n+1},$$

которая близка к $1-1/e \sim 63\%$, при больших n. Пока никто не придумал ничего лучшего. Сам Фейге доказал, что вероятность получить более чем n жевательных резинок не может превысить $12/13$.

Но разве может такая задача быть трудной?

Круги на плоскости

Дано множество открытых единичных кругов, которое тысячекратно покрывает плоскость; то есть, каждая точка плоскости покрывается как минимум тысячью кругами. Докажите, что круги можно раскрасить в красный и синий цвета так, чтобы красные и синие круги по отдельности покрывали всю плоскость.

Эту замечательную задачу придумал Янош Пах из Нью-Йоркского университета (он же и главный специалист в этом вопросе). В своей статье [42] он доказал, что для любого симметричного многоугольника P и любого положительного целого числа r существует число k, такое что любое k-кратное покрытие плоскости параллельными переносами P можно разбить на r покрытий. Но если многоугольник заменить на круг, то даже при $r = 2$ неизвестно, найдётся ли такое k.

Я считаю, что $k = 4$ должно хватить. А вы, что скажете?

Приложение A

Послесловие

> Я надеюсь, что потомки благосклонно отнесутся ко мне не только за то, что я объяснил, но и за то, что я намеренно пропустил, дабы удовольствие открытия досталось другим.
>
> — Рене Декарт (1596—1650), Геометрия

Верите вы Декарту или нет, но не стоит верить мне, если я скажу, что намеренно пропустил кое-что, дабы вы нашли это сами. Однако в мой задачник не попало *ужасно много* отличных увлекательных головоломок, а ещё больше таких предстоит придумать. Среди приведённых ссылок многие доступны онлайн; там эти головоломки стоит поискать, и конечно, вы можете придумывать свои собственные.

Головоломки не замена математическому образованию, но они помогут запомнить идеи, которые вы выучили, а ещё развлекут и разовьют ум. Этот задачник преследует ещё и дополнительную цель: помешать математической интуиции заниматься самолюбованием.

Во всяком случае, мне это помогает.

Питер Уилкнер
28 февраля 2007

Указатель головоломок

Список литературы

[1] G. Aggarwal, A. Fiat, A. V. Goldberg, J. D. Hartline, N. Immorlica, M.u Sudan. «Derandomization of auctions». *STOC'05: Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing.* ACM, New York, 2005, c. 619—625.

[2] B. H. Bowditch. «The angel game in the plane». *Combin. Probab. Comput.* 16.3 (2007), c. 345—362.

[3] B. Brown. «Solution to Problem E36». *Amer. Math. Monthly* 40 (1933), c. 607.

[4] J. G. Coffin. «Problem 3009». *Amer. Math. Monthly* 30.30 (1923), c. 76.

[5] E. Curtin, M. Warshauer. «The locker puzzle». *The Mathematical Intelligencer* 28.1 (2006), c. 28—31.

[6] P. Diaconis, R. L. Graham, B. Sturmfels. «Primitive partition identities». *Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993).* T. 2. Bolyai Soc. Math. Stud. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, c. 173—192.

[7] R. M. D'Souza. «Coexisting phases and lattice dependence of a cellular automaton model for traffic flow». *Physical Review E* 71.6 (2005), c. 066112.

[8] S. J. Einhorn, I. J. Schoenberg. «Problem 3a in "Puzzle section"». *Pi Mu Epsilon Journal* 8.3 (1985), c. 178.

[9] Д. В. Фомин, К. П. Кохась. *Ленинградские математические олимпиады 1961—1991.* 1500-е изд. 2022.

[10] A. Friedland. *Puzzles in math and logic: 100 new recreations.* Dover, 1971.

[11] С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс. *Математический дивертисмент.* 2011.

[12] G. Sanderson. *The most unexpected answer to a counting puzzle.* 3Blue1Brown. 13 янв. 2019. URL: `https://www.3blue1brown.com/lessons/clacks`.

[13] O. Angel, A. E. Holroyd, J. B. Martin. «The jammed phase of the Biham–Middleton–Levine traffic model». *Electron. Comm. Probab.* 10 (2005), c. 167—178.

[14] P. Gács. «The angel wins». *arXiv preprint arXiv:0706.2817* (2007).

[15] A. Gál, P. B. Miltersen. «The cell probe complexity of succinct data structures». *Automata, languages and programming.* T. 2719. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 2003, c. 332—344.

[16] J. Gallian, D. Rusin. «Cyclotomic polynomials and nonstandard dice». *Discrete Math.* 27.3 (1979), c. 245—259.

[17] Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. *Московские математические олимпиады.* 1986.

[18] M. Gardner. *Mathematical carnival.* 1977.

[19] M. Gardner. «Mathematical games». *Scientific American* 238 (1978), c. 19—32.

[20] M. Gardner. *The sixth Scientific american book of nathematical puzzles and diversions.* 1971.

[21] M. Gardner. *Hexaflexagons and other mathematical diversions: The first Scientific American book of puzzles and games.* 1988.

[22] M. Gardner. *Penrose tiles to trapdoor ciphers.* Recreational Mathematics. 1989. [Перевод: М. Гарднер, *«От мозаик Пенроуза к надёжным шифрам»*, Мир 1993].

[23] M. Gardner. *The last recreations: hydras, eggs, and other mathematical mystifications.* 1997.

[24] E. Berlekamp, J. P. Buhler. «Puzzle column». *Emissary* (). Newsletter of the Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA.

[25] M. Gardner, D. S. Richards. *The colossal book of short puzzles and problems: combinatorics, probability, algebra, geometry, topology, chess, logic, cryptarithms, wordplay, physics and other topics of recreational mathematics.* 2005.

[26] E. Goles, J. Olivos. «Periodic behaviour of generalized threshold functions». *Discrete Math.* 30.2 (1980), с. 187—189.

[27] O. Gossner, P. Hernandez, A. Neyman и др. «Online matching pennies». *Technical Report, Center for the Study of Rationality* (2003).

[28] N. Goyal, S. Lodha, S. M. Muthukrishnan. «The Graham–Knowlton problem revisited». *Theory Comput. Syst.* 39.3 (2006), с. 399—412.

[29] E. Gutkin. «Blocking of billiard orbits and security for polygons and flat surfaces». *Geom. Funct. Anal.* 15.1 (2005), с. 83—105.

[30] J. F. Hall. «Fun with stacking blocks». *American journal of physics* 73.12 (2005), с. 1107—1116.

[31] C. S. Hardin, A. D. Taylor. «A peculiar connection between the axiom of choice and predicting the future». *Amer. Math. Monthly* 115.2 (2008), с. 91—96.

[32] G. H. Hardy. «On certain oscillating series». *Quart. J. Pure Appl. Math* 38 (1907), с. 269—288.

[33] C. P. Jargodzki, F. Potter. «Challenge 271: A staircase to infinity». *Mad about physics: braintwisters, paradoxes, and curiosities*, с. 246.

[34] D. A. Klain. «An intuitive derivation of Heron's formula». *Amer. Math. Monthly* 111.8 (2004), с. 709—712.

[35] E. R. Berlekamp, J.n H. Conway, R. K. Guy. *Winning ways for your mathematical plays. Vol. I, II, III, and IV.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA.

[36] O. Kloster. «A solution to the angel problem». *Theoret. Comput. Sci.* 389.1-2 (2007), с. 152—161.

[37] Д. Е. Кнут. *Искуство программирования. Том 3.* 1978.

[38] J. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon. *Which way did the bicycle go?: and other intriguing mathematical mysteries.* 18. 1996.

[39] A. Máthé. «The angel of power 2 wins». *Combin. Probab. Comput.* 16.3 (2007), с. 363—374.

[40] Ş. Nacu, Y. Peres. «Fast simulation of new coins from old». *Ann. Appl. Probab.* 15.1A (2005), с. 93—115.

[41] B. E. Oakley, R. L. Perry. «A sampling process». *The Mathematical Gazette* 49.367 (1965), с. 42—44.

[42] J. Pach. «Covering the plane with convex polygons». *Discrete Comput. Geom.* 1.1 (1986), с. 73—81.

[43] M. Paterson, U. Zwick. «Overhang». *Amer. Math. Monthly* 116.1 (2009), с. 19—44.

[44] M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler, U. Zwick. «Maximum overhang». *Amer. Math. Monthly* 116.9 (2009), с. 763—787.

[45] P. Pudlák, V. Rödl, J. Sgall. «Boolean circuits, tensor ranks, and communication complexity». *SIAM J. Comput.* 26.3 (1997), с. 605—633.

[46] E. Berlekamp, T. Rodgers, ред. *The mathemagician and pied puzzler.* A collection in tribute to Martin Gardner, Papers from the Gathering for Gardner Meeting (G4G1) held in Atlanta, GA, January 1993. 1999.

[47] S. Robinson. «Why mathematicians now care about their hat color». *The New York Times, Science Times Section, page D* 5 (2001).

[48] D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov, I. M. Yaglom. *The USSR Olympiad problem book. Selected problems and theorems of elementary mathematics.* Под ред. Irving Sussman, John Maykovich. 1962. [Оригинал: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом «Избранные задачи и теоремы элементарной математики.» Часть 1. Арифметика и алгебра. (Выпуск 1 серии «Библиотека математического кружка», изд. 5-е) М., Наука, 1976.]

[49] I. J. Schoenberg. *Mathematical time exposures.* 1982.

[50] S. Singh. *The code book: the science of secrecy from ancient Egypt to quantum cryptography.* 2000.

[51] R. Sprague. *Recreation in mathematics.* 1963.

[52] R. M. Smullyan. *What is the name of this book? The riddle of Dracula and other logical puzzles.* 1978. [Перевод: Р. М. Смаллиан *«Как же называется эта книга?»* пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Мир, 1981.]

[53] S. Tabachnikov. *Geometry and billiards.* Т. 30. Student Mathematical Library. 2005.

[54] B. E. Tenner. «A non-messing-up phenomenon for posets». *Ann. Comb.* 11.1 (2007), с. 101—114.

[55] C. Wang. *Sense and nonsense of statistical inference.* Т. 6. Popular Statistics. Controversy, misuse, and subtlety. 1993.

[56] P. Winkler. *Mathematical puzzles: a connoisseur's collection.* 2004. [Перевод: П. Уинклер, *«Математические головоломки. Коллекция гурмана»*, МЦНМО 2024].

[57] O. Biham, A. A. Middleton, D. Levine. «Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models». *Physical Review A* 46.10 (1992), R6124.

[58] W. A. Wythoff. «A modification of the game of Nim». *Nieuw Arch. Wiskunde* 7.2 (1907), с. 199—202.

[59] N. Yoshigahara. *Puzzles 101: a puzzlemaster's challenge.* 2003.

[60] H. Boerner. *Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik.* Т. Band LXXIV. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. 1955. Second edition 1967.

[61] E. D. Bolker, H. Crapo. «Bracing rectangular frameworks. I». *SIAM J. Appl. Math.* 36.3 (1979), с. 473—490.

[62] K. Böröczky, G. Kertész, E. Makai Jr. «The minimum area of a simple polygon with given side lengths». Т. 39. 1-3. Discrete geometry and rigidity (Budapest, 1999). 1999, с. 33—49.

[63] I. Agol. *Curves on potatoes.* MathOverflow. eprint: `https://mathoverflow.net/q/363950`.

[64] С. Артемов, Ю. Гиматов, В. Федоров. «Много битов из ничего». *Квант* 3 (1977).

[65] И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. *Старинные задачи.* 1994.

[66] D. Benko. «A new approach to Hilbert's third problem». *Amer. Math. Monthly* 114.8 (2007), с. 665—676.

[67] *The puzzle toad.* `http://www.cs.cmu.edu/puzzle`.

[68] D. Burago, S. Ferleger, A. Kononenko. «Uniform estimates on the number of collisions in semi-dispersing billiards». *Ann. of Math. (2)* 147.3 (1998), с. 695—708.

[69] Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. *Геометрические неравенства.* 1980.

[70] Слоэн Н Конвей Д. *Упаковки шаров, решетки и группы.* 1990.

[71] J. Cowan, J. V. Bartlett, D. Haldane, A. Harris, F. Walley, R. Cathcart, R. Bishop, G. G. T. Masterson, W. Addis, F. W. Lambert и др. «Design education based on an expressed statement of the design process». *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 72.4 (1982), с. 659—673.

[72] *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.* `http://www.cut-the-knot.org`.

[73] E. Demaine, M. Demaine, Y. Minsky, J. Mitchell, R. Rivest, M. Pătraşcu. «Picture-hanging puzzles». *Theory Comput. Syst.* 54.4 (2014), с. 531—550.

[74] Л. Е. Диксон. *Введение в теорию чисел.* Тбилиси, Изд-во и тип. Акад. наук Груз. ССР, 1941.

[75] N. D. Elkies. *Noam's mathematical miscellany.* `https://people.math.harvard.edu/~elkies/Misc/index.html`.

[76] Е. Епифанов. *Как повесить картину?*

[77] W. Fenchel. «Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven». *Math. Ann.* 101.1 (1929), с. 238—252.

[78] T. S. Ferguson. *A course in game theory.* 2020.

[79] P. Gartside, S. Greenwood. «Brunnian links». *Fund. Math.* 193.3 (2007), с. 259—276.

[80] N. Goyal, M. Saks. «A parallel search game». *Random Structures Algorithms* 27.2 (2005), с. 227—234.

[81] Р. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика.* Москва: Мир, 1998.

[82] С. Грибок, К. Кноп. «Пятнадцать человек на сундук мертвеца». *Квант* 1 (2016), с. 9—15.

[83] P. Halmos. *Problems for mathematicians, young and old.* Т. 12. The Dolciani Mathematical Expositions. 1991.

[84] В. Кириченко, В. Тиморин. «Справедливый делёж, последовательность Туэ — Морса и снежинка Коха». *Квантик* 12 (2023), с. 2—6.

[85] В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. *Математичні олімпіади школярів України. 2001–2006 рр.* Львів: Каменяр, 2008.

[86] И. С. Маркова. *Новые олимпиады по математике.* 2005.

[87] *Math fun facts.* `https://math.hmc.edu/funfacts/`.

[88] А. Матулис, А. Савукинас. «Ферзя — в угол, «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи». *Квант* 7 (1984), с. 18—21.

[89] *Независимый Московский Университет, 30 лет.* 2022. URL: `https://old.mccme.ru/ium/IUM_30_e-version.pdf`.

[90] Л. Д. Мешалкин. *Сборник задач по теории вероятностей.* 1963.

[91] J. Moreira. *Partition regular polynomial patterns in commutative semigroups.* Thesis (Ph.D.)–The Ohio State University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2016, с. 140.

[92] *Numeral Systems of the World's Languages.* `https://lingweb.eva.mpg.de/channumerals/`.

[93] A. Orlitsky. «Worst-case interactive communication. I. Two messages are almost optimal». *IEEE Trans. Inform. Theory* 36.5 (1990), с. 1111—1126.

[94] A. Orlitsky. «Worst-case interactive communication. II. Two messages are not optimal». *IEEE Trans. Inform. Theory* 37.4 (1991), с. 995—1005.

[95] A. Petrunin. *Diameter of m-fold cover.* MathOverflow. eprint: `https://mathoverflow.net/q/7732`.

[96] А. Петрунин. «Сколько деревьев в графе». *Квант* 9 (2018), с. 9—13.

[97] A. Petrunin, S. Stadler. «Six proofs of the Fáry–Milnor theorem». *The American Mathematical Monthly* 131.3 (дек. 2023), с. 239—251.

[98] *Ponder this.* `https://research.ibm.com/haifa/ponderthis/`.

[99] *Задачи.* URL: `https://www.problems.ru/`.

[100] E. Prouhet. «Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série 1* 33 (1851), с. 225.

[101] Third Baron Rayleigh John William Strutt. *The Theory of Sound.* 2nd. Macmillan, 1894. [Перевод: Дж. В. Стретт (лорд Рэлей), *«Теория звука, в 2-х томах.»* — М.: Гостехиздат, 1955.

[102] Ю. Г. Решетняк. «К теории пространств кривизны, не большей K». *Матем. сб.* 52(94).3 (1960), с. 789—798.

[103] А. Саломаа. *Жемчужины теории формальных языков.* Под ред. А. Л. Семёнов. Пер. А. А. Мучник. Москва: Мир, 1986, с. 159.

[104] R. Schwartz. «The optimal paper Moebius band». *Ann. of Math. (2)* 201.1 (2025), с. 291—305.

[105] A. Shen. «Unexpected proofs. Boxes in a train». *Math. Intelligencer* 21.3 (1999), с. 48—50.

[106] G. Sicherman. *Sicherman Dice.*

[107] J. Steiner. «Über parallele flächen». *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss* 2 (1840), с. 114—118.

[108] А. Толпыго. *Тысяча задач Международного математического Турнира городов.* Москва: МЦНМО, 2010.

[109] Л. Ф. Тот. «Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве» (1958).

[110] R. Weber. *Symmetric rendezvous search.* `http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/talks/weber-k3-seminar.pdf`.

[111] P. Winkler. *Seven puzzles you think you must not have heard correctly.* `https://math.dartmouth.edu/~pw/solutions.pdf`.

[112] E. M. Wright. «Prouhet's 1851 solution of the Tarry-Escott problem of 1910». *Amer. Math. Monthly* 66 (1959), с. 199—201.

[113] И. М. Яглом. «Две игры со спичками». *Квант* 2 (1971), с. 4—10.

[114] И. М. Яглом, А. М. Яглом. *Неэлементарные задачи в элементарном изложении.* Москва: КомКнига, 2007.

[115] S. Zamora. *Differential geometry - 6 - spherical curves × Fenchel theorem.* `https://www.youtube.com/watch?v=FTjzKbREG_o`.

[116] А. Н. Земляков, Г. А. Гальперин. *Математические бильярды.* Библиотечка «Квант». Наука, 1990.

Оглавление