

# О работе Чебураторе

А. Гиль и А. Петрунин

## Аннотация

Заметка основана на лекции прочитанной первым автором в школьном математическом кружке Northwest Academy of Science.

## 1 Вероятность и математические ожидание

Подкидывая кубик, с равными шансами мы можем получить 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Результат такого *испытания* — число очков, выпавшее на верхней грани кубика — называется *случайной величиной*. Естественно предположить, что этот результат не зависит от других таких же испытаний.

При увеличении числа испытаний до бесконечности доля испытаний, давших определённый исход (например, 5 очков), от общего числа испытаний, стремится к пределу, который называется *вероятностью* этого исхода. Поскольку шансы любого из шести исходов равны, вероятность каждого исхода равна  $\frac{1}{6}$ .

Представим себе, что мы увеличиваем число испытаний до бесконечности и после каждого броска считаем среднее арифметическое полученных случайных величин. Если эта последовательность стремится к определённому числу, то такое число называется *математическим ожиданием* или *средним* случайной величины.

В нашем примере искомое среднее числа очков можно посчитать по формуле

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3\frac{1}{2}.$$

Действительно, в пределе, на долю каждого исхода 1, 2, 3, 4, 5 и 6 приходится  $\frac{1}{6}$  числа всех исходов, и, значит, их среднее арифметическое должно стремиться к левой стороне равенства.

Иначе говоря, для вычисления среднего мы должны вычислить *взвешенную сумму* значений нашей величины для каждого исхода (1, 2, 3, 4, 5 и 6), взяв вероятность каждого исхода ( $\frac{1}{6}$ ) в качестве веса.

В этой заметке мы обсудим способы нахождения вероятностей и средних в более сложных ситуациях.

## 2 Санкт-Петербургский парадокс

Вообще говоря, может оказаться, что среднее (математическое ожидание), вычисляемое как предел для продлеваемой бесконечно серии испытаний, не

существует для данной схемы испытаний. Такое может случиться, поскольку у бесконечной последовательности чисел предельного значения может не существовать.

В наших задачах такого происходить не будет, но мы не будем это строго доказывать.

Популярным примером ситуации без предельного значения является так называемый «Санкт-Петербургский парадокс», в котором рассматривается азартная игра с повторяющимся подкидыванием монетки. Игра кончается, как только при очередном подкидывании выпадает орёл, и игрок получает выигрыш в размере  $2^n$  дукатов (где  $n$  — номер первого подкидывания с орлом). То есть, он получает 2 дуката если орёл выпадет при первом подкидывании;  $4 = 2^2$ , если при первом подкидывании выпадет решка, но при втором выпадет орёл;  $8 = 2^3$  дукатов, если при первом и втором подкидывании выпадет решка, но при третьем выпадет орёл, и так далее.

Какую максимальную цену следует платить игроку за участие в этой игре?

Для ответа на такой вопрос вычисляют средний выигрыш; в данном случае это сумма следующего ряда. В этом ряду слагаемое под номером  $n$  — это вероятность окончания игры на  $n$ -ом подкидывании монеты, умноженная на соответствующий выигрыш.

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^3 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty.$$

То есть, средний выигрыш в такую игру равен бесконечности. Это приводит нас к парадоксальному выводу: *игроку всегда выгодно покупать право на участие в этой игре, какой бы дорогой ни была цена!*

Заметим, что практический вывод о том, что игроку следует платить любую цену за билет на такую игру не верен из-за ограничений реального мира. Например, если имущество ведущего игру («банкомёта») состоит из 1000 дукатов, то после 9 решек он обанкротится. В этом случае ясно, что в игре может быть максимум 8 подкидываний и средний выигрыш равен

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot 2^8 = 8.$$

То есть, в этом случае за билет на игру не следует платить больше 8 дукатов.

### 3 Робот Чебуратор на коротком столе

Электромеханическая игрушка «Робот Чебуратор», будучи включенной, через равные интервалы времени делает шаги одинаковой длины налево или направо, с одинаковой вероятностью  $\frac{1}{2}$  выбирая между этими двумя направлениями.

Предположим, Чебуратор стоит на коротком столе: шагая влево, он чебурахнется со стола, он может шагнуть вправо и остаться на столе — но он чебурахнется после второго шага направо. Нас интересуют две задачи:

- Какова вероятность того, что он чебурахнется с левого края стола, и какова — что с правого?
- Чему равно среднее число шагов которые, сделает робот, чтобы чебурахнуться?

При этом мы полагаем, что существование требуемых чисел в обоих вопросах обосновано (это действительно верно, хотя требует доказательства). Поэтому нам остаётся лишь найти численное значение этих чисел.

*Решение первой задачи.* Пусть  $p_1$  и  $p_2$  обозначают вероятность чебурахнуться направо из первого (левого) и второго (правого) положения. Заметим, что

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot p_2.$$

Действительно, после первого шага с вероятностью  $\frac{1}{2}$  робот чебурахнется налево, и значит шансов чебурахнуться направо у него уже не будет, отсюда слагаемое  $0 = \frac{1}{2} \cdot 0$ , и с той же вероятностью он перейдёт на второе место, откуда у него будет вероятность  $p_2$  чебурахнуться вправо, отсюда слагаемое  $\frac{1}{2} \cdot p_2$ .

Аналогично получаем уравнение

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Эти два уравнения говорят что в последовательности из четырёх чисел,

$$0, p_1, p_2, 1,$$

каждое является средним арифметическим своих соседей. Иначе говоря, эта последовательность является арифметической, и значит  $p_1 = \frac{1}{3}$  и  $p_2 = \frac{2}{3}$ .

Заметим, что если  $q_1$  и  $q_2$  вероятности чебурахнуться налево, то, повторив те же вычисления, получаем  $q_1 = \frac{2}{3}$  и  $q_2 = \frac{1}{3}$ . Этот же результат можно получить, посмотрев на задачу через зеркало, меняющее местами право и лево.

В частности, из положения 1, робот чебурахнется направо и налево с вероятностями  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$ . Заметьте, что вероятность того, что робот не чебурахнется, равна  $0 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ .  $\square$

Аналогично решается и вторая задача.

*Решение второй задачи.* Обозначим через  $s_1$  и  $s_2$  средние количества шагов, которые сделает робот, чтобы чебурахнуться, если начинает с первой или второй позиции соответственно. Взглянув на робота через зеркало, меняющее местами право и лево, мы убеждаемся, что  $s_1 = s_2$  — но мы и так это увидим скоро по результатам вычислений.

Заметим, что

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + s_2).$$

Действительно, после первого шага с первой позиции с вероятностью  $\frac{1}{2}$  робот чебурахнется налево то есть он проделает всего один шаг отсюда слагаемое  $\frac{1}{2} \cdot 1$ , и с той же вероятностью он перейдёт на второе место, откуда

в среднем он пройдёт ещё  $s_2$  шагов учтя первый шаг, получаем второе слагаемое  $\frac{1}{2} \cdot (1 + s_2)$ .

Аналогично получаем равенство

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + s_1) + \frac{1}{2} \cdot 1.$$

Получаем систему из двух равенств с двумя неизвестными  $s_1$  и  $s_2$ . Решив эту систему из двух уравнений получаем  $s_1 = s_2 = 2$ .  $\square$

Попробуйте решить следующую задачу тем же способом.

**Задача.** На рисунке вы видите план города, в котором отмечен дом доктора Шнобеля и пивная.

#### НУЖНА КАРТИНКА

Выйдя из дома на прогулку, доктор выбирает с равной вероятности одну из дорог и идёт до следующего перекрёстка ровно одну минуту. Дойдя до перекрёстка, он опять выбирает с равной вероятностью одну из дорог (возможно, ту же, по которой только что шёл), и идёт до следующего перекрёстка.

Если на перекрёстке есть рюмочная, он выпивает 50 грамм водки и продолжает свой путь. Прогулка заканчивается, как только он приходит к своему дому.

Какова средняя продолжительность прогулки доктора Шнобеля?

Сколько грамм водки выпивает доктор Шнобель в среднем за одну прогулку?

## 4 Решения прямым подсчётом

Две задачи, рассмотренные выше, допускают решения прямым подсчётом вероятностей. Мы опишем их, используя те же обозначения, что и раньше.

*Решения.* Чтобы решить вторую задачу, заметим что робот чебурахаётся на  $n$ -ом шагу либо влево, либо вправо с вероятностью  $(\frac{1}{2})^n$ . А значит среднее число шагов можно найти просуммировав ряда

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + (\frac{1}{2})^2 \cdot 2 + (\frac{1}{2})^3 \cdot 3 + \dots$$

Чтобы суммировать такой ряд нужно небольшое умение, но его сумма равна 2 — и не удивительно, что то же значение было получено выше.

Далее заметим, что, если робот начинает движение с левой позиции, то он может чебурахнуться направо только на чётных шагах, и, если он начинает с правой позиции, то только на нечётных. То есть

$$\begin{aligned} p_1 &= (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^6 + \dots \\ p_2 &= (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \dots \end{aligned}$$

Применив формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем те же результаты  $p_1 = \frac{1}{3}$  и  $p_2 = \frac{2}{3}$ .  $\square$

Как видите, этот способ оказался сложнее. Кроме того, он не допускает лёгкого обобщения на случай, когда стол имеет более чем две позиции. Как мы увидим ниже, в этом случае наше решение остаётся практически без изменений.

То, что среднее количество шагов до чебураханья, равно двум, можно также увидеть поставив следующий мысленный эксперимент. Представьте себе, что при каждом чебураханье мы ставим робота обратно на стол. Так как вероятность того, что робот чебурахнется на шаге  $n$  равна  $\frac{1}{2}$ , робот будет чебурахаться в среднем на половине шагов. Значит среднее число шагов между чебураханьями равно 2.

## 5 Робот Чебуратор на длинном столе

Представим теперь, что Чебуратор стоит на длинном столе, он чебурахнется налево ему надо сделать  $i$  шагов а чтобы чебурахнуться налево ему надо сделать  $m - i$  шагов. Нас интересуют всё те же задачи:

- Какова вероятность того, что он чебурахнется с левого края стола, и какова — что с правого?
- Чему равно среднее число шагов, которое сделает робот, чтобы чебурахнуться?

*Решение первой задачи.* Пронумеруем возможные положения Чебуратора от числами от 1 до  $m - 1$ , по числу шагов налево, которое Чебуратору нужно сделать, чтобы чебурахнуться.

Нам будет удобно добавить ещё два положения под номерами 0 и  $m$ : первое соответствует тому, что робот чебурахнулся налево, а второе соответствует тому, что робот чебурахнулся направо (из этих позиций выхода нет).

Обозначим через  $p_i$  вероятность того, что Чебуратор чебурахнется направо, если начинает с позиции под номером  $i$ . Естественно мы имеем

$$p_0 = 0 \text{ и } p_m = 1.$$

Применим тот же метод что и раньше. Стоя на позиции номер  $i$ , с вероятностью  $\frac{1}{2}$  Чебуратор перейдёт на позицию номер  $i + 1$  в этом случае вероятность того, что он чебурахнется вправо будет  $p_{i+1}$  и с той же вероятностью  $\frac{1}{2}$  он перейдёт на позицию номер  $i - 1$  в этом случае вероятность того, что он чебурахнется вправо будет  $p_{i-1}$ . То есть

$$p_i = \frac{1}{2} \cdot p_{i-1} + \frac{1}{2} \cdot p_{i+1}.$$

Иначе говоря в последовательности из  $m + 1$  числа

$$0 = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{i+j} = 1$$

каждое число является средним арифметическим соседей. Отсюда получаем  $p_i = \frac{i}{m}$ .  $\square$

*Решение второй задачи.* Давайте использовать ту же нумерацию позиций, как и в решении первой задачи.

Обозначим через  $s_i$  среднее число шагов робота, если он начинает с позиции под номером  $i$ . Естественно предположить, что  $s_0 = s_m = 0$  — ведь попадание на позиции 0 и  $m$  означает, что робот уже чебурахнулся.

Попробуем как и раньше посчитать значение  $s_i$  новым способом. После одного шага с  $i$ -ой позиции Чебуратор окажется на позиции  $i - 1$  или  $i + 1$  с равными вероятностями  $\frac{1}{2}$ . После этого ему останется в среднем пройти  $s_{i-1}$  и  $s_{i+1}$  шагов соответственно. Не забыв учесть уже пройденный шаг, получаем

$$s_i = \frac{1}{2} \cdot (s_{i-1} + 1) + \frac{1}{2} \cdot (s_{i+1} + 1).$$

или

$$s_i = 1 + \frac{1}{2} \cdot (s_{i-1} + s_{i+1}).$$

Мы получаем  $m - 1$  уравнение с  $(m - 1)$ -ой неизвестной  $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$ .

Если догадаться, что  $s_i$  зависит квадратично от  $i$ , точнее,  $s_i = -i^2 + p \cdot i + q$  для некоторых констант  $p, q$ , то несложно найти само решение  $s_i = i \cdot (m - i)$ .  $\square$

Для закрепления материала мы советуем решить следующую задачу.

Пьяница вышел из бара, расположенного в 10 кварталах от своего дома на той же улице, чтобы вернуться домой; чтобы сделать дорогу домой веселее, он разнообразит её на каждом перекрёстке следующим образом. Дойдя до перекрёстка, он подкидывает монетку — и, если она выпадает орлом, он продолжает путь в том же направлении; если же она выпадает решкой, он разворачивается и идёт в противоположном направлении. Если ему случается вернуться к бару, он всегда разворачивается в сторону дома; если же он дошёл до своего дома, он завершает свой путь.

Сколько кварталов в среднем он пройдёт на этом пути?

Чему равно среднее число возвращений к бару при этой прогулке?

(Правильные ответы: 100 и 10 соответственно.)

## 6 Бактерии в пробирке

В пробирке живут 10 бактерий 3 зелёных и 7 жёлтых. Каждую секунду происходит следующее: одна из 10 бактерий (равновероятно выбранная из всех десяти) погибает, и тут же одна из оставшихся девяти (равновероятно выбранная) делится на две своих точных копии. Таким образом, в конце секунды в пробирке остаётся ровно 10 бактерий.

Какова вероятность того, что через некоторое время все станут зелёными?

Предположим, что через несколько секунд число зелёных бактерий стало  $i$ . Тогда спустя секунду их число может стать  $i - 1$ ,  $i$  или  $i + 1$ . При этом вероятности первого и последнего исхода равны. Действительно, исход  $i - 1$  означает, что первая бактерия оказалась зелёной, а вторая — жёлтой, а в исходе  $i + 1$ , наоборот, первая — жёлтой а вторая — зелёной. Про исход  $i$  можно думать как про пропускание хода.

Таким образом, наша задача становится похожей на задачу про робота Чебуратора — только теперь Чебуратор ходит направо и налево с равными положительными вероятностями, и с оставшейся вероятностью пропускает ход. То есть, ответ в задаче можно получить, подставив  $i = 3$  и  $m = 10$  в задаче про Чебуратора на длинном столе. Таким образом, с вероятностью  $\frac{3}{10}$  все бактерии станут зелёными, и с вероятностью  $\frac{7}{10}$  все станут жёлтыми.

Эту же задачу (а значит, и первую задачу про Чебуратора) можно решить без вычислений.

Для начала заметим, что с положительной вероятностью это может случиться за первые 10 секунд. Вероятность этого события мала, но вероятность того, что за достаточно длинный промежуток времени найдутся такие 10 секунд, произвольно близка к 1.

Отсюда получаем, что, с вероятностью 1 через некоторое время все бактерии в пробирке будут потомками одной. При этом заметим, что у каждой бактерии на это есть равные шансы. Поэтому в 3 из 10 случаев все станут зелёными, и в 7 из 10 все станут жёлтыми.

## 7 Броуновское движение

Заметьте, что если Чебуратор стоит на середине стола — чтобы чебурахнуться ему необходимо сделать  $n$  шагов вправо и столько же влево. Как мы выяснили, среднее число шагов, которое он делает для того, чтобы чебурахнуться, равно  $n^2$ . Это наблюдение можно использовать в обратном направлении: повторив это испытание много раз и оценив среднее количество шагов до чебураханья, мы, зная размер стола, сможем оценить длину шага Чебуратора. Последнее может оказаться полезным, если шаги Чебуратора настолько мелки, что не поддаются прямому измерению.

Поведение Чебуратора на столе мало чем отличается от хаотического движения малых частиц вещества под действием ударов молекул. Это движение было открыл Роберт Браун в начале XIX-го века, а в начале XX-го века, используя тот же эксперимент, удалось оценить среднее число молекул в единице объёма по параметрам броуновского движения. Этот эксперимент послужил убедительным аргументом в утверждении атомарной теории. При этом оказалось достаточным наблюдений с помощью обычного микроскопа.

Конечно эта физическая задача сложнее определения длины шага Чебуратора, описанная нами выше. Тем не менее идея, решения у этих задач

одна и та же.

## 8 Да, а о чём мы говорили?

Мы рассмотрели частный случай цепи Маркова. Чего советуем почитать...