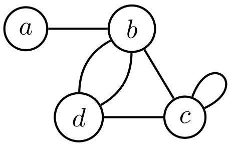
Формула удаления и стягивания

Антон Петрунин

1 Графы и их остовные деревья



Рассмотрим план ежедневных рейсов некоторой авиакомпании между некоторыми парами из аэропортов a, b, c и d показанный не рисунке. Для формализации такой и многих других ситуаций в математике используется понятие *граф*.

Граф это конечный и не пустой набор *вершин* (в нашем примере вершина графа это аэропорт) и конечный набор *рёбер* каждое из которых соединяет пару вершин (в примере ребро это рейс авиакомпании). Пара вершин графа может быть соединена несколькими рёбрами (это может означать, что авиакомпания совершает два рейса в день). Также, ребро может соединять вершину с самой собой, в этом случае оно называется *петлёй* (про такое ребро можно думать как про прогулочный рейс авиакомпании).

То есть, с математической точки зрения, мы видим граф с четырьмя вершинами a, b, c и d, шестью рёбрами, из них одна петля при вершине c и пара рёбер соединяет b с d. Число рёбер исходящих из данной вершины называется её *степенью*; степени вершин a, b, c и d соответственно $1, 4, 4$ и 3.

Изображённый граф является *связным*, то есть из любой его вершины можно пройти в любую другую пройдя по нескольким его рёбрам.

Предположим нам требуется сократить число рёбер связного графа сохранив его связность. Нетрудно видеть, что это можно сделать тогда и только тогда, когда граф содержит *цикл*.

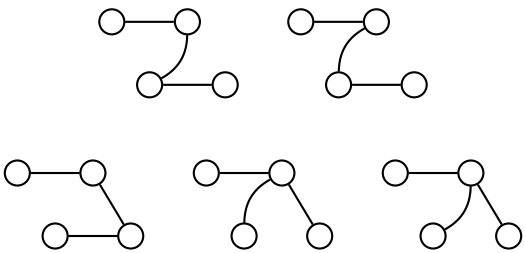
Цикл это маршрут из рёбер обходящий несколько вершин без повторений вершин и рёбер и возвращается в исходную вершину. Число рёбер в цикле называется *длиной цикла*. Например в нашем графе есть два цикла длины три с вершинами b, c и d, один цикл длины два с вершинами b и d, а также петля при вершине c образует цикл длины один.

Действительно, если из любого цикла связного графа выбросить любое ребро то граф останется связным. Более того, если после выбрасывания некоторого ребра граф остался связным, то это ребро принадлежало некоторому циклу — этот цикл образован самим ребром и кратчайшим путём между его концами в оствшемся графе.

Выбрасывание ребра из цикла можно повторять, пока мы не придём к графу без цикла. Полученный граф называется остовным деревом исходного графа.

Вообще говоря, связный граф без циклов называется *деревом*. В таких графах нет петель и из любой их вершины в любую другую есть единственный путь по рёбрам без повторений вершин.

На следующем рисунке вы видите все пять различных остовных дерева нашего исходного графа.



Чтобы проверить понимание данных определений мы советуем решить следующие два стандартных упражнения про деревья.

Упражнение. *Докажите что если дерево имеет хотябы две вершины, то в нём найдётся вершина степени 1.*

Воспользуйетесь индукцией по числу вершин и предыдущем упражнением чтобы доказать следующее.

Упражнение. *Докажите что число рёбер в любом дереве на один меньше числа его вершин.*

2 Формула удаления и стягивания

Пусть ρ есть ребро в графе Γ. Обозначим через $\Gamma\backslash\rho$ граф полученный из Γ удалением ребра ρ и через Γ/ρ граф полученный из Γ стягиванием ребра ρ в точку.

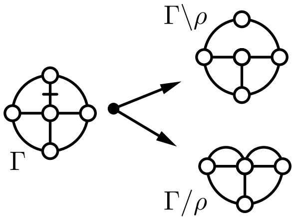
Если ребро ρ не является петлёй в Γ, тогда выполняется следующее соотношение называемое *формула удаления и стягивания*

$$(*) \qquad \tau(\Gamma) = \tau(\Gamma\backslash\rho) + \tau(\Gamma/\rho).$$

Действительно, остовные деревья в Γ можно разделить на две категории — те что содержат ребро ρ и те, что его не содержат. Для деревьев из первой категории стягивание ребра ρ в точку даёт остовое дерево в Γ/ρ а деревья второй категории являются также остовными деревьями в графе $\Gamma\backslash\rho$. Более того, оба этих соответствия взаимно однозначны. Отсюда вытекает формула.

Например, если Γ это первый пример и ρ есть ребро между вершинами b и c, тогда первые два остовных дерева на странице 2 соответсвуют дереву в $\Gamma\backslash\rho$, а последние два соответствуют дереву в Γ/ρ.

Формулу удаления и стягивания $(*)$ удобно записывать схематически как показано на рисунке. На графе Γ ребро ρ для которого применяется формула отмечено одним штрихом.



Заметим, что никакое остовое дерево не содержит петель. Поэтому можно выбросить все петли из графа и число его остовных деревьев останется неизменным. Иначе говоря, для любой петли ρ выполняется равенство

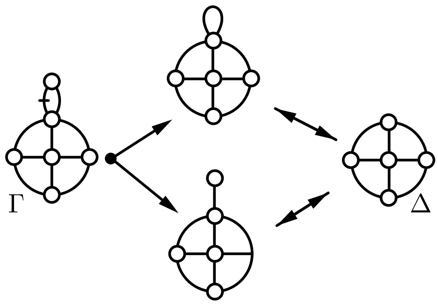
$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma\backslash\rho).$$

Из формулы удаления и стягивания можно вывести несколько других полезных соотношений. Например если в графе Γ есть вершина w степени 1 то w и ребро при w можно выбросить из графа и в полученном графе $\Gamma\backslash w$ число его остовных графов не изменится, то есть

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma\backslash w).$$

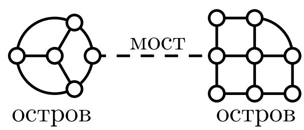
Действительно, обозначим через ρ единственное ребро при w. Заметим, что граф $\Gamma\backslash\rho$ не связен, поскольку вершина w не имеет рёбер, и значит $\tau(\Gamma\backslash\rho) = 0$. С другой стороны $\Gamma/\rho = \Gamma\backslash w$, отсюда получаем равенство.

На схемах двусторонняя стралка “$\leftrightarrow$” будет означать, что соотввeтсвующие графы имеют то же число остовных деревьев, например из выведенных тождеств можно вывести следующую диаграмму



означающую в частности, что $\tau(\Gamma) = 2 \cdot \tau(\Delta)$.

Равенства описанные выше дают алгоритм вычисления $\tau(\Gamma)$. Действительно, для любого ребра ρ, оба графа $\Gamma\backslash\rho$ и Γ/ρ имеют меньшее число рёбер. То есть формула удаления и стягивания сводит нахождение числа остовных деревьев Γ к нахождению числа остовных деревьев *более простых* графов.



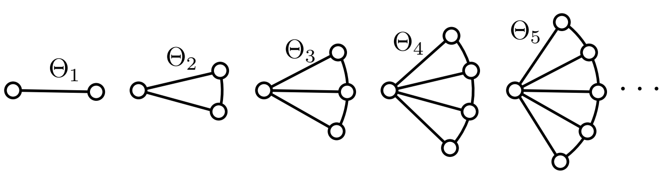
В заключении ещё одно упражнение. Ребро связного графа называется *мостом* если удаление этого ребра из графа делает граф не свазным, такой граф разбивается на два связных графа называемыми его *островами.*

Упражнение. *Предположим граф* Γ *содержит мост между островами* Δ_1 *и* Δ_2*. Докажите, что*

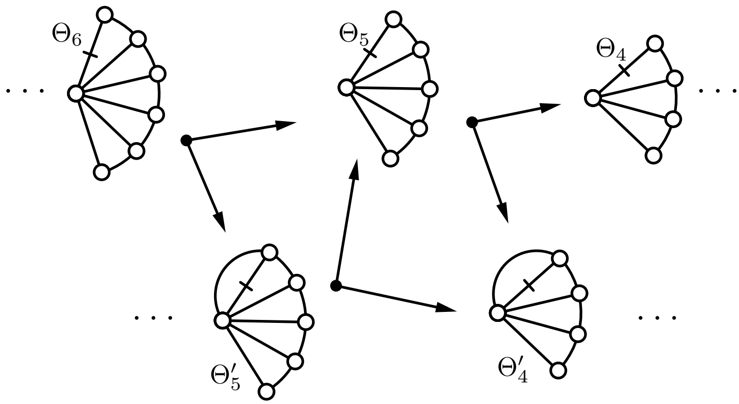
$$\tau(\Gamma) = \tau(\Delta_1) \cdot \tau(\Delta_2).$$

3 Деревья в веерах

Графы следующего вида называются *веерами*; веер с $n+1$ вершиной будет обозначаться Θ_n.



Применив соотношения полученные выше можно составить следующую бесконечную схему. В дополнении к веерам, Θ_n в схеме участвуют их вариации Θ'_n, отличающиеся от Θ_n дополнительным ребром.



Введём обозначения $a_n = \tau(\Theta_n)$ и $a'_n = \tau(\Theta'_n)$. Из схемы легко вывести два рекуррентных соотношения:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n + a_n, \\ a'_n &= a_n + a'_{n-1}. \end{aligned}$$

То есть в последоватльности чисел

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3 \ldots$$

каждое следующее является суммой двух предыдущих.

Напомним, что последовательность чисел Фибоначи F_n задаётся тем же соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ с $F_1 = F_2 = 1$. Она начинается следующим образом

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Далее заметим, что Θ_1 это две вершины соединённые единственным ребером, а Θ'_1 это две вершины соединённые двойным ребром. Отсюда $a_1 = 1 = F_2$ и $a'_1 = 2 = F_3$ и значит

$$a_n = F_{2 \cdot n}$$

для любого n.

Можно также вывести соотношение на a_n, без a'_n:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n + a_n = \\ &= 2 \cdot a_n + a'_{n-1} = \\ &= 3 \cdot a_n - a_{n-1}. \end{aligned}$$

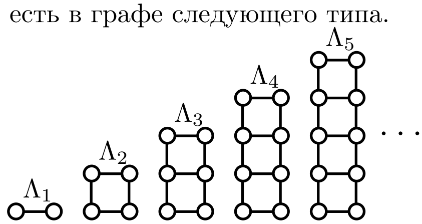
Оказывается, что если последовательность задаётся подобным соотношением то можно найти формулу для её общего члена. В нашем случае

$$a_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left((\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})^n \right).$$

Этот процесс подробно описан в книжке [1], которую мы рекомендуем читателю.

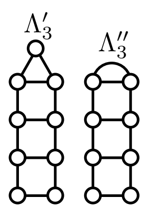
Для закрепления материала мы советуем разобрать следующую задачу.

Пусть b_n обозначает число остовных деревьев в *лестнице* Λ_n с n ступеньками, то есть в графе следующего типа.



Воспользуйтесь разработанным методом и докажите, что последовательность b_n удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$b_{n+1} = 4 \cdot b_n - b_{n-1}.$$

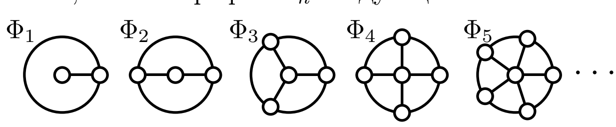


Заметим, что $b_1 = 1$ и $b_2 = 4$ отсюда можно быстро посчитать первые члены последовательности:

$$1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, \ldots$$

Вам потребуются ещё пара последовательностей графов, Λ'_n и Λ''_n показанных на рисунке.

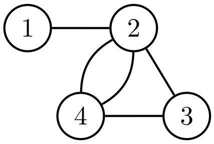
Если упражнение выше показалось слишком легким, сделайте тоже для колёс; то есть графов Φ_n следующего типа.



Для $c_n = \tau(\Phi_n)$ правильный ответ

$$c_{n+1} = 4 \cdot c_n - 4 \cdot c_{n-1} + c_{n-2}.$$

4 Графы как матрицы



Предположим вершины графа Γ пронумерованы числами от 1 до n. Тогда граф Γ можно полностью описать таблицей $n \times n$ поставив в клетки на пересечении i-ой строки и j-ого столбца число рёбер соединяющих i-ую вершину графа с и j-ой.

Полученная таблица $A = A_\Gamma$ называется *матрицей смежности графа.* Она симметрична, то есть отражение в главной диагонали переставляет равные числа. Для графа на рисунке получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку наличие петель не влияет на число остовных деревьев, мы можем считать, что граф не содержит петель. В этом случае на главной диагонали A стоят нули.

Поскольку матрица смежности полностью описывает исходный граф, число остовных деревьев графа в принципе можно вычислить по его матрице смежностей.

Оказывается, это довольно легко сделать. Сначала из построенной $n \times n$-матрицы A нашего графа Γ нужно построить $(n-1) \times \times (n-1)$-матрицу K следующим образом:

1. Обратим знаки всех компонент матрицы A и заменим нули на её диагонали степенями соответствующих вершин. В полученной матрице A' сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю.

2. Выбросим из матрицы A' последнюю строку и последний столбец; обозначим через $K = K_\Gamma$ полученную матрицу.

Для нашего примера имеем

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

По матрице K можно восстановить A', а значит и матрицу A и граф Γ если у него не было петель. Действительно, чтобы получить A' нужно добавить строку и столбец к матрице K и заполнить их числами так, чтобы сумма в каждой строке и столбце была нулевой; это можно сделать единственным образом.

Таким образом по матрице K можно найти число $\delta(K)$ равное $\tau(\Gamma)$, то есть числу деревьев исходного графа. Для $\delta(K)$ верны следующие соотношения:

1. Если в матрице K поменять местами пару строк и пару столбцов с теми же номерами, тогда для полученной матрицы K' выполняется
$$\delta(K) = \delta(K').$$
Действительно, K' описывать тот же граф Γ с другой нумерацией вершин.

2. Если сумма компонент первой строки в K положительна, то
$$\delta(K) = \delta(K^\circ) + \delta(K^\bullet)$$
где K° обозначает матрицу K в которой от углового компоненты отняли 1, а $K^\bullet$ обозначает $(n-2)\times(n-2)$ матрицу полученную из K удалением первого столбца и первой строки. Это равенство следует из формулы удаления и стягивания $(*)$ поскольку
$$K^\circ = K_{\Gamma\backslash\rho} \quad \text{и} \quad K^\bullet = K_{\Gamma/\rho}.$$

3. Если сумма чисел в каждой строке K равна 0 то $\delta(K) = 0$. Действительно, в этом случае ни одна из вершин исходного графа не связана с последней вершиной, а значит граф несвязен и не имеет остовных деревьев.

Читатель знакомый с понятием определитель[1] непременно заметит, что тем же свойствам обладает и *определитель матрицы* K далее обозначаемый $|K|$. Поскольку эти свойства полностью определяют $\delta(K)$ мы получаем
$$\delta(K) = |K|.$$

Отсюда следует так называемая матричная формула Кигхофа

$$\tau(\Gamma) = |K_\Gamma|. \qquad (**)$$

Идея доказательства поучительна — равенство двух разношёрстно определённых числа $\tau(\Gamma)$ и $|K_\Gamma|$ следует из общих свойств этих чисел. Эту идею можно рассматривать как обобщение метода математической индукции; она имеет множество других приложений, но к сожалению более простые содержательные примеры нам не известны.

[1] Для читателей незнакомых с понятием определитель написана следующая главка.

5 Ликбез на тему «определители»

Квадратная матрица это таблица $n{\times}n$ заполненная числами называемыми её *компонентами.* Определитель $|M|$ матрицы M это многочлен от её n^2 её компонент, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Определитель единичной матрицы равен 1; то есть,
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Если каждую компоненту одной из строк матрицы M умножить на число λ то определитель полученной матрицы M' умножится на то же число, то есть
$$|M'| = \lambda \cdot |M|.$$

3. Если одну из строк матрицы M почленно прибавить к другой строке (или отнять от неё) то определитель полученной матрицы M' не изменится, то есть
$$|M'| = |M|.$$

Вышеприведённые свойства однозначно определяют определитель. Мы примем это утверждение без доказательства; оно неочевидное, но и несложное, кроме того рано или поздно вам придётся его выучить.

Упражнение. *Выведите следующее свойство из трёх перечисленных выше.*

4. Если две строки матрицы M поменять местами то определитель полученной матрицы M' поменяет знак; то есть,
$$|M'| = -|M|.$$

Для определителя матрицы $n \times n$ можно выписать явную формулу из $n!$ слагаемых. Например

$$a_1{\cdot}b_2{\cdot}c_3 + a_2{\cdot}b_3{\cdot}c_1 + a_3{\cdot}b_1{\cdot}c_2 - a_3{\cdot}b_2{\cdot}c_1 - a_2{\cdot}b_1{\cdot}c_3 - a_1{\cdot}b_3{\cdot}c_2$$

есть определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Однако свойства определителя описанные выше дают более удобный и быстрый способ вычисления определителя, особенно при бо́льших n. Мы разберём этот способ на одном примере, который нам пригодится позже:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5^3.$$

Первое равенство следует из свойства 3 — мы по очереди прибавили к первой строке все строки со второй до последней. Далее мы прибавили первую ко всем остальным, и к полученной матрице применили свойство 2 три раза. Последние два равенства получаются отниманием от первой строки всех остальных, и применением свойства 1.

6 Формула Кэли

Прямое обобщение вычисления данного выше даёт, что

$$|K| = n^{n-2},$$

где K обозначает $(n-1) \times (n-1)$ матрицу следующего вида:

$$K = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Матрица K это как раз матрица в матричной формуле $(**)$ для полного графа Π_n с n вершинами. *Полным графом* называется граф в котором любая пара различных вершин соединена единственным ребром; то есть, получаем

$$\tau(\Pi_n) = n^{n-2}.$$

Это равенство называется *формулой Кэли.*

7 Заключительные замечания

Подсчёт числа остовных деревьев полезен при расчёте электрических цепей; это видно из следующей формулы.

Предположим граф Г описывает электрическую цепь; каждое ребро это сопротивление в 1 Ом. Предположим из вершины a в вершину b идёт ток в 1 Ампер и нам надо посчитать ток через одно из сопротивлений.

Пусть ρ есть ребро Г с выбранным направлением. Заметим, что все остовные деревья Г можно разделить на три типа, (1) те в которых на пути из a в b ребро ρ появляется с положительной ориентацией, (2) те в которых на пути из a в b ребро ρ появляется с отрицательной ориентацией, (3) те в которых на пути из a в b ребро ρ не появляется. Обозначим через τ_+, τ_- и τ_0 число деревьев в этих трёх категориях. Очевидно, что $\tau(\Gamma) = \tau_+ + \tau_- + \tau_0$. Тогда сила тока I_ρ вдоль ρ задаётся следующей формулой:

$$I_\rho = \frac{\tau_+ - \tau_-}{\tau(\Gamma)}.$$

Доказательство получается прямой проверкой правил Киргхофа для значений токов полученных по этой формуле.

Есть множество других приложений правил Киргхофа в теории графов. Например оно используется в физическом доказательстве формулы Эйлера

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2,$$

где В, Р и Г обозначает число вершин, рёбер и граней многогранника, смотри [6].

Формула удаления и стягивания применялась при решении так называемой *задачи о квадрировании квадрата.* История этой задачи и её замечательное решение обсудаются в книжках [5] и [3, Глава 32]; идея этого решения также основана на оригинальном использовании электрических цепей.

Формула аналогичная формуле удаления и стягивания выполняется для *хроматического многочлена*, а именно,

$$\chi(\Gamma, t) = \chi(\Gamma\backslash\rho, t) - \chi(\Gamma/\rho, t),$$

где $\chi(\Gamma, t)$ обозначает число раскрасок графа Γ в t цветов такое, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета.

Приведённый нами вывод рекуррентных формул для чисел остовных деревьев в веерах лестницах и колёсах даётся в [7]; эта задача обсуждается также в классической книжке [4]. Несколько красивых доказательств формулы Кэли и её история осуждаются в [2, Глава 30].

Список литературы

[1] А. И. Маркушевич, *Возвратные последовательности,* Гостехиздат, 1950. (Популярные лекции по математике, вып. 1.).

[2] М. Айгнер, Г. Циглер, *Доказательства из Книги,* Бином. Лаборатория знаний, 2015

[3] М. Гарднер, *Математические головоломки и развлечения,* Оникс, Москва, 1994.

[4] Д. Кнут, Р. Грэхем, О. Паташник, *Конкретная математика. Математические основы информатики,* М. Вильямс, 2009.

[5] И. М. Яглом, *Как разрезать квадрат?* М., Наука, 1968.

[6] M. Levi, An Electrician's (or a Plumber's) Proof of Euler's Polyhedral Formula, *SIAM News* 50, no. 4, May 2017.

[7] M. H. Shirdareh Haghighi; Kh. Bibak, Recursive relations for the number of spanning trees. *Appl. Math. Sci. (Ruse)* 3 (2009), no. 45–48, 2263–2269.