Случайные блуждания

Александр Гиль

Аннотация

Заметка основана на лекции прочитанной автормом в ???

Подкидывая игральную кость (кубик), с равными шансами мы можем получить 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Результат такого *испытания* называется *случайной величиной*. Естественно предположить что этот результат не зависит от других таких же испытаний.

При увеличении числа испытаний до бесконечности, доля испытаний на которое приходится определённый исход (например 4) от общего их общего числа стремится к пределу, который называется его *вероятностью*. Поскольку шансы любого из шести исходов равны, вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{6}$.

Представим себе, что мы увеличиваем число испытаний до бесконечности и после каждого броска считаем среднее арифметическое полученных случайных величин. Если эта последовательность стремится к определянному числу, то такое число называется *математическим ожиданием* или *средним* случайной величины.

В нашем примере искомое среднее числа очков можно посчитать по формуле

$$1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 3\tfrac{1}{2}.$$

Действительно, в пределе, на долю каждого исхода 1, 2, 3, 4, 5 и 6 приходится $\frac{1}{6}$ числа всех исходов и значит их среднее арифметическое должно стремиться к левой стороне равенства.

Иначе говоря, для вычисления среднего мы должны вычислить *взвешенную сумму* значений нашей величины для каждого исхода (1, 2, 3, 4, 5 и 6 для кубика), взяв вероятность каждого исхода ($\frac{1}{6}$ для кубика) в качестве веса.

В этой заметке мы рассмоттрим способ нахождения вероятностей и средних, в более сложной ситуации.

1 Санкт-Петербургский парадокс

Вообще говоря, может оказаться, что среднее (математическое ожидание), вычисляемое как предел для продлеваемой бесконечно серии испытаний, не существует для данной схемы испытаний. Такое может случится поскольку у бесконечной последовательности чисел предельного значения может не существовать.

В наших задачах такого происходить не будет, но мы не будем это строго доказывать.

Популярным примером такой ситуации является так называемый «Санкт-Петербургский парадокс», в котором рассматривается азартная игра с повторяющимся подкидыванием монетки. Игра кончается, как только при очередном подкидывании выпадает орёл, и игрок получает выигрыш в размере 2^n дукатов (где n — номер первого подкидывания с орлом). То есть, он получает 2 дуката если орёл выпадет при первом подкидывании; $4 = 2^2$, если при первом подкидывании выпадет решка, но при втором выпадет орёл; $8 = 2^3$ дуката, если при первом и втором подкидывании выпадет решка, но при третьем выпадет орёл, и так далее.

Какую максимальную цену следует платить игроку за раунд участия в этой игре?

Для ответа на такой вопрос вычисляют средний выигрыш; в данном случае это сумма следующего ряда. В этом ряду слагаемое под номером n — это вероятность окончания раунда на n-ом подкидывании монеты, умноженная на соответствующий выигрыш.

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 2^2 + (\tfrac{1}{2})^3 \cdot 2^3 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty.$$

То есть средний выйгрыш в такую игру равен бесконечности. Это приводит нас к парадоксальному выводу: *игроку всегда выгодно покупать право на участие в этой игре, какой бы дорогой ни была цена!*

Заметим, что практический вывод о том, что игроку следует платить любую сколь угодно дорогую цену за билет на такую игру сомнителен из-за ограничений реального мира. Например если имущество вашего соперника состоит из 1000 дукатов, то после 9 решек он обанкротится. В этом случае ясно, что в игре может быть максимум 8 подкидываней и средний выйрыш равен

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 4 + \dots + (\tfrac{1}{2})^8 \cdot 2^8 = 8.$$

То есть за билет на игру не следует платить больше 8 дукатов.

2 Робот Чебуратор на коротком столе

Электромеханическая игрушка «Робот Чебуратор», будучи включенной, через равные интервалы времени делает шаги одинаковой длины налево или направо, с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$ выбирая между этими двумя направлениями.

Предположим Чебуратор стоит на коротком столе, шагая вправо он чебурахнется со стола, он может шагнуть влево и остаться на столе но он чебурахнется после второго шега налево. Нас интересуют две zadaci:

- Какова вероятность того, что он чебурахнется с правого края стола, и какова — что с левого?

- Чему равно среднее число шагов которые сделает робот чтобы чебуранутся?

При этом мы полагаем, что существование требуемых чисел в обоих вопросах обосновано (это действительно верно, хотя требует доказательства). Поэтому нам остаётся лишь найти численное значение этих чисел.

Решение первой задачи. Пусть p_1 и p_2 обозначают вероятность чебураханья направо из первого и второго положения. Заметим, что

$$p_1 = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot p_2.$$

Действительно, после первого шага с вероятностью $\frac{1}{2}$ робот чебурахнется налево, и значит шансов черурахнутся направо у него уже небудет, отсюда слагаемое $0 = \frac{1}{2}\cdot 0$, и с той же вероятностью он перейдёт на второе место, откуда у него будет вероятность p_2 чебурахнутся вправо, отсюда слагаемое $\frac{1}{2}\cdot p_2$.

Аналогично получаем уравнение

$$p_2 = \tfrac{1}{2}\cdot p_1 + \tfrac{1}{2}\cdot 1.$$

Эти два уравнения говорят что в последовательности из четырёх числел,

$$0,\ p_1,\ p_2,\ 1,$$

каждое является средним арифметическим своих соседей. Иначе говоря эта последовательность является арифметической, и значит $p_1 = \frac{1}{3}$ и $p_2 = \frac{2}{3}$.

Заметим, что если q_1 и q_2 вероятности чебурананья налево, то повторув те же вычисления получаем $q_1 = \frac{2}{3}$ и $q_2 = \frac{1}{3}$. Этого же можно добится посмотрев на задачу через зеркало, оно меняет местами право и лево.

В частности из положения 1, робот чебурахается направо и налево с вероятностями $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, а вероятность того что он не чебуранется равна нулю $0 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$. □

Аналогично решается и вторая задача.

Решение второй задачи. Обозначим через s_1 и s_2 среднее число шагов которые сделает робот чтобы чебуранутся если начинает с первой или второй позиции соответственно. Из зеркальной симметрии (она меняет местами право и лево) следует, что $s_1 = s_2$, но мы и так это увидим скоро.

Заметим, что

$$s_1 = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot (1 + s_2).$$

Действительно, после первого шага с первой клетки с вероятностью $\frac{1}{2}$ робот чебурахнется налево то есть он проделает всего один шаг отсюда слагаемое $\frac{1}{2}\cdot 1$, и с той же вероятностью он перейдёт на второе место, откуда в среднем он пройдёт ещё s_2 шагов учтя первый шаг, получаем второе слагаемое $\frac{1}{2}\cdot(1 + s_2)$.

Аналогично получаем равенство

$$s_2 = \tfrac{1}{2}\cdot (1 + s_1) + \tfrac{1}{2}\cdot 1.$$

Получаем систему из двух равенств с двумя неизвестными s_1 и s_2. Решив эту систему из двух уравнений получаем $s_1 = s_2 = 2$. □

Попробуйте решить следующую задачу тем же способом.

Задача. Доктор Шнобель решает прогулятся. Он доходит до угла где расположены рюмочная пивная и закусочная и решает зайти в пивную. Далее прогулка продолжается по отработанной схеме:

Зайдя в пивную он выпивает кружку пива после чего с равными вероятностами идёт домой, в рюмочную и закусочную.

Зайдя в рюмочную он выпивает 50 грамм шнапса после чего и с равными вероятностами идёт домой, в пивную и закусочную.

Зайдя в закусачную он съедает омлет с грибами после чего и с равными вероятностами идёт домой, в рюмочную и в пивную.

Солько грамм шнапса в среднем выпивает доктор Шнобель за одну прогулку?

3 Прямой подсчёт

Две задачи, рассмотренные выше, допускают решения через прямой подсчёт вероятностей. Мы опишем их, используя те же обозначения, что и раньше.

Решения. Чтобы решить вторую задачу, заметим что робот чебурахается на n-ом шагу либо влево либо вправо с вероятностью $(\frac{1}{2})^n$. А значит среднее число шагов можно найти просуммировав ряда

$$s_1 = s_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 2 + (\tfrac{1}{2})^3 \cdot 3 + \dots .$$

Чтобы суммировать такой ряд нужно небольшое умение, но его сумма равне 2 и не удивительно, что то же значение получено выше.

Далее заметим, что если мы начали с первой клетки, то робот может чебуранустся направо только на чётных шагах и если мы со второй клетки, то только не нечётных. То есть

$$p_1 = (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^4 + (\tfrac{1}{2})^6 + \dots$$
$$p_2 = (\tfrac{1}{2})^1 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{2})^5 + \dots$$

Применив формулу для суммы геометрической прогресси получаем те же результаты $p_1 = \frac{1}{3}$ и $p_2 = \frac{2}{3}$. □

Как видите, этот способ оказался сложней. Кроме того, он не допускает лёгкого обобщения на случай когда стол имеет больше чем две клетки. Как мы увидим ниже, в этом случае наше решение остаётся практически без изменений.

4 Робот Чебуратор на длинном столе

Представим теперь, что Чебуратор стоит на длинном столе, он чебурахнется направо ему надо сделать n шагов а чтобы чебуранутся налево ему надо сделать k шагов. И нас интересуют всё те же задачи.

- Какова вероятность того, что он чебурахнется с правого края стола, и какова — что с левого?
- Чему равно среднее число шагов которые сделает робот чтобы чебуранутся?

Решение первой задачи. Пронумеруем возможные положения чебуратора от числами от 1 до $n + k - 1$, по числу шагов налево которое чебуратору нужно сделать чтобы чебурахнутся.

Нам будет удобно добавить ещё два положения 0 и $n + k$; первое соответсвует тому что робот чебурахнулся налево а второй соответсвует тому что робот чебурахнулся направо (из этих позиций выхода нет).

Обозначим через p_i вероятность того, что Чебуратор чебурахнется с правого края, то есть с позиции под номером i. Естественно мы имеем

$$p_0 = 0 \text{ и } p_{n+k} = 1.$$

Применим тот же метод что и раньше. Стоя на клетке номер i, с вероятностью $\frac{1}{2}$ он перейдёт на клетку немер $i + 1$ в этом случае вероятность того, что он чебурахнется вправо будет p_{i+1} и с той же вероятностью $\frac{1}{2}$ он перейдёт на клетку немер $i - 1$ в этом случае вероятность того, что он чебурахнется вправо будет p_{i-1}. То есть

$$p_i = \tfrac{1}{2} \cdot p_{i-1} + \tfrac{1}{2} \cdot p_{i+1}.$$

Иначе говоря в последовательности из $n+2$ чисел $0 = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n+k} = 1$ каждое число является средним арифметическим соседей. Отсюда следует общее выражение $p_k = \frac{k}{n+k}$. □

Решение второй задачи. Давайте использовать ту же нумерацию позиций как и в решении первой задачи.

Обозначим через s_i среднее число шагов если мы начинаем с позиции под номером i. Естественно предположить, что $s_0 = s_{2 \cdot n} = 0$, ведь попав на одну из этих клеток робот уже чебурахнулся.

Попробуем как и раньше посчитать s_i новым спасобом. После одного шага с i-ой клетки, Чебуратор окажется на клетке $i - 1$ или $i + 1$ с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. После чего ему останется в среднем пройти s_{i-1} и s_{i+1} шег соответсвенно. Не забидем прибавить уже прийденный шаг, и получаем

$$s_i = \tfrac{1}{2} \cdot (s_{i-1} + 1) + \tfrac{1}{2} \cdot (s_{i+1} + 1).$$

или

$$(**) \qquad s_i = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot (s_{i-1} + s_{i+1}).$$

Мы получаем $k+n-1$ уравнение с $(k+n-1)$-ой неизвестной $s_1, s_2, \ldots, s_{k+n-1}$. Если суметь догататься, что решение имеет квадратичную зависимость от i, то несложно найти само решение $s_i = i \cdot (n + k - i)$.

В частности интересующее нас s_k равно $k \cdot n$. $\square$

Для закепления матерьяла мы советуем решить следующую задачу.

Пьяница вышел из бара, расположенного в 10 кварталах от своего дома на той же улице, чтобы вернуться домой; чтобы сделать дорогу домой веселее, он разнообразит её на каждом перекрёстке следующим образом. Дойдя до перекрёстка, он подкидывает монетку — и, если она выпадает орлом, он продолжает путь в том же направлении; если же она выпадает решкой, он разворачивается и идёт в противоположном направлении. Если ему случается вернуться к бару, он всегда разворачивается в сторону дома; если же он дошёл до своего дома, он завершает свой путь.

Сколько кварталов в среднем он пройдёт на этом пути?

Чему равно среднее число возвращений к бару при этой прогуле?

(Правильные ответы: 100 и 10 соответственно.)

5 Бактерии в пробирке

В колбе живут 10 бактерий 3 зеляных и 7 жёлных. Каждую секунду случайная бактерия умирает, и в тот же момент другая случайная бактерия делится на две своих точных копии. Таким образом всё время в колбе остаётся ровно 10 бактерий.

Какова вероятность того что через некоторое время все станут зелёными?

Предположим, что через несколько секунд число зелёных бактерий стало i. Тогда спустя секунду их число может стать $i-1$, i или $i+1$. При этом вероятности первого и последнего исхода равны. Действительно, исход $i-1$ означает, что первая бактерия оказалась зелёной а вторая жёлтой, а в исходе $i+1$, наоборот первая жёлтой а вторая зелёной. Про исход i можно думать как про пропускание хода.

Таким образом наша задача становится похожей на задачу про робота чебуратора, только теперь Чебуратор ходит направо и налево с равными положительными вероясностями и с оставшейся вероятнотсью пропускает ход. Соответственно ответ в задаче можно получить подставив $k = 3$ и $n = 7$ в задаче про Чебуратора на длинном столе. То есть — с вероятностью $\frac{3}{10}$ все станут зелёными и с вероятностью $\frac{7}{10}$ все станут зелёными (более чем демакратичненько).

Эту же задачу (а значит и первую чадачу про чебуратора) можно решить без вычислений. Заметим, что через некоторое время все бактерии в колбе будут потомками одной из этих десяти бактерий и у каждой на это есть равные шансы. Поэтому в 3 из 10 случаев все станут зелёными и в 7 из 10 все станут жёлтыми.

6 Броуновское движение

Заметьте, что если Чебуратор стоит на середине стола — чтобы чебурахнутся ему необходимо сделать n шагов вправо и столько же влево. Как мы выяснили, среднее число шагов которое он делает для тогочтоб чебурахнутся равно n^2. Это наблюдение можно использовать в обратном направлении, повторить это испытание много раз и замерить среднее количество шагов до чебуранья; взяв корень из полученного числа мы получим размер стола измеренный в шагах Чебуратора. В частности, зная размер стола мы сможем измерить шаг Чебуратора.

Поведение Чебуратора на столе мало чем отличается от хаотическое перемещение очень малых частиц вещества под действием ударов молекул. Это движение было открыл Роберт Броун в начале 19-го века, в начале 20-го века была предъявлена модель для этого движения. В частности удалось оценить среднее число молекул в единице объёма по параметрам Броуновского движения. При этом оказалось достаточным наблюдений с помощью обычного микроскопа. Так была поставлена последняя точка в утверждении атомарной теории.

Эта физическая задача сложней определения длины шага Чебуратора описанная нами чуть выше. Тем не менее между принципиальная идея решения у этих задач одна и та же.

7 Да, а о чём мы говорили?

Марковские процессы ...