

# Формула удаления и стягивания

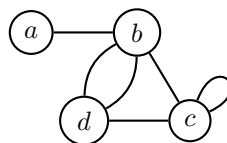
Антон Петрунин

## Аннотация

Мы посчитаем число остовных деревьев для некоторых графов.

## 1 Графы и их остовные деревья

Рассмотрим план шести ежедневных рейсов некоторой авиакомпании между некоторыми парами из аэропортов  $a, b, c$  и  $d$  показанный на рисунке. Для формализации такой и многих других ситуаций в математике используется понятие *граф*.



Граф это конечный и не пустой набор *вершин* (в нашем примере вершина графа это аэропорт) и конечный набор *рёбер* каждое из которых соединяет пару вершин (в примере ребро это рейс авиакомпании). Пара вершин графа может быть соединена несколькими рёбрами (это может означать, что авиакомпания совершает два рейса в день). Также, ребро может соединять вершину с самой собой, в этом случае оно называется *петлёй* (про такое ребро можно думать как про прогулочный рейс авиакомпании).

То есть, с математической точки зрения, мы видим граф с четырьмя вершинами  $a, b, c$  и  $d$ , шестью рёбрами, из них одна петля при вершине  $c$  и пара рёбер соединяет  $b$  с  $d$ . Число рёбер исходящих из данной вершины называется её *степенью*; степени вершин  $a, b, c$  и  $d$  соответственно 1, 4, 4 и 3.

Изображённый граф является *связным*, то есть из любой его вершины можно пройти в любую другую пройдя по нескольким его рёбрам.

Предположим нам требуется сократить число рёбер связного графа сохранив его связность. Нетрудно видеть, что это можно сделать тогда и только тогда, когда граф содержит *цикл*.

Цикл это маршрут составленный из различных рёбер обходящий несколько вершин без повторений и возвращается в исходную

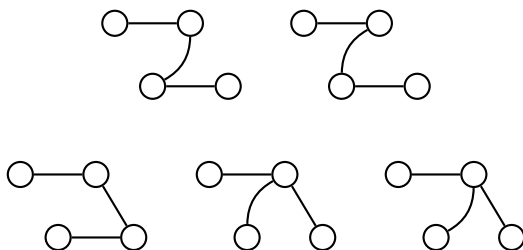
вершину. Число рёбер в цикле называется *длиной цикла*. Например в нашем графе есть два цикла длины три с вершинами  $b$ ,  $c$  и  $d$ , один цикл длины два с вершинами  $b$  и  $d$ , а также петля при вершине  $c$  образует цикл длины один.

Действительно, если из любого цикла связного графа выбросить любое ребро то граф останется связным. Более того, если после выбрасывания некоторого ребра граф остался связным, то это ребро принадлежало некоторому циклу — этот цикл образован самим ребром и кратчайшим путём между его концами в оставшемся графе.

Выбрасывание ребра из цикла можно повторять, пока мы не придём к графу без цикла. Полученный граф называется *остовным деревом* исходного графа.

Вообще говоря, связный граф без циклов называется *деревом*. В таких графах нет петель и из любой их вершины в любую другую есть единственный путь по рёбрам без повторений вершин.

На следующем рисунке вы видите все пять различных остовных деревьев нашего исходного графа.



Число остовных деревьев в данном графе  $\Gamma$  мы будем обозначать  $\tau(\Gamma)$ . Например если  $\Gamma$  это граф рассмотренный выше то  $\tau(\Gamma) = 5$ .

Чтобы проверить понимание данных определений мы советуем решить следующие два стандартных упражнения про деревья.

**Упражнение.** Докажите что если дерево имеет хотябы две вершины, то в нём найдётся вершина степени 1.

Воспользуйтесь индукцией по числу вершин и предыдущем упражнении чтобы доказать следующее.

**Упражнение.** Докажите что число рёбер в любом дереве на один меньше числа его вершин.

## 2 Формула удаления и стягивания

Пусть  $\rho$  есть ребро в графе  $\Gamma$ . Обозначим через  $\Gamma \setminus \rho$  граф полученный из  $\Gamma$  удалением ребра  $\rho$  и через  $\Gamma / \rho$  граф полученный из  $\Gamma$  стягиванием ребра  $\rho$  в точку.

Если ребро  $\rho$  не является петлёй, тогда выполняется следующее соотношение называемое *формула удаления и стягивания*

$$(*) \quad \tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus \rho) + \tau(\Gamma / \rho).$$

Действительно, остовные деревья в  $\Gamma$  можно разделить на две категории — те что содержат ребро  $\rho$  и те, что его не содержат. Для деревьев из первой категории стягивание ребра  $\rho$  в точку даёт остовое дерево в  $\Gamma / \rho$  а деревья второй категории являются также остовными деревьями в графе  $\Gamma \setminus \rho$ . Более того, оба этих соответствия взаимно однозначны. Отсюда вытекает формула.

Например, если  $\Gamma$  это первый пример и  $\rho$  есть ребро между вершинами  $b$  и  $c$ , тогда первые два остовных дерева на странице 2 соответствуют дереву в  $\Gamma \setminus \rho$ , а последние два соответствуют дереву в  $\Gamma / \rho$ .

Формулу удаления и стягивания  $(*)$  удобно записывать схематически как показано на рисунке. На графе  $\Gamma$  ребро  $\rho$  для которого применяется формула отмечено одним штрихом.

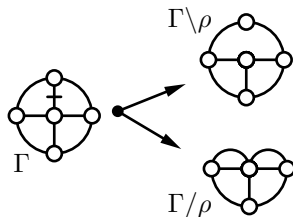
Заметим, что никакое остовное дерево не содержит петлю. Поэтому можно выбросить все петли из графа и число его остовных деревьев останется неизменным. Иначе говоря, для любой петли  $\rho$  выполняется равенство

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus \rho).$$

Из формулы удаления и стягивания можно вывести несколько других полезных соотношений. Например если в графе  $\Gamma$  есть вершина  $w$  степени 1 то  $w$  и ребро при  $w$  можно выбросить из графа и в полученном графе  $\Gamma \setminus w$  число его остовных графов не изменится, то есть

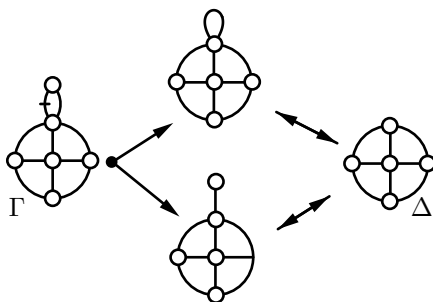
$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus w).$$

Действительно, обозначим через  $\rho$  единственное ребро при  $w$ . Заметим, что граф  $\Gamma \setminus \rho$  не связан, поскольку вершина  $w$  не имеет рёбер, и значит  $\tau(\Gamma \setminus \rho) = 0$ . С другой стороны  $\Gamma / \rho = \Gamma \setminus w$ , отсюда получаем равенство.



На схемах двусторонняя стрелка “ $\leftrightarrow$ ” будет означать, что соответствующие графы имеют то же число остовных деревьев, например из выведенных тождеств можно вывести следующую диаграмму означающую в частности, что  $\tau(\Gamma) = 2 \cdot \tau(\Delta)$ .

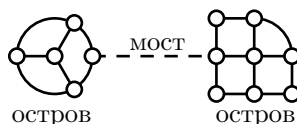
Равенства описанные выше дают алгоритм вычисления  $\tau(\Gamma)$ . Действительно, для любого ребра  $\rho$ , оба графа  $\Gamma \setminus \rho$  и  $\Gamma / \rho$  имеют меньшее число рёбер. То есть формула удаления и стягивания сводит нахождение числа остовных деревьев  $\Gamma$  к нахождению числа остовных деревьев *более простых* графов.



В заключении ещё одно упражнение. Ребро связного графа называется *мостом* если удаление этого ребра из графа делает граф не связным, такой граф разбивается на два связных графа называемых его *островами*.

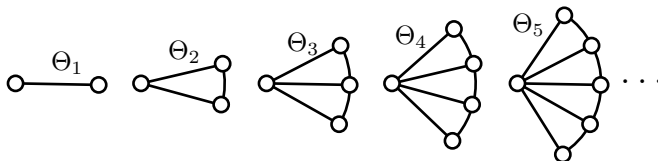
**Упражнение.** Предположим граф  $\Gamma$  содержит мост между островами  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Докажите, что

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Delta_1) \cdot \tau(\Delta_2).$$

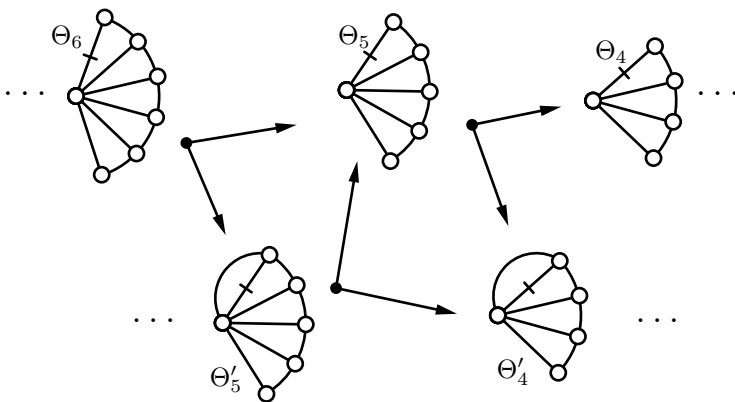


### 3 Деревья в веерах

Графы следующего вида называются *веерами*; веер с  $n + 1$  вершиной будет обозначаться  $\Theta_n$ .



Применив соотношения полученные в предыдущей главке, мы можем составить следующую бесконечную схему. В дополнении к веерам,  $\Theta_n$  в схеме участвуют их вариации  $\Theta'_n$ , отличающиеся от  $\Theta_n$  дополнительным ребром.



Введём обозначения  $a_n = \tau(\Theta_n)$  и  $a'_n = \tau(\Theta'_n)$ . Из схемы легко вывести два рекуррентных соотношения:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n + a_n, \\ a'_n &= a_n + a'_{n-1}. \end{aligned}$$

То есть в последовательности чисел

$$a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, \dots$$

каждое следующее является суммой двух предыдущих.

Напомним, что последовательность *чисел Фибоначчи*  $F_n$  задаётся тем же соотношением  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  с  $F_1 = F_2 = 1$ . Она начинается следующим образом

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Далее заметим, что  $\Theta_1$  это две вершины соединённые единственным ребром, а  $\Theta'_1$  это две вершины соединённые двойным ребром. Отсюда  $a_1 = 1 = F_2$  и  $a'_1 = 2 = F_3$  и значит

$$a_n = F_{2 \cdot n}$$

для любого  $n$ .

Можно также вывести чистое рекуррентное соотношение на  $a_n$ , без использования  $a'_n$ :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a'_n + a_n = \\ &= 2 \cdot a_n + a'_{n-1} = \\ &= 3 \cdot a_n - a_{n-1}. \end{aligned}$$

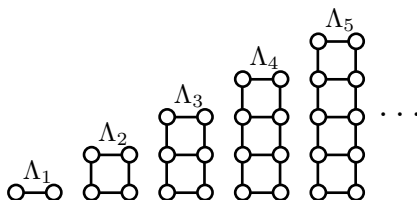
Оказывается, что если последовательность задаётся подобным соотношением то можно найти формулу для её общего члена. В нашем случае

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Этот процесс подробно описан в книжке [1], которую мы рекомендуем читателю.

Для закрепления материала мы советуем разобрать следующую задачу.

Пусть  $b_n$  обозначает число остовных деревьев в *лестнице*  $\Lambda_n$  с  $n$  ступеньками, то есть в графе следующего типа.

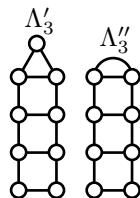


Воспользуйтесь разработанным методом и докажите, что последовательность  $b_n$  удовлетворяет следующему соотношению

$$b_{n+1} = 4 \cdot b_n - b_{n-1}.$$

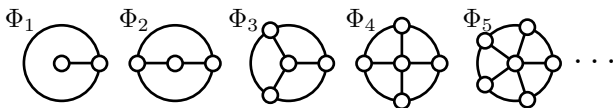
Заметим, что  $b_1 = 1$  и  $b_2 = 4$  отсюда можно быстро посчитать первые члены последовательности:

$$1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, \dots$$



Вам потребуются ещё пара последовательностей графов,  $\Lambda'_n$  и  $\Lambda''_n$  показанных на рисунке.

Если упражнение выше показалось слишком легким, сделайте тоже для колёс; то есть графов  $\Phi_n$  следующего типа.

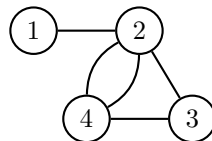


Для  $c_n = \tau(\Phi_n)$  правильный ответ

$$c_{n+1} = 4 \cdot c_n - 4 \cdot c_{n-1} + c_{n-2}.$$

## 4 Графы как матрицы

Предположим вершины графа  $\Gamma$  пронумерованы числами от 1 до  $n$ . Тогда граф  $\Gamma$  можно полностью описать таблицей  $n \times n$  поставив в клетки на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца число рёбер соединяющих  $i$ -ую вершину графа с  $j$ -ой.



Полученная таблица  $A = A_\Gamma$  называется *матрицей смежности графа*. Она симметрична, то есть отражение в главной диагонали переставляет равные числа. Для графа на рисунке получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Напомним, что нас интересует число остовных деревьев в графе. Поскольку наличие петель не влияет на это число, мы можем считать, что граф не содержит петель. В этом случае на главной диагонали  $A$  стоят нули.

Поскольку матрица смежности полностью описывает исходный граф, число остовных деревьев графа в принципе можно вычислить по его матрице смежностей.

Оказывается, это довольно легко сделать. Сначала из построенной  $n \times n$ -матрицы  $A = A_\Gamma$  нашего графа  $\Gamma$  нужно построить  $(n-1) \times (n-1)$ -матрицу  $K = K_\Gamma$  следующим образом:

1. Обратим знаки всех компонент матрицы  $A$  и заменим нули на её диагонали степенями соответствующих вершин. В полученной матрице  $A'$  сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю.
2. Выбросим из матрицы  $A'$  последнюю строку и последний столбец; обозначим через  $K = K_\Gamma$  полученную матрицу.

Для нашего примера имеем

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

По матрице  $K$  можно восстановить  $A'$ , а значит и матрицу  $A$  и граф  $\Gamma$  если у него не было петель. Действительно, чтобы получить

$A'$  нужно добавить строку и столбец к матрице  $K$  и заполнить их числами так, чтобы сумма в каждой строке и столбце была нулевой; это можно сделать единственным образом.

Таким образом по матрице  $K$  можно найти  $\tau(\Gamma)$  то есть число деревьев исходного графа. Мы обозначим это число как  $\delta(K)$ , подчёркивая этим, что  $\delta(K) = \tau(\Gamma)$  есть функция от  $K$ . Для  $\delta(K)$  верны следующие соотношения:

1. Если в матрице  $K$  переставить пару строк и также пару столбцов с теми же номерами, тогда для полученной матрицы  $K'$  выполняется

$$\delta(K) = \delta(K').$$

Действительно,  $K'$  описывает тот же граф  $\Gamma$  с другой нумерацией вершин.

2. Если сумма компонент первой строки в  $K$  положительна, то

$$\delta(K) = \delta(K^\circ) + \delta(K^\bullet)$$

где  $K^\circ$  обозначает матрицу  $K$  в которой от углового компоненты отняли 1, а  $K^\bullet$  обозначает  $(n-2) \times (n-2)$  матрицу полученную из  $K$  удалением первого столбца и первой строки. Это равенство следует из формулы удаления и стягивания (\*) поскольку

$$K^\circ = K_{\Gamma \setminus \rho} \quad \text{и} \quad K^\bullet = K_{\Gamma/\rho}.$$

3. Если сумма чисел в каждой строке  $K$  равна 0 то  $\delta(K) = 0$ . Действительно, в этом случае ни одна из вершин исходного графа не связана с последней вершиной, а значит граф несвязен и не имеет остовных деревьев.

Читатель знакомый с понятием определитель<sup>1</sup> непременно заметит, что тем же свойствам обладает и *определитель матрицы*  $K$  далее обозначаемый  $|K|$ . Поскольку эти свойства полностью определяют  $\delta(K)$  мы получаем равенство

$$\delta(K) = |K|.$$

Отсюда следует так называемая *матричная формула*

$$(**) \quad \tau(\Gamma) = |K_\Gamma|.$$

---

<sup>1</sup>Для читателей незнакомых с понятием определитель написана следующая глава.



Идея доказательства поучительна — равенство двух разношёрстно определённых числа  $\tau(\Gamma)$  и  $|K_\Gamma|$  следует из общих свойств этих чисел. Эту идею можно рассматривать как обобщение метода математической индукции; она имеет множество других приложений, но к сожалению более простые содержательные примеры нам не известны.

## 5 Ликбез на тему «определители»

*Квадратная матрица* это таблица  $n \times n$  заполненная числами называемыми её *компонентами*. Определитель  $|M|$  матрицы  $M$  это многочлен от её  $n^2$  её компонент, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Определитель единичной матрицы равен 1; то есть,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Если каждую компоненту одной из строк матрицы  $M$  умножить на число  $\lambda$  то определитель полученной матрицы  $M'$  умножится на то же число, то есть

$$|M'| = \lambda \cdot |M|.$$

3. Если одну из строк матрицы  $M$  почленно прибавить к другой строке (или отнять от неё) то определитель полученной матрицы  $M'$  не изменится, то есть

$$|M'| = |M|.$$

Эти три свойства однозначно определяют определитель. Мы примем это утверждение без доказательства; оно неочевидное, но и несложное, кроме того рано или поздно вам придётся его выучить.

**Упражнение.** Выведите следующее свойство из трёх перечисленных выше.

4. Если две строки матрицы  $M$  поменять местами то определитель полученной матрицы  $M'$  поменяет знак; то есть,

$$|M'| = -|M|.$$

Для определителя матрицы  $n \times n$  можно выписать явную формулу из  $n!$  слагаемых. Например

$$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$$

есть определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Однако свойства определителя описанные выше дают более удобный и быстрый способ вычисления определителя, особенно при больших  $n$ . Мы разберём этот способ на одном примере, который нам пригодится позже:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5^3.$$

Первое равенство следует из свойства 3 — мы по очереди прибавили к первой строке все строки со второй до последней. Далее мы прибавили первую ко всем остальным, и к полученной матрице применили свойство 2 три раза. Последние два равенства получаются отниманием от первой строки всех остальных, и применением свойства 1.

## 6 Формула Кэли

Прямое обобщение вычисления данного выше даёт, что

$$|K| = n^{n-2},$$

где  $K$  обозначает  $(n-1) \times (n-1)$  матрицу следующего вида:

$$K = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Матрица  $K$  это как раз матрица в матричной формуле (\*\*) для полного графа  $\Pi_n$  с  $n$  вершинами. *Полным графом* называется граф в котором любая пара различных вершин соединена единственным ребром; то есть, получаем

$$\tau(\Pi_n) = n^{n-2}.$$

Это равенство называется *формулой Кэли*.

## 7 Заключительные замечания

Подсчёт числа остовных деревьев полезен при расчёте электрических цепей; это видно из следующей формулы.

Предположим граф  $\Gamma$  описывает электрическую цепь; каждое ребро это сопротивление в 1 Ом. Предположим из вершины  $a$  в вершину  $b$  идёт ток в 1 Ампер и нам надо посчитать ток через одно из сопротивлений.

Пусть  $\rho$  есть ребро  $\Gamma$  с выбранным направлением. Заметим, что все остовные деревья  $\Gamma$  можно разделить на три типа, (1) те в которых на пути из  $a$  в  $b$  ребро  $\rho$  появляется с положительной ориентацией, (2) те в которых на пути из  $a$  в  $b$  ребро  $\rho$  появляется с отрицательной ориентацией, (3) те в которых на пути из  $a$  в  $b$  ребро  $\rho$  не появляется. Обозначим через  $\tau_+$ ,  $\tau_-$  и  $\tau_0$  число деревьев в этих трёх категориях. Очевидно, что  $\tau(\Gamma) = \tau_+ + \tau_- + \tau_0$ . Тогда сила тока  $I_\rho$  вдоль  $\rho$  задаётся следующей формулой:

$$I_\rho = \frac{\tau_+ - \tau_-}{\tau(\Gamma)}.$$

Доказательство получается прямой проверкой правил Киргхофа для значений токов полученных по этой формуле.

Есть множество других приложений правил Киргхофа в теории графов. Например оно используется в физическом доказательстве формулы Эйлера

$$B - P + G = 2,$$

где  $B$ ,  $P$  и  $G$  обозначает число вершин, рёбер и граней многогранника, смотри [6].

*Формула удаления и стягивания* применялась при решении так называемой *задачи о квадрировании квадрата*. История этой задачи и её замечательное решение обсуждаются в книжках [5] и [3, Глава 32]; идея этого решения также основана на оригинальном использовании электрических цепей.

Формула аналогичная формуле удаления и стягивания выполняется для *хроматического многочлена*, а именно,

$$\chi(\Gamma, t) = \chi(\Gamma \setminus \rho, t) - \chi(\Gamma / \rho, t),$$

где  $\chi(\Gamma, t)$  обозначает число раскрасок графа  $\Gamma$  в  $t$  цветов такое, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета.

Приведённый нами вывод рекуррентных формул для чисел остовных деревьев в веерах лестницах и колёсах даётся в [7]; эта задача обсуждается также в классической книжке [4]. Несколько красивых доказательств формулы Кэли и её история осуждаются в [2, Глава 30].

## Список литературы

- [1] А. И. Маркушевич, *Возвратные последовательности*, Гостехиздат, 1950. (Популярные лекции по математике, вып. 1.).
- [2] М. Айгнер, Г. Циглер, *Доказательства из Книги*, Бином. Лаборатория знаний, 2015
- [3] М. Гарднер, *Математические головоломки и развлечения*, Оникс, Москва, 1994.
- [4] Д. Кнут, Р. Грэхем, О. Паташник, *Конкретная математика. Математические основы информатики*, М. Вильямс, 2009.
- [5] И. М. Яглом, *Как разрезать квадрат?* М., Наука, 1968.
- [6] M. Levi, An Electrician's (or a Plumber's) Proof of Euler's Polyhedral Formula, *SIAM News* 50, no. 4, May 2017.
- [7] M. H. Shirdareh Haghighi; Kh. Bibak, Recursive relations for the number of spanning trees. *Appl. Math. Sci. (Ruse)* 3 (2009), no. 45–48, 2263–2269.