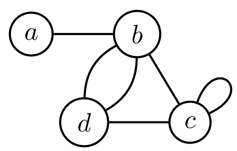
Сколько деревьев в графе

Антон Петрунин

Аннотация

В этой заметке мы опишем способ подсчёта остовых деревьев графов основанный на идее Густава Кирхгофа.

1 Графы и их остовые деревья



Рассмотрим план ежедневных рейсов некоторой авиакомпании между некоторыми парами из аэропортов a, b, c и d показанный не рисунке. Для формализации такой и многих других ситуаций в математике используется понятие *граф*.

Граф это конечный и не пустой набор *вершин* (в нашем примере вершина графа это аэропорт) и конечный набор *рёбер* каждое из которых соединяет пару вершин (в примере ребро это рейс авиакомпании). Пара вершин графа может быть соединена несколькими рёбрами (это может означать, что авиакомпания совершает два рейса в день). Также, ребро может соединять вершину с самой собой, в этом случае оно называется *петлёй* (про такое ребро можно думать как про прогулочный рейс авиакомпании).

То есть, с математической точки зрения, мы видим граф с четырьмя вершинами a, b, c и d, шестью рёбрами, из них одна петля при вершине c и пара рёбер соединяет b с d. Число рёбер исходящих из данной вершины называется её *степенью*; степени вершин a, b, c и d соответственно $1, 4, 4$ и 3.

Изображённый граф является *связным*, то есть из любой его вершины можно пройти в любую другую пройдя по нескольким его рёбрам.

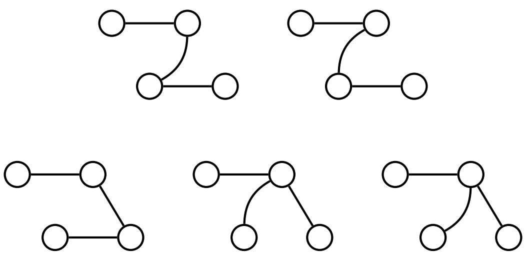
Предположим нам требуется сократить число рёбер связного графа сохранив его связность. Нетрудно видеть, что это можно сделать тогда и только тогда, когда граф содержит *цикл*, то есть маршрут из рёбер обходящий несколько вершин без повторений и возвращается в исходную вершину. Число рёбер в цикле называется *длиной цикла.* Например в нашем графе есть два цикла длины 3 проходящий по вершинам b, c и d, а также петля при вершине c образует цикл длины 1.

Действительно, если из любого цикла связного графа выбросить любое ребро то граф останется связным. Более того, если после выбрасывания некоторого ребра граф остался связным, то это ребро принадлежало некоторому циклу — этот цикл образован самим ребром и кратчайшим путём между его концами в оствшемся графе.

Выбрасывание ребра из цикла можно повторять, пока мы не придём к графу без цикла. Полученный граф называется остовым деревом исходного графа.

Вообще говоря, связный граф без циклов называется *деревом.* В таких графах нет петель и из любой их вершины в любую другую есть единственный путь по рёбрам без повторений вершин.

На следующем рисунке вы видите все различные остовые деревья нашего графа.



Чтобы проверить понимание данных определений мы советуем решить следующие два стандартных упражнения про деревья.

Упражнение. *Докажите что если дерево имеет хотябы две вершины, то в нём найдётся вершина степени 1.*

Воспользуйетесь индукцией по числу вершин и предыдущем упражнением чтобы доказать следующее.

Упражнение. *Докажите что число рёбер в любом дереве на один меньше числа его вершин.*

2 Основное соотношение

Пусть ρ есть ребро в графе Γ. Обозначим через $\Gamma-\rho$ граф полученный из Γ выбрасыванием ребра ρ и через $\Gamma\bullet\rho$ граф полученный из Γ стягиванием ребра ρ в точку.

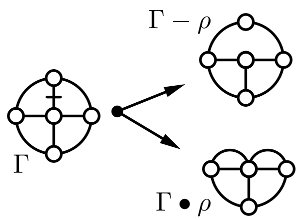
Заметим, что если ρ не является петлёй в Γ, тогда выполняется следующее соотношение

$$(*) \qquad \tau(\Gamma) = \tau(\Gamma - \rho) + \tau(\Gamma \bullet \rho).$$

Действительно, остовые деревья в Γ можно разделить на две категории — те что содержат ребро ρ и те, что его не содержат. Для деревьев из первой категории стягивание ребра ρ в точку даёт остовое дерево в $\Gamma \bullet \rho$ а деревья второй категории являются также остовыми деревьями в графе $\Gamma - \rho$. Более того, оба этих соответствия взаимно однозначны. Отсюда вытекает формула.

Например, если Γ это первый пример и ρ есть ребро между вершинами b и c, тогда первые два остовых дерева на странице 2 соответсвуют дереву в $\Gamma - \rho$, а последние два соответствуют дереву в $\Gamma \bullet \rho$.

Равенство $(*)$ удобно изображать схематически как на рисунке. На графе Γ ребро ρ для которого применяется формула отмечено одним штрихом.



Заметим, что никакое остовое дерево не содержит петель. Поэтому можно выбросить все петли из графа и число его остовых деревьев останется неизменным. Иначе говоря, для любой петли ρ выполняется равенство

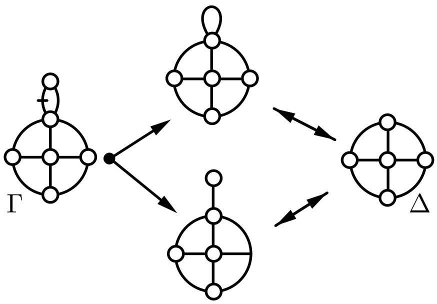
$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma - \rho).$$

Из основного соотношения можно вывести несколько других полезных соотношений. Например если в графе Γ есть вершина w степени 1 то w и ребро при w можно выбросить из графа и в полученном графе $\Gamma - w$ число его остовых графов не изменится, то есть

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma - w).$$

Действительно, обозначим через ρ есть единственное ребро при w. Заметим, что граф $\Gamma - \rho$ не связен, поскольку вершина w не имеет рёбер, и значит $\tau(\Gamma - \rho) = 0$. С другой стороны $\Gamma \bullet \rho = \Gamma - w$, отсюда получаем равенство.

На схемах двусторонняя стралка “$\leftrightarrow$” будет означать, что графы имеют то же число остовых деревьев, например из выведенных тождеств можно вывести следующую диаграмму



означающую, что $\tau(\Gamma) = 2 \cdot \tau(\Delta)$.

Заметим, что равенства описанные выше дают алгоритм вычисления $\tau(\Gamma)$. Действительно, для любого ребра ρ, оба графа $\Gamma - \rho$ и $\Gamma \bullet \rho$ имеют меньшее число рёбер. То есть основная формула сводит нахождение числа остовых деревьев Γ к нахождению числа остовых деревьев *более простых* графов.

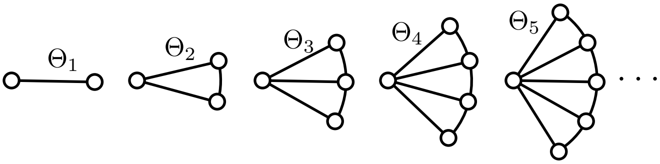
Ребро связного графа называется *мостом* если удаление этого ребра из графа делает граф не свазным, такой граф разбивается на два связных графа называемыми его *островами*.

Упражнение. *Предположим граф* Γ *содержит мост между островами* Δ_1 *и* Δ_2*. Докажите, что*

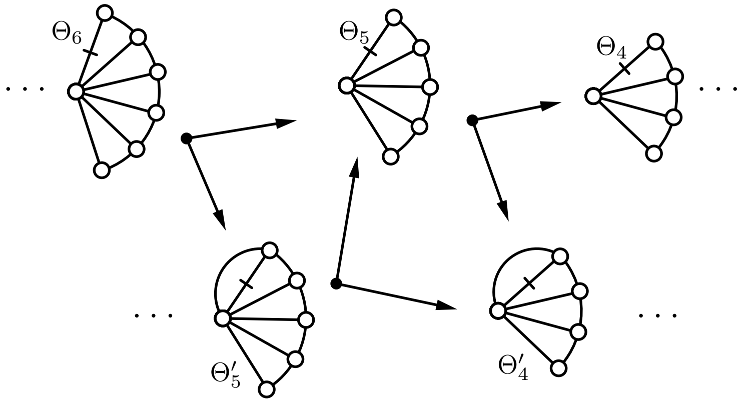
$$\tau(\Gamma) = \tau(\Delta_1) \cdot \tau(\Delta_2).$$

3 Деревья в веерах

Графы следующего вида называются *веерами*; веер с $n+1$ вершиной будет обозначаться Θ_n.



Применив соотношения полученные выше можно составить следующую бесконечную схему.



В дополнении к веерам, Θ_n в схеме присутствуют их вариации Θ'_n, отличающиеся от Θ_n дополнительным ребром.

Введём обозначения $a_n = \tau(\Theta_n)$ и $a'_n = \tau(\Theta'_n)$. Из схемы легко вывести два рекуррентных соотношения:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n + a_n, \\ a'_n &= a_n + a'_{n-1}. \end{aligned}$$

То есть в последоватльности чисел

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3 \ldots$$

каждое следующее является суммой предыдущих.

Напомним, что последовательность чисел Фибоначи F_n задаётся тем же соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и $F_1 = F_2 = 1$. Она начинается следующим образом

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Далее заметим, что Θ_1 это две вершины соединённые единственным ребером, а Θ'_1 это две вершины соединённые двойным ребром. Отсюда $a_1 = 1 = F_2$ и $a'_1 = 2 = F_3$ и значит

$$a_n = F_{2\cdot n}$$

для любого n.

Можно также вывести соотношение на a_n, без a'_n:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n + a_n = \\ &= 2 \cdot a_n + a'_{n-1} = \\ &= 3 \cdot a_n - a_{n-1}. \end{aligned}$$

Оказывается, что если последовательность задаётся подобным соотношением то можно найти формулу для её общего члена. В нашем случае

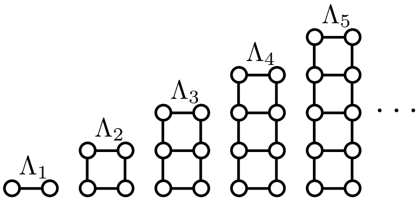
$$a_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left((\tfrac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})^n \right).$$

Этот процесс подробно описан в книжке Алексея Маркушевича [1], которую мы рекомендуем читателю.

4 Деревья в лестницах

Для закрепления материала мы советуем разобрать следующую задачу.

Пусть b_n обозначает число остовых деревьев в *лестнице* Λ_n с n ступеньками, то есть в графе следующего типа.

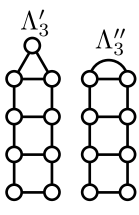


Воспользуйтесь разработанным методом и докажите, что последовательность b_n удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$b_{n+1} = 4 \cdot b_n - b_{n-1}.$$

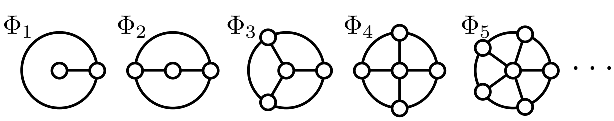
Заметим, что $b_1 = 1$ и $b_2 = 4$ отсюда можно быстро посчитать первые члены последовательности:

$$1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, \ldots$$



Вам потребуются ещё пара последовательностей графов, Λ_n' и Λ_n'' смотри рисунок.

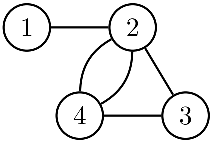
Если упражнение выше показалось слишком легким, сделайте тоже для колёс; то есть графов Φ_n следующего типа.



Для $c_n = \tau(\Phi_n)$ правильный ответ

$$c_{n+1} = 4 \cdot c_n - 4 \cdot c_{n-1} + c_{n-2}.$$

5 Матрицы и деревья



Граф можно задать с помощью таблицы. Для этого пронумеруем все вершины графа Г числами от 1 до n и заполним таблицу $n \times n$ поставив в клетки на пересечении i-ой строки и j-ого столбца число рёбер соединяющих i-ую вершину графа с и j-ой.

Полученная таблица M называется *матрицей смежности графа*. Она симметрична, то есть отражение в главной диагонали переставляет равные числа. Для графа на рисунке получим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку наличие петель не влияет на число остовых деревьев, мы можем считать, что граф не содержит петель. В этом случае на главной диагонали M стоят нули.

Заметим, что матрица смежности полностью описывает исходный граф. В частности число остовых деревьев графа в принципе можно вычислить по его матрице смежностей.

Оказывается это число довольно легко посчитать. Для этого из построенной $n \times n$-матрицы M нашего графа Г нужно построить $(n-1) \times (n-1)$-матрицу K следующим образом:

1. Обратить знаки всех компонент матрицы и заменить нули на диагонали степенями соответсвующих вершин. Заметим, что в полученной матрице M' сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю.

2. Из матрицы M' надо выбросить из матрицы последнюю строку и последний столбец; обозначим через K полученную матрицу.

Для нашего примера имеем

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Заметим, по матрице K можно восстановить M', а значит и матрицу M и граф Г если у него не было петель. Действительно, чтобы получить M' нужно добавить строку и столбец к матрице K и заполнить их числами так, чтобы сумма в каждой строке и столбце была нулевой.

Таким образом по матрице K можно найти число $\delta(K)$ равное $\tau(\Gamma)$, то есть числу деревьев исходного графа. Заметим что для $\delta(K)$ верны следующие соотношения:

1. Если в матрице K поменять местами пару строк и пару столбцов с теми же номерами для полученной матрицы K' выполняется
$$\delta(K) = \delta(K').$$
Действительно, K' описывать тот же граф Γ с другой нумерацией вершин.

2. Основное соотношение для ребра соединяющего первую вершину с последней можно записать следующим образом. Если сумма компонент первой строки в K положительна, то
$$\delta(K) = \delta(K^-) + \delta(K^\bullet)$$
где K^- обозначает матрицу K в которой от углового компоненты отняли 1, а $K^\bullet$ обозначает $(n-2)\times(n-2)$ матрицу полученную из K удалением первого столбца и первой строки.

3. Если сумма чисел в каждой строке K равна 0 то $\delta(K) = 0$. Действительно, в этом случае ни одна из вершин исходного графа не связана с последней вершиной, а значит граф несвязен и не имеет остовых деревьев.

Читатель знакомый с понятием определитель непременно заметил, что тем же свойствам обладает *определитель матрицы K* далее обозначаемый $\det(K)$. Поскольку эти свойства полностью определяют $\delta(K)$ мы получаем
$$\delta(K) = \det(K).$$
(Для читателей незнакомых с понятием определитель написана следующая глава.)

Отсюда следует так называемая матричная теорема Кигхофа

$$(**) \qquad \tau(\Gamma) = \det(K).$$

Идея доказательства поучительна — равенство двух разношёрстно определённых числа $\delta(K)$ и $\det(K)$ следует из общих свойств этих чисел. Эту идею можно рассматривать как своего рода обобщение метода индукции; она имеет множество других приложений, но к сожалению более простых содержательных примеров я не знаю.

Тождество (**) было доказано Густавом Кирхгофом в 1847 году.

6 Лекбез на тему «определители»

Квадратная матрица это таблица $n \times n$ заполненная числами. Определитель $\det M$ матрицы M это многочлен от её n^2 компонент, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Определитель единичной матрицы равен 1; то есть,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

2. Если каждый элемнт одной из строк матрицы M умножить на число λ то определитель полученной матрицы M' умножится на то же число, то есть

$$\det M' = \lambda \cdot \det M.$$

3. Если одну из строк матрицы M почленно прибавить к другой строке (или отнять от неё) матрицы то определитель полученной матрицы M' не изменится, то есть

$$\det M' = \det M.$$

Вышеприведённые свойства однозначно определяют определитель. Мы примем это утверждение без доказательстве; оно не очевидное и не сложное.

Чиателю незнакомому с понятием определитель, мы советуем вывести следующее свойство из трёх перечисленных выше.

Упражнение. *Если две строки матрицы M поменять местами то определитель полученной матрицы M' поменяет знак; то есть,*

$$\det M' = -\det M.$$

Для определителя можно выписать явную формулу из $n!$ одночленов однако свойства определителя описанные выше дают более удобный и быстрый способ вычисления определителя. Давайте разберём его на одном примере.

Пусть K есть 4×4 матрица следующего вида:

$$K = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Применив свойство 3, можно по очереди прибавить к первой строке все строки со второй до последней и значит

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

первую строку можно прибавить ко всем остальным, и далее применить свойство 2 три раза:

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

отняв от первой строки все остальные строки, и применив свойства 1, получаем

$$= 5^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5^3.$$

7 Формула Кели

Вычисления подобные данным выше позволяют доказать, что

$$\det K = n^{n-2},$$

где K обозначает $(n-1) \times (n-1)$ матрицу следующего вида:

$$K = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Матрица K это как раз матрица в формуле Киргхофа для полного графа Π_n с n вершинами. *Полным графом* называется граф в котором любая пара различных вершин соединена единственным ребром. Согласно матричному тождеству, получаем

$$\tau(\Pi_n) = n^{n-2}.$$

Последнее ravenstvo называется *формула Кэли.* Несколько красивых её доказательств и её история осуждаются в замечательной книжке Мартина Айгнера и Гюнтера Циглера [2, Глава 30].

Список литературы

[1] А. И. Маркушевич. *Возвратные последовательности.* Гостехиздат, 1950. (Популярные лекции по математике, вып. 1.).

[2] М. Айгнер, Г. Циглер *Доказательства из Книги*

[3] Shirdareh Haghighi, M. H.; Bibak, Kh. Recursive relations for the number of spanning trees. Appl. Math. Sci. (Ruse) 3 (2009), no. 45–48, 2263–2269.