

## TODOs

1: Akronyme .....	2
2: Referenzen zu späteren Abschnitten .....	3
3: Mehr Überblick .....	3
4: Aktuelle Bilder .....	6
5: Mehr Baumeigenschaften .....	7
6: Baumeigenschaften + ? → Segmente .....	7
7: Segmente + Eigenschaften + ? → Klassifizierung? .....	8
8: Kugel für Dreieck .....	10
9: Bild?: Fancy 3d Torus von Pivot Kugeln und gesuchte Kugel mit Radius $\alpha + x$ .....	11
10: Ergebnisse .....	13
11: Triangle Strip für Quadrat .....	16
12: Messwerte .....	16
13: Bilder Crop .....	16
14: Oben/Unten Teilung in 2 Segmente für Debug .....	18
15: Vergleichsbild .....	18
16: Farb- und Tiefenbild .....	18
17: Stark und Schwache Effekt Bild .....	18
18: Vergleich alle Punkt und vereinfachte Versionen .....	18
19: Kopiert vom Fachpraktikum .....	19
20: Orthogonal? .....	20
21: Bedienung/Interface .....	20
22: Referenzen .....	21
23: Ergebnisse .....	22
24: Triangulierung Ergebnisse .....	22
25: Berechnung Ergebnisse .....	22
26: Visualisierung Ergebnisse .....	22
27: Fazit .....	22
28: Grafiken .....	23

# Masterarbeit

**Berechnung charakteristischen Eigenschaften  
von botanischen Bäumen mithilfe von 3D-Punkt-  
wolken.**

**Name:** Anton Wetzel

E-Mail: anton.wetzel@tu-ilmenau.de

Matrikelnummer: 60451

Studiengang: Informatik Master

**Betreuer:** Tristan Nauber

E-Mail: tristan.nauber@tu-ilmenau.de

**Professor:** Prof. Dr.-Ing. Patrick Mäder

E-Mail: patrick.maeder@tu-ilmenau.de

Fachgebiet: Data-intensive Systems and Visualizati-  
on Group

Datum: 27.12.2023



**TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
ILMENAU**

# Inhaltsverzeichnis

1. Glossar .....	1
1.1. Punktwolken .....	1
1.2. Datenstrukturen .....	1
1.3. Akronyme .....	2

## I. Überblick

1. Ablauf .....	3
1.1. Diskretisierung .....	3
1.2. Segmente bestimmen .....	3
1.3. Segmente unterteilen .....	3
1.4. Analyse und Speichern .....	3
1.5. Speichern vom Octree .....	3
2. Stand der Technik .....	3

## II. Berechnung

1. Separierung in Bäume .....	5
1.1. Diskretisieren .....	5
1.2. Segmente bestimmen .....	5
1.2.1. Bodenhöhe bestimmen .....	5
1.2.2. Bäume bestimmen .....	5
1.3. In Segmente unterteilen .....	5
2. Eigenschaften .....	6
2.1. Nachbarschaft .....	6
2.2. Krümmung .....	6
2.3. Punkthöhe .....	6
2.4. Ausdehnung .....	7
3. Segmentierung von einem Baum .....	7
4. Eigenschaften für Visualisierung .....	7
4.1. Normale .....	7
4.2. Punktgröße .....	7
5. Baumart .....	8

## III. Triangulierung

1. Ziel .....	9
2. Ball-Pivoting-Algorithmus .....	9
2.1. Überblick .....	9
2.2. Hilfsmittel .....	9
2.2.1. KD-Baum .....	9
2.2.2. $\alpha$ -Kugel für ein Dreieck .....	10
2.3. Ablauf .....	10
2.4. Startdreieck bestimmen .....	10
2.5. Triangulierten Bereich erweitern .....	10
2.5.1. Kandidaten bestimmen .....	11

2.5.2. Besten Kandidaten bestimmen .....	12
2.5.3. Triangulierung erweitern .....	12
2.6. Komplettes Segment triangulieren .....	13
2.7. Auswahl von $\alpha$ .....	13
3. Ergebnisse .....	13

#### IV. Visualisierung

1. Technik .....	14
2. Punkt .....	14
2.1. Basis .....	14
2.2. Vergleich zu Quadrat als Basis .....	15
2.3. Instancing .....	16
2.4. Kreis .....	16
3. Eigenschaft .....	17
4. Subpunktwolken (Bäume) .....	17
4.1. Auswahl .....	17
4.2. Anzeige .....	17
5. Eye-Dome-Lighting .....	18
6. Detailstufen .....	18
6.1. Berechnung der Detailstufen .....	19
6.2. Auswahl der Detailstufen? .....	19
6.2.1. Abstand zur Kamera .....	19
6.2.2. Auto .....	19
6.2.3. Gleichmäßig .....	20
7. Kamera/Projektion .....	20
7.1. Kontroller .....	20
7.1.1. Orbital .....	20
7.1.2. First person .....	20
7.2. Projektion .....	20
7.2.1. Perspektive .....	20
7.2.2. Orthogonal? .....	20
7.2.3. Side-by-Side 3D? .....	20
8. Bedienung/Interface .....	20

#### V. Ergebnisse

1. Testdaten .....	22
2. Triangulierung .....	22
3. Berechnung .....	22
4. Visualisierung .....	22
5. Fazit .....	22

#### VI. Appendix

1. KD-Baum .....	23
1.1. Konstruktion .....	23
1.2. Suche mit festem Radius .....	23

1.3. Suche mit fester Anzahl .....	23
1.4. Schnelle Suche .....	24
Bibliographie .....	25

# 1. Glossar

## 1.1. Punktwolken

**Koordinatensystem** ist eine Menge von Achsen, mit den eine Position genau beschrieben werden kann. Im Normalfall werden kartesische Koordinaten verwendet, welche so orientiert sind, dass die x-Achse nach rechts, die y-Achse nach oben und die z-Achse nach hinten zeigt.

**Punkt** ist eine dreidimensionale Position, welcher zusätzlichen Informationen zugeordnet werden können.

**Punktwolke** ist eine Menge von Punkten. Für alle Punkte sind die gleichen zusätzlichen Informationen vorhanden.

**Normale** ist ein normalisierter dreidimensionaler Vektor, welcher die Orientierung einer Oberfläche von einem Objekt angibt. Der Vektor ist dabei orthogonal zur Oberfläche, kann aber in das Objekt oder aus dem Objekt gerichtet sein.

## 1.2. Datenstrukturen

**Voxel** ist ein Würfel im dreidimensionalen Raum. Die Position und Größe vom Voxel kann explicit abgespeichert oder relative zu den umliegenden Voxeln bestimmt werden.

**Tree** ist eine Datenstruktur bestehend aus Knoten, welche wiederum Kinderknoten haben können. Die Knoten selber können weitere Informationen enthalten.

**Octree** ist ein Tree, bei dem ein Knoten acht Kinderknoten haben kann. Mit einem Octree kann ein Voxel aufgeteilt werden. Jeder Knoten gehört zu einem Voxel, welcher gleichmäßig mit den Kinderknoten weiter unterteilt wird. Eine Veranschaulichung ist in Abbildung 1 gegeben.

**Quadtree** ist ein Tree, bei dem ein Knoten vier Kinderknoten haben kann. Statt eines Voxels bei einem Octree, kann ein Quadtree ein zweidimensionales Quadrat unterteilen. Eine Veranschaulichung ist in Abbildung 2 gegeben.

**Leaf-Knoten** ist ein Knoten, welcher keine weiteren Kinderknoten hat. Für Punktwolken gehört jeder Punkt zu genau einem Leaf-Knoten.

**Branch-Knoten** ist ein Knoten, welcher weitere Kinderknoten hat.

**Root-Knoten** ist der erste Knoten im Tree, alle anderen Knoten sind direkte oder indirekte Kinderknoten vom Root-Knoten.

**KD-Baum** ist eine Datenstruktur, um im  $k$ -dimensionalen Raum für eine Position die nächsten Punkte zu bestimmen.

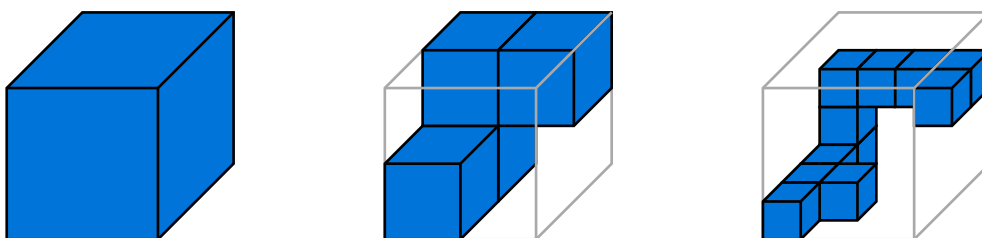


Abbildung 1: Abbildung 1: Unterschiedliche Stufen von einem Octree.

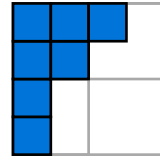


Abbildung 2: Abbildung 2: Unterschiedliche Stufen von einem Quadtree.

### 1.3. Akronyme

Todo: Akronyme

# I. Überblick

## 1. Ablauf

Der Import wird in mehreren getrennten Phasen durchgeführt. Dabei wird die Arbeit für eine Phase so weit wie möglich parallelisiert.

Todo: Referenzen zu späteren Abschnitten

### 1.1. Diskretisierung

Die Eingabedaten können beliebig viele Punkte enthalten. Für die weiteren Phasen wird deshalb eine vereinfachte Version berechnet, bei der alle Punkte in diskrete Voxel unterteilt werden. Die vereinfachte Version kann vollständig im Hauptspeicher geladen sein.

### 1.2. Segmente bestimmen

Für jeden gefüllten Voxel wird bestimmt, zu welchem Segment er gehört. Dafür werden die gefüllten Voxel nach der Höhe geordnet. Von Oben nach Unten werden die Voxel zu einem Segment zugeordnet. Dafür werden Voxel dem gleichen Segment zugeordnet, zu dem nach Voxel gehören.

### 1.3. Segmente unterteilen

Für jeden Punkt wird der zugehörige Voxel bestimmt und das Segment vom Voxel dem Punkt zugeordnet. Die Punkte werden in Segmente unterteilt gespeichert.

### 1.4. Analyse und Speichern

Für jedes Segment werden die benötigten Eigenschaften für die Visualisierung berechnet. Dabei werden Eigenschaften spezifisch für jeden Punkt und Eigenschaften für das gesamte Segment bestimmt.

Die fertigen Segmente werden einzeln abgespeichert, dass diese separat angezeigt werden können. Zusätzlich wird ein Octree mit allen Segmenten kombiniert erstellt.

### 1.5. Speichern vom Octree

Für alle Branch-Knoten im Octree wird mit den Kinderknoten eine vereinfachte Punktwolke als Detailstufe für das Anzeigen berechnet. Die Baumstruktur und alle Knoten mit den zugehörigen Punkten werden abgespeichert.

Todo: Mehr Überblick

## 2. Stand der Technik

Punktwolken können mit unterschiedlichen Lidar Scanverfahren aufgenommen werden. Aufnahmen vom Boden oder aus der Luft bieten dabei verschiedene Vor- und Nachteile [1]. Bei einem Scan von Boden aus, kann nur eine kleinere Fläche abgetastet werden, dafür mit erhöhter Genauigkeit, um einzelne Bäume genau zu analysieren [2]. Aus der



Luft können größere Flächen erfasst werden, wodurch Waldstücke aufgenommen werden können, aber die Datenmenge pro Baum ist geringer [3].

Nach der Datenerfassung können relevante Informationen aus den Punkten bestimmt werden, dazu gehört eine Segmentierung in einzelne Bäume [4] und die Berechnung von Baumhöhe oder Kronenhöhe [3].

Ein häufiges Format für Lidar-Daten ist das LAS Dateiformat [5]. Bei diesem werden die Messpunkte mit den bekannten Punkteigenschaften gespeichert. Je nach Messtechnologie können unterschiedliche Daten bei unterschiedlichen Punktwolken bekannt sein, aber die Position der Punkte ist immer gegeben. Aufgrund der großen Datenmengen werden LAS Dateien häufig im komprimierten LASzip Format [6] gespeichert. Die Kompression ist Verlustfrei und ermöglicht eine Kompressionsrate zwischen 5 und 15 je nach Eingabedaten.

*LASTools* [7] ist eine Sammlung von Software für die allgemeine Verarbeitung von LAS Dateien. Dazu gehört die Umwandlung in andere Dateiformate, Analyse der Daten und Visualisierung der Punkte. Durch den allgemeinen Fokus ist die Software nicht für die Verarbeitung von Waldteilen ausgelegt, wodurch Funktionalitäten wie Berechnungen von Baumeigenschaften mit zugehöriger Visualisierung nicht gegeben sind.

## II. Berechnung

### 1. Separierung in Bäume

#### 1.1. Diskretisieren

Die Eingabedaten können beliebig viele Punkte beinhalten, wodurch es wegen Hardwarelimitierungen nicht möglich ist alle Punkte gleichzeitig zu laden. Um eine schnellere Verarbeitung zu ermöglichen, wird zuerst eine vereinfachte Version der ursprünglichen Punktwolke bestimmt.

Dafür wird die gesamte Punktwolke in gröbere Voxel unterteilt und Punkte im gleichem Voxel werden zusammengefasst. Die Größe von den Voxeln ist dabei als Makroparameter einstellbar (WIP). Als Standardwert wird 5cm verwendet.

Für jeden Voxel wird gespeichert, wie viele Punkte zum Voxel gehören.

#### 1.2. Segmente bestimmen

##### 1.2.1. Bodenhöhe bestimmen

(Momentan programmiert nur niedrigster Punkt)

Für die Berechnung der Bodenhöhe wird Quadrate entlang der Horizontalen betrachtet. (WIP) Zuerst werden alle Voxel zusammengefasst, welche unabhängig von der Höhe zum gleichen Quadrat gehört.

Weil die zugehörige, zugehörig, zugehöre Punktzahl von jedem Voxel gespeichert ist, kann die Gesamtanzahl der Punkte von einem Quadrat bestimmt werden. Das gewünschte Quantil wird als Makroparameter festgelegt und es wird die Bodenhöhe zu gewählt, dass der Anteil der Punkte unter der Bodenhöhe dem Quantil entspricht. Als Standardwert wird 2% verwendet.

##### 1.2.2. Bäume bestimmen

(Noch im Wandel)

Für die Bestimmung der Bäume werden alle Voxel, die über dem Boden liegen in horizontale Scheiben unterteilt. Alle Punkte unter der Bodenhöhe werden nicht weiter segmentiert.

Von der höchsten Scheibe aus werden die Voxel zu Segmenten zugeordnet. Dafür wird jeder Voxel in der Scheibe betrachtet. Für den momentanen Voxel wird der nächste Voxel in einer höheren Scheibe gesucht, wobei es eine Maximaldistanz gibt. Wird ein naher Voxel gefunden, so wird dem momentanen Voxel das gleiche Segment wie dem gefundenen Voxel zugeordnet. Wenn kein naher Voxel gefunden wird, so ist der momentane Voxel der Anfang von einem neuen Segment.

#### 1.3. In Segmente unterteilen

Nachdem alle Voxel zu einem Segment gehören werden alle originalen Punkte nochmal geladen. Dabei wird für jeden Punkt der zugehörige Voxel bestimmt und dem Punkt das Segment vom Voxel zugeordnet.

Die Punkte werden nach Segment getrennt abgespeichert, um weiter zu verarbeitet zu werden.

## 2. Eigenschaften

Die Baumeigenschaften werden für jedes Segment einzeln berechnet. Dabei sind alle Punkte im Segment verfügbar.

### 2.1. Nachbarschaft

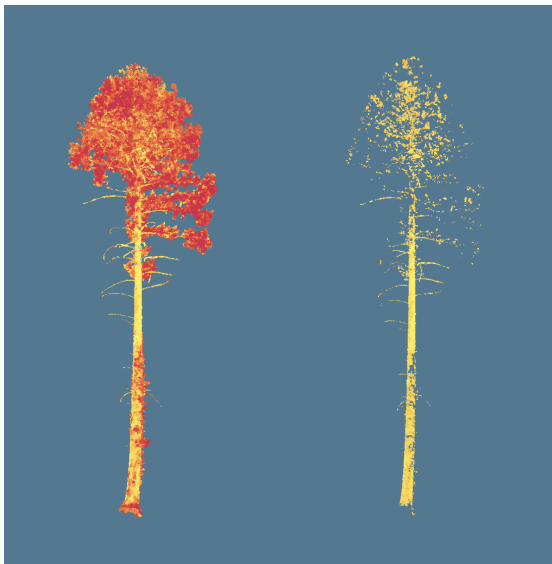
Um relevante Eigenschaften für einen Punkt zu bestimmen, werden die umliegenden Punkte benötigt. Dafür wird für alle Punkte ein **KD-Baum** erstellt. Mit diesem können effizient für ein Punkt die  $k$ -nächsten Punkte bestimmt werden.

### 2.2. Krümmung

Die Krümmung der Oberfläche wird für jeden Punkt geschätzt. Dafür werden die Positionen der Punkte in der Nachbarschaft betrachtet. Zuerst wird der geometrische Schwerpunkt bestimmt, dass die Positionen der Punkte um diesen verschoben werden können. Ohne die Verschiebung würde die globale Position der Punkte das Ergebnis verfälschen. Mit den Positionen der Punkte kann die Kovarianzmatrix bestimmt werden.

Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix bilden eine Orthonormalbasis und die Eigenwerte geben die Ausdehnung entlang des zugehörigen Basisvektors an. Der kleinste Eigenwert gehört zu Dimension mit der geringsten Ausdehnung. Je kleiner der Eigenwert, desto näher liegen die Punkt in der Nachbarschaft Ebene aufgespannt durch die Eigenvektoren zugehörig zu den größeren Eigenwerten.

Wenn die Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $i \in \mathbb{N}_0^2$  absteigend nach größer sortiert sind, dann kann die Krümmung  $c$  mit  $c = \frac{3\lambda_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}$  berechnet werden.  $c$  liegt dabei im abgeschlossenen Bereich  $[0; 1]$ .



Todo: Aktuelle Bilder

### 2.3. Punkthöhe

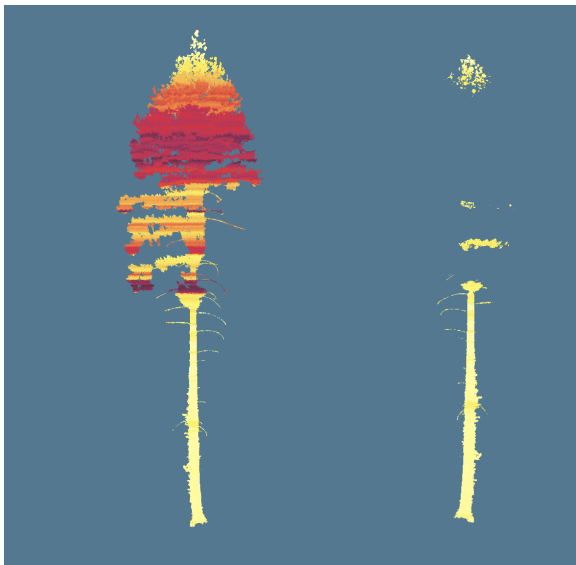
Für jeden Punkt wird die relative Höhe im Segment bestimmt. Dafür wird die Mindesthöhe  $y_{\min}$  und die Maximalhöhe  $y_{\max}$  im Segment benötigt. Die Höhe  $h$  für den Punkt mit

der der Höhe  $p_y$  kann mit  $h = \frac{p_y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}$  berechnet werden. Die relative Höhe liegt dabei im Bereich  $[0; 1]$ .

## 2.4. Ausdehnung

Der Baum wird entlang der Horizontalen in gleichhohe Scheiben unterteilt. Die Höhe der Scheiben ist dabei einstellbar. Für jede werden alle Punkte in der Scheibe betrachtet. Zuerst wird der geometrische Schwerpunkt der Positionen berechnet, womit die durchschnittliche Standardabweichung entlang der Horizontalen bestimmt wird.

Die größte Varianz von allen Scheiben wird verwendet, um die Varianzen auf den Bereich  $[0; 1]$  zu normieren. Für jeden Punkt wird die Varianz der zugehörigen Scheibe zugeordnet.



Todo: Mehr Baumeigenschaften

## 3. Segmentierung von einem Baum

Todo: Baumeigenschaften + ? → Segmente

## 4. Eigenschaften für Visualisierung

### 4.1. Normale

Mit den Eigenvektoren aus Abschnitt 2.2 wird die Normale für die Umgebung bestimmt. Der Eigenvektor, welcher zum kleinsten Eigenwert gehört, ist orthogonal zur Ebene mit der größten Ausdehnung.

### 4.2. Punktgröße

Für die Punktgröße wird der durchschnittliche Abstand zu den umliegenden Punkten bestimmt.

## 5. Baumart

Todo: Segmente + Eigenschaften + ? → Klassifizierung?

- out of scope?
- neural?

# III. Triangulierung

## 1. Ziel

Eine Triangulierung ermöglicht eine Rekonstruktion der ursprünglichen Oberfläche vom eingescannten Bereich, welche weiterverarbeitet oder anzuzeigen werden kann. Die meisten Programme und Hardware sind auf das Anzeigen von Dreiecken spezialisiert, und können diese effizienter als Punkte darstellen. Die Triangulierung wird dabei für die Segmente getrennt bestimmt.

## 2. Ball-Pivoting-Algorithmus

### 2.1. Überblick

Beim Ball-Pivoting-Algorithmus werden die Dreiecke der Oberfläche bestimmt, welche von einer Kugel mit Radius  $\alpha$  ( $\alpha$ -Kugel) erreicht werden können. Dabei berührt die Kugel die drei Eckpunkte vom Dreieck und kein weiterer Punkt aus der Punktwolke liegt in der Kugel.

In Abbildung 3 ist ein Beispiel in 2D gegeben. Dabei werden die Linien gesucht, dass der zugehörige Kreis keine weiteren Punkte enthält.

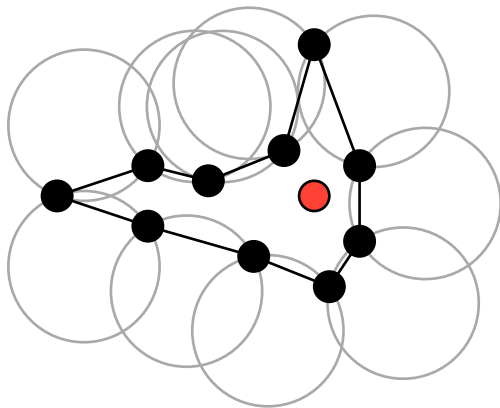


Abbildung 3: Abbildung 3: Ball-Pivoting-Algorithmus in 2D. Für die äußeren Punkte in schwarz wird eine Oberfläche gefunden. Für den inneren Punkt in rot kann kein Nachbar gefunden werden, weil alle zugehörigen Kreise weitere Punkte enthalten würden.

Die gefundenen Dreiecke bilden eine Hülle, welche alle Punkte beinhaltet. Je kleiner  $\alpha$  ist, desto genauer ist die Hülle um die Punkte und Details werden besser wiedergegeben. Dafür werden mehr Dreiecke benötigt und Lücken im Datensatz sind auch in der Hülle vorhanden.

### 2.2. Hilfsmittel

#### 2.2.1. KD-Baum

Für die Punkte wird zuerst ein KD-Baum bestimmt. Mit diesem kann effizient bestimmt werden, welche Punkte innerhalb einer Kugel mit beliebigen Position und Radius sind. Die Konstruktion und Verwendung vom KD-Baum sind in Abschnitt 1 weiter ausgeführt.

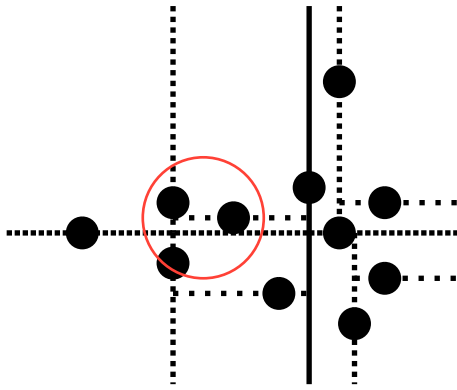


Abbildung 4: KD-Baum für Punkte in 2D. Für jede Unterteilung ist die Trenngerade gepunkteter gezeichnet. Weil der rote Kreis vollständig auf einer Seite der ersten Unterteilung ist, müssen die Punkte auf der anderen Seite nicht betrachtet werden.

### 2.2.2. $\alpha$ -Kugel für ein Dreieck

Für ein Dreieck  $(p_1, p_2, P-3)$  wird die Position der zugehörigen  $\alpha$ -Kugel benötigt. Dafür wird ...

Todo: Kugel für Dreieck

Dabei ist die Reihenfolge der Punkte relevant. Vertauschen von zwei Punkten berechnet die  $\alpha$ -Kugel auf der anderen Seite des Dreiecks.

## 2.3. Ablauf

### 2.4. Startdreieck bestimmen

Als Anfang wird ein Dreieck mit zugehöriger  $\alpha$ -Kugel benötigt, dass keine weiteren Punkte innerhalb der Kugel liegen. Dafür werden alle Punkte iteriert.

Für den momentanen Punkt werden die umliegenden Punkt mit einem Abstand von  $2\alpha$  oder weniger bestimmt. Für weiter entfernte Punkte gibt es keine  $\alpha$ -Kugel, welche beide Punkte berühren würde.

Mit dem momentanen Punkt und alle möglichen Kombination von zwei Punkten aus den umliegenden Punkten wird ein Dreieck gebildet. Für das Dreieck werden nun die zwei möglichen  $\alpha$ -Kugeln bestimmt, welche zum Dreieck gehören.

Wenn ein Dreieck mit zugehöriger  $\alpha$ -Kugel gefunden wurde, welche keine weiteren Punkte enthält, kann dieses Dreieck als Startdreieck verwendet werden. Das Dreieck wird zur Triangulierung hinzugefügt und die drei zugehörigen Kanten bilden die momentanen äußeren Kanten, von denen aus die Triangulierung berechnet wird.

### 2.5. Triangulierten Bereich erweitern

Solange es noch eine äußere Kante  $(p_1, p_2)$  gibt, kann die Triangulierung erweitert werden. Für die Kante ist bereits ein Dreieck und die zugehörige  $\alpha$ -Kugel mit Zentrum  $c$  bekannt. Die Kante dient nun als Pivot, um welches die  $\alpha$ -Kugel gerollt wird. Der erste Punkt  $p$ , welcher von der Kugel berührt wird, bildet mit  $p_1$  und  $p_2$  ein neues Dreieck.

In Abbildung 5 ist ein Beispiel für die Erweiterung in 2D gegeben. Es werden Kanten als Oberfläche gesucht und Punkte werden als Pivot-Element verwendet.

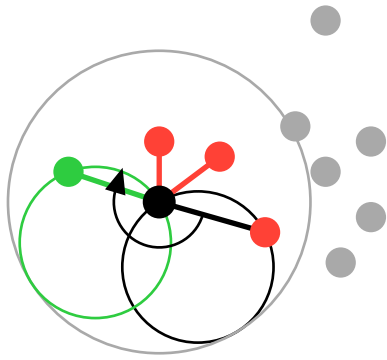


Abbildung 5: Erweiterung der gefundenen Oberfläche in 2D. Die vorherige Kante und der momentane Pivot-Punkt sind in schwarz. Der  $\alpha$ -Kreis rollt entlang der markierten Richtung. In grün ist der erste Punkt und zugehörigen Kreis, welche berührt werden. Die weiteren Punkte in Rot sind Kandidaten, liegen aber weiter in der Rotation, weshalb die grüne Kante zur Oberfläche hinzugefügt wird.

### 2.5.1. Kandidaten bestimmen

Um den ersten Punkt  $p$  zu finden, werden zuerst alle möglichen Punkte bestimmt, welche von der Kugel bei der kompletten Rotation berührt werden können. Dafür wird der Mittelpunkt  $mp = \frac{p_1 + p_2}{2}$  der Kante und der Abstand  $d = |p_{1,2} - mp|$  berechnet. Der Abstand zwischen dem Zentrum der Kugel und den Endpunkten von der Kante ist immer  $\alpha$ , dadurch ist der Abstand vom Zentrum zum Mittelpunkt  $x = \sqrt{\alpha^2 - d^2}$ . In Abbildung 6 ist die Berechnung veranschaulicht.

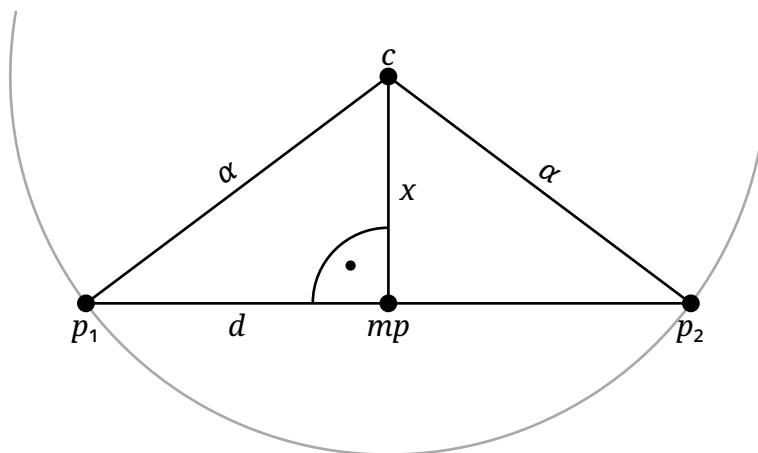


Abbildung 6: Berechnung des Abstands der  $\alpha$ -Kugel vom Mittelpunkt der Kante

Die möglichen Punkte sind vom Zentrum der Kugel  $c$  maximal  $\alpha$  entfernt und  $c$  ist vom Mittelpunkt  $mp$   $x$  entfernt. Deshalb werden die Punkte in der Kugel mit Zentrum  $mp$  und Radius  $\alpha + x$  bestimmt.

Todo: Bild?: Fancy 3d Torus von Pivot Kugeln und gesuchte Kugel mit Radius  $\alpha + x$



### 2.5.2. Besten Kandidaten bestimmen

Für jeden Kandidaten  $p$  wird berechnet, wie weit die Kugel um die Kante gerollt werden muss, bis die Kugel den Kandidaten berührt. Dafür wird zuerst das Zentrum  $c_p$  der  $\alpha$ -Kugel bestimmt, welche  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p$  berührt. Die Kugel wird dabei wie in Abbildung 7 bestimmt, dass die Kugel auf der korrekten Seite vom potentiellen Dreieck liegt.  $p$  kann so liegen, dass es keine zugehörige  $\alpha$ -Kugel gibt, in diesem Fall wird  $p$  nicht weiter betrachtet. Für jeden Kandidat wird der Winkel  $\varphi$  berechnet, wie weit um die Kante die Kugel gerollt wurde.

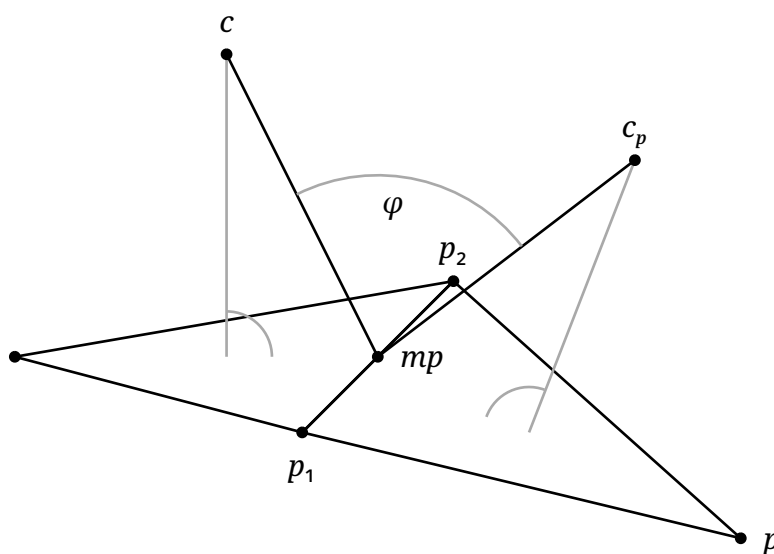


Abbildung 7: Berechnung von Zentrum der  $\alpha$ -Kugel und zugehöriger Winkel für einen Kandidatenpunkt

Mit  $mp$ ,  $c$  und  $c_p$  wird der Winkel  $\varphi$  bestimmt. Dafür werden die Vektoren  $a = c - mp$  und  $b = c_p - mp$  bestimmt und normalisiert. Der Kosinus von  $\varphi$  ist dabei das Skalarprodukt  $s = a \cdot b$ . Zusätzlich wird das Kreuzprodukt  $k = a \times b$  bestimmt, womit

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(s) & \text{falls } k \geq 0 \\ \tau - \arccos(s) & \text{falls } k < 0 \end{cases}$$

berechnet wird. Von allen Kandidaten wird der Punkt  $p_3$  ausgewählt, für den  $\varphi$  am kleinsten ist.

Es muss nicht kontrolliert werden, ob ein Punkt in der  $\alpha$ -Kugel von  $(p_1, p_2, p_3)$  liegt, weil diese immer leer ist. Würde ein weiterer Punkt in der Kugel liegen, so würde der zugehörige Winkel  $\varphi$  von diesem Punkt kleiner sein, weil der Punkt beim rollen um die Kante früher von der Kugel berührt wird. Weil  $p_3$  aber zum kleinsten Winkel gehört, kann das nicht sein. Dies gilt aber nur, wenn die Kugel zum Start bereits leer ist.

### 2.5.3. Triangulierung erweitern

Das neu gefundene Dreieck mit den Eckpunkten  $(p_1, p_2, p_3)$  wird zur Triangulierung hinzugefügt. Die Kante  $(p_1, p_2)$  wird von den äußeren Kanten entfernt, dafür werden die Kanten

zwischen  $(p_1, p_3)$  und  $(p_3, p_2)$  hinzugefügt. Wenn eine neue Kante in den äußeren Kanten bereits vorhanden ist, wird diese nicht hinzugefügt, sondern entfernt, weil das zugehörige zweite Dreieck bereits gefunden wurde.

## 2.6. Komplettes Segment triangulieren

Solange es noch äußere Kanten gibt, kann von diesen aus die Triangulierung erweitert werden. Dabei muss beachtet werden, dass durch Ungenauigkeiten bei der Berechnung und malformierten Daten eine Kante mehrfach gefunden werden kann. Um eine erneute Triangulierung von bereits triangulierten Bereichen zu verhindern, werden alle inneren Kanten gespeichert und neue Kanten nur zu den äußeren Kanten hinzugefügt, wenn diese noch nicht in den inneren Kanten vorhanden sind. Bei der Erweiterung wird die ausgewählte äußere Kante zu den inneren Kanten hinzugefügt.

Wenn es keine weiteren äußeren Kanten gibt, muss ein neues Startdreieck gefunden werden. Dabei werden nur die Punkte in betracht gezogen, welche zu noch keinem Dreieck gehören. Wenn kein Startdreieck gefunden werden kann, ist das Segment vollständig trianguliert.

## 2.7. Auswahl von $\alpha$

- Groß genug für keine Lücken
- Klein genug für gute Laufzeit

## 3. Ergebnisse

Todo: Ergebnisse

## IV. Visualisierung

### 1. Technik

Das Projekt ist unter <https://github.com/antonWetzel/treee> verfügbar. Für die technische Umsetzung wird die Programmiersprache Rust und die Grafikkartenschnittstelle WebGPU verwendet. Rust ist eine performante Programmiersprache mit einfacher Integration für WebGPU. WebGPU bildet eine Abstraktionsebene über der nativen Grafikkartenschnittstelle, dadurch ist die Implementierung unabhängig von den Systemeigenschaften.

Als Eingabeformat werden Dateien im LASZip-Format verwendet. Dieses wird häufig für Punktwolken verwendet. Weiter Formate können einfach eingebunden werden, solange eine Rust verfügbar ist.

### 2. Punkt

#### 2.1. Basis

Als Basis für einen Punkt wird ein Dreieck gerendert. Das Dreieck muss so gewählt werden, dass der Einheitskreis mit Zentrum  $(0,0)$  vollständig enthalten ist.

Das kleinste Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck. In Abbildung 8 ist die Konstruktor für die Seitenlänge gegeben. Ein mögliches Dreieck hat die Eckpunkte  $(-\tan(60^\circ), -1)$ ,  $(\tan(60^\circ), -1)$  und  $(0, 2)$ .

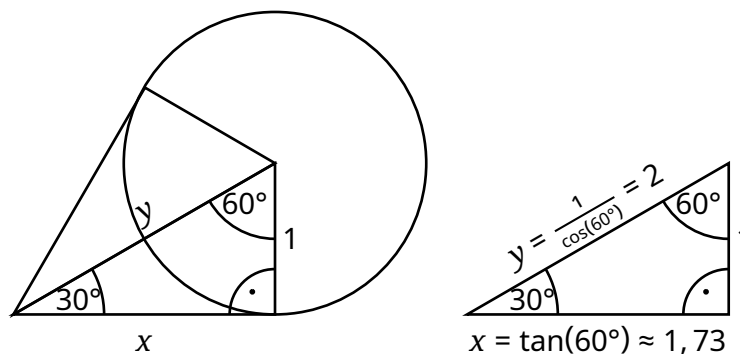


Abbildung 8: Seitenlänge für das kleinste gleichseitige Dreieck, welches den Einheitskreis enthält.

Für jeden Punkt wird mit der Position  $p$ , Normalen  $n$  und Größe  $s$  die Position der Eckpunkte vom Dreieck im dreidimensionalen Raum bestimmt. Dafür werden zwei Vektoren bestimmt, welche paarweise zueinander und zur Normalen orthogonal sind.

Für den ersten Vektor  $a$  wird mit der Normalen  $n = (n_x, n_y, n_z)$  das Kreuzprodukt  $a = (n_x, n_y, n_z) \times (n_y, n_z, -n_x)$  bestimmt. Weil  $|n| > 0$  ist, sind  $(n_y, n_z, -n_x)$  und  $n$  unterschiedlich.  $a$  muss noch für die weiteren Berechnungen normalisiert werden. Ein Beispiel ist in Abbildung 9 gegeben.

Für den zweiten Vektor  $b$  wird das Kreuzprodukt  $b = n \times a$  bestimmt. Weil das Kreuzprodukt zweier Vektoren orthogonal zu beiden Vektoren ist, sind  $n$ ,  $a$  und  $b$  paarweise orthogonal.

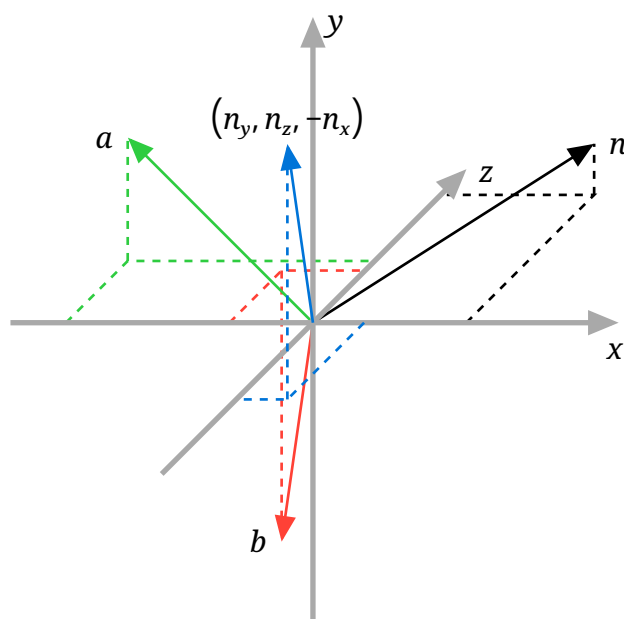


Abbildung 9: Beispiel für die Berechnung von  $a$  und  $b$  paarweise orthogonal zu  $n$ .

Die Vektoren  $a$  und  $b$  spannen eine Ebene auf, welche orthogonal zu  $n$  ist. Für den Eckpunkt  $i$  vom Dreieck mit den Koordinaten  $(x_i, y_i)$ , wird die Position  $p_i = p + a * x_i * s + b * y_i * s$  berechnet werden. In Abbildung 10 ist die Berechnung dargestellt.

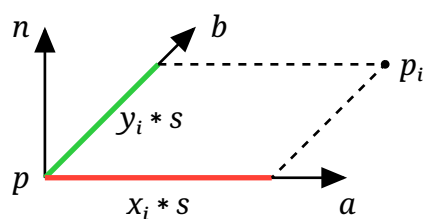


Abbildung 10: Berechnung von einem Eckpunkt.

## 2.2. Vergleich zu Quadrat als Basis

Als Basis kann ein beliebiges Polygon gewählt werden, solange der Einheitskreis vollständig enthalten ist. Je mehr Ecken das Polygon hat, desto kleiner ist der Bereich vom Polygon, der nicht zum Kreis gehört. Für jede Ecke vom Polygon muss aber die Position berechnet werden.

Ein Dreieck kann mit einem Dreieck dargestellt werden, für eine Quadrat werden zwei benötigt. Für das Dreieck werden dadurch drei Ecken und eine Fläche von

$\frac{w \cdot h}{2} = \frac{\tan(60^\circ) \cdot 2 \cdot 2}{2} = \tan(60^\circ) \cdot 2 \approx 3.46s$  benötigt. Für das Quadrat werden sechs Ecken und eine Fläche von  $w \cdot h = 2 \cdot 2 = 4$  benötigt. In Abbildung 11 ist ein graphischer Vergleich.

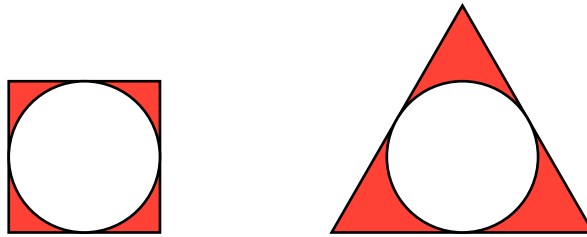


Abbildung 11: Abbildung 11: Quadrat und Dreieck, welche den gleichen Kreis enthalten.

Todo: Triangle Strip für Quadrat

Todo: Messwerte

## 2.3. Instancing

Weil für alle Punkte das gleiche Dreieck als Basis verwendet wird, muss dieses nur einmal zur Grafikkarte übertragen werden. Mit **Instancing** wird das gleiche Dreieck für alle Punkte verwendet, während nur die Daten spezifisch für einen Punkt sich ändern.

## 2.4. Kreis

Die Grafikpipeline bestimmt alle Pixel, welche im transformierten Dreieck liegen. Für jeden Pixel kann entschieden werden, ob dieser im Ergebnis gespeichert wird. Dafür wird bei den Eckpunkten die untransformierten Koordinaten abgespeichert, dass diese später verfügbar sind. Für jeden Pixel wird von der Pipeline die interpolierten Koordinaten berechnet. Nur wenn der Betrag der interpolierten Koordinaten kleiner 1 ist, wird der Pixel im Ergebnis abgespeichert.



Todo: Bilder Crop

### 3. Eigenschaft

Die ausgewählte Eigenschaft wird durch Einfärbung der Punkte angezeigt. Dabei kann die ausgewählte Eigenschaft geändert werden, ohne die anderen Informationen über die Punkte neu zu laden. Die Eigenschaften sind separat als 32 bit uint gespeichert und werden mit einer Farbpalette in ein Farbverlauf umgewandelt. Auch die Farbpalette kann unabhängig ausgewählt werden.

### 4. Subpunktvolken (Bäume)

#### 4.1. Auswahl

Um ein bestimmtes Segment auszuwählen, wird das momentan sichtbare Segment bei der Mausposition berechnet. Als erstes werden die Koordinaten der Maus mit der Kamera in dreidimensionalen Position und Richtung umgewandelt. Die Position und Richtung bilden zusammen einen Strahl.

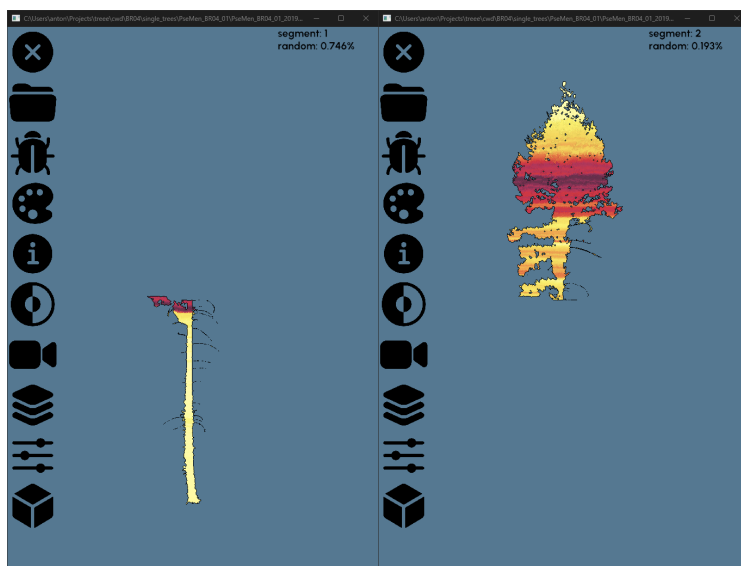
Im Octree wird vom Root-Knoten aus die Blatt-Knoten gefunden, welche den Strahl enthalten. Dabei werden die Knoten näher an der Position der Kamera bevorzugt. Für den Blattknoten sind die Segmente bekannt, welche Punkte in diesem Knoten haben. Für jedes mögliche Segment wird für jeden Punkt überprüft, ob er entlang des Strahls liegt.

Sobald ein Punkt gefunden ist, müssen nur noch Knoten überprüft werden, die näher an der Kamera liegen, weil alle Punkte in weiter entfernten Knoten weiter als der momentan beste gefundene Punkt liegen.

#### 4.2. Anzeige

Im Octree kann zu den Punkten in einem Leaf-Knoten mehrere Segmente gehören. Um die Segmente einzeln anzuzeigen wird jedes Segment separat abgespeichert. Sobald ein einzelnes Segment ausgewählt wurde, wird dieses geladen und anstatt des Octrees angezeigt. Dabei werden alle Punkte des Segments ohne vereinfachte Detailstufen verwendet.

Die momentan geladenen Knoten vom Octree bleiben dabei geladen, um einen schnellen Wechsel zu ermöglichen.



Note: Oben/Unten Teilung in 2 Segmente für Debug

## 5. Eye-Dome-Lighting

Um die Punktwolke auf Anzuzeigen, werden die Punkte aus dem dreidimensionalen Raum auf den zweidimensionalen Monitor projiziert. Dabei gehen die Tiefeninformationen verloren. Mit der Rendertechnik **Eye-Dome-Lighting** werden die Kanten von Punkten hervorgehoben, bei denen die Tiefe sich stark ändert.

Todo: Vergleichsbild

Beim Rendern von 3D-Szenen wird für jeden Pixel die momentane Tiefe vom Polygon an dieser Stelle gespeichert. Das wird benötigt, dass bei überlappenden Polygonen das nähere Polygon an der Kamera angezeigt wird. Nachdem die Scene gerendert ist, wird mit den Tiefeninformationen für jeden Pixel der Tiefenunterschied zu den umliegenden Pixeln bestimmt.

Todo: Farb- und Tiefenbild

Je größer der Unterschied ist, desto stärker wird der Pixel im Ergebnisbild eingefärbt. Dadurch werden Kanten hervorgehoben, je nachdem wie groß der Tiefenunterschied ist. Für den Effekt kann die Stärke und die Farbe angepasst werden.

Todo: Stark und Schwache Effekt Bild

## 6. Detailstufen

Je nach Scannertechnologie und Größe des abgetasteten Gebietes kann die Punktwolke unterschiedlich viele Punkte beinhalten. Durch Hardwarelimitierungen ist es nicht immer möglich alle Punkte gleichzeitig anzuzeigen, während eine interaktive Wiedergabe gewährleistet ist.

Besonders für weit entfernte Punkt ist es nicht notwendig, alle Punkte genau wiederzugeben. Deshalb wird für weit entfernte Punkte eine vereinfachte Version angezeigt. Diese besteht aus weniger Punkten und benötigt dadurch weniger Ressourcen, bietet aber eine gute Approximation der ursprünglichen Daten.

Todo: Vergleich alle Punkt und vereinfachte Versionen

Für die gesamte Punktwolke wird ein Octree mit den Punkten erstellt. Der zugehörige Voxel vom Root-Knoten wird so gewählt, dass alle Punkte im Voxel liegen. Rekursiv wird der Voxel in acht gleichgroße Voxel geteilt, solange in einem Voxel noch zu viele Punkte liegen. Bei dem Octree gehört jeder Punkt zu genau einem Leaf-Knoten.

Für jeden Branch-Knoten wird eine Punktwolke berechnet, welche als Vereinfachung der Punkte der zugehörigen Kinderknoten verwendet werden kann. Dafür wird der Algorithmus aus Abschnitt 6.1 verwendet.

Beim Anzeigen wird vom Root-Knoten aus zuerst geprüft, ob der momentane Knoten von der Kamera aus sichtbar ist. Für die Knoten wird mit den Algorithmen aus Abschnitt 6.2 entschieden, ob die zugehörige vereinfachte Punktwolke gerendert oder der gleiche Algorithmus wiederholt wird.

## 6.1. Berechnung der Detailstufen

Todo: Kopiert vom Fachpraktikum

Die Detailstufen werden wie bei „Fast Out-of-Core Octree Generation for Massive Point Clouds“ [8] von den Blättern des Baumes bis zur Wurzel berechnet. Dabei wird als Eingabe für einen Knoten die Detailstufen der direkten Kinder verwendet. Als Anfang werden alle originalen Punkte in einem Blatt als Eingabe benutzt.

Dadurch haben zwar Berechnungen der gröberen Detailstufen für Knoten näher an der Wurzel nur Zugriff auf bereits vereinfachte Daten, dafür müssen aber auch viel weniger Punkte bei der Berechnung betrachtet werden. Solange die Detailstufen eine gute Vereinfachung der ursprünglichen Punkte sind, kann so der Berechnungsaufwand stark verringert werden.

Der Voxel, welcher zu dem Knoten gehört, wird in gleich große Zellen unterteilt. Für jede Zelle mit Punkten wird ein repräsentativer Punkt bestimmt. Dafür wird für die Zelle die Kombination aller Eingabepunkte, welche in der Zelle liegen berechnet. Die Anzahl der Zellen ist dabei unabhängig von der Größe des ursprünglichen Voxels, wodurch bei gröberen Detailstufen durch den größeren Voxel auch die Zellen größer werden und mehr Punkte zusammengefasst werden.

## 6.2. Auswahl der Detailstufen?

### 6.2.1. Abstand zur Kamera

- Schwellwert
- Abstand zur kleinsten Kugel, die den Voxel inkludiert
- Abstand mit Größe des Voxels dividieren
- Wenn Abstand größer als Schwellwert
  - Knoten rendern
- sonst
  - Kinderknoten überprüfen

### 6.2.2. Auto



- wie Abstand zur Kamera
- messen wie lang rendern dauert
- Dauer kleiner als Minstdauer
  - Schwellwert erhöhen
- Dauer kleiner als Maximaldauer
  - Schwellwert verringern

### 6.2.3. Gleichmäßig

- gleich für alle Knoten
- auswahl der Stufe

## 7. Kamera/Projektion

### 7.1. Kontroller

- bewegt Kamera
- kann gewechselt werden, ohne die Kameraposition zu ändern

#### 7.1.1. Orbital

- rotieren um einem Punkt im Raum
- Kamera fokussiert zum Punkt
- Entfernung der Kamera zum Punkt variabel
- Punkt entlang der horizontalen Ebene bewegbar
- To-do: Oben-Unten Bewegung

#### 7.1.2. First person

- rotieren um die Kamera Position
- Bewegung zur momentanen Blickrichtung
- Bewegungsgeschwindigkeit variabel
- To-do: Oben-Unten Bewegung

### 7.2. Projektion

#### 7.2.1. Perspektive

- Projektion mit Field of View Kegel

#### 7.2.2. Orthogonal?

Todo: Orthogonal?

#### 7.2.3. Side-by-Side 3D?

## 8. Bedienung/Interface

Todo: Bedienung/Interface

Todo: Referenzen

# V. Ergebnisse

Todo: Ergebnisse

## 1. Testdaten

Der benutzte Datensatz [9] beinhaltet 12 Hektar Waldfläche in Deutschland, Baden-Württemberg. Die Daten sind mit Laserscans aufgenommen, wobei die Scans von Flugzeugen, Drohnen und vom Boden aus durchgeführt wurden. Dabei entstehen 3D-Punktwolken, welche im komprimiert LAS Dateiformat gegeben sind.

Der Datensatz ist bereits in einzelne Bäume unterteilt. Zusätzlich wurden für 6 Hektar die Baumart, Höhe, Stammdurchmesser auf Brusthöhe und Anfangshöhe und Durchmesser der Krone gemessen. Mit den bereits bestimmten Eigenschaften können automatisch berechnete Ergebnisse validiert werden.

## 2. Triangulierung

Todo: Triangulierung Ergebnisse

## 3. Berechnung

Todo: Berechnung Ergebnisse

## 4. Visualisierung

Todo: Visualisierung Ergebnisse

## 5. Fazit

Todo: Fazit

# VI. Appendix

## 1. KD-Baum

Todo: Grafiken

### 1.1. Konstruktion

Für die Konstruktion von einem KD-Baum werden nur die Positionen der Punkte benötigt.

Zuerst wird für die Punkte entlang der ersten Dimension der Median bestimmt. Dabei wird der *Quickselect*-Algorithmus [10] verwendet. Der Median hat als Index die halbe Anzahl der Punkte. Ist die Anzahl der Punkte ungerade, so kann der Index auf- oder abgerundet werden, solange bei der Suche die gleiche Strategie verwendet wird. Wie beim *Quicksort*-Algorithmus wird ein beliebiges Pivot-Element ausgewählt, mit diesem die Positionen entlang der Dimension unterteilt werden. Die Positionen werden einmal iteriert und kleinere Positionen vor dem Pivot und größere Positionen nach dem Pivot verschoben. Der Pivot ist am Index, wo es in der sortierten List wäre. Um den Median zu finden, wird nur der Teil von den Punkten betrachtet, welcher den zugehörigen Index beinhaltet. Die Unterteilung wird solange wiederholt, bis der Median bekannt ist.

Durch den *Quickselect*-Algorithmus sind die Positionen nach der Bestimmung vom Median in kleine und größere Positionen unterteilt. Die Ebene durch den Punkt teilt dabei den Raum und alle Punkte mit kleineren Index liegen auf der anderen Seite als die Punkte mit größerem Index. Die beiden Hälften werden in der gleichen Weise unterteilt. Dabei wird die nächste, beziehungsweise für die letzte Dimension wieder die erste Dimension verwendet.

Die zugehörige Baumstruktur muss nicht gespeichert werden, da diese implizit entsteht. Für jede Unterteilung wird die Position vom Median gespeichert, das diese für die Suchanfragen benötigt werden.

### 1.2. Suche mit festem Radius

Bei dieser Suchanfrage werden alle Punkte gesucht, welche in einer Kugel mit bekanntem Zentrum und Radius liegen. Von der Wurzel aus wird der Baum dabei durchsucht. Bei jeder Unterteilung wird dabei überprüft, wie die Kugel zur teilenden Ebene liegt. Ist die Kugel vollständig auf einer Seite, so muss nur der zugehörige Teilbaum weiter durchsucht werden. Liegen Teile der Kugel auf beiden Seiten, so müssen beide Teilbaum weiter durchsucht werden.

Dabei wird bei jeder Unterteilung überprüft, ob die zugehörige Position in der Kugel liegt und gegebenenfalls zum Ergebnis hinzugefügt.

Mit der gleichen Methode kann effizient bestimmt werden, ob eine Kugel leer ist. Dafür wird beim ersten gefundenen Punkt in der Kugel die Suche abgebrochen.

### 1.3. Suche mit fester Anzahl

Bei dieser Suchanfrage wird für eine feste Anzahl  $k$  die  $k$ -nächsten Punkte für eine bestimmtes Zentrum gesucht. Dafür werden die momentan  $k$ -nächsten Punkte gespeichert

und nach Entfernung sortiert. Die Entfernung zum  $k$ -ten Punkt wird als Maximaldistanz verwendet. Solange noch nicht  $k$  Punkte gefunden sind, kann  $\infty$  oder ein beliebiger Wert als Maximalabstand verwendet werden.

Es wird wieder von der Wurzel aus der Baum durchsucht. Bei jeder Unterteilung wird zuerst in der Hälfte vom Baum weiter gesucht, die das Zentrum enthält. Dabei werden die Punkte zu den besten Punkten hinzugefügt, die näher am Zentrum als die Maximaldistanz liegen. Sobald  $k$  Punkte gefunden sind, wird dadurch die Maximaldistanz kleiner, weil der Punkte mit der alten Maximaldistanz nicht mehr zu den  $k$ -nächsten Punkten gehört.

Nachdem ein Teilbaum vollständig durchsucht ist, wird überprüft, ob Punkte aus dem anderen Teilbaum näher am Zentrum liegen können. Dafür wird der Abstand vom Zentrum zur Ebene bestimmt. Ist der Abstand größer als die Maximaldistanz, so kann kein Punkt näher am Zentrum liegen und der Teilbaum muss nicht weiter betrachtet werden.

#### **1.4. Schnelle Suche**

Sobald ein Teilbaum nur noch wenige Punkte beinhaltet, ist es langsamer zu Überprüfen, welche Punkte näher sein können, als alle Punkte zu betrachten. Deshalb wird für Teilbäume mit weniger als 32 Punkte die Punkte linear iteriert, wodurch Rekursion vermieden wird.

## Bibliographie

- [1] J. J. Donager, A. J. Sánchez Meador, und R. C. Blackburn, „Adjudicating perspectives on forest structure: how do airborne, terrestrial, and mobile lidar-derived estimates compare?“, *Remote Sensing*, Nr. 12, S. 2297, 2021.
- [2] M. Disney, „Terrestrial LiDAR: a three-dimensional revolution in how we look at trees“, *New Phytologist*, Nr. 4, S. 1736–1741, 2019, doi: <https://doi.org/10.1111/nph.15517>.
- [3] T. Suzuki, S. Shiozawa, A. Yamaba, und Y. Amano, „Forest Data Collection by UAV Lidar-Based 3D Mapping: Segmentation of Individual Tree Information from 3D Point Clouds“, *International Journal of Automation Technology*, S. 313–323, 2021, doi: 10.20965/ijat.2021.p0313.
- [4] A. Burt, M. Disney, und K. Calders, „Extracting individual trees from lidar point clouds using treeseg“, *Methods in Ecology and Evolution*, Nr. 3, S. 438–445, 2019, doi: <https://doi.org/10.1111/2041-210X.13121>.
- [5] L. Graham, „The LAS 1.4 specification“, *Photogrammetric engineering and remote sensing*, Nr. 2, S. 93–102, 2012.
- [6] M. Isenburg, „LASzip: lossless compression of LiDAR data“, *Photogrammetric engineering and remote sensing*, Nr. 2, S. 209–217, 2013.
- [7] C. Hug, P. Krzystek, und W. Fuchs, „Advanced Lidar Data Processing with Lastools“, 2004. Verfügbar unter: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14167994>
- [8] M. Schütz, S. Ohrhallinger, und M. Wimmer, „Fast Out-of-Core Octree Generation for Massive Point Clouds“, *Computer Graphics Forum*, Nr. 7, S. 155–167, 2020, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.14134>.
- [9] H. Weiser u. a., „Terrestrial, UAV-borne, and airborne laser scanning point clouds of central European forest plots, Germany, with extracted individual trees and manual forest inventory measurements“. [Online]. Verfügbar unter: <https://doi.org/10.1594/PANGAEA.942856>
- [10] C. A. R. Hoare, „Algorithm 65: Find“, *Commun. ACM*, Nr. 7, S. 321, Juli 1961, doi: 10.1145/366622.366647.